WŁADYSŁAW PIECHOCKI

O PEWNYM ZAGADNIENIU QUASI-USTALONYM TERMOSPRĘŻYSTOŚCI DLA TARCZY KOŁOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLIV

TOM VIII • ZESZYT 1 • ROK 1960

1. Rozpatrujemy izotropową i jednorodną tarczę kołową. Niech w tarczy tej działa źródło ciepła $W(r, \varphi; t)$ zależne od miejsca i czasu. Wywoła ono pole temperatury $T(r, \varphi; t)$ oraz stan naprężenia σ_{ik} jako funkcje miejsca i czasu. Zakładamy, że funkcja opisuje rozkład źródeł ciepła nie zmieniających się w sposób nagły w czasie. Możemy zatem traktować zagadnienie jako quasi-ustalone i w równaniach teorii sprężystości pominąć wyrazy inercyjne. Jeśli chodzi o warunki brzegowe dla wielkości sprężystych, to rozpatrujemy dwa warianty. Pierwszy dotyczy tarczy o brzegu swobodnym, drugi utwierdzonym. Warunek brzegowy dla temperatury jest zerowy. Również w chwili początkowej temperatura jest równa zeru w całej tarczy. Dla uproszczenia rachunków przyjmujemy promień tarczy równy jedności.

Dla temperatury mamy równanie przewodnictwa w postaci

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T + W, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \tag{1.1}$$

z warunkiem początkowym

$$T(r, \varphi; t) = 0 \quad \text{dla } t = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \tag{1.2}$$

i brzegowym

$$T(r, \varphi; t) = 0 \quad \text{dla } r = 1, \quad t > 0. \tag{1.3}$$

W równaniu (1.1) $\varkappa = k/\varrho c$, przy czym k jest przewodnictwem właściwym, ϱ gęstością, a c jest ciepłem właściwym, $W(r, \varphi; t)$ charakteryzuje rozkład źródeł ciepła.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy funkcję $W(r, \varphi; t)$ w postaci

$$W_n = W_0(r, t) \cos(n\varphi) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.4}$$

Podobną postać będzie miała temperatura:

$$T_n = U(r, t) \cos(n\varphi). \tag{1.5}$$

Zatem równanie (1.1) doprowadzimy do postaci

$$\varkappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} U \right) + W_0 = \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Do równania (1.6) zastosujemy skończoną transformację HANKELA, [1],

$$\overline{U}_I(\xi_i) = \int_0^1 rU(r) J_n(r\xi_i)\, dr, \tag{1.7}$$

gdzie ξ_i są dodatnimi miejscami zerowymi równania przestępnego $J_n(\xi_i) = 0$. Jeśli pomnożyć równanie (1.6) przez $rJ_n(r\xi_i)$ i scałkować w granicach od 0 do 1 oraz uwzględnić warunek brzegowy (1.3), to otrzymamy, że $\overline{U}_I(\xi_i)$ spełnia następujące równanie:

$$\frac{d\overline{U}_I}{dt} + \varkappa\xi_i^2 \overline{U}_I = \overline{W}_I \tag{1.8}$$

z warunkiem początkowym $\overline{U}_I(\xi_i, 0) = 0$.

Tak więc otrzymujemy

$$\overline{U}_I = \int_0^t \overline{W}_I(\xi_i, \tau)\, e^{-\varkappa\xi_i^2(t-\tau)}\, d\tau, \tag{1.9}$$

skąd po odwróceniu transformacji (1.9) znajdujemy

$$U = 2 \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{J_n(\xi_i r)}{J_{n+1}^2(\xi_i)} \int_0^t \overline{W}_I(\xi_i, \tau)\, e^{-\varkappa\xi_i^2(t-\tau)}\, d\tau, \tag{1.10}$$

gdzie

$$\overline{W}_I = \int_0^1 rW_0(r, t) J_n(\xi_i r)\, dr.$$

Ostatecznie temperatura wyraża się wzorem

$$T(r, \varphi; t) = 2 \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{J_n(\xi_i r)}{J_{n+1}^2(\xi_i)} \cos(n\varphi) \int_0^t W_I(\xi_i, \tau) e^{-\varkappa\xi_i^2(t-\tau)}\, d\tau. \tag{1.11}$$

Jest oczywiste, że temperatura (1.11) spełnia zarówno warunek początkowy (1.2) jak i brzegowy (1.3).

