

ANTONI BIERNAWSKI I BOGUSŁAW GROCHOWSKI

**O KSZTAŁTOWANIU KRATOWNIC
NA MINIMUM POTENCJAŁU**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLVII**

TOM VIII . ZESZYT 2 . ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	139
2. Sformułowanie zagadnienia	139
3. Wyprowadzenie wzorów określających potencjał	141
4. Ustalenie dziedzin poszczególnych funkcji potencjału	148
4.1. Podział płaszczyzny kratownicy jednopolowej na dziedziny poszczególnych funkcji	148
4.2. Podział płaszczyzny kratownicy czworokątnej na dziedziny poszczególnych funkcji	149
5. Badania funkcji potencjału	152
6. Podsumowanie otrzymanych wyników i ostateczne wnioski	161
7. Graficzna metoda wyznaczania potencjału kratownicy	163

1. Wstęp

Weźmy pod uwagę n punktów oraz dany układ n sił pozostających w równowadze i związanych z tymi punktami. Na rozważanych punktach można rozciąć kratownice różnych kształtów, dla których spełnione są dwa warunki:

- (1) punkty przyłożenia sił zewnętrznych są stałymi, obciążonymi węzłami,
- (2) oprócz stałych obciążonych węzłów można wprowadzać węzły nieobciążone, zmieniające swe położenie w płaszczyźnie kratownicy.

Zagadnieniami związanymi z kształtowaniem kratownicy zajmują się współpracownicy i uczniowie Z. WASIUTYŃSKIEGO.

Praca niniejsza oparta jest na następujących twierdzeniach uzyskanych poprzednio, [1] i [2];

(1) na twierdzeniu o równoważności kształtowania na minimum potencjału przy zachowaniu stałej objętości kratownicy z kształtowaniem na minimum materiału przy danym potencjale;

(2) na twierdzeniu o równoważności kształtowania na minimum potencjału z kształtowaniem na wyrównanie naprężeń normalnych.

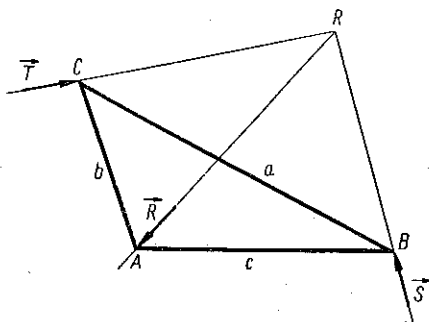
Autorzy rozważają zagadnienie przesuwania nieobciążonego węzła łączącego trzy pręty w kratownicy czworokątnej w sposób analityczny, umożliwiając rozszerzenie rozważań na kratownice wielowęzłowe. Uzyskane w pracy wyniki potwierdzają wnioski zawarte w pracy [2] dotyczące kratownicy czworokątnej, spełniającej warunek minimum na potencjał i rozszerzają je przez podanie kryteriów celowości wprowadzenia do ustroju o trzech węzłach obciążonych czwartego węzła nieobciążonego.

2. Sformułowanie zagadnienia

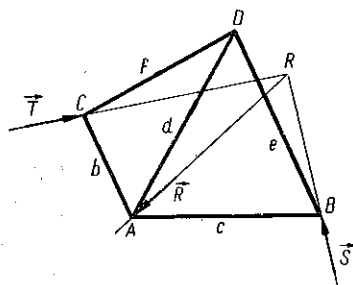
Niech dane będą trzy nieruchome węzły A , B i C (rys. 1), na które działają odpowiednio siły zewnętrzne \mathbf{R} , \mathbf{S} i \mathbf{T} . Węzły te wyznaczają bezpośrednio kratownicę trójkątną o prętach a , b i c . Na węzłach tych można zbudować również kratownicę czworokątną usuwając jeden z prętów np. (rys. 2) i wprowadzając czwarty nieobciążony ruchomy węzeł D połączony z węzłami A , B i C odpowiednio prętami d , e , f .

Celem naszych rozważań jest zbadanie potencjału wymienionych kratownic i ustalenie kształtu kratownicy posiadającej najmniejszy potencjał przy danym układzie sił zewnętrznych.

Rozpatrywać będziemy jedynie kratownice izostaticzne równej wytrzymałości. Siły zewnętrzne \mathbf{R} , \mathbf{S} i \mathbf{T} tworzą układ będący w równowadze, z czego wynika, że proste działania tych sił przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 1



Rys. 2

Wydłużenia prętów kratownicy oznaczać będziemy liczbami dodatnimi, skrócenia liczbami ujemnymi.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

- ε_0 bezwzględna wartość odkształcenia jednostkowego równej wytrzymałości,
- A, B, C, D węzły kratownicy,
- a, b, c, d, e, f długość prętów,
- A, B, C, D, E, F siły działające w odpowiednich prętach,
- R, S, T siły zewnętrzne,
- R punkt przecięcia się prostych działania sił zewnętrznych,
- $U^{(1)}$ potencjał kratownicy trójkątnej,
- $U^{(2)}$ potencjał kratownicy czworokątnej,
- $U^{(1)(+++)}$ potencjał kratownicy trójkątnej, której pręty a, b i c doznają odkształceń odpowiednio dodatniego, dodatniego i ujemnego,
- $U^{(2)(++--)}$ potencjał kratownicy czworokątnej, której pręty a, b, c, d, e i f doznają odkształceń o znakach występujących w symbolu.

Wartość potencjału kratownicy izostaticznej równej wytrzymałości trójkątnej o prętach a, b i c i siłach w nich działających A, B i C (rys. 1) określa funkcja

$$(2.1) \quad U^{(1)} = \frac{\varepsilon_0}{2} (a|A| + b|B| + c|C|).$$

Potencjał kratownicy czworokątnej, której pręty tworzą dwa trójkąty przyległe (rys. 2) określa wzór

$$(2.2) \quad U^{(2)} = \frac{\varepsilon_0}{2} (b|B| + c|C| + d|D| + e|E| + f|F|).$$

Wzory na potencjał zapiszemy w dogodnym do rachunku układzie współrzędnych ukośnokątnych.

Potencjał danej kratownicy trójkątnej ma wartość zależną jedynie od parametrów określających siły działające na węzły. Wyznamy tę wartość i przeprowadzimy dyskusję przy zmianie położenia punktu przecięcia się prostych działania sił zewnętrznych.

Potencjał kratownicy czworokątnej, powstałej z kratownicy trójkątnej przez usunięcie z niej jednego pręta i wprowadzenie dodatkowego nieobciążonego węzła jest funkcją położenia węzła wprowadzonego. Funkcja ta jest zależna również od parametrów określających punkt przecięcia się sił działających na podstawowe nieruchome węzły.

Obliczymy wartości minimalne potencjału. Będziemy zatem mogli rozstrzygać czy w określonych warunkach należy stosować kratownicę trójkątną czy czworokątną i w tym drugim przypadku ustalić najbardziej korzystny jej kształt.

W tekście pracy pomijamy obliczenia rachunkowe dając jedynie wskazówki pozwalające czytelnikowi odtworzyć ich przebieg.

3. Wyprowadzenie wzorów określających potencjał

3.1. Warunki równowagi układu sił zewnętrznych. Weźmy pod uwagę dowolny nieodkształcalny trójkąt ABC (rys. 3). Niech na wierzchołki A, B i C tego trójkąta działają odpowiednio siły \mathbf{R}, \mathbf{S} i \mathbf{T} tworzące układ sił będący w równowadze.

Zakładamy, że proste działania tych sił leżą w płaszczyźnie trójkąta ABC i przecinają się w punkcie R .

Przy określonym względem trójkąta ABC położeniu punktu R ustalamy graficznie wielkość siły \mathbf{R} przyjmując jej zwrot jak na rys. 3, a jednostkę miary dla wielkości sił obieramy tak, aby

$$(3.1) \quad \mathbf{R} = \vec{RA}.$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$(3.2) \quad \mathbf{S} = \beta_1 \vec{BR}, \quad \mathbf{T} = \beta_2 \vec{CR}$$

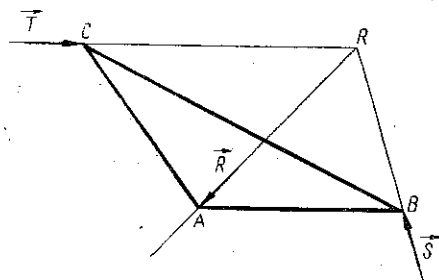
gdzie β_1 i β_2 są pewnymi stałymi.

Korzystając z oznaczeń (3.1) i (3.2) otrzymujemy warunek równowagi

$$(3.3) \quad \beta_1 \vec{BR} + \beta_2 \vec{CR} = \vec{AR}.$$

Rozwiązując powyższe równanie wektorowe otrzymujemy:

$$(3.4) \quad \beta_1 = \frac{|\vec{AR}, \vec{CR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|}, \quad \beta_2 = \frac{|\vec{BR}, \vec{AR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|}.$$



Rys. 3

We wzorze tym przyjęliśmy następujące oznaczenia dla wyznacznika:

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

gdzie a_x i a_y są współrzędnymi wektora \mathbf{a} oraz b_x i b_y współrzędnymi wektora \mathbf{b} w dowolnym układzie współrzędnych xy .

Związki (3.2) i (3.4) określają będący w równowadze układ sił \mathbf{R} , \mathbf{S} i \mathbf{T} , działających odpowiednio na wierzchołki A , B i C trójkąta ABC w zależności od położenia punktu przecięcia się prostych działania tych sił.

3.2. Potencjał kratownicy jednopolowej. Niech teraz trójkąt ABC przedstawia kratownicę jednopolową o prętach o długościach a , b i c (rys. 1) i węzłach A , B i C obciążonych odpowiednio siłami zewnętrznymi.

Związki (3.4) i (3.2) dowodzą, że ustalenie jednej z tych sił określa pozostałe siły zewnętrzne, a tym samym i siły wewnętrzne działające w prętach kratownicy w zależności od położenia punktu R przecięcia się prostych działania sił zewnętrznych.

Oznaczmy przez \mathbf{B} i \mathbf{C} siły wewnętrzne działające na węzeł A za pośrednictwem prętów odpowiednio b i c i przez \mathbf{A} siłę działającą na węzeł B za pośrednictwem pręta a .

Ponieważ w każdym pręcie kratownicy działają dwie znoszące się siły wewnętrzne, przeto możemy w następujący sposób określić siły wewnętrzne działające na wszystkie trzy węzły: na węzeł A działają siły \mathbf{B} i \mathbf{C} , na węzeł B siły \mathbf{A} i \mathbf{C} oraz na węzeł C siły $-\mathbf{A}$ i $-\mathbf{B}$.

