J. A. MITROPOLSKI

NAJNOWSZE OSIĄGNIĘCIA W DZIEDZINIE MECHANIKI NIELINIOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLVI

TOM VIII • ZESZYT 2 • ROK 1960

W miarę szybkiego rozwoju fizyki i techniki problemy badania nieliniowych procesów drgań coraz bardziej ściągają na siebie uwagę zarówno ze względu na stosowalność w najróżnorodniejszych dziedzinach fizyki i techniki, jako też z uwagi na powstawanie nowych metod matematycznych, które pozwalają rozwiązywać wiele zagadnień oraz wyjaśniać i przewidywać nowe zjawiska.

Zagadnieniem szczególnie aktualnym w badaniu nieliniowych procesów drgań jest opracowanie metod analitycznych, które pozwoliłyby rozpatrywać odpowiednie nieliniowe równania różniczkowe nie tylko pod względem jakościowym, lecz przede wszystkim ilościowym.

Należy zaznaczyć, że najdokładniejszej analizie bywają zazwyczaj poddawane drgania nieliniowe dostatecznie zbliżone do liniowych, tzn. takie, dla których odpowiednie równania różniczkowe są wprawdzie nieliniowe, ale zawierają pewien mały parametr ε, przy czym przekształcają się w równania liniowe ze stałymi współczynnikami, gdy wchodzący w ich skład parametr ε przybiera wartość zerową. Zakładamy przy tym, że parametr ε jest «mały», tj. że może przybierać jedynie dostatecznie małe wartości bezwzględne.

W latach trzydziestych, tj. w okresie, kiedy w związku z burzliwym rozwojem radio- i elektrotechniki powstała nagląca potrzeba metod analitycznych do badania nieliniowych procesów drgań, N. M. Kryłow i N. N. Bogolubow, [7], opracowali dla takich równań różniczkowych, zawierających mały parametr, asymptotyczne metody mechaniki nieliniowej, które dzięki swej efektywności i matematycznej ścisłości znalazły nader szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej i rozwinęły się w dalszym ciągu jako przydatne do badania najróżnorodniejszych typów równań różniczkowych, zawierających mały parametr.

Poczynając od lat czterdziestych N. N. Bogolubow przeniósł te metody w dziedzinę fizyki teoretycznej na mechanikę statystyczną, mechanikę kwantową, a ostatnio i na zagadnienia, związane z problemami nadprzewodnictwa i nadpłynności.

Z powodu ograniczonych ram artykułu nie możemy omówić wszystkich szczegółów z rozwoju metod asymptotycznych, zatrzymamy się tylko przy głównych osiągnięciach w zakresie właściwej mechaniki nieliniowej, do których doszło wielu uczniów i naśladowców N. N. Bogolubowa.

Jak wiadomo, w dociekaniach N. M. Kryłowa i N. N. Bogolubowa zakładano zawsze, że zarówno częstotliwości własne jak i częstotliwości sił zewnętrznych są stałe. W związku z tym właśnie zagadnienie sprowadza się do rozpatrywania równań różniczkowych nieliniowych, zawierających mały parametr ε, które przy wartości zerowej ε przekształcają się w równania liniowe o stałych współczynnikach.

Jednakże w toku rozpatrywania wielu ważnych zagadnień, jak przechodzenie przez rezonans, modulacja częstotliwości, drgania układu ze zmiennymi więzami itp., może się okazać, że częstotliwości i inne parametry są zmienne. Najbardziej typowe pod tym względem jest zagadnienie przechodzenia przez rezonans. Swego czasu problem ten nastręczał duże trudności, wobec czego rozpatrywano przechodzenie przez rezonans tylko w ustrojach z jednym stopniem swobody, opisywanych za pomocą równań liniowych. W tym przypadku, jeśli pominąć tarcie, zagadnienie sprowadza się do całek Fresnela, lecz otrzymywane wyniki nie bardzo zgadzają się z danymi doświadczalnymi.

Analizując wymienione zagadnienia można korzystać z tego, że chociaż częstotliwości i niektóre inne parametry są w wielu przypadkach zmienne, a nawet zmieniają się w dużym przedziale, to jednak zmieniają się stosunkowo powoli. Mówiąc o zmienności powolnej mamy na myśli powolność w porównaniu z naturalną jednostką czasu, z jednostką czasu rzędu okresu drgań własnych.