W przypadku gdy w funkcji charakteryzującej źródło ciepła daje się rozdzielić zmienne, tzn. ma ona postać

$$W_0(r, t) = \frac{\varkappa}{k} f(r) g(t), \tag{1.12}$$

wtedy dla temperatury otrzymujemy wyrażenie

$$T(r, \varphi; t) = \frac{2\varkappa}{k} \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{J_n(\xi_i r)}{J_{n+1}^2(\xi_i)} \overline{f}_I(\xi_i) \cos(n\varphi) \int_0^t g(\tau)\, e^{-\varkappa\xi_i^2(t-\tau)}\, d\tau, \tag{1.13}$$

gdzie $\overline{f}_I(\xi_i)$ jest transformatą HANKELA o skończonych granicach całkowania funkcji $f(r)$. Funkcja $f(r)$ jest dowolną ciągłą funkcją zmiennej r.

W celu wyznaczenia stanu naprężenia, jaki wywoła w tarczy rozkład temperatury (1.13), posłużymy się potencjałem termosprężytego przemieszczenia Φ. W przypadku płaskiego stanu naprężenia jest on związany z polem temperatury następującym równaniem:

$$\Delta\Phi = (1+\nu)\alpha_t T, \tag{1.14}$$

gdzie α_t jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej, ν liczbą POISSONA. Wiadomo, że potencjał Φ, na ogół, nie spełnia wszystkich warunków brzegowych. Do spełnienia wszelkich warunków na brzegu rozpatrywanej tarczy posłużymy się funkcją naprężeń F AIRY'EGO. Przyjmując $\Psi = F - 2G\Phi$ wyrazimy składowe stanu naprężenia następującymi związkami:

$$\sigma_{rr} = r^{-1}\Psi_{,r} + r^{-2}\Psi_{,\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \Psi_{,rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = -(r^{-1}\Psi_{,\varphi})_{,r}, \tag{1.15}$$

gdzie

$$\Psi_{,a} = \frac{\partial\Psi}{\partial a}.$$

Rozwiązaniem równania (1.14) jest funkcja

$$\Phi_n(r, \varphi; t) = \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} A(\xi_i, t) J_n(r\xi_i)\cos(n\varphi), \tag{1.16}$$

gdzie

$$A(\xi_i, t) = -\frac{2(1+\nu)\alpha_t\varkappa}{k\xi_i^2}\,\frac{\overline{f}_i(\xi_i)}{J_{n+1}^2(\xi_i)}\int_0^t g(\tau)e^{-\varkappa\xi_i^2(t-\tau)}\,d\tau. \tag{1.17}$$

Natomiast funkcję naprężeń F przyjmujemy w postaci

$$F_n = (A_n r^n + B_n r^{n+2})\cos(n\varphi). \tag{1.18}$$

Stałe A_n, B_n wyznaczamy z warunku znikania naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{r\varphi}$ na brzegu tarczy. Zatem dla $r = 1$ mamy dwa równania:

$$r^{-1}\Psi_{,r} + r^{-2}\Psi_{,\varphi\varphi} = 0, \qquad [r^{-1}\Psi_{,\varphi}]_{r} = 0, \tag{1.19}$$

z których otrzymujemy

$$A_n = -B_n = G\sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} \xi_i A(\xi_i, t) J_{n+1}(\xi_i). \tag{1.20}$$

Po podstawieniu A_n i B_n do (1.18) otrzymamy

$$F_n = \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} B(\xi_i, t)(1-r^2)r^n\cos(n\varphi), \tag{1.21}$$

gdzie

$$B_n(\xi_i, t) = GA(\xi_i, t)\xi_i J_{n+1}(\xi_i). \tag{1.22}$$

2. Obecnie rozpatrzymy przypadek, kiedy brzeg tarczy jest zamocowany, tzn. że na brzegu tarczy nie ma przemieszczeń. Korzystając z funkcji Φ (1.16), możemy wyrazić przemieszczenia $\bar{u}$, $\bar{v}$ następującymi zależnościami:

$$\bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \tag{2.1}$$

czyli

$$\begin{cases} \bar{u} = \sum\limits_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} A(\xi_i, t) \xi_i J_n'(\xi_i r) \cos(n\varphi), \\ \bar{v} = -\sum\limits_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} A(\xi_i, t) n r^{-1} J_n(\xi_i r) \sin(n\varphi). \end{cases} \tag{2.2}$$

