

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

WPLYW ODKSZTAŁCALNOŚCI PRZEKROJU POPRZECZNEGO
NA SIŁĘ KRYTYCZNĄ WYBOCZENIA SKRĘTNEGO
PRĘTA DWUTEOWEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLIX

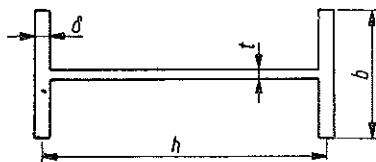
TOM VIII · ZESZYT 2 · ROK 1960

Przedmiotem pracy jest zbadanie wpływu odkształcalności przekroju poprzecznego pręta dwuteowego na siłę krytyczną wybożenia skrętnego w zakresie sprężystym. Założenia są identyczne z przyjętymi w pracy [1], w której omówiono wybożenie EULERA. Rozważamy zatem pręt o długości l podparty przegubowo w taki sposób, że przekroje skrajne mają swobodę deplanacji. Przyjmujemy na obu końcach pręta sztywne w swej płaszczyźnie przepony poprzeczne uniemożliwiające zniekształcenie przekrojów skrajnych. Zakładamy, że odkształceniu ulega tylko środek, natomiast półki nie doznają zakrzywienia w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, co pozwala traktować je jako pręty. Metoda rozwiązania jest identyczna ze stosowaną w pracy [1]. Podamy rozwiązanie ściśle, przykład iteracyjnego obliczenia naprężeń krytycznych i pewne wyniki liczbowe.

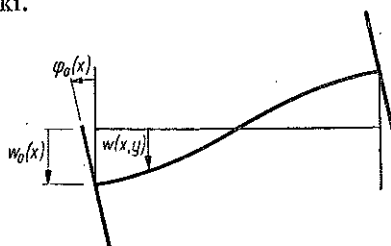
Równanie przestępne zagadnienia. Omawiany przekrój pokazano na rys. 1, zaś rys. 2 przedstawia przyjęte jego zniekształcenie. Wychodzimy z równań równowagi półki:

$$(1) \quad \begin{cases} w_0^{IV} + w_0'' \frac{\sigma \delta b}{EI} + \frac{r}{EI} = 0, \\ \varphi_0''(GI_s - \sigma I_0) - m = 0, \end{cases}$$

gdzie EI jest sztywnością giętą, GI_s sztywnością czystego skręcania, zaś I_0 momentem biegunowym półki; σ przedstawia naprężenia normalne, zaś r i m są reakcjami oddziaływania środka na półki.



Rys. 1



Rys. 2

Powierzchnię ugięcia $w(x, y)$ środka pracującego jako płyta przyjmujemy w znanej postaci

$$(2) \quad w(x, y) = f(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l},$$

przy czym $f(y)$, ze względu na antysymetrię odkształceń względem osi z , składa się z sumy dwu wyrazów

$$(3) \quad f(y) = C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \sin qy,$$

gdzie

$$p = \sqrt{a_n \sqrt{\frac{\sigma t}{D} + a_n^2}}, \quad q = \sqrt{a_n \sqrt{\frac{\sigma t}{D} - a_n^2}}.$$

Przyjmując $y = h/2$ oraz wprowadzając oznaczenia:

$$(4) \quad \bar{p} = p \frac{h}{2}, \quad \bar{q} = q \frac{h}{2},$$

otrzymamy

$$(5) \quad \begin{cases} w_0(x) = (C_1 \operatorname{sh} \bar{p} + C_2 \sin \bar{q}) \sin a_n x, \\ \varphi_0(x) = (C_1 p \operatorname{ch} \bar{p} + C_2 q \cos \bar{q}) \sin a_n x, \\ m(x) = -D [C_1 (\nu a_n^2 - p^2) \operatorname{sh} \bar{p} + C_2 (\nu a_n^2 + q^2) \sin \bar{q}] \sin a_n x, \\ r(x) = D \{ C_1 [(2 - \nu) a_n^2 - p^2] p \operatorname{ch} \bar{p} + C_2 [(2 - \nu) a_n^2 + q^2] q \cos \bar{q} \} \sin a_n x. \end{cases}$$