Suma sił wewnętrznych działających w każdym węźle jest równa sile zewnętrznej, działającej na ten węzeł; otrzymujemy zatem następujące równania:

$$(3.5) \quad +\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{R}, \quad -\mathbf{C} + \mathbf{A} = \mathbf{S}, \quad -\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{T}.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$(3.6) \quad \mathbf{A} = a_1 \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{B} = a_2 \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{C} = a_3 \overrightarrow{BA},$$

gdzie współczynniki $a_i (i = 1, 2, 3)$ są parametrami wyrażającymi stosunek proporcjonalności poszczególnych sił do odpowiednich wektorów leżących na prostych działania tych sił.

Zauważmy, że jeżeli $a_1 > 0$, to pręt a pod działaniem sił \mathbf{A} i $-\mathbf{A}$ zostaje rozciągany, a jeśli $a_1 < 0$, to pręt a ulega ścisnaniu, bowiem w pierwszym przypadku siły \mathbf{A} i $-\mathbf{A}$ działają w kierunkach od węzłów, a w drugim w kierunku węzłów. Podobnie gdy $a_2 > 0$ i $a_3 > 0$, pręty b i c są rozciągane, a gdy $a_2 < 0$ i $a_3 < 0$, pręty te są ścisnane.

Zmiana zwrotu wektora \mathbf{R} spowoduje zmianę zwrotów wektorów \mathbf{S} i \mathbf{T} , a jak wynika z równań (3.6) — również zmianę zwrotów wektorów \overrightarrow{AB} i \mathbf{C} , co z kolei pociąga za sobą zmianę znaków parametrów $a_i (i = 1, 2, 3)$.

Ogólnie można więc powiedzieć, że różnym znakom parametrów a_i odpowiadają odkształcenia różnych znaków w odpowiadających im prętach.

Równania (3.6) po uwzględnieniu założenia (3.1) i podstawień (3.2) przyjmują postać:

$$(3.7) \quad a_3 \vec{BA} + a_2 \vec{CA} = \vec{RA}, \quad a_3 \vec{AB} + a_1 \vec{CB} = \beta_1 \vec{BR}, \quad a_1 \vec{BC} + a_2 \vec{AC} = \beta_2 \vec{CR}.$$

Rozwiązując te równania przy uwzględnieniu wartości (3.4) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \alpha_1 = \frac{|\vec{AR}, \vec{CR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|} \frac{|\vec{CR}, \vec{AC}|}{|\vec{BC}, \vec{AC}|}, \quad \alpha_2 = \frac{|\vec{BA}, \vec{RA}|}{|\vec{BA}, \vec{CA}|}, \quad \alpha_3 = \frac{|\vec{RA}, \vec{CA}|}{|\vec{BA}, \vec{CA}|}.$$

Przyjmujemy oznaczenia:

$$(3.9) \quad \begin{cases} W_1^{(1)} = |\vec{AR}, \vec{CR}|, & W_2^{(1)} = |\vec{BR}, \vec{CR}|, \\ W_3^{(1)} = |\vec{BR}, \vec{AR}|, & W_4^{(1)} = |\vec{CR}, \vec{AB}|. \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić, mamy

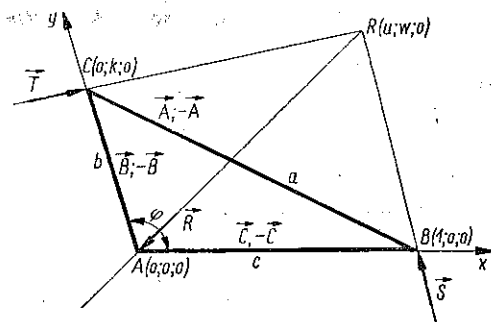
$$(3.10) \quad |\vec{AC}, \vec{AR}| = W_1^{(1)}, \quad |\vec{AC}, \vec{AB}| = -W_4^{(1)}, \quad |\vec{AR}, \vec{AB}| = -W_3^{(1)}.$$

Wyrażając jeszcze długości a , b i c prętów kratownicy przez bezwzględne wartości odpowiednich wektorów

$$(3.11) \quad a = |\vec{BC}|, \quad b = |\vec{AC}| \text{ i } c = |\vec{AB}|$$

i podstawiając do wzoru (2.1) wartości (3.8) i (3.11) przy uwzględnieniu oznaczeń (3.9) i zależności (3.10) otrzymujemy ten wzór w postaci

$$(3.12) \quad U^{(1)} = \frac{\varepsilon_0}{2|W_2^{(1)}|} \left[\left| \frac{W_1^{(1)} W_3^{(1)}}{W_2^{(1)}} \right| \vec{BC}^2 + |W_3^{(1)}| \vec{AC}^2 + |W_1^{(1)}| \vec{AB}^2 \right].$$



Rys. 4

Przyjmujemy teraz długość wektora \vec{AB} za jednostkę i wprowadzamy dla rozpatrywanej kratownicy układ współrzędnych ukośnokątnych przedstawiony na rys. 4 o osi z prostopadłej do płaszczyzny kratownicy.

Podstawiając do wzoru (3.12) współrzędne występujących w nim wektorów (zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 4) i przyjmując znak współczynnika a_1 za dodatni oraz uwzględniając wszystkie kombinacje znaków współczynników a_2 i a_3 otrzymujemy:

$$(3.13) \quad \begin{cases} U_1^{(1)(+++)} = \frac{\varepsilon_0}{2W_2} (ku - ku^2 + k^2w - kw^2 - 2uwk \cos \varphi), \\ U_2^{(1)(++-)} = \frac{\varepsilon_0}{2W_2} (2uw - ku + ku^2 - kw^2 + k^2w - 2uwk \cos \varphi), \\ U_3^{(1)(+-+)} = \frac{\varepsilon_0}{2W_2} (2k^2uw + ku - ku^2 - k^2w + kw^2 - 2uwk \cos \varphi), \\ U_4^{(1)(+--)} = \frac{\varepsilon_0}{2W_2} (2uw + 2uwk^2 - ku - ku^2 - k^2w + kw^2 - 2uw \cos \varphi). \end{cases}$$

We wszystkich tych wzorach znaki wypisane w nawiasach u góry przy symbolu $U^{(1)}$ odnoszą się odpowiednio do odkształceń prętów a , b i c .

Potencjał kratownicy jednopolowej wyraża się za pomocą jednej z funkcji (3.13) (lub funkcji o znakach przeciwnych) w zależności od położenia punktu R .

3.3. Potencjał kratownicy czworokątnej. Jeżeli teraz do trzech węzłów A , B i C obciążonych siłami \mathbf{R} , \mathbf{S} i \mathbf{T} dołączymy nieobciążony węzeł D , połączony prętami z każdym z węzłów A , B i C (rys. 2), to otrzymujemy kratownicę czworokątną, w której rozkład sił wewnętrznych zależy nie tylko od położenia punktu R , ale i od położenia nieobciążonego węzła D . Od położenia tego węzła zależą również długości d , e i f prętów AD , BD i CD oraz naturalnie wartości sił wewnętrznych we wszystkich prętach.

Jeżeli założymy, że w węźle A działają siły wewnętrzne \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} , w węźle B siła \mathbf{E} oraz w węźle C siła \mathbf{F} , to w każdym z węzłów działać będą następujące siły wewnętrzne: w węźle A siły \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} , w węźle B siły $-\mathbf{C}$ i \mathbf{E} , w węźle C siły $-\mathbf{B}$ i \mathbf{F} oraz w węźle D siły $-\mathbf{D}$, $-\mathbf{E}$ i \mathbf{F} .

Ponieważ suma sił wewnętrznych w każdym z węzłów A , B , C musi być równa sile zewnętrznej działającej na ten węzeł, otrzymujemy układ równań:

$$(3.14) \quad \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = \mathbf{R}, \quad -\mathbf{C} + \mathbf{E} = \mathbf{S}, \quad -\mathbf{B} + \mathbf{F} = \mathbf{T}, \quad \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} = 0.$$

Siły \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} i \mathbf{F} wyrażamy następująco przez wektory określające pręty kratownicy:

$$(3.15) \quad \mathbf{B} = \gamma_1 \vec{CA}, \quad \mathbf{C} = \gamma_2 \vec{BA}, \quad \mathbf{D} = \gamma_3 \vec{DA}, \quad \mathbf{E} = \gamma_4 \vec{DB}, \quad \mathbf{F} = \gamma_5 \vec{DC}.$$

Współczynniki γ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) zależne są od kształtu kratownicy i układu sił zewnętrznych. Należy zwrócić uwagę, że tak jak w przypadku kratownicy jednopolowej różnym znakom współczynników γ_i odpowiadają odkształcenia różnych znaków odpowiadających im prętów, np. $\gamma_i > 0$ i $\mathbf{R} = \vec{RA}$ oznacza, że pręt b jest rozciągany.

Wartości tych współczynników otrzymujemy rozwiązując układ równań (3.14) przy uwzględnieniu przedstawień (3.15) oraz związków (3.1), (3.2) i (3.4) dotyczących równowagi sił zewnętrznych:

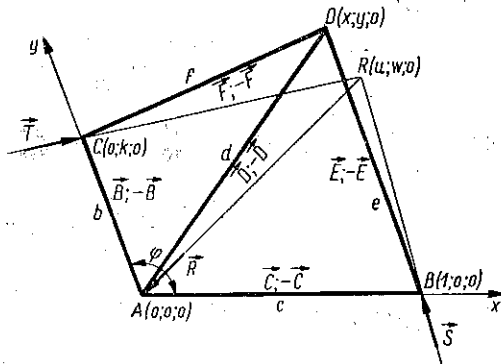
$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{|\vec{AR}, \vec{CR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|} \frac{|\vec{RC}, \vec{DC}|}{|\vec{AC}, \vec{DC}|}, \quad \gamma_4 = \frac{|\vec{AR}, \vec{CR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|} \frac{|\vec{AB}, \vec{RB}|}{|\vec{AD}, \vec{DB}|}, \\ \gamma_2 = \frac{|\vec{AR}, \vec{CR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|} \frac{|\vec{RB}, \vec{DB}|}{|\vec{AB}, \vec{DB}|}, \quad \gamma_5 = \frac{|\vec{BR}, \vec{AR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|} \frac{|\vec{AC}, \vec{RC}|}{|\vec{AC}, \vec{DC}|}, \\ \gamma_3 = \frac{|\vec{BR}, \vec{AR}|}{|\vec{BR}, \vec{CR}|} \frac{|\vec{AC}, \vec{RC}|}{|\vec{AC}, \vec{DC}|} \frac{|\vec{DC}, \vec{DB}|}{|\vec{DA}, \vec{DB}|}, \end{array} \right.$$

