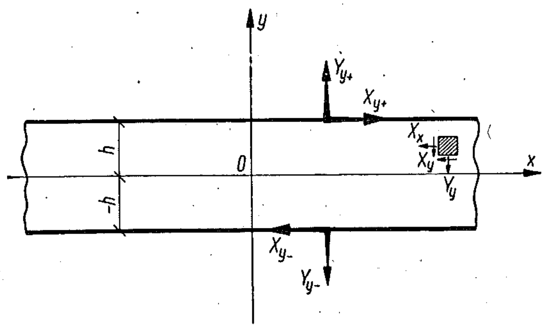
F R A N C I S Z E K   S Z E L Ą G O W S K I

PASMO TARCZOWE POD WPŁYWEM DZIAŁANIA OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO

R O Z P R A W Y
I N Ż Y N I E R S K I E
CXLIII

TOM VIII . ZESZYT 1 . ROK 1960

Zagadnienie dotyczące stanu napięcia izotropowego pasma tarczowego, obciążonego na prostolinijnych brzegach, sprowadza się w zasadzie do wyznaczenia naprężeń X_y, X_x i Y_y (rys. 1) oraz przemieszczeń u i v dla dowolnego punktu tego pasma.



Rys. 1

Wartości powyższych naprężeń i przemieszczeń w funkcjach zmiennych zespolonych $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ określają, jak wiadomo, następujące wzory, [1]:

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right], \tag{1}$$

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z); \tag{2}$$

$$v + iu = -\frac{i}{8\mu} z_1 \Phi(z) + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(z)\, dz,$$

w których występują tylko dwie niewiadome funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$.

Zatem istotą powyższego zagadnienia będzie określenie głównie tych funkcji.

Przed przystąpieniem do rozwiązania powyższego zagadnienia zostaną najpierw ustalone związki, zachodzące pomiędzy wartością funkcji holomorficznej $f(z)$ w pewnym punkcie obszaru pasmowego, a wartością części rzeczywistej jak również i części urojonej, jakie przybiera ta funkcja na brzegu górnym o rzędnej h i na brzegu dolnym o rzędnej $-h$ tego obszaru pasmowego. Wyprowadzone wzory znajdą w pracy zastosowanie.

Otóż, jak wiadomo, wzór SCHWARZA

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w} d\theta + ib_0 \tag{3}$$

określa funkcję holomorficzną $f(w)$ w dowolnym punkcie obszaru znajdującego się wewnątrz koła o promieniu 1, gdy znana jest część rzeczywista $\varphi(\theta)$ tej funkcji na okręgu powyższego koła.

Podobnie wzór

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i\psi(\theta) \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w} d\theta + a_0 \tag{4}$$

określa funkcję holomorficzną $f(w)$ w dowolnym punkcie obszaru znajdującego się wewnątrz koła o promieniu 1, gdy znana jest część urojona $i\psi(\theta)$ tej funkcji na okręgu wymienionego koła.

W nawiązaniu do poruszonego zagadnienia stosując przekształcenie konforemne

$$w = \operatorname{th} \frac{\pi z}{4h}$$

koła $|w| < 1$ na pasmo nieograniczone $-h < \operatorname{Im} z < h$, wzór (3) przyjmie postać odpowiednio zmienioną, mianowicie:

$$f(z) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_+(t)+\varphi_-(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h}(t-z)} dt - \frac{i}{4h} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_+(t)-\varphi_-(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2h}(t-z)} dt + ib_0, \tag{5}$$

gdzie $\varphi_+(t)$ oznacza część rzeczywistą funkcji $f(z)$ na górnym brzegu pasma, zaś $\varphi_-(t)$ oznacza część rzeczywistą tejże funkcji na dolnym brzegu pasma.

Również wzór (4) przyjmie następującą postać:

$$f(z) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[\psi_+(t)+\psi_-(t)]}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h}(t-z)} dt - \frac{i}{4h} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[\psi_+(t)-\psi_-(t)]}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2h}(t-z)} dt + a_0, \tag{6}$$

gdzie $i\psi_+(t)$ oznacza część urojoną funkcji $f(z)$ na górnym brzegu pasma, zaś $i\psi_-(t)$ oznacza część urojoną tejże funkcji na dolnym brzegu pasma.