Jak widać, pierwsze dwa równania (5) spełniają warunki podparcia pręta, mianowicie $w = 0$, $w'' = 0$, $\varphi = 0$ dla $x = 0$ oraz dla $x = l$. Jednocześnie funkcja $w(x, y)$ przyjęta w postaci (2) spełnia warunki wolnego podparcia na krawędziach poprzecznych środka. Warunkom zgodności odkształceń i sił wewnętrznych między środkiem i półkami na krawędziach podłużnych $y = \pm h/2$ zadość uczynimy podstawiając wielkości określone równaniami (5) do równań (1). Otrzymamy w ten sposób dwa równania jednorodne ze względu na stałe C_1 i C_2 :

$$(6) \quad \begin{cases} C_1 \left\{ \left(a_n^4 - a_n^2 \frac{\sigma \delta b}{EI} \right) \operatorname{sh} \bar{p} + \frac{D}{EI} [(2 - \nu) a_n^2 - p^2] p \operatorname{ch} \bar{p} \right\} + \\ \quad + C_2 \left\{ \left(a_n^4 - a_n^2 \frac{\sigma \delta b}{EI} \right) \sin \bar{q} + \frac{D}{EI} [(2 - \nu) a_n^2 + q^2] q \cos \bar{q} \right\} = 0, \\ C_1 \left\{ \frac{D}{GI_s} (\nu a_n^2 - p^2) \operatorname{sh} \bar{p} - a_n^2 \left(1 - \frac{\sigma I_0}{GI_s} \right) p \operatorname{ch} \bar{p} \right\} + \\ \quad + C_2 \left\{ \frac{D}{GI_s} (\nu a_n^2 + q^2) \sin \bar{q} - a_n^2 \left(1 - \frac{\sigma I_0}{GI_s} \right) q \cos \bar{q} \right\} = 0. \end{cases}$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje warunek wyboczeniowy w postaci równania przestępnego, które po podstawieniu

$$I = \frac{1}{12} \delta b^3, \quad I_s = \frac{1}{3} \delta^3 b, \quad I_0 = \frac{1}{12} (\delta b^3 + \delta^3 b).$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

oraz po przyjęciu za niewiadomą wielkości bezwymiarowej $k_{kr} = \sigma_{kr}/E$ przyjmie postać

$$(7) \quad \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] \operatorname{th} \bar{p} - \frac{n\pi}{1-\nu^2} \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma_2^2 + \nu}{2(1-\nu)} \frac{l}{b} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \operatorname{tg} \bar{q} - n\pi \gamma_2 \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_{kr} \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] \operatorname{tg} \bar{q} + \frac{n\pi}{1-\nu^2} \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\nu - \gamma_1^2}{2(1-\nu)} \frac{l}{b} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \operatorname{th} \bar{p} - n\pi \gamma_1 \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_{kr} \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{kr}} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{kr}} - 1}, \\ \bar{p} = \frac{n\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{n\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_2.$$

Podstawiając $n = 1$ i odpowiednie wartości liczbowe (przyjęto $\nu = 0,3$ dla stali) otrzymamy równanie przestępne w postaci

$$(8) \quad \left\{ \left[9,86960 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] \operatorname{th} \bar{p} - 3,45230 \gamma_1 (\gamma_2^2 + 0,3) \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \right\} \times \\ \times \left\{ 0,714286 (\gamma_2^2 + 0,3) \frac{l}{b} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \operatorname{tg} \bar{q} - 3,14159 \gamma_2 \left[1 - 0,65 \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_{kr} \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[9,86960 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] \operatorname{tg} \bar{q} + 3,45230 \gamma_2 (\gamma_1^2 - 0,3) \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \right\} \times \\ \times \left\{ 0,714286 (0,3 - \gamma_1^2) \frac{l}{b} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \operatorname{th} \bar{p} - 3,14159 \gamma_1 \left[1 - 0,65 \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_{kr} \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{1,05187 \frac{l}{t} \sqrt{k_{kr}} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1,05187 \frac{l}{t} \sqrt{k_{kr}} - 1}, \\ \bar{p} = 1,57080 \frac{h}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = 1,57080 \frac{h}{l} \gamma_2.$$