Wprowadzamy podobnie jak poprzednio oznaczenia:

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1^{(2)} = |\vec{AR}, \vec{RC}|, \quad W_2^{(2)} = |\vec{RB}, \vec{RC}|, \\ W_3^{(2)} = |\vec{RB}, \vec{AB}|, \quad W_4^{(2)} = |\vec{RC}, \vec{DC}|, \\ W_5^{(2)} = |\vec{AC}, \vec{DC}|, \quad W_6^{(2)} = |\vec{RB}, \vec{DB}|, \\ W_7^{(2)} = |\vec{AB}, \vec{DB}|, \quad W_8^{(2)} = |\vec{CD}, \vec{DB}|. \end{array} \right.$$

Zauważmy, że zachodzą równości

$$(3.18) \quad |\vec{AC}, \vec{RC}| = W_1^{(2)}, \quad |\vec{AB}, \vec{BR}| = -W_3^{(2)}, \quad |\vec{AD}, \vec{DB}| = W_7^{(2)}.$$



Rys. 5

Wzór (2.2) na potencjał kratownicy czworokątnej możemy teraz zapisać w następujący sposób:

$$(3.19) \quad U^2 = \frac{\varepsilon_0}{2|W_2^{(2)}|} \left[\left| \frac{W_6^{(2)} W_4^{(2)}}{W_7^{(2)}} \right| \vec{BA}^2 + \left| \frac{W_4^{(2)} W_3^{(2)}}{W_5^{(2)}} \right| \vec{AC}^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{W_8^{(2)} W_1^{(2)} W_3^{(2)}}{W_7^{(2)} W_5^{(2)}} \right| \vec{AD}^2 + \left| \frac{W_3^{(2)} W_1^{(2)}}{W_7^{(2)}} \right| \vec{BD}^2 + \left| \frac{W_1^{(2)} W_3^{(2)}}{W_5^{(2)}} \right| \vec{CD}^2 \right].$$

Przyjmujemy teraz długość wektora AB za jednostkę i wprowadzamy układ współrzędnych ukośnokątnych, jak na rys. 5 o osi z prostopadłej do płaszczyzny kratownicy.

Przy oznaczeniach wprowadzonych na rys. 5 obliczamy wartości wyznaczników $W_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) oraz długości prętów kratownicy i podstawiamy je do wzoru (3.19). Zakładając, że odkształcenie pręta AB ma znak dodatni ($\gamma_2 > 0$) dla poszczególnych kombinacji znaków odkształceń pozostałych prętów otrzymujemy następujące wzory na potencjał kratownicy jako funkcję położenia nieobciążonego węzła D :

$$\begin{aligned}
 U_1^{(2)(++++)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} (C_1 + C_2 - C_3), \\
 U_2^{(2)(++++-)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 + C_3 + C_0 \left(-2x - \frac{2k^2}{x} + \frac{4ky}{x} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2y^2}{x} - 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_3^{(2)(+++)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 + C_3 + C_0 \left(-2ky - \frac{2k}{y} + \frac{4kx}{y} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2kx^2}{y} - 4kx \cos \varphi \right) \right], \\
 U_4^{(2)(+++--)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 + 3C_3 + C_0 \left(-2x - 2ky - \frac{2k^2}{x} + \frac{2k}{y} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4kx}{y} + \frac{4ky}{x} - \frac{2kx^2}{y} - \frac{2y^2}{x} - 4kx \cos \varphi - 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_5^{(2)(++---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 - 3C_3 + C_0 \left(2x + 2ky - \frac{2kx}{y} - \frac{2ky}{x} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2kx^2}{y} + \frac{2y^2}{x} + 4kx \cos \varphi + 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_6^{(2)(+++-)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 - C_3 + C_0 \left(2ky - \frac{2k^2}{x} - \frac{2kx}{y} + \frac{2ky}{x} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2kx^2}{y} + 4kx \cos \varphi \right) \right], \\
 U_7^{(2)(+---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 - C_3 + C_0 \left(2x - \frac{2k}{y} + \frac{2kx}{y} - \frac{2ky}{x} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2y^2}{x} + 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_8^{(2)(+---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 + C_3 + C_0 \left(-\frac{2k^2}{x} - \frac{2k}{y} + \frac{2kx}{y} + \frac{2ky}{x} \right) \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 U_9^{(2)(-++++)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 - C_3 + C_0 \left(\frac{2k^2}{x} - \frac{2ky}{x} \right) \right], \\
 U_{10}^{(2)(-++++)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 + C_3 + C_0 \left(-2x + \frac{2ky}{x} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2ky^2}{x} - 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_{11}^{(2)(-+++)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 + C_3 + C_0 \left(-2ky + \frac{2k^2}{x} - \frac{2k}{y} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4kx}{y} - \frac{2ky}{x} - \frac{2kx^2}{y} - 4kx \cos \varphi \right) \right], \\
 U_{12}^{(2)(-+++)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 + 3C_3 + C_0 \left(-2x - 2ky - \frac{2k}{y} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4kx}{y} + \frac{2ky}{x} - \frac{2kx^2}{y} - \frac{2y^2}{x} - 4kx \cos \varphi - 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_{13}^{(2)(-+---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 - 3C_3 + C_0 \left(2x + 2ky + \frac{2k^2}{x} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2kx}{y} - \frac{4ky}{x} + \frac{2kx^2}{y} + \frac{2y^2}{x} + 4kx \cos \varphi + 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_{14}^{(2)(-+---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 - C_3 + C_0 \left(2ky - \frac{2kx}{y} + \frac{2kx^2}{y} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 4kx \cos \varphi \right) \right], \\
 U_{15}^{(2)(-+---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 - C_3 + C_0 \left(2x + \frac{2k^2}{x} - \frac{2k}{y} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2kx}{y} + \frac{4ky}{x} + \frac{2y^2}{x} + 4y \cos \varphi \right) \right], \\
 U_{16}^{(2)(-+---)} &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[-C_1 + C_2 + C_3 + C_0 \left(-\frac{2k}{y} + \frac{2kx}{y} \right) \right].
 \end{aligned}$$

We wszystkich tych wzorach znaki wypisane u góry w nawiasie przy symbolu $U^{(2)}$ odnoszą się do odkształceń występujących kolejno w prętach b, c, d, e, f .

Występujące tu stałe C_0, C_1, C_2 i C_3 mają następujące wartości:

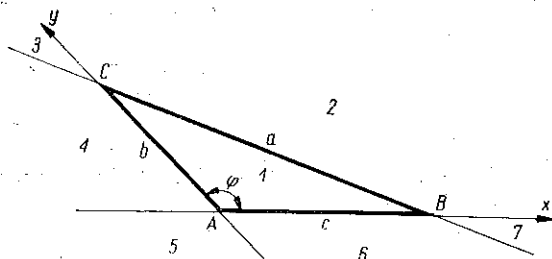
$$(3.21) \quad \begin{cases} C_0 = uw, & C_1 = wk^2 - kw^2, \\ C_2 = -u^2k + ku, & C_3 = 2kuw \cos \varphi. \end{cases}$$

Potencjał kratownicy dwupolowej opisany jest więc za pomocą szesnastu funkcji (3.20) — lub funkcji o przeciwnych znakach. Opis ten należy rozumieć

w ten sposób, że płaszczyzna kratownicy (obszar zmienności ruchomego węzła D) podzielona jest na pewną ilość obszarów i w każdym z nich potencjał wyraża jedna z funkcji (3.20).

4. Ustalenie dziedzin poszczególnych funkcji potencjału

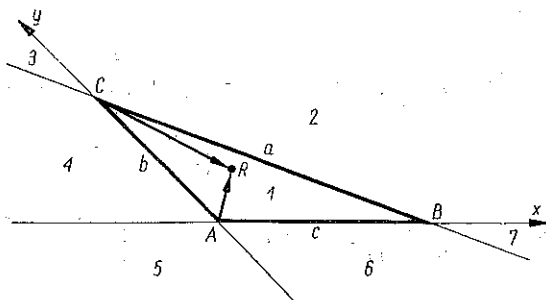
4.1. Podział płaszczyzny kratownicy jednopolewej na dziedziny poszczególnych funkcji. Proste AB , AC i BC wyznaczone przez pręty kratownicy dzielą płaszczyznę kratownicy na siedem obszarów (rys. 6).



Rys. 6

W zależności od położenia punktu R przecięcia sił zewnętrznych w poszczególnych obszarach 1, 2, ..., 7 funkcja potencjału wyrażać się będzie jednym ze wzorów $U_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Jeżeli punkt R zmienia się w obrębie jednego z tych obszarów, to znaki wyznaczników $W_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) określonych wzorami (3.9) są stałe.

Podajemy dla przykładu sposób określenia znaku wyznacznika $W_1^{(1)}$, gdy punkt R znajduje się w obszarze 1 (rys. 7).



Rys. 7

Widzimy, że trójka wektorów: \vec{AB} , \vec{CR} i ich iloczyn wektorowy $\vec{AR} \times \vec{CR}$ posiada orientację zgodną z orientacją układu osi x , y , z tylko w tym przypadku, jeśli miara rzutu iloczynu wektorowego $\vec{AR} \times \vec{CR}$ na oś z jest — wobec zanikania dwóch jego pierwszych współrzędnych — ujemna.

Tak więc znak wyznacznika wektorowego $|\vec{AR}, \vec{CR}|$ dla położenia punktu R w obrębie obszaru 1 jest ujemny, a tym samym ujemny jest znak wyznacznika $W_1^{(1)}$.

W podobny sposób określa się znaki wszystkich wyznaczników $W_i^{(1)}$ kolejno w obszarach 1, 2, ..., 7.

Znaki te oraz odpowiadające im funkcje potencjału zestawiamy w tablicy 1. W tablicy tej podajemy ponadto znaki współczynników α_i ($i = 1, 2, 3$) oraz odpowiadające poszczególnym kombinacjom tych znaków zgodnie ze wzorami (3.13) funkcje potencjału.