Dodając stronami wzory (6) i (5) otrzymujemy

$$(7)\quad 2f(z) = \frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varphi_+(t)+i\psi_+(t)]+[\varphi_-(t)+i\psi_-(t)]}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt - $$

$$-\frac{i}{4h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varphi_+(t)+i\psi_+(t)]-[\varphi_-(t)+i\psi_-(t)]}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt + ib_0 + a_0,$$

a odejmując stronami wzory (6) i (5) znajdziemy

$$(8)\quad \frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varphi_+(t)-i\psi_+(t)]+[\varphi_-(t)-i\psi_-(t)]}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt - $$

$$-\frac{i}{4h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varphi_+(t)-i\psi_+(t)]-[\varphi_-(t)-i\psi_-(t)]}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt + ib_0 - a_0 = 0.$$

Wzór (7) określa funkcję holomorficzną w dowolnym punkcie obszaru pasma nieograniczonego, gdy dana jest jej wartość $\varphi_+(t)+i\psi_+(t)$ na brzegu górnym oraz $\varphi_-(t)+i\psi_-(t)$ na brzegu dolnym, zaś wzór (8) daje zależność w przypadku wprowadzenia funkcji z nią sprzężonej.

Gdy $\varphi_+(t) = \varphi_-(t) = \varphi(t)$, to wzór (5) przyjmie postać odpowiednio prostszą, mianowicie

$$f(z) = \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt + ib_0,$$

lub

$$f(z) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{e^{\frac{\pi}{2h}(t-z)} + e^{-\frac{\pi}{2h}(t-z)}}\,dt,$$

jeżeli pominąć tutaj wielkość stałą ib_0.

W tej ostatniej postaci został podany omawiany wzór przez A. PALATINIEGO, [3].

Również w przypadku $\psi_+(t)=\psi_-(t)=\psi(t)$ wzór (6) przyjmie postać prostszą, tj.

$$f(z)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i\psi(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}dt+a_0.$$

Wobec powyższego wzory (7) i (8) można napisać w następujących postaciach:

$$2f(z)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)+i\psi(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}dt+ib_0+a_0,$$

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)-i\psi(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}dt+ib_0-a_0=0.$$

Powracając do właściwego zagadnienia postawionego na wstępie trzeba będzie określić z początku funkcję $\Phi(z)$.

W tym celu napiszemy równość

(9) $$-i2(X_y+iY_y)=X_x+Y_y-i[2X_y-i(X_x-Y_y)].$$

Lecz ze wzoru (1) wynika zależność

$$X_x+Y_y=\operatorname{Re}[\Phi(z)],$$

zaś na podstawie wzoru (2) mamy

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i}{2}(x-iy+iy-iy)\Phi'(z)+F(z)=$$
$$=-\frac{i}{2}(z-2iy)\Phi'(z)+F(z).$$

Otóż z ostatniej zależności widać, że na górnym brzegu pasma wielkość $2X_y+i(X_x-Y_y)$ jest funkcją tylko zmiennej z i wyraża się wzorem

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i}{2}(z-2ih)\Phi'(z)+F(z),$$

zaś wielkość sprzężona $2X_y-i(X_x-Y_y)$ będzie funkcją tylko zmiennej z_1 i będzie się wyrażać wzorem

$$2X_y-i(X_x-Y_y)=\frac{i}{2}(z_1+2ih)\Phi_1'(z_1)+F_1(z_1).$$

Natomiast na dolnym brzegu pasma wyraz $2X_y-i(X_x-Y_y)$ będzie również funkcją tylko zmiennej z_1 i będzie się wyrażał wzorem następującym:

$$2X_y-i(X_x-Y_y)=\frac{i}{2}z_1\Phi_1'(z_1+2ih)+F_1(z_1+2ih).$$

Wobec powyższego stosując do pierwszego wyrazu prawej strony równości (9) wzór (5), zaś do drugiego wyrazu prawej strony tejże samej równości wzór (8), otrzymamy

$$(10)\qquad \Phi(z) = -\frac{i}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(X_{y+}+iY_{y+})+(X_{y-}+iY_{y-})}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt - $$

$$-\frac{1}{2h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(X_{y+}+iY_{y+})-(X_{y-}+iY_{y-})}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt + C,$$

gdzie znak plus odnosi się do górnego brzegu tarczy, znak minus do dolnego brzegu tarczy, zaś C oznacza liczbę stałą.