Jeżeli $t/\delta \rightarrow 0$, równanie (7) upraszcza się i ma postać

$$\left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{2} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_{kr} \right\} (\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{th} \bar{p}) = 0.$$

Trzy pierwiastki tego równania odpowiadają kolejno wyboczeniu giętnemu półki, wyboczeniu skrętnemu półki i wyboczeniu lokalnemu środniczka traktowanego jako płyta wolnopodparta wzdłuż krawędzi $y = 0$ i zamocowana wzdłuż krawędzi $y = \pm h/2$. Przy pominięciu nie interesującego nas w tej pracy wyboczenia lokalnego miarodajny będzie, praktycznie biorąc, zawsze pierwszy pierwiastek. Innymi słowy, w tym skrajnym przypadku otrzymamy (przyjmując $n = 1$)

$$(9) \quad k_{kr} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{b}{l} \right)^2.$$

Oznacza to bardzo poważne zmniejszenie siły krytycznej.

Siła krytyczna wyboczenia skrętnego obliczona przy założeniu przekroju nieodkształcalnego określona jest wzorem (por. np. [2])

$$(10) \quad P_\varphi = \frac{1}{I_0} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} + GI_s \right)$$

i odpowiada jej współczynnik k_φ

$$(11) \quad k_\varphi = \frac{\pi^2 \frac{\delta}{l} \left(\frac{b}{t} \right)^3 \left(\frac{h}{l} \right)^2 + \frac{4}{1+\nu} \left[\frac{h}{l} + 2 \frac{b}{l} \left(\frac{\delta}{t} \right)^3 \right]}{4 \frac{\delta}{l} \left(\frac{b}{t} \right)^3 + 12 \frac{\delta}{l} \frac{b}{t} \left(\frac{h}{t} \right)^2 + 2 \frac{t}{l} \left(\frac{h}{t} \right)^3},$$

z którym należy porównywać otrzymane wartości współczynnika k_{kr} .

Metoda iteracyjna. W celu uniknięcia żmudnych prób przy rozwiązywaniu równania przestępnego można z powodzeniem stosować metodę iteracyjną obliczania naprężeń krytycznych identyczną do zastosowanej w pracy [1]. Korzystamy z równania przestępnego przepisane w postaci równania kwadratowego ze względu na n -te przybliżenie k_n :

$$(12) \quad \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_n \right] \operatorname{th} \bar{p} - \frac{n\pi}{1-\nu^2} \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma_2^2 + \nu}{2(1-\nu)} \frac{l}{b} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \operatorname{tg} \bar{q} - n\pi \gamma_2 \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_n \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_n \right] \operatorname{tg} \bar{q} + \frac{n\pi}{1-\nu^2} \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\nu - \gamma_1^2}{2(1-\nu)} \frac{l}{b} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \operatorname{th} \bar{p} - n\pi \gamma_1 \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 1 \right] k_n \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{n-1} + 1}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{n-1} - 1}}$$

$$\bar{p} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_2,$$

z którego obliczamy przybliżenie k_n znając przybliżenie k_{n-1} . Jako pierwsze przybliżenie najwygodniej jest brać współczynnik k_φ określony wzorem (11)