Tablica 1

Obszar	$W_1^{(1)}$	$W_2^{(1)}$	$W_3^{(1)}$	$W_4^{(1)}$	α_1	α_2	α_3	Potencjał
1	-	+	-	+	+	+	+	$U_1^{(1)(+++)}$
2	-	-	-	+	-	+	+	$-U_4^{(1)(+--)}$
3	+	-	-	+	+	+	-	$U_2^{(1)(+++)}$
4	+	+	-	+	-	+	-	$-U_3^{(1)(+-+)}$
5	+	+	+	+	+	-	-	$U_4^{(1)(+--)}$
6	-	+	+	+	-	-	+	$-U_2^{(1)(+++)}$
7	-	-	+	+	+	-	+	$U_3^{(1)(+-+)}$

Tak więc tablica 1 ustala, która z funkcji $U_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) opisuje potencjał kratownicy w zależności od położenia punktu R w poszczególnych obszarach 1, 2, ..., 7.

4.2. Podział płaszczyzny kratownicy czworokątnej na dziedziny poszczególnych funkcji
Zbadamy teraz, w jaki sposób wzory (3.20) opisują potencjał kratownicy czworokątnej w zależności od położenia punktu przecięcia się sił zewnętrznych R i zmieniającego swe położenie węzła D . Funkcje $U_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, 16$) określone wzorami (3.20) różnią się między sobą znakami współczynników γ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Współczynniki te w myśl wzorów (3.16) wyrażają się za pomocą wyznaczników $W_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) określonych wzorami (3.17).

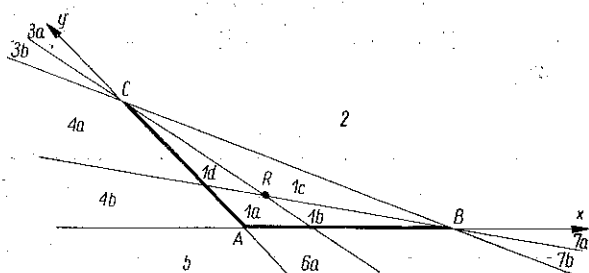
Znaki wyznaczników $W_i^{(2)}$ ustalamy podobnie, jak znaki wyznaczników $W_i^{(1)}$ kratownicy trójkątnej. Tak samo jak tam jest ustalony podział płaszczyzny kratownicy na obszary, w których znaki tych współczynników są stałe.

Zauważmy, że obszary te ze względu na zmienność węzła D są teraz ograniczone nie tylko prostymi wyznaczonymi przez pręty kratownicy, ale i przez proste działania sił zewnętrznych.

Podział płaszczyzny kratownicy na obszary o stałych znakach wyznaczników $W_i^{(2)}$ ustalimy następująco:

1. Dzielimy najpierw płaszczyznę na 7 obszarów prostymi: AB , AC i BC jak na rys. 6.

2. Ustalając położenie punktu R w każdym z tych siedmiu obszarów dokonujemy każdorazowo dalszego podziału płaszczyzny prostymi RB i RC działania sił zewnętrznych występujących, we wzorach (3.17).



Rys. 8

Będziemy zatem mieli 7 przypadków (oznaczamy je kolejno: a, b, c, d, e, f) podziału płaszczyzny kratownicy w zależności od położenia punktu R w obszarach 1, 2, ..., 7.

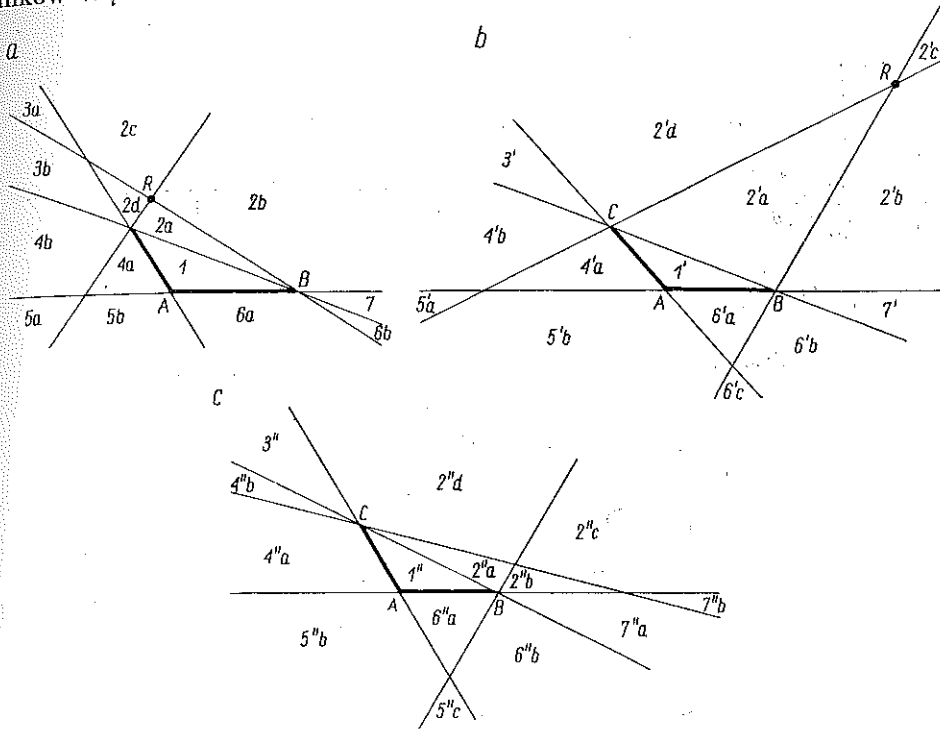
Przedstawimy najpierw dokładnie przypadek a , w którym punkt R znajduje się w obszarze 1 (rys. 8).

Tablica 2

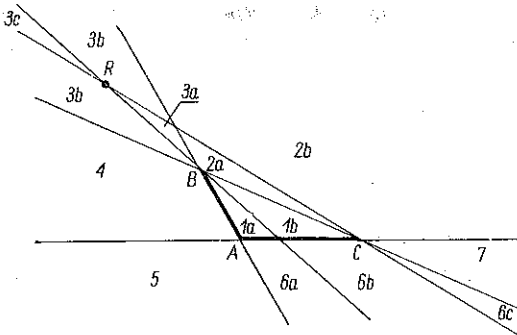
Obszar	$W_1^{(2)}$	$W_2^{(2)}$	$W_3^{(2)}$	$W_4^{(2)}$	$W_5^{(2)}$	$W_6^{(2)}$	$W_7^{(2)}$	$W_8^{(2)}$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	Potencjał
1a	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+	$U_{(1a)}^{(2)} = -U_8^{(2)}(+ + - - -)$
1b	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	$U_{(1b)}^{(2)} = -U_{(16)}^{(2)}(- + - - -)$
1c	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	$U_{(1c)}^{(2)} = U_1^{(2)}(+ + + + +)$
1d	+	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	+	$U_{(1d)}^{(2)} = U_9^{(2)}(- + + + +)$
2	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	+	$U_{(2)}^{(2)} = U_5^{(2)}(+ + - + +)$
3a	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	$U_{(3a)}^{(2)} = U_{10}^{(2)}(- + + + -)$
3b	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	$U_{(3b)}^{(2)} = U_2^{(2)}(+ + + + -)$
4a	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	$U_{(4a)}^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + - + -)$
4b	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	$U_{(4b)}^{(2)} = -U_{11}^{(2)}(- + + + -)$
5	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	$U_{(5)}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + - -)$
6a	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	-	-	+	$U_{(6a)}^{(2)} = U_{15}^{(2)}(- + - - +)$
6b	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	$U_{(6b)}^{(2)} = U_7^{(2)}(+ + - - +)$
7a	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	$U_{(7a)}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + - +)$
7b	+	+	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	$U_{(7b)}^{(2)} = U_{14}^{(2)}(- + - + -)$

Jak widać z rysunku płaszczyzna kratownicy została podzielona na 14 obszarów.

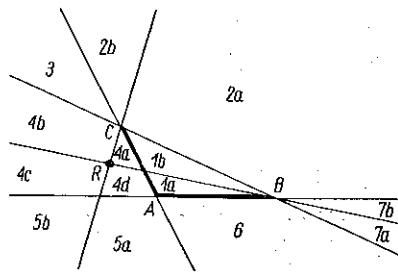
W każdym z tych obszarów wyznaczniki $W_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) mają stałe znaki, które wyznaczamy w sposób identyczny z wyznaczeniem znaków wyznaczników $W_i^{(1)}$.



Rys. 9



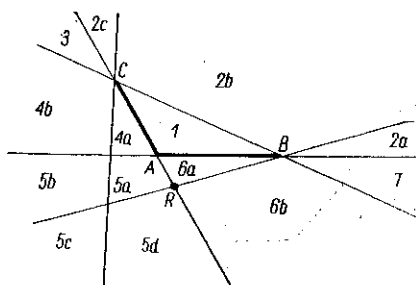
Rys. 10



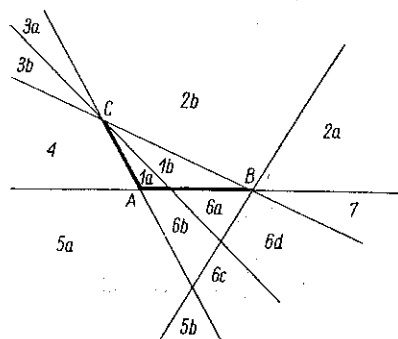
Rys. 11

Znaki te zestawiamy w tabelicy 2, w której ponadto podajemy znaki współczynników γ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) w odpowiednich obszarach oraz odpowiadające poszczególnym kombinacjom tych znaków funkcje potencjału.

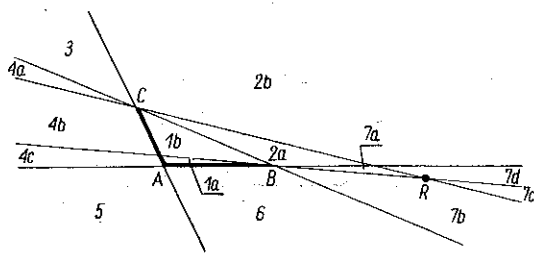
Dla położenia punktu R w obszarach 2, 3, ..., 7 postępujemy analogicznie i podajemy już tylko dalsze podziały płaszczyzny kratownicy w tych przypadkach kolejno na rysunkach 9-14 oraz zestawiamy w tablicy 3 funkcje potencjału dla określonych podobszarów poszczególnych podziałów.



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

W przypadku b uwzględniono trzy różne podziały (rys. 9a, 9b i 9c) ze względu na to, że prosta RB może rozdzielać obszary 2, 3 i 6 albo 2, 5 i 6, a prosta RC może rozdzielać obszary 2, 4 i 5 albo 2, 4 i 7. W pozostałych przypadkach podobne zróżnicowanie podziałów zostało w celu skrócenia rozważań pominięte, gdyż nie ma ono istotnego wpływu na ostateczne wnioski.