W przypadku $X_{y+} = X_{y-} = X_y$, $Y_{y+} = Y_{y-} = Y_y$ będzie

$$\Phi(z) = -\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_y+iY_y}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt + C.$$

Następnie z zależności

$$2(Y_y+iX_y) = X_x+Y_y+i[2X_y+i(X_x-Y_y)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)]+i\left[-\frac{i}{2}z_1\Phi'(z)+F(z)\right] =$$

$$= \operatorname{Re}[\Phi(z)]+i\left[-\frac{i}{2}z_1\Phi'(z)+F(z)\right],$$

otrzymujemy dla górnego brzegu pasma

$$(11)\qquad 2(Y_{y+}+iX_{y+}) = \operatorname{Re}_+[\Phi(z)]+i\left[-\frac{i}{2}(z-2ih)\Phi'_+(z)+F_+(z)\right],$$

zaś dla dolnego brzegu pasma

$$(12)\qquad 2(Y_{y-}+iX_{y-}) = \operatorname{Re}_-[\Phi(z)]+i\left[-\frac{i}{2}z\Phi'_-(z-2ih)+F_-(z-2ih)\right].$$

Zatem z równości (11) i (12) mamy

$$F_+(z) = \frac{1}{i}\{2(Y_{y+}+iX_{y+})-\operatorname{Re}_+[\Phi(z)]\}+\frac{i}{2}(z-2ih)\Phi'_+(z),$$

$$F_-(z-2ih) = \frac{1}{i}\{2(Y_{y-}+iX_{y-})-\operatorname{Re}_-[\Phi(z)]\}+\frac{i}{2}z\Phi'_-(z-2ih).$$

Stosując wzór (7) otrzymamy ostatecznie

$$(13)\quad F(z)=\frac{1}{8h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{+}(t)+F_{-}(t-2ih)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}dt-$$

$$-\frac{i}{8h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{+}(t)-F_{-}(t-2ih)}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}dt+D,$$

gdzie D jest liczbą stałą.

W ten sposób funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$, określone wzorami (10) i (13), rozwiązują całość postawionego na wstępie zagadnienia.

Należy jeszcze nadmienić, że powyższy sposób umożliwia również rozwiązanie innych zagadnień, w których obszary jednospójne dają się odwzorować konforemnie na pasmo nieograniczone.

Literatura cytowana w tekście

[1] G. W. Kolosov, *Application of the Complex Variable to the Theory of Elasticity*, Moskwa 1935.

[2] F. Szelągowski, *Zagadnienie płaskie teorii sprężystości w funkcjach zmiennych zespolonych*, Arch. Mech. stos., 1951.

[3] A. Palatini, *Sulla influenza del fondo nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 39, 1915.

Резюме

ДЛИННАЯ ПОЛОСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАРУЖНОЙ НАГРУЗКИ

Рассматривается решение вопроса, касающегося изотропной очень длинной полосы, под действием данной нагрузки на верхнем и нижнем краях этой полосы.

Само решение в основном сводится к определению двух голоморфных функций $\Phi(z)$ и $F(z)$, существующих в формулах, определяющих значения напряжений X_y, X_x, Y_y (рис. 1), а также перемещений u и v для произвольной точки обсуждаемой области.

Применяя зависимости, выступающие между значением голоморфной функции рассматриваемой и ее действительной равно как и мнимой частью, на краях этой полосы выводятся формулы (10) и (13), определяющие искомые функции $\Phi(z)$ и $F(z)$.

Summary

A PLATE STRIP ACTED ON BY EXTERNAL LOAD

The solution of the problem of an isotropic plate strip subject to the action of a load on the upper and lower edge.

The solution reduces, in principle, to the determination of two holomorphic functions $\Phi(z)$ and $F(z)$, figuring in the equations for the stresses X_y, X_x and Y_y (Fig. 1) and the displacements u and v for any point of the region considered.

Using the relations between the value of the holomorphic function in the strip region and its real and imaginary part along the edges, the equations (10) and (13) for $\Phi(z)$ and $F(z)$ are derived.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 maja 1959 r.