W charakterze przykładu liczbowego obliczymy iteracyjnie współczynnik k_{kr} dla pręta określonego parametrami $l/h = 10$, $l/b = 25$, $l/t = 500$, $\delta/t = 3$. Jako pierwsze przybliżenie przyjmujemy współczynnik według wzoru (11) (biorąc $\nu = 0,3$) $k_1 = k_\varphi = 2,7240 \cdot 10^{-3}$. Podstawiając tę wartość do równania (12) otrzymamy równanie kwadratowe

$$1\,432\,094 k_2^2 - 255\,423 k_2 + 603,528 = 0,$$

którego mniejszy pierwiastek daje drugie przybliżenie $k_2 = 2,3951 \cdot 10^{-3}$. Dalej otrzymamy równanie kwadratowe

$$1\,247\,270 k_3^2 - 222\,595 k_3 + 536,277 = 0,$$

skąd trzecie przybliżenie $k_3 = 2,4425 \cdot 10^{-3}$. Czwarte przybliżenie:

$$1\,273\,679 k_4^2 - 227\,290 k_4 + 546,086 = 0, \quad k_4 = 2,4359 \cdot 10^{-3}.$$

W wyniku obliczenia z równania przestępnego otrzymujemy wartość $k_{kr} = 2,437 \cdot 10^{-3}$. Jak widać, czwarte przybliżenie daje błąd nie przekraczający pół promille. Łatwo też stwierdzić, że liniowa interpolacja równania przestępnego między wartościami k_φ oraz k_2 prowadzi do wyniku wystarczająco dokładnego z błędem rzędu kilku promille.

Wyniki liczbowe i wnioski praktyczne. Zestawimy tu dane liczbowe pozwalające na wyciągnięcie pewnych wniosków praktycznych.

Tablica 1 przedstawia wyniki obliczeń w zależności od parametru δ/t . Poza współczynnikami k_φ i k_{kr} podano w niej współczynnik $\chi = k_{kr}/k_\varphi$ oraz procentowe zmniejszenie siły krytycznej $\Delta P_\varphi\% = 100(1-\chi)$.

Tablica 1

	$l/h = 10$	$l/b = 25$	$l/t = 500$	
δ/t	1	2	3	4
$k_\varphi \cdot 10^3$	1,209	1,795	2,724	4,028
$k_{kr} \cdot 10^3$	1,209	1,755	2,436	3,025
$\chi = k_{kr}/k_\varphi$	1,000	0,978	0,894	0,751
$\Delta P_\varphi\% = 100(1-\chi)$	0,000	2,23	10,6	24,9

Tablica 2 przedstawia wyniki obliczeń w zależności od długości l pręta.

Tablica 2

	$h/b = 2,5$	$b/\delta = 10$	$\delta/t = 4$	
l/h	6	10	15	20
$k_{\varphi} \cdot 10^3$	3,862	1,860	1,228	1,007
$k_{kr} \cdot 10^3$	3,483	1,620	1,093	0,923
$\chi = k_{kr}/k_{\varphi}$	0,9019	0,871	0,890	0,9166
$\Delta P_{\varphi} \% = 100(1-\chi)$	9,81	12,9	11,0	8,34

Jak widać, wpływ odkształcalności przekroju rośnie gwałtownie ze wzrostem parametru δ/t , natomiast nie zależy wyraźnie od długości pręta. Ogólnie biorąc, zmniejszenie siły krytycznej wybozczenia skrętnego jest znacznie większe niż zmniejszenie siły krytycznej wybozczenia EULERA (por. [1]). W przekrojach walcowanych zmniejszenie siły krytycznej nie powinno przekraczać jednak dwu procent. W prętach spawanych lub złożonych o bardzo grubych półkach spadek siły krytycznej może być większy, wyjątkowo może osiągnąć kilkanaście procent.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego na siłę krytyczną Eulera*, Rozpr. inżyn. 1, 8 (1960).
 [2] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА КРИТИЧЕСКУЮ СИЛУ КРУТИЛЬНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУТАВРОВОГО СТЕРЖНЯ