Szereg fundamentalnych prac, [14], [1], opierających się na metodach mechaniki nieliniowej znacznie rozwinął i matematycznie uzasadnił metodę konstrukcji rozwiązania przybliżonego wspomnianych typów równań.

Omówimy krótko podstawową ideę konstrukcji rozwinięć asymptotycznych, gdy chodzi o nieliniowy układ drgający ze zmieniającymi się powoli parametrami.

Metodę konstruowania rozwinięć asymptotycznych zilustrujemy przykładem nieliniowego układu drgającego, opisywanego za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\varepsilon F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt},\varepsilon\right), \tag{1}$$

w którym $F(\tau, \theta, x, dx/dt, \varepsilon)$ oznacza funkcję okresową względem θ o okresie 2π, $\tau = \varepsilon t$ «powolny» czas (w podanym wyżej sensie), t czas, $m(\tau)$, $c(\tau)$ i $d\theta/dt = \nu(\tau)$ odpowiednio zmieniającą się powoli masę, sztywność i częstotliwość chwilową siły zewnętrznej; $F(\tau, \theta, x, dx/dt, \varepsilon)$ jest również nieograniczenie różniczkowalna, gdy wartości jej argumentów są skończnone, a wartości ε dostatecznie małe; oprócz tego $m(\tau)$ i $c(\tau)$ są dodatnie na odcinku $0 \leqslant \tau \leqslant L$, gdzie L można nadawać dowolnie duże wartości przy dostatecznie małym ε.

Jeśli prawa strona równania (1) równa się zeru oraz współczynniki $m(\tau)$ i $c(\tau)$ są stałe, to otrzymujemy zwykłe równanie drgań harmonicznych ustroju z jednym stopniem swobody:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx=0, \tag{2}$$

którego rozwiązaniem będzie, jak wiadomo,

$$x = a\cos(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

gdzie $\omega = \sqrt{c/m}$ oraz a i φ (amplituda i faza drgania) są to stałe, określone pierwotnymi wartościami.

W razie istnienia zakłóceń, tj. w przypadku, gdy $\varepsilon \neq 0$ i gdy oprócz tego $m(\tau) = m(\varepsilon t)$; $c(\tau) = c(\varepsilon t)$, w rozwiązaniu równania (1) — z powodu występowania nieliniowości — mogą jak wiadomo powstać naddźwięki, drgania harmoniczne o złożonych częstotliwościach różnego rzędu, drgania harmoniczne z częstotliwością zewnętrznego impulsu; częstotliwość i faza nie będą już stałe, lecz będą zależeć od amplitudy drgania, która z kolei może zwiększać się lub zmniejszać w zależności od przypływu lub rozpraszania energii w układzie dzięki siłom zakłócającym. Prócz wszystkich tych zjawisk, obserwowanych w nieliniowych układach drgających o stałych współczynnikach, istnienie zmieniających się powoli parametrów wywoła w układzie również szereg zjawisk, jakich nie obserwujemy wobec zwykłych drgań harmonicznych.

Traci tu np. sens ogólnie przyjęte pojęcie częstotliwości własnej układu, ponieważ w danym przypadku własna częstotliwość $\omega(\tau) = \sqrt{c(\tau)/m(\tau)}$ będzie również zmieniać się powoli z biegiem czasu itd.

Mając to wszystko na uwadze, z natury rzeczy rozwiązujemy równanie (2) szeregiem asymptotycznym w postaci

$$x = a\cos(s\varphi + \psi) + \varepsilon u_1(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi) + \ldots, \tag{4}$$

gdzie $u_1(\tau, a, \theta, s\varphi)$, $u_2(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi)$ oznaczają funkcje okresowe względem θ i $s\varphi + \psi$ o okresie 2π; $\varphi = \theta/r$, s i r pewne liczby pierwsze względem siebie, których wybór zależy od tego, jaki rezonans zamierzamy rozpatrywać; wielkości a i ψ funkcje czasu, wyznaczane z układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \ldots, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \dfrac{s}{r}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \ldots, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $\omega(\tau) = \sqrt{c(\tau)/m(\tau)}$.

W ten sposób zagadnienie konstrukcji rozwinięć asymptotycznych do równania (1) sprowadza się do wyznaczenia funkcji $u_1(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi)$, $u_2(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi), \ldots$; $A_1(\tau, a, \psi)$, $A_2(\tau, a, \psi), \ldots$; $B_1(\tau, a, \psi)$, $B_2(\tau, a, \psi), \ldots$ i następnie do całkowania układu równań (5), wyznaczających a i ψ — amplitudę i fazę drgania.