Przyjmując we wzorach (2.2) $r = 1$ widzimy, że przemieszczenie $\bar{v}$ znika, ale pozostaje $\bar{u}$. Do zlikwidowania przemieszczenia $[\bar{u}]_{r=1}$ posłużymy się rozwiązaniem równań przemieszczeniowych zagadnienia izotermicznego. Wspomniane równania w biegunowym układzie współrzędnych mają postać:

$$\begin{cases} \Delta\bar{\bar{u}} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\bar{\bar{u}}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{\bar{v}}}{\partial \varphi} = 0, \\ \Delta\bar{\bar{u}} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{r\,\partial \varphi} - \frac{\bar{\bar{v}}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

gdzie

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}.$$

Równania (2.3) spełnimy następującymi funkcjami:

$$\bar{\bar{u}} = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad \bar{\bar{v}} = v^{(1)} + v^{(2)}, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\begin{cases} u^{(1)} = -C_n^{(1)} n r^{n-1} \cos(n\varphi), \\ v^{(1)} = C_n^{(1)} n r^{n-1} \sin(n\varphi), \\ u^{(2)} = C_n^{(2)} [4(1-\nu) - (2+n)] r^{n+1} \cos(n\varphi), \\ v^{(2)} = C_n^{(2)} [4(1-\nu) + n] r^{n+1} \sin(n\varphi). \end{cases} \tag{2.5}$$

Stałe $C_n^{(1)}$ i $C_n^{(2)}$ wyznaczymy z warunków brzegowych:

$$\bar{\bar{u}} = -\bar{u}, \quad \bar{\bar{v}} = -\bar{v} \quad \text{dla} \quad r = 1. \tag{2.6}$$

3. W przypadku źródła harmonicznego w czasie mamy:

$$W_n = W_0(r, \varphi) e^{i\omega t} = \frac{\varkappa}{k} f(r) \cos(n\varphi) e^{i\omega t}; \tag{3.1}$$

natomiast temperatura, na mocy równań (1.1) i (1.3), ma postać

$$T_n = -2\frac{\varkappa}{k}\sum_{i=1,2,3,\dots}^{\infty}\frac{J_n(r\xi_i)}{J_{n+1}^2(\xi_i)}\frac{\overline{W}_I(\xi_i)}{\eta+\xi_i^2}\cos(n\varphi)e^{i\omega t}, \qquad \eta = i\omega, \tag{3.2}$$

gdzie

$$\overline{W}_I = \int_0^1 rJ_n(r\xi_i)f(r)\,dr.$$

Potencjał termosprężystego przemieszczenia wyznaczamy z równania (1.14) przyjmując $T(r, \varphi; t)$ określone wzorem (3.2).

Tak więc

$$\Phi = \frac{\varkappa}{k}\sum_{i=1,2,3,\dots}^{\infty} C(\xi_i, \omega; t)J_n(r\xi_i)\cos(n\varphi)e^{i\omega t}, \tag{3.3}$$

gdzie

$$C(\xi_i, \omega) = \frac{(1+\nu)a_t}{\xi_i^2(\eta+\xi_i^2)}\frac{\overline{W}_I(\xi_i)}{I_{n+1}^2(\xi_i)}.$$

W celu spełnienia warunków brzegowych postępujemy podobnie jak poprzednio. Bierzemy funkcję określoną wzorem (1.18) i ostatecznie otrzymujemy

$$A_n = -B_n = \frac{\varkappa}{k}\sum_{i=1,2,3,\dots}^{\infty} C(\xi_i, \omega)\xi_i J_{n+1}(\xi_i).$$

Analogicznie postępujemy w przypadku brzegu utwierdzonego korzystając z rozwiązań dla źródła nieharmonicznego.

Literatura cytowana w tekście

[1] I. Sneddon, *Fourier Transforms*, Oxford 1951.

[2] H. Parkus, *Instationäre Wärmespannungen*, Wiedeń 1959.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ КВАЗИ-СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ

Дается решение для круговой пластинки подверженной действию переменных во времени источников тепла. Задача обсуждается как квазистационарная, иначе говоря, что в уравнениях теории упругости пренебрегается инерционными членами. Рассматриваются два варианта краевых условий, т.е. при крае свободно опертом и защемленном.

Чтобы удовлетворить краевым условиям, используется функция напряжений и вектор перемещений. Все упругие величины представлены в виде ряда согласно бесселевым функциям первого порядка.

Summary

A QUASI-STEADY-STATE THERMOELASTIC PROBLEM OF A CIRCULAR DISC

A solution for a circular disc acted on by time-variable heat sources is given. The problem is treated as quasi-steady-state, that is the inertia terms in the equations of elasticity are rejected. Free and clamped edge conditions are considered.

To satisfy the edge conditions, the stress function and the displacement vector are used. All the elastic quantities are expressed in the form of a series of BESSEL functions of the first kind.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 maja 1959 r.