В работе определяется влияние деформации поперечного сечения двутаврового стержня длиной l , сжимаемого в осевом направлении, на величину критической силы P_{φ} , крутильной потери устойчивости, которая дается формулой (10). Предполагается шарнирное опирание стержня и свобода деформации ее крайних сечений, снабженных неподатливыми диафрагмами. Принимается, что деформации подвергается только стенка (ср. рис. 2). Полки рассматриваются как стержни и к ним применяется уравнения равновесия (1). Деформации стенки определяются как для пластинки в форме (3). Подставляя значения перемещений $w_0(x)$, $\varphi_0(cx)$ и краевых реакций $m(x)$ и $r(cx)$ из уравнений (5) в уравнения (1) получается система двух однородных уравнений (6), детерминант которой дает условие потери устойчивости в виде трансцендентного уравнения (7), в котором неизвестным является безмер-

ный коэффициент $k_{kr} = \sigma_{kr}/E$, представляющий отношение критических напряжений к модулю упругости. Если $t/\sigma \rightarrow 0$, тогда интересующий нас корень этого уравнения стремится к значению данному формулой (9), соответствующий продольному изгибу полки.

Затем дается пример итерационного вычисления коэффициента k_{kr} . Итерация состоит в решении квадратных уравнений (12), при чем в качестве первого приближения принимается коэффициент k_φ , согласно формуле (11), отвечающий крутильной потере устойчивости балки с недеформируемым сечением. Сходимость итерации — достаточна. Для получения числовых практически удовлетворительно точных результатов достаточна линейная интерполяция трансцендентного уравнения между значениями k_φ и k_r .

В таблицах 1 и 2 даются результаты исчислений. Как это видно, влияние деформируемости поперечного сечения не зависит отчетливо от длины пролета стержня балки, а повышается стремительно при росте параметра δ/t . В прокатных сечениях это влияние не должно превысить 2%; в сварных или составных сечениях, обладающих очень толстыми полками, оно может быть больше и значительно превышать даже 10%.

Summary

THE INFLUENCE OF THE DEFORMABILITY OF CROSS-SECTION ON THE CRITICAL FORCE OF TORSIONAL BUCKLING OF A DOUBLE-TEE BAR

The object of this paper is to determine the influence of deformability of the cross-section of an axially compressed double-tee bar on the length l on the critical force P_φ , for torsional buckling expressed by the Eq. (10). It is assumed that the bar has hinged supports, and that the end cross-sections are free to warp and are provided with rigid diaphragms. It is further assumed that the web is the only deformed element (of Fig. 2). The flanges are treated as bars, the equilibrium equations (1) being applicable. The deformation of the web as a plate is assumed in the form (3). Substituting the values of the deformations $w_0(x)$, $\varphi_0(cx)$ and the end reactions $m(x)$ and $r(x)$ according to (5), in (1), we obtain a system of two homogeneous equations (6), the determinant of which yields the buckling condition in the form of the transcendental equation (7), where the unknown is the dimensionless coefficient $k_{kr} = \delta_{kr}/E$ representing the ratio of the critical stress to YOUNG's modulus. If $t/\delta \rightarrow 0$, the root of this equation in which we are interested tends to the value given by the Eq. (9), which corresponds to the flexural buckling of a flange.

Further, an example of iteration computation of the k_{kr} coefficient is treated. The iteration procedure consists in solving the quadratic equations (12), where, for the first approximation, we take the coefficient k_φ according to the Eq (11) for torsional buckling of a bar with undeformable cross-section. The conver-

gence of the iteration is relatively good. In order to obtain numerical results sufficiently accurate for practical purposes, linear interpolation of the transcendental equation between k_p and k_r is sufficient.

Tables 1 and 2 represent the computation results. It is seen that the influence of deformability of the cross-section does not depend distinctly on the length of the bar, but increases rapidly for increasing parameter δ/t . In rolled profiles, this difference should not exceed two per cent; in welded or composite cross-sections with very thick flanges it may be greater and exceed even 10 per cent.

AKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lipca 1959 r.