Układ równań (5) w przypadku ogólnym nie daje się całkować w postaci zamkniętej, toteż do wyznaczenia a i ψ trzeba wtedy stosować metody numeryczne.

Może się nasunąć pytanie, dlaczego nie całkujemy numerycznie bezpośrednio równania (1). Rzecz w tym, że całkując to równanie numerycznie otrzymujemy «sinusoidę». Aby więc obraz procesu drgań stał się jasny, musimy całkując równanie (1) numerycznie obliczyć bardzo dużo punktów (rzędu kilku tysięcy), ponieważ w całkowaniu numerycznym należy brać przedział niewielki, żeby nie zostały odcięte maksima «sinusoid». Natomiast jeżeli chodzi o całkowanie numeryczne równania (5), to mając tu obwiednię «sinusoid» wystarczy do pełni obrazu obliczyć zgoła niewiele punktów rzędu kilku dziesiątków. Zauważmy, że całkując numerycznie bezpośrednio równanie (1), nawet jeśli posłużymy się szybkimi maszynami do liczenia nie zawsze otrzymamy właściwe rezultaty, gdyż w wielokrotnym stosowaniu metod numerycznych nie sposób uniknąć gromadzenia się systematycznych błędów.

Wyłuszczoną powyżej metodą udało się rozwiązać szereg nowych zagadnień i wyjaśnić interesujące zjawiska, jak np. przechodzenie przez rezonans w nieliniowych układach drgających, drgania wahadła o zmiennej długości, oddziaływanie na wibrator nieliniowy siły «sinusoidalnej» z modulowaną częstotliwością, nieustalone procesy w układach żyroskopowych, przejście przez liczbę krytyczną w wale korbowym, w wirówkach, w wirnikach maszyn turbinowych.

W ostatnim czasie W. I. WekslER i inni, [5], zastosowali tę metodę z powodzeniem do rozwiązywania szeregu zagadnień, związanych z obliczeniami cyklotronów, w szczególności do obliczania amplitud drgań synchrotronicznych, wzbudzanych środkami rezonansowymi i akustycznymi.

Powyższą metodę uogólniono w zastosowaniu do układu z wieloma stopniami swobody, jako też do szeregu równań z bardziej skomplikowaną zależnością od ε i τ.

Rozpatrzono np. równania zbliżone do równań ściśle całkowalnych następującego typu:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+F\left(x,\frac{dx}{dt},\tau\right)=\varepsilon f\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right). \tag{6}$$

Zbadano też układy równań z wyrazami «żyroskopowymi», w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{s=1}^{N}a_{sr}(\tau)\dot{q}_s\right]+\sum_{s=1}^{N}b_{sr}(\tau)\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{N}c_{sr}(\tau)q_s= \tag{7}$$
$$=Q_r(\tau,\theta,q_1,\ldots,q_N;\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N,\varepsilon)\qquad (r=1,2,\ldots,N),$$

gdzie $b_{sr}(\tau)=-b_{rs}(\tau)$, $\tau=\varepsilon t$, $d\theta/dt=\nu(\tau)$.

Metoda badania procesów nieustalonych przyjęła się szeroko w praktyce inżynierskiej.

Spośród szeregu prac dotyczących tego problemu należy wymienić fundamentalną pracę W. A. Grobowa, [6], poświęconą badaniu nieustalonych drgań wirników w maszynach turbinowych podczas przekraczania liczby krytycznej i obrotów. Rozpatrzono przy tym nieustalone drgania wałów giętkich w wirnikach jedno- i wielotarczowych, uwzględniając różne sposoby osadzania końców. Z pewnymi wyjątkami powstają wówczas równania różniczkowe typu (7) i można konstruować ich przybliżone rozwiązania, dające zupełnie dopuszczalne jakościowe i ilościowe wyniki.

W dziełach [14] i [16] opracowano prostą i dogodną metodę konstrukcji przybliżonych rozwiązań asymptotycznych równania symbolicznego postaci

$$z(\tau, p)x = \varepsilon F(\tau, \theta, x), \tag{8}$$

gdzie $p = d/dt$, $z(\tau, p)$ są pewnym wielomianem o zmieniających się powoli współczynnikach.