5. Badania funkcji potencjału

1. Z tablicy 2 i równań (3.20) wynika, że wartość funkcji potencjału kratownicy czworokątnej, gdy węzeł D zmienia swe położenie w obrębie podobszaru $1c$, jest stała:

$$U_{(1c)}^{(2)} = U_1^{(2)(++++)} = \frac{\epsilon_0}{2W_{\frac{1}{2}}^{(2)}} (C_1 + C_2 - C_3).$$

Wartość C_1 , C_2 , C_3 określone wzorami (3.21) zależą jedynie od współrzędnych u i w punktu R , którego położenie jest ustalone.

Stałą wartość funkcji $U_{1c}^{(2)}$ porównujemy z wartościami funkcji potencjału odpowiadającymi położeniu węzła D we wszystkich pozostałych podobszarach wykorzystując zestawienia tych wartości w tabelcy 5. Znajdziemy w ten sposób:

$$\begin{aligned}
 U_{1a}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= -U_8^{(2)(+----)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{wewnątrz obszaru } 1a, \\
 U_{1b}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= -U_{16}^{(2)(-+----)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 1b, \\
 U_{1d}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_9^{(2)(-++++)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 1d, \\
 U_{2}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_5^{(2)(++---)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 2, \\
 U_{3a}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_{10}^{(2)(-+++)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 3a, \\
 U_{3b}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_2^{(2)(++---)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 3b, \\
 U_{4a}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_6^{(2)(++---)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 4a, \\
 U_{4b}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= -U_{11}^{(2)(-+++)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 4b, \\
 U_{5}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_4^{(2)(+++)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 5, \\
 U_{6a}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_{15}^{(2)(-+---)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 6a, \\
 U_{6b}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_7^{(2)(++---)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 6b, \\
 U_{7a}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= U_3^{(2)(++++)} - U_1^{(2)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 7a, \\
 U_{7b}^{(2)} - U_{1c}^{(2)} &= -U_{14}^{(2)(-+---)} - U_2^{(1)(++++)} > 0 && \text{,, ,, } 7b.
 \end{aligned}$$

Wszystkie wypisane tu różnice przedstawiają wartości dodatnie, co można łatwo sprawdzić na podstawie wzorów (3.17) i (3.19) i tabelcy 2.

Wobec tego z kratownic czworokątnych w rozpatrywanym przypadku kratownica o węźle D zmieniającym swe położenie dowolnie w podobszarze $1c$ posiada potencjał o najmniejszej wartości. Na podstawie zaś wzorów (3.19), (3.20) i (3.21) i tabelcy 2 zachodzą równości

$$U_{1c}^{(2)} = U_1^{(2)(++++)} = U_1^{(1)(+++)}$$

stwierdzające, że potencjał tej kratownicy jest równy potencjałowi kratownicy trójkątnej.

2. Jak wynika z pracy [4]¹ w rozpatrywanym przypadku kratownicy czworokątne o węźle D znajdującym się w podobszarach obszarów 4 i 6 mają potencjał większy od potencjału kratownicy trójkątnej.

Wystarczy wobec tego zbadać kratownice o węźle ruchomym w pozostałych obszarach i porównać ich potencjał z potencjałem kratownicy trójkątnej.

Wykażemy najpierw, że wartości funkcji $U_4^{(2)(+++)}$ są odpowiednio mniejsze w następujących podobszarach: 1, 2b, 2c, 2d, 1', 2'_b, 2'_c, 2'_d, 1'', 2''_b, 2''_c, i 2''_d od wartości funkcji opisujących potencjał w tych podobszarach. Podobnie wartości funkcji $-U_4^{(2)(+++)}$ są odpowiednio mniejsze od wartości funkcji opisujących potencjał w podobszarach: 5a, 5b, 5'_a, 5'_b, 5'_c, 5''_b i 5''_c.

¹ Strona 11, przypadek 2.2.

Z tablicy 3 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U_{(2)}^{(1)} &= U_{(1')}^{(2)} = U_{(1'')}^{(2)} = U_8^{(2)(++--)}, \\ U_{(2a)}^{(2)} &= U_{(2'a)}^{(2)} = U_{(2''a)}^{(2)} = U_4^{(2)(+++-)}, \\ U_{(2b)}^{(2)} &= U_{(2'b)}^{(2)} = U_{(2''b)}^{(2)} = -U_{13}^{(2)(-+++)}, \\ U_{(2c)}^{(2)} &= U_{(2'c)}^{(2)} = U_{(2''c)}^{(2)} = -U_5^{(2)(++++)}, \\ U_{(2d)}^{(2)} &= U_{(2'd)}^{(2)} = U_{(2''d)}^{(2)} = U_{12}^{(2)(-++-)} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} U_{(5a)}^{(2)} &= U_{(5'a)}^{(2)} = -U_{12}^{(2)(-++-)}, \\ U_{(5b)}^{(2)} &= U_{(5'b)}^{(2)} = U_{(5''b)}^{(2)} = -U_4^{(2)(++-)}, \\ U_{(5c)}^{(2)} &= U_{(5'c)}^{(2)} = U_{13}^{(2)(-+++)} \end{aligned}$$

Oszacujmy zatem różnice posługując się tablicą 2 i wzorami (3.20) i (3.21). Otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{aligned} U_8^{(2)(++--)} - U_4^{(2)(+++-)} &> 0, \\ -U_{13}^{(2)(-+++)} - U_4^{(2)(+++-)} &> 0, \\ -U_5^{(2)(++++)} - U_4^{(2)(+++-)} &> 0, \\ U_{12}^{(2)(-++-)} - U_4^{(2)(+++-)} &> 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} -U_{12}^{(2)(+++-)} + U_4^{(2)(+++-)} &> 0, \\ U_{13}^{(2)(-+++)} + U_4^{(2)(+++-)} &> 0. \end{aligned}$$

Oszacowania te przeprowadzono w identyczny sposób, jak w przypadku pierwszym.

W ten sposób wyznaczenie minimalnych wartości potencjału kratownic o węzle D w obszarach 1 i 2 sprowadziłoby się do znalezienia minimum integralnego funkcji $U_4^{(2)(+++-)}$, o ile to minimum znajdowałoby się w obszarze, w którym ta funkcja opisuje potencjał.

Podobnie wygląda sprawa dla funkcji $-U_4^{(2)(+++-)}$ w obszarze 5.

Wyznamy więc minima tych funkcji. Przyrównując pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_4^{(2)(+++-)}}{\partial x} &= \frac{\varepsilon_0}{W_2^{(2)}} \left(-1 + \frac{k^2}{x^2} + \frac{2k}{y} - \frac{2ky}{x^2} - \frac{2kx}{y} + \frac{y^2}{x^2} - 2 \cos x \right), \\ \frac{\partial U_4^{(2)(+++-)}}{\partial y} &= \frac{\varepsilon_0}{W_2^{(2)}} \left(-y + \frac{k}{y^2} - \frac{2kx}{y^2} + \frac{2ky}{x} + \frac{2kx^2}{y^2} - \frac{2y}{x} - 2y \operatorname{ocs} \varphi \right) \end{aligned}$$

do zera otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić, wartości ekstremalne w punkcie $P(\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2), \sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2))$ dla funkcji $U_4^{(2)(+++-)}$, a w punkcie $Q(-\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2), -\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2))$ dla funkcji $-U_4^{(2)(+++-)}$.

Pozostała jeszcze sprawa porównania wartości potencjału kratownicy czworokątnej w punktach P i Q z potencjałem kratownicy trójkątnej. Dla potencjału w punkcie P mamy:

$$\begin{aligned}
 [U_4^{(2)(+++)}]_P - (-U_4^{(1)(+--)}) &= \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(2)}} \left[C_1 + C_2 + 3C_3 + C_0 \left(-\frac{\sqrt{k}}{\cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{k\sqrt{k}}{\cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{2k^2}{\sqrt{k}} 2 \cos \frac{\varphi}{2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2k}{\sqrt{k}} 2 \cos \frac{\varphi}{2} + 8k - \frac{k\sqrt{k}}{\cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{k}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{2k\sqrt{k} \cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{2\sqrt{k} \cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{\varepsilon_0}{2W_2^{(1)}} [-C_1 - C_2 - C_3 + 2C_0 + 2k^2 C_0] = \\
 &= -\frac{2\varepsilon_0 uw}{W_2^{(2)}} \left\{ -\left[2\sqrt{k} \cos \frac{\varphi}{2} - (1+k) \right]^2 \right\} < 0.
 \end{aligned}$$

W przekształceniach powyższego wyrażenia skorzystano z równości

$$W_2^{(1)} = W_2^{(2)}$$

wynikającej ze związków (3.9) i (3.17).

Ostatnia nierówność jest oczywista, gdyż dla punktu P :

$$\varepsilon_0 > 0, \quad u > 0, \quad w > 0$$

a $W_2^{(2)} < 0$.

Stwierdzamy więc, że potencjał kratownicy czworokątnej o węźle D w punkcie P jest mniejszy od potencjału kratownicy trójkątnej.

Podobne porównanie potencjału kratownicy czworokątnej o węźle D w punkcie Q z potencjałem kratownicy czworokątnej o węźle D w punkcie P nie daje efektywnych wyników.