Opracowano też metodę energetyczną, która pozwala wyprowadzać równanie (6) na podstawie wzoru na energię potencjalną i kinetyczną wyjściowego układu drgającego, przy czym nie potrzeba tworzyć ścisłego równania różniczkowego w postaci (1) czy (7). Metodę tę można ponadto stosować formalnie do równań z cząstkowymi pochodnymi.

Metodę energetyczną rozwinął i uogólnił W. I. MOSEENKO, [18], który rozpatrywał równania postaci

$$A(\tau)\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}+B(\tau)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+C(\tau)\frac{\partial^5 z}{\partial x^4\partial t}+D(\tau)\frac{\partial z}{dt}=f(\tau, t), \tag{9}$$

gdzie $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ i $D(\tau)$ są wielkościami zmieniającymi się powoli. W. I. MOSEENKO badał też procesy przechodnie w drganiach wałów, belek i innych ustrojów mechanicznych z tzw. parametrami rozłożonymi. Rozpatrzył również m. in. interesujące zagadnienie przechodzenia przez rezonans parametryczny.

Ciekawe także są prace W. O. KONONENKI, [8], O. B. ŁYKOWEJ i J. A. MITROPOLSKIEGO, [15], poświęcone badaniom liniowych równań różniczkowych ze zmieniającymi się powoli współczynnikami, zbliżonych do układów liniowych ze współczynnikami okresowymi:

$$\frac{dx_i}{dt}+\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(\tau, \theta)x_k = \varepsilon f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

gdzie $p_{ik}(\tau, \theta)$ oznaczają funkcje okresowe względem θ, $d\theta/dt = \nu(\tau)$ i $\tau = \varepsilon t$.

Omówiona w tych pracach metoda pozwala badać szereg skomplikowanych zjawisk w układach przyśpieszonych.

Ostatnimi czasy wydatnie rozwinięto i uzasadniono metody jednoczęstotliwe mechaniki nieliniowej i metody jakościowe w zastosowaniu do badania nieliniowych równań różniczkowych, zawierających mały parametr.

W wielu aktualnych problemach techniki współczesnej spotykamy się z rozpatrywaniem układów drgających z wielu stopniami swobody. Jeśli nawet drgania w takich układach bywają określane równaniami różniczkowymi, zbliżonymi do liniowych, to jednak, jak wiadomo, zastosowanie zwykłych metod mechaniki nieliniowej wymaga uprzedniego rozwiązania układu liniowych równań różniczkowych z liczbą niewiadomych, proporcjonalną do liczby stopni swobody, co w praktyce sprawia duże trudności.

Zarazem istnienie tarcia wewnętrznego i zewnętrznych sił zakłócających w układzie drgającym z wieloma stopniami swobody prowadzi zwykle do zaniku częstotliwości wyższych i do ustalenia podstawowego tonu drgania.

W związku z tym N. N. Bogolubow, [2], rozpatrując systemy jednoczęstotliwe, zaproponował konstruowanie cząstkowych rozwiązań odpowiedniego układu równań różniczkowych w zależności od dwóch parametrów. Myśl przewodnia tej metody polega na tym, że przybliżone rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} x_q = \varepsilon f(x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

odpowiadające drganiu jednoczęstotliwemu, przybiera postać szeregu

$$x_k = a\varphi_k e^{i\psi} + a\varphi_k^* e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \ldots, \tag{12}$$

gdzie φ_k i φ_k^* oznaczają funkcje własne, charakteryzujące formę nietłumionych drgań harmonicznych

$$x_k = a\varphi_k e^{i(\omega t + \theta)} + a\varphi_k^* e^{-i(\omega t + \theta)} \tag{13}$$

niezakłóconego układu

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} x_q = 0; \tag{14}$$

$u_k^{(e)}(a, \psi)$ $(k = 1, \ldots, n;\ e = 1, 2, \ldots)$ są to funkcje okresowe względem czasu, ω — częstotliwość nietłumionego jednoczęstotliwego układu (13) a i ψ funkcje czasu, wyznaczane z następującego układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots. \end{cases} \tag{15}$$

Takie postawienie problemu jest bardzo dogodne i pozwala uzyskiwać ostateczny wynik w prosty sposób.

W dalszym ciągu metoda ta rozwinęła się istotnie w szeregu prac, [1], [14], w których poszerzono metodę badania ustrojów jednoczęstotliwych, uwzględniając istnienie zmieniających się powoli współczynników, zewnętrznych sił zakłócających, układów rezonansowych, wyrazów żyroskopowych, tj. przypadek równania typu (7) itp. Otrzymane wyniki znalazły szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu wielu zagadnień praktycznych, jak obliczanie drgań w wale korbowym, w wirnikach, w układzie obwodów zamkniętych itp.

Należy się nieco zatrzymać przy pewnych problemach, nasuwających się z chwilą, gdy rozpatrujemy przybliżone dwuparametryczne rozwiązanie szczególne (12), odpowiadające jednoczęstotliwemu procesowi drgań. Jeżeli całkowanie równań (15) wprowadza tylko dwie dowolne stałe, to za pomocą wyrażeń (12) otrzymujemy wzór przybliżony nie na ogólne rozwiązanie układu (11), które musi zależeć od n dowolnych stałych, lecz na dwuparametryczną rodzinę rozwiązań szczególnych.

Ponieważ w układach nieliniowych nie obowiązuje zasada superpozycji, to biorąc za punkt wyjścia różne rozwiązania szczególne nie możemy skonstruować bezpośrednio rozwiązania ogólnego. Powstaje więc pytanie, w jakich przypadkach rozpatrywanie dwuparametrycznej rodziny rozwiązań przybliżonych może być interesujące. Otóż w wielu przypadkach dużej wagi rodzina ta odznacza się własnością stateczności, polegającą na tym, że z biegiem czasu dąży do niego dowolne rozwiązanie układu (1), których pierwotne wartości należą do pewnego dostatecznie małego otoczenia tej rodziny rozwiązań (12). Ściśle mówiąc, tylko w tym przypadku badanie rozwiązań (12) jest interesujące pod względem fizykalnym.

Twierdzenia dostatecznie ogólnego charakteru, udowodnione ostatnio w szeregu prac, [14] i [17], ustalają kryteria, których spełnienie nadaje dwuparametrycznej rodzinie ową własność stateczności. Udowodniono też, [12] i [13], twierdzenia daleko mocniejsze, tak iż dowolne rozwiązanie układu (11), spełniając ustalone tymi twierdzeniami założenia, dążą do konkretnych rodzin krzywych całkowych (12).

W pracy autora [17] i w pracach O. B. Łykowej, [12] i [13], osiągnięto w ostatnim czasie ciekawe rezultaty, dotyczące rozmaitości całkowych w układach równań różniczkowych, zawierających mały parametr, typu

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon), \tag{16}$$

gdzie x, X oznaczają punkty n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, $X^*(\tau, x, \varepsilon)$ funkcje okresowe względem t o okresie 2π. Do równie ciekawych rezultatów doszedł K. W. Zadiraka, [11], badając układy zbliżone do relaksacyjnych.

Uogólniając i rozwijając wyniki N. N. Bogolubowa ustalono twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i stateczności w omówionym sensie jednowymiarowych rozmaitości całkowych (jednoparametrycznej rodziny rozwiązań) oraz dwuwymiarowych lokalnych rozmaitości całkowych (dwuparametrycznej rodziny rozwiązań). Rozmaitość ma lokalny charakter z tego powodu, że jeden parametr wchodzący w skład jej wyrażenia parametrycznego nie powinien wykraczać poza pewien ograniczony obszar $[a_0, a_1]$.

Należy jednak zauważyć, że z osiągniętych tu wyników nie wypływały bynajmniej wskazówki co do struktury i własności rozwiązań szczególnych na podstawie rozmaitości.

W jednym ze zbadanych przypadków, mianowicie w przypadku, kiedy odpowiadający układowi (16) układ równań dla drgań niezakłóconych

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \tag{17}$$

dopuszcza istnienie dwuparametrycznej rodziny szczególnych rozwiązań okresowych, takiemu badaniu poddano indywidualne rozwiązania w pracach [13].

Jedna z szeroko rozpowszechnionych metod mechaniki nieliniowej, zasada wyrównywania, została ostatnio w znacznym stopniu uogólniona w pracach N.N. Bogolubowa i D. N. Zubarewa, [3], w zastosowaniu do równań typu

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = X_k(\alpha, x_1, \dots, x_n), \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = \lambda\omega(x_1, \dots, x_n) + A(\alpha, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (k = 1, \dots, n), \tag{18}$$

gdzie λ oznacza «duży» parametr. Równania typu (18) spotykamy w zagadnieniach dotyczących ruchu cząsteczek w polu magnetycznym, w badaniu układów żyroskopowych itp.