Wobec tego można tylko twierdzić, że w rozpatrywanym przypadku najmniejszy potencjał posiada kratownica czworokątna o węźle D albo w punkcie P , albo w punkcie Q . Która z tych dwu kratownic ma potencjał mniejszy, nie daje się ogólnie ustalić (może być różnie w zależności od parametrów φ i k) i można to tylko w konkretnym przypadku (ustalone φ i k) sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

Zauważmy jeszcze, że położenie punktów P i Q jest geometrycznie określone przez nieruchome węzły A , B i C kratownicy. Mianowicie przy każdym ustawieniu tych węzłów trójkąty ABD i ADC są podobne, zachodzą bowiem łatwe do sprawdzenia związki między bokami tych trójkątów:

$$\frac{b}{d} = \frac{f}{e} = \frac{d}{c}.$$

Jeżeli punkt D znajduje się w obszarach 3 i 7, to ogólnie nie można rozstrzygnąć, czy potencjał kratownicy czworokątnej jest mniejszy, czy większy

b		b'		b''		c	
Podobzszar	Potencjalat	Podobzszar	Potencjalat	Podobzszar	Potencjalat	Podobzszar	Potencjalat
1	$U_{3a}^{(2)} = U_8^{(2)}(+ + + - - -)$	1'	$U_{(1')}^{(2)} = U_8^{(2)}(+ + + - - -)$	1''	$U_{(1'')}^{(2)} = U_8^{(2)}(+ + + - - -)$	1a	$U_{(1a)}^{(2)} = -U_8^{(2)}(+ + + - - -)$
2a	$U_{3a}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + - - -)$	2'a	$U_{(2'a)}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + - - -)$	2''a	$U_{(2''a)}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + - - -)$	1b	$U_{(1b)}^{(2)} = U_{16}^{(2)}(+ + + - - -)$
2b	$U_{3b}^{(2)} = -U_{13}^{(2)}(- + + + + +)$	2'b	$U_{(2'b)}^{(2)} = -U_{13}^{(2)}(- + + + + +)$	2''b	$U_{(2''b)}^{(2)} = -U_{13}^{(2)}(- + + + + +)$	2a	$U_{(2a)}^{(2)} = -U_{12}^{(2)}(- + + + - -)$
2c	$U_{2c}^{(2)} = -U_5^{(2)}(+ + + - - +)$	2'c	$U_{(2'c)}^{(2)} = -U_5^{(2)}(+ + + - - +)$	2''c	$U_{(2''c)}^{(2)} = -U_5^{(2)}(+ + + - - +)$	2b	$U_{(2b)}^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + + - - +)$
2d	$U_{2d}^{(2)} = U_{12}^{(2)}(- + + - - -)$	2'd	$U_{(2'd)}^{(2)} = U_{12}^{(2)}(- + + - - -)$	2''d	$U_{(2''d)}^{(2)} = U_{12}^{(2)}(- + + - - -)$	3a	$U_{(3a)}^{(2)} = -U_{15}^{(2)}(- + + - - +)$
3a	$U_{3a}^{(2)} = -U_{10}^{(2)}(- + + + - -)$	3'	$U_{(3')}^{(2)} = U_7^{(2)}(+ + + - - +)$	3''	$U_{(3'')}^{(2)} = U_7^{(2)}(+ + + - - +)$	3b	$U_{(3b)}^{(2)} = U_{10}^{(2)}(- + + + - -)$
3b	$U_{3b}^{(2)} = U_7^{(2)}(+ + + - - +)$	4'a	$U_{(4'a)}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(- + + - - +)$	4''a	$U_{(4''a)}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(- + + - - +)$	3c	$U_{(3c)}^{(2)} = U_2^{(2)}(+ + + + - -)$
4a	$U_{4a}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(+ + + - - +)$	4'b	$U_{(4'b)}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + - - +)$	4''b	$U_{(4''b)}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + - - +)$	3d	$U_{(3d)}^{(2)} = -U_{16}^{(2)}(+ + + - - +)$
4b	$U_{4b}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + - - +)$	5'a	$U_{(5'a)}^{(2)} = -U_{12}^{(2)}(- + + - - -)$	5''b	$U_{(5''b)}^{(2)} = -U_4^{(2)}(+ + + - - -)$	4	$U_{(4)}^{(2)} = -U_{11}^{(2)}(+ + + - - +)$
5a	$U_{5a}^{(2)} = -U_{12}^{(2)}(- + + - - -)$	5'b	$U_{(5'b)}^{(2)} = -U_4^{(2)}(+ + + - - -)$	5''c	$U_{(5''c)}^{(2)} = U_{13}^{(2)}(- + + - - +)$	5	$U_{(5)}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + - - -)$
5b	$U_{5b}^{(2)} = -U_4^{(2)}(+ + + - - -)$	5'c	$U_{(5'c)}^{(2)} = U_{13}^{(2)}(- + + - - +)$	6''a	$U_{(6''a)}^{(2)} = -U_{15}^{(2)}(- + + - - +)$	6a	$U_{(6a)}^{(2)} = U_{16}^{(2)}(- + + - - +)$
6a	$U_{6a}^{(2)} = -U_{16}^{(2)}(- + + - - +)$	6'a	$U_{(6'a)}^{(2)} = -U_{15}^{(2)}(- + + - - +)$	6''b	$U_{(6''b)}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + - - +)$	6b	$U_{(6b)}^{(2)} = U_7^{(2)}(+ + + - - +)$
6b	$U_{6b}^{(2)} = U_2^{(2)}(+ + + - - +)$	6'b	$U_{(6'b)}^{(2)} = U_1^{(2)}(+ + + - - +)$	7''a	$U_{(7''a)}^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + + - - +)$	6c	$U_{(6c)}^{(2)} = -U_{10}^{(2)}(- + + - - +)$
7	$U_7^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + + - - +)$	7'	$U_{(7')}^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + + - - +)$	7''b	$U_{(7''b)}^{(2)} = U_{14}^{(2)}(- + + - - -)$	7	$U_{(7)}^{(2)} = -U_{14}^{(2)}(- + + - - -)$
9a	9a	9b	9b	9c	9c	10	10

Tablica 3

d		e		f		g	
Podszaszar	Potencjal	Podszaszar	Potencjal	Podszaszar	Potencjal	Podszaszar	Potencjal
1a	$U_{(1a)}^{(1)} = U_8^{(2)}(+ + - -)$	1	$U_{(1a)}^{(2)} = -U_8^{(2)}(+ + - -)$	1a	$U_{(1a)}^{(2)} = U_8^{(2)}(+ + - -)$	1a	$U_{(1a)}^{(2)} = -U_8^{(2)}(+ + - -)$
1b	$U_{(1b)}^{(2)} = -U_9^{(2)}(- + + +)$	2a	$U_{(2a)}^{(2)} = U_{13}^{(2)}(+ - + -)$	1b	$U_{(1b)}^{(2)} = U_{16}^{(2)}(- + - -)$	1b	$U_{(1b)}^{(2)} = U_9^{(2)}(- + + +)$
2a	$U_{(2a)}^{(2)} = -U_{13}^{(2)}(- + + +)$	2b	$U_{(2b)}^{(2)} = -U_4^{(2)}(+ + + -)$	2a	$U_{(2a)}^{(2)} = -U_5^{(2)}(+ + - +)$	2a	$U_{(2a)}^{(2)} = U_{13}^{(2)}(- + + +)$
2b	$U_{(2b)}^{(2)} = -U_5^{(2)}(+ + + +)$	2c	$U_{(2c)}^{(2)} = -U_{12}^{(2)}(- + + -)$	2b	$U_{(2b)}^{(2)} = U_{12}^{(2)}(- + + -)$	2b	$U_{(2b)}^{(2)} = U_5^{(2)}(+ + + +)$
3	$U_{(3)}^{(2)} = -U_{10}^{(2)}(- + + +)$	3	$U_{(3)}^{(2)} = -U_7^{(2)}(+ + - +)$	3a	$U_{(3a)}^{(2)} = U_7^{(2)}(+ + - +)$	3	$U_{(3)}^{(2)} = U_{10}^{(2)}(- + + +)$
4a	$U_{(4a)}^{(2)} = -U_6^{(2)}(+ + + -)$	4a	$U_{(4a)}^{(2)} = -U_{11}^{(2)}(- + + +)$	3b	$U_{(3b)}^{(2)} = U_{15}^{(2)}(- + - +)$	4a	$U_{(4a)}^{(2)} = U_{14}^{(2)}(- + + -)$
4b	$U_{(4b)}^{(2)} = -U_{14}^{(2)}(- + + -)$	4b	$U_{(4b)}^{(2)} = -U_8^{(2)}(+ + + -)$	4	$U_{(4)}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(- + - +)$	4b	$U_{(4b)}^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + + -)$
4c	$U_{(4c)}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + +)$	5a	$U_{(5a)}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + -)$	5a	$U_{(5a)}^{(2)} = -U_4^{(2)}(+ + + -)$	4c	$U_{(4c)}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(- + + +)$
4d	$U_{(4d)}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(- + + +)$	5b	$U_{(5b)}^{(2)} = U_{12}^{(2)}(- + + -)$	5b	$U_{(5b)}^{(2)} = U_{13}^{(2)}(- + + +)$	5	$U_{(5)}^{(2)} = U_4^{(2)}(+ + + -)$
5a	$U_{(5a)}^{(2)} = -U_4^{(2)}(+ + + -)$	5c	$U_{(5c)}^{(2)} = -U_5^{(2)}(+ + - +)$	6a	$U_{(6a)}^{(2)} = -U_7^{(2)}(+ + - +)$	6	$U_{(6)}^{(2)} = U_{15}^{(2)}(- + - +)$
5b	$U_{(5b)}^{(2)} = -U_{12}^{(2)}(- + + -)$	5d	$U_{(5d)}^{(2)} = -U_{13}^{(2)}(- + + +)$	6b	$U_{(6b)}^{(2)} = -U_{13}^{(2)}(- + - +)$	7a	$U_{(7a)}^{(2)} = -U_6^{(2)}(+ + - +)$
6	$U_{(6)}^{(2)} = -U_{15}^{(2)}(- + - +)$	6a	$U_{(6a)}^{(2)} = U_{16}^{(2)}(- + - +)$	6c	$U_{(6c)}^{(2)} = U_2^{(2)}(+ + + +)$	7b	$U_{(7b)}^{(2)} = U_{11}^{(2)}(- + + +)$
7a	$U_{(7a)}^{(2)} = -U_{11}^{(2)}(- + - +)$	6b	$U_{(6b)}^{(2)} = -U_2^{(2)}(+ + + +)$	6d	$U_{(6d)}^{(2)} = U_{10}^{(2)}(- + + +)$	7c	$U_{(7c)}^{(2)} = U_3^{(2)}(+ + + +)$
7b	$U_{(7b)}^{(2)} = U_6^{(2)}(+ + + -)$	7	$U_{(7)}^{(2)} = -U_6^{(2)}(+ + + -)$	7	$U_{(7)}^{(2)} = U_{14}^{(2)}(- + - +)$	7d	$U_{(7d)}^{(2)} = -U_{14}^{(2)}(- + - +)$
11		12		13		14	
		11		12		13	
		12		13		14	

od potencjału kratownicy trójkątnej. Różnica bowiem tych potencjałów zależy od kształtu kratownic, określonego stałymi węzłami A , B i C .

Identyczne wnioski otrzymujemy w przypadku e . Pominięte rachunki są analogiczne z tą jedynie różnicą, że w obszarze 2 potencjał kratownicy dwupolowej opisany jest funkcją $-U_4^{(2)(+++)}$ a w obszarze 5 — funkcją $U_4^{(2)(+++)}$.

W pozostałych obszarach c , d , f i g dochodzimy do następujących wyników.