W badaniu niektórych specjalnych ustrojów żyroskopowych z szybkowirującymi elementami można z powodzeniem stosować wyniki, jakie otrzymał K.A. Breus, [4], rozpatrując układy równań różniczkowych ze współczynnikami okresowymi, z dużymi wartościami częstotliwości:

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t)x, \tag{19}$$

gdzie x oznacza wektor n-wymiarowy, $A(\omega t)$ n-wymiarową macierz okresową, przy czym ω jest «dużym» parametrem. Można też w tym przypadku posłużyć się rezultatami, jakie uzyskał A.M. Fedorczenko, [22], który rozpatrując równania kanoniczne, opisujące pewien układ żyroskopowy, wprowadza najpierw nowe zmienne: zmienną kątową w i zmienną działania J i następnie do otrzymanego układu stosuje zasadę wyrównywania. Osiągnięte tu rezultaty są dogodne do badania procesów drgań w żyroskopowych układach konserwatywnych.

Na zakończenie zatrzymamy się jeszcze przy niektórych wynikach uzyskanych w dziedzinie stosowania metod mechaniki nieliniowej do budowy maszyn i do teorii regulacji automatycznej.

Jeśli chodzi o budowę maszyn, metody mechaniki nieliniowej znalazły duże zastosowanie i rozwinęły się znacznie w zakresie zjawisk histerezy i tarcia wewnętrznego układów drgających z rozłożonymi parametrami.

Trzeba tu wymienić przede wszystkim prace G.S. Pisarenki, [19], i jego uczniów. Prace te biorą za punkt wyjścia badania równań typu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2[x + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}(x)] = \varepsilon q \sin \omega t, \tag{20}$$

których charakterystyka liniowa ma postać

$$\overleftrightarrow{\Phi}(x) = \mp k[(a\mp x)^n - 2^{n-1} a^1], \tag{21}$$

gdzie k i n oznaczają stałe oraz a amplitudę drgania, i poddają szczegółowym badaniom wpływ tarcia wewnętrznego na drgania. Uwzględniono przy tym najróżnorodniejsze materiały układu drgającego i najróżnorodniejsze środowiska, w których odbywają się drgania.

Szereg interesujących zagadnień, związanych z wpływem tarcia suchego na drgania i z wpływem drgań relaksacyjnych na harmoniczne, rozwiązał W.O. Kononenko, [9], rozpatrując układy równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + \Phi(x_1) = \varepsilon f_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n}\left(a_{ij}\frac{d^2x_j}{dt^2} + c_{ij}x_j\right) = \varepsilon f_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad (j = 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{22}$$

gdzie $\Phi(x_1)$ oznacza funkcję nieciągłą z dwoma punktami nieciągłości w okresie.

Mechanika nieliniowa poszerzyła swój zakres zastosowania na szybko rozwijającą się dziedzinę teorii regulacji. Należy tu wspomnieć przede wszystkim o pracach A.I. Łurie, [10], w których poszerzono metodę jednoczęstotliwą w zastosowaniu do badania procesów drgań samowzbudzonych i problemów stateczności w układach regulacji automatycznej. Trzeba też wymienić liczne prace E.P. Popowa, [20], [21], i in., w których metody mechaniki nieliniowej rozciągnięto na układy wysokiego rzędu o postaci

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \tag{23}$$

gdzie $Q(p)$, $R(p)$ i $S(p)$ są wielomianami operatorowymi, $F(x, px)$ funkcją nieliniową, $f(t)$ zmieniającym się powoli impulsem zewnętrznym.

Trudno dać w jednym artykule pełny przegląd wyników osiągniętych w zakresie rozwoju i stosowania metod mechaniki nieliniowej oraz wielu prac i rezultatów, ściśle związanych z nieliniową teorią drgań. Toteż autor nie wspomniał tu zupełnie o licznych pracach Ł.S. Pontriagina, E.F. Miszczenki, A.N. Tichonowa, W.M. Wołosowa i in. i nie rości sobie pretensji do wyczerpania przedmiotu.

Literatura cytowana w tekście

[1] Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, 1958.

[2] Н. Н. Боголюбов, *Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свобод*, Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР, № 10, 1949.

[3] Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев, *Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле*, УМЖ, УП, 1955.

[4] К. А. Бреус, *О решении линейных дифференциальных уравнений с быстроменяющимися периодическими коэффициентами*, ДАН СССР, 6, 108 (1956).

[5] В. И. Векслер и др., *Физические основы сооружения синхрофазотрона на 10 Бэв*, сб. Ускорители элементарных частиц, Атомиздат, 1957.

[6] В. А. Гробов, *Нестационарные колебания роторов турбомашин при переходе через критические числа оборотов*, Рига 1959.

[7] Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Изд. АН УССР, Киев 1937.

[8] В. О. Кононенко, *О колебаниях в нелинейных системах со многими степенями свободы*, ДАН СССР, 4, **105** (1955).

[9] В. О. Кононенко, *Взаимодействие релаксационных автоколебаний с гармоническими колебаниями в механических системах*, Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР, № 19, 1949.

[10] А. И. Лурье, *О неустановившихся движениях в квазилинейных автономных колебательных системах*, Тр. Ленинградского политехнического Ин-та, № 192, 1958.

[11] К. В. Задирака, *О периодическом интегральном многообразии нелинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных*, УМЖ, 3, **11** (1959).

[12] О. Б. Ликова, *О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит*, УМЖ, 4, **9** (1957).

[13] О. Б. Ликова, *Об исследовании решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии*, УМЖ, 3, **10** (1958); 4, **10** (1958).

[14] Ю. А. Митропольский, *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*, Изд. АН УССР, 1955.

[15] Ю. О. Митропольский и О. Б. Ликова, *До питання про нелінійні рівняння з періодичними коефіцієнтами*, Сб. тр. Киевск. госуниверситета, № 1, вып. 3, 1959.

[16] Ю. А. Митропольский, *Применение символических методов к исследованию нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами*, Сб. тр. Ин-та строит. мех., № 13, 1949.

[17] Ю. А. Митропольский, *Об устойчивости однопараметрического семейства решений систем уравнений с переменными коэффициентами*, 3. **10** (1958).

[18] Б. И. Мосеенков, *О колебаниях систем с распределенными параметрами при прохождении через резонанс*, Зап. Киевского госуниверситета, № 16, 1954.

[19] Г. С. Писаренко, *Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале*, Изд. АН УССР, 1955.

[20] Е. П. Попов, *Автоколебания нелинейных систем высокого порядка при медленно меняющемся внешнем воздействии*, ДАН СССР, 4, **93** (1954).

[21] Е. П. Попов, *О выделении областей устойчивости нелинейных автоматических систем на основе гармонической линеаризации*, Известия АН СССР, ОТН, № 1, 1959.

[22] А. М. Федорченко, *Метод канонических усреднений в теории нелинейных колебаний*, УМЖ, 2, **9** (1957).

Резюме

ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Приводится краткий обзор достижений в области нелинейной механики, полученных рядом учеников и последователей Н. Н. Боголюбова за последние десять лет. Среди этих достижений более подробно освещаются результаты, полученные в области построения и математического обоснования асимптотических методов применительно к нелинейным дифференциональ-

ным уравнениям с медленно меняющимися коэффициентами, в области развития и обоснования одночастотного метода, а также вопросов качественного исследования уравнений, содержащих малый параметр на одно- и двумерных интегральных многообразиях.

В статье также указываются характерные задачи в области машиностроения, физики, теории регулирования и др., которые исследовались с помощью методов нелинейной механики и применительно к которым эти методы развивались и обобщались.

Summary

RECENT ACHIEVEMENTS IN NON-LINEAR MECHANICS

The paper contains a brief survey of recent results obtained in the domain of non-linear mechanics by the pupils and successors of N.N. Bogolubov, in the last decade. Of these results those concerning the development and mathematical justification of asymptotic methods with non-linear slowly-varying coefficients are treated in greater detail. The one-frequency method is described and justified. Problems of investigation of equations containing a small parameter are discussed on the basis of one- and two-dimensiona lintegral varieties.

Also the typical problems of mechanical engineering, physics, theory of control etc. are mentioned. These problems have been treated by means of the methods of non-linear mechanics, thus enabling the development and generalization of these methods.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
АН УССР, КИЕВ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 grudnia 1959 r.