1. Na podstawie wyników pracy Z. WASIUTYŃSKIEGO, [1], potencjał kratownicy trójkątnej jest mniejszy od potencjału kratownic czworokątnych o ruchomym węźle D , znajdującym się dla poszczególnych przypadków w następujących obszarach:

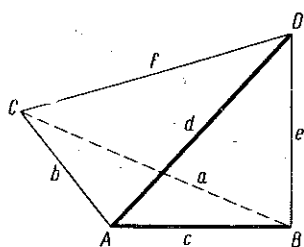
przypadek	obszary
c	1, 2, 4
d	1, 2, 6
f	1, 2, 4
g	1, 2, 6.

Dla przykładu podajemy poniżej sposób rozumowania prowadzący do powyższego wyniku w przypadku c dla podobozaru $2a$.

Potencjał kratownicy czworokątnej jest (tablica 3) w tym przypadku opisany funkcją

$$U_{(20)}^{(2)} = U_{12}^{(2)(+---)}.$$

Zgodnie ze znakami kolejnych składników tej funkcji znaki odkształceń prętów kratownicy czworokątnej będą takie, jak przedstawione na rys. 15, na którym pręty o odkształceniach dodatnich wykreślono linią cienką, a pręty o odkształceniach ujemnych — linią pogrubioną.



Rys. 15

Wskutek naprężeń działających w prętach kratownicy odległość węzłów B i C może się zmniejszać lub zwiększać, usunięty zatem pręt a posiadałby odkształcenie dodatnie albo ujemne.

Obie te możliwości przedstawiają jednak układy odkształceń prętów, które zgodnie z rozważaniami przedstawionymi na s. 10-15 pracy [1] (układy 2,2 i 2,5) dają kratownice czworokątne o potencjałach większych od potencjałów kratownicy trójkątnej.

2. Dla poszczególnych przypadków w wymienionych niżej obszarach:

przypadek	obszar
c	3, 6, 7
d	3, 4, 7
f	3, 6, 7
g	3, 4, 7

w ujęciu ogólnym, tzn. przy zmieniających się parametrach φ i k , określających wzajemne położenie stałych węzłów A , B i C , porównanie potencjału kratownic czworokątnych z potencjałem kratownicy trójkątnej nie daje efektywnych wyników, gdyż różnice tych potencjałów zależą w sposób istotny od φ i k .

Znaki tych różnic można ustalić jedynie w konkretnie danych przypadkach, tj. przy ustalonym kształcie trójkąta ABC .

3. W obszarze 5 we wszystkich przypadkach c , d , g i h potencjał kratownicy czworokątnej opisywany jest funkcją $U_4^{(2)(+++---)}$ ze znakiem $+$ lub $-$.

Funkcje te przyjmują minima w punkcie $Q(-\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2), -\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2))$ o wartościach zależnych od parametrów φ i k , tzn. od kształtu trójkąta. W każdym konkretnym przypadku (ustalony kształt tego trójkąta) minimalną wartość potencjału w punkcie Q należy porównać z wartością potencjału kratownicy trójkątnej.

W przypadku d i f obszar 5 dzieli się na podobszary 5a i 5b. W podobszarach 5b potencjał jest opisany funkcjami $U_7^{(2)(++--+)}$ lub $U_{13}^{(2)(-+-++)}$, w których wartości są odpowiednio większe od wartości funkcji $U_4^{(2)(+++---)}$ i dlatego wystarczyło zbadać tę funkcję.

Podsumowując przeprowadzone rozważania zapisujemy krótkie wynikające z nich wnioski:

a. Punkt R w obszarze 1.

Potencjał kratownicy czworokątnej przyjmuje wartość minimalną przy dowolnym położeniu węzła D w obszarze 1c (rys. 7).

Minimalna wartość potencjału kratownicy czworokątnej jest równa potencjałowi kratownicy jednopolowej.

W rozważaniach naszych nowy węzeł D wprowadziliśmy po usunięciu pręta a w kratownicy trójkątnej. Ponieważ jednak w dyskusji nie ingerują parametry φ i k określające kształt trójkąta ABC , usunięcie każdego z pozostałych prętów i wprowadzenie nowego węzła do wnętrza trójkąta utworzonego przez punkt R i usunięty pręt będzie miało ten sam efekt, tzn. nie zmieni potencjału kratownicy o prętach a , b i c .

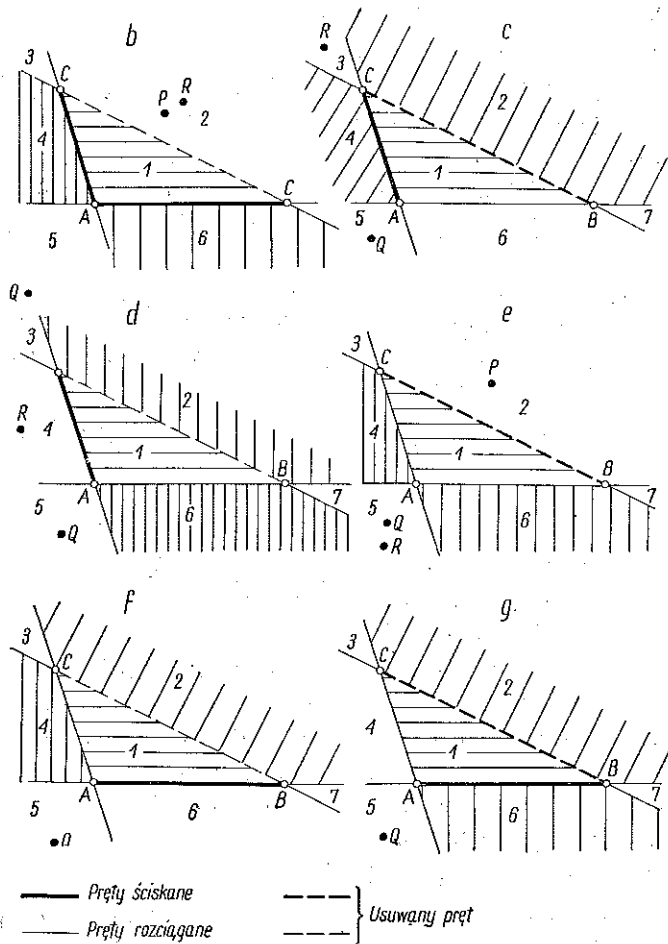
b. Punkt R w obszarze 2 (rys. 16b).

Wykluczamy na razie z rozważań przypadek, gdy punkt D znajduje się w obszarach 3 i 7, ponieważ potencjał kratownic czteroprętowych nie daje się wtedy ogólnie porównać z potencjałem kratownicy trójkątnej. W pozostałych przypadkach potencjał kratownicy czworokątnej przyjmuje wartości minimalne (minima lokalne) w punktach:

$$P\left(\frac{\sqrt{k}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, \frac{\sqrt{k}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}\right), \quad Q\left(-\frac{\sqrt{k}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, -\frac{\sqrt{k}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}\right).$$

Kratownica o węźle D w punkcie P posiada potencjał mniejszy od potencjału kratownicy jednopolowej. Natomiast kratownica dwupolowa o węźle D

w punkcie Q może posiadać potencjał mniejszy od potencjału kratownicy jednopolewej, ale w pewnych przypadkach zależnych od wartości parametrów φ i k może też być na odwrót. Potencjał najmniejszy ma więc albo kratownica o węźle D w punkcie P , albo także kratownica o węźle D w punkcie Q w zależ-



Rys. 16

ności od wartości φ i k . Ustalenie, która z tych dwu kratownic ma przy danych wartościach φ i k potencjał mniejszy prowadzi do dosyć skomplikowanych obliczeń rachunkowych. Obliczeń tych można uniknąć posługując się graficzną metodą wyznaczania wartości potencjału kratownicy podaną w p. 7.

Powyższe rozważania dotyczą rzecz prosta jedynie tych przypadków, gdy punkty P i Q leżą w podobozarach $2a$ i $5b$, w których potencjał opisują funkcje $U_4^{(2)}(+++-)$ lub $-U_4^{(2)}(+++-)$.

Jak wynika z postaci tych funkcji odkształcenia prętów b , c i d mają znak przeciwny niż odkształcenia pozostałych prętów e i f . Wobec tego tylko przy takich kombinacjach znaków odkształceń przy położeniu węzła D w jednym z punktów P albo Q otrzymujemy kratownicę o potencjale minimalnym.

Jak wynika z kombinacji znaków przypisanych funkcji $-U_4^{(2)}(+---)$, które są jednocześnie znakami odkształceń kolejno prętów a , b i c kratownicy jednopolowej, przejście od kratownicy trójkątnej do czworokątnej zostało w tym przypadku zrealizowane przez usunięcie z kratownicy trójkątnej pręta a o odkształceniu przeciwnego znaku niż znaki odkształceń pozostałych prętów b i c .

Z uwagi tej skorzystamy przy ogólnym podsumowaniu wyników naszych rozważań.

c. Punkt R znajduje się w obszarze 3 (rys. 16c).

Tylko kratownice czworokątne o węzle D w obszarze 3, 6 i 7 oraz w punkcie $Q(-\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2), -\sqrt{k}/2 \cos(\varphi/2))$ obszaru 5 mogą posiadać potencjał minimalny mniejszy od potencjału kratownicy trójkątnej. W każdym konkretnie danym przypadku potencjały te należy porównać, gdyż różnice tych potencjałów zależą od kształtu trójkąta podstawowego ABC .

d. Jak wyżej dla obszarów 3, 4, 7 i punktu Q obszaru 5.

e. Sytuacja jest identyczna z sytuacją w przypadku b .

f. Jak w przypadku c dla obszarów 3, 6, 7 i punktu Q obszaru 5.

g. Jak w przypadku c dla obszarów 3, 4, 7 i punktu Q obszaru 5.

6. Podsumowanie otrzymanych wyników i ostateczne wnioski

Pod działaniem trzech znoszących się sił zewnętrznych działających na trzy węzły kratownicy trójkątnej w prętach tej kratownicy powstać mogą napiecia powodujące odkształcenia:

(1) znaków jednakowych,

(2) w jednym pręcie znaku przeciwnego niż w dwu pozostałych.

1. W pierwszym przypadku na podstawie rozważań przedstawionych w tej pracy, przypadek a , jeśli usuniemy jeden, dowolny pręt kratownicy trójkątnej i wprowadzimy nieobciążony węzeł połączony prętami z każdym z danych obciążonych węzłów, to otrzymujemy kratownicę czworokątną o potencjale nie mniejszym od potencjału wyjściowej kratownicy jednopolowej. Mianowicie, w przypadku wprowadzenia nieobciążonego węzła do wnętrza trójkąta, utworzonego przez punkt przecięcia się sił zewnętrznych i usunięty pręt, powstała w ten sposób kratownica czworokątna posiada potencjał równy potencjałowi trójkątnej kratownicy pierwotnej. W przypadku wprowadzenia nieobciążonego węzła w każdym innym punkcie leżącym na zewnątrz tego trójkąta i nie leżącym na prostych działania sił zewnętrznych powstaje kratownica czworokątna o potencjale większym od potencjału kratownicy pierwotnej.

2. W drugim przypadku usunięcia jednego (dowolnego) pręta kratownicy pierwotnej i wprowadzenie czwartego nieobciążonego węzła do wnętrza trójkąta kratownicy trójkątnej, lub do obszarów przylegających do prętów o odkształceniach jednakowych znaków (rys. 16, obszary zakreskowane) daje kratownice czworokątne o potencjałach większych od potencjału kratownicy pierwotnej.

Przypadek ten należy jeszcze podzielić na dwa szczegółowsze:

(1) usunięty pręt posiada odkształcenie znaku przeciwnego niż pręty pozostałe,

(2) usunięty pręt posiada odkształcenie takiego samego znaku jak odkształcenie jednego z pozostałych prętów.

W przypadku 1 w obszarze przylegającym do usuniętego pręta (rys. 16) istnieć może takie położenie czwartego nieobciążonego węzła, przy którym otrzymujemy kratownicę czworokątną o potencjale mniejszym od potencjału kratownicy pierwotnej. W obszarze przeciwnym (rzutowe dopełnienie obszaru przyległego) istnieć może takie położenie czwartego węzła, że potencjał kratownicy czworokątnej może być mniejszy od potencjału kratownicy pierwotnej.

W przypadku 2 w obszarze przeciwnym usuniętemu prętowi (rys. 16) istnieć może takie położenie czwartego węzła, że potencjał kratownicy czworokątnej może być mniejszy od potencjału kratownicy pierwotnej.

W rozważaniach poprzednich wymienione były obszary, w których wprowadzony węzeł nieobciążony dawał kratownice czworokątne o potencjałach nie dających się w ogólnych rozważaniach porównać z potencjałem kratownicy trójkątnej. Powołując się teraz na sformułowania przedstawione wyżej, stwierdzić możemy, że w każdym z tych obszarów istnieć może położenie nieobciążonego węzła dające kratownicę czworokątną o potencjale minimalnym, a mianowicie przy usunięciu pręta przyległego danemu obszarowi istnieć może położenie węzła nieobciążonego dające kratownicę czworokątną o potencjale mniejszym od potencjału kratownicy trójkątnej, zaś przy usunięciu pręta przeciwnego otrzymać możemy kratownicę czworokątną o potencjale lokalnie minimalnym, którego wartość w zależności od kształtu trójkąta kratownicy może być mniejsza albo większa od potencjału tej kratownicy.

Rozważmy kratownicę trójkątną izostatyczną równej wytrzymałości, rozpiętą na trzech węzłach obciążonych siłami zewnętrznymi tworzącymi układ sił będący w równowadze.

1. W przypadku, gdy wszystkie trzy pręty kratownicy doznają odkształceń jednakowych znaków, nie istnieje kratownica czworokątna izostatyczna wyznaczona przez te trzy obciążone i dowolny czwarty węzeł nieobciążony o potencjale niższym od potencjału danej kratownicy trójkątnej.

2. W przypadku, gdy odkształcenia prętów nie mają zgodnych znaków zbudować możemy kratownicę czworokątną o potencjale minimalnym, mniej-

szym od potencjału kratownicy trójkątnej w następujący sposób: usuwamy pręt o odkształceniu odmiennego znaku od odkształceń prętów pozostałych i budujemy kratownicę złożoną z dwóch trójkątów przez wprowadzenie węzła nieobciążonego połączonego prętami z danymi węzłami w ten sposób, aby czworokąt w obwodzie zewnętrznym kratownicy był figurą wypukłą oraz aby dwa jej trójkąty były trójkątami podobnymi. Konieczne jest przy tym, aby w tak zbudowanej kratownicy pręty wychodzące z węzła przeciwnego do usuniętego pręta miały odkształcenie jednakowych znaków.

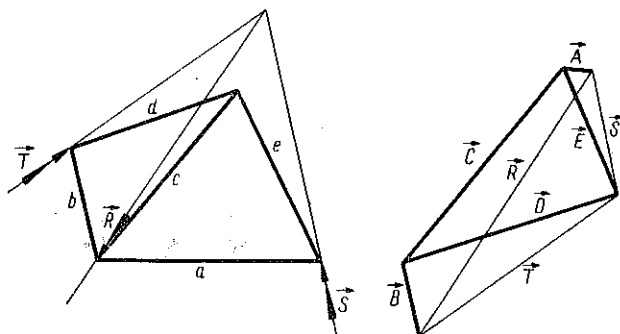
Możemy w tymże przypadku również otrzymać kratownicę czworokątną o potencjale minimalnym, ale nie zawsze mniejszym od potencjału kratownicy trójkątnej usuwając dowolny pręt i budując kratownicę o kształcie czworokąta wypukłego.

7. Graficzna metoda wyznaczania potencjału kratownicy

W celu wyznaczenia potencjału kratownicy kreślimy w dowolnej skali (rys. 17) kratownicę oraz odpowiadający jej wielobok sił.

Wzór na potencjał kratownicy dwupolowej ma postać

$$U^{(2)} = \frac{\varepsilon_0}{2} (a|A| + b|B| + c|C| + d|D| + e|E|).$$



Rys. 17

Możemy go przekształcić w następujący sposób:

$$U^{(2)} = \frac{\varepsilon_0 a |A|}{2} \left(1 + \frac{b}{a} \frac{|B|}{|A|} + \frac{c}{a} \frac{|C|}{|A|} + \frac{d}{a} \frac{|D|}{|A|} + \frac{e}{a} \frac{|E|}{|A|} \right).$$

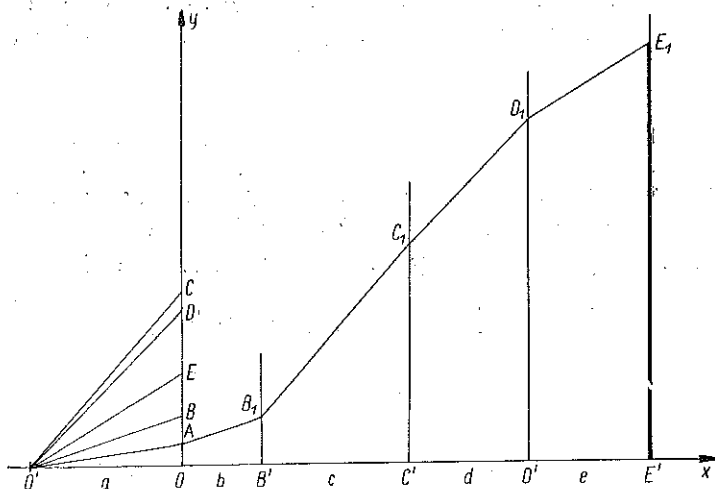
Postaramy się wyznaczyć wykreślnie wartość wyrażenia zawartego w nawiasie

$$M = 1 + \frac{b}{a} \frac{|B|}{|A|} + \frac{c}{a} \frac{|C|}{|A|} + \frac{d}{a} \frac{|D|}{|A|} + \frac{e}{a} \frac{|E|}{|A|}.$$

Zauważmy, że M jest liczbą niemianowaną. Jeżeli przyjmiemy $|A| = 1$, to

$$M = 1 + \frac{b}{a}|B| + \frac{c}{a}|C| + \frac{d}{a}|D| + \frac{e}{a}|E|.$$

Chcąc wyznaczyć wykreslnie wartość M , narysujemy (rys. 18) dwie wzajemnie prostopadłe osie x i y przecinające się w punkcie O . Na prostej x odmierzymy kolejno odcinki $O'O = a$, $OB' = b$, $B'C' = c$, $C'D' = d$ oraz $D'E' = e$, biorąc wielkości tych odcinków z rys. 1.



Rvs. 18

Następnie na osi y odmierzymy odcinki $OA = |A|$, $OB = |B|$, $OC = |C|$, $OD = |D|$ oraz $OE = |E|$.

Wielkości tych odcinków bierzemy z wieloboku sił (rys. 17). Z punktu O' kreślimy proste $O'B$, $O'C$, $O'D$ oraz $O'E$, a z punktów B' , C' , D' i E' proste równoległe do osi y .

Z punktu A kreślimy proste $AB_1 \parallel OB'$, $B_1C_1 \parallel O'C'$, $C_1D_1 \parallel OD'$, $D_1E_1 \parallel O'E'$.

Jak łatwo sprawdzić odcinek $E'E_1 = M$ o ile za jednostkę miary tego odcinka weźmiemy odcinek $OA = |A| = 1$.

Wartość liczbową potencjału kratownicy otrzymamy mnożąc liczbę M przez wartość wyrażenia $\varepsilon_0 a |A| / 2$.

Metoda powyższa jest oparta na podanym już przez J. MASSAU (1874 r.) sposobie obliczania wartości wyrażeń postaci

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} c_i.$$

Literatura cytowana w tekście

- [1] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Warszawa 1939.
[2] A. BRANDT, J. KOSMOWSKI, Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu kratownic na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty*, Rozpr. inżyn., 2, 5 (1957).
[3] Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzanie nowych węzłów*, Warszawa 1954.
[4] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu kratownic przez wprowadzenie nowych węzłów*, Księga Jubil. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.

Резюме

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА МИНИМУМ ПОТЕНЦИАЛА ФЕРМЫ В ВИДЕ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В работе представлена попытка решения системы с тремя нагруженными узлами, приводя условия целесообразности введения четвертого узла путем проектирования на минимум потенциала четырехузловой системы.

Работа основывается на двух теоремах:

(1) теорема об эквивалентности проектирования на минимум потенциала при сохранении объема фермы с проектированием на минимум веса при данном потенциале,

(2) теорема об эквивалентности проектирования на минимум потенциала проектирования выравнивания нормальных напряжений.

Summary

MINIMUM POTENTIAL DESIGN OF A LATTICE

The paper contains a tentative solution of the problem of design of a system with three loaded models, giving the conditions of rationality of introducing the fourth unloaded node and fixing the position of this node by designing the four-node structure for minimum potential.

The paper is based on the following theorem previously established by the Strength Design Groups of the ZMOC, IPPT, under the direction of Prof. Zbigniew WASIUTYŃSKI.

(1) The theorem on the equivalence of the design for minimum potential and the same volume of lattice with the minimum material design for a given potential

(2) The theorem on the equivalence of the minimum potential design with the design for uniform normal stresses.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1958 r.