

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

**UTRATA STATECZNOŚCI PRZEZ ZNIEKSZTAŁCENIE
PRZEKROJU POPRZECZNEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLI**

TOM VIII · ZESZYT 1 · ROK 1960

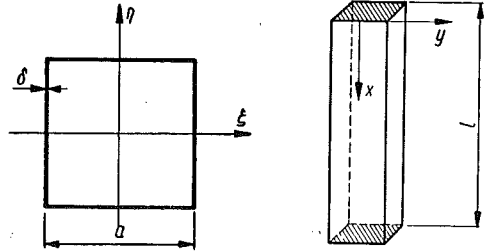
SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	59
2. Stateczność pręta w zakresie sprężystym	60
3. Rozwiązanie metodą energetyczną	65
4. Wyboczenie w obszarze plastycznym	68
5. Uwagi końcowe	70

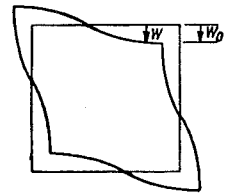
1. Uwagi wstępne

Przedmiotem pracy jest szczegółowa analiza pewnej postaci utraty stateczności pręta cienkościennego o zamkniętym przekroju kwadratowym (rys. 1).

Zarówno w klasycznej teorii wyboczenia EULERA, jak i w teorii prętów cienkościennych zakłada się, że przekrój poprzeczny jest nieodkształcalny, co w praktyce oznacza konieczność stosowania przepon poprzecznych rozmieszczonych w stosunkowo małych odstępach. Jeżeli przepon brak (praktycznie przypadek ten nie wchodzi w rachubę) lub jeżeli odległości między nimi są duże, to niezbędne jest uwzględnienie odkształcalności przekroju poprzecznego pręta. Dotychczas brak jest ogólnej teorii stateczności prętów cienkościennych, uwzględniającej ten czynnik. Brak zwłaszcza zupełnie prac traktujących o stateczności prętów.



Rys. 1



Rys. 2

o odkształcalnym zamkniętym przekroju poprzecznym¹

W pracy niniejszej rozważymy pewien szczególny przypadek utraty stateczności, polegający na tym, że oś pręta pozostaje prosta, lecz poszczególne jego ścianki ulegają wyboczeniu, co pociąga za sobą zniekształcenie przekroju poprzecznego (rys. 2). Przypadek ten jest możliwy tylko w pręcie o przekroju kwadratowym i ściankach jednakowej grubości. Jeżeli warunki te nie będą spełnione, wówczas zniekształcenie przekroju poprzecznego będzie związane z zakrzywieniem osi pręta lub jego skręceniem. W związku z powyższym dla tego szczególnego przypadku, w którym zachodzi jedynie zmiana postaci przekroju poprzecznego, proponujemy nazwę «wyboczenie postaciowe».

¹ Pomijamy zagadnienia tzw. stateczności lokalnej, czyli wyboczenia płytowego ścianek pręta, opracowane dosyć wyczerpująco, [1] i [2].

Przedstawione rozwiązanie tego zagadnienia jest dosyć skomplikowane i nie prowadzi do ścisłego wzoru na siłę krytyczną wyboczenia postaciowego. Można natomiast wyliczyć ją z równania przestępnego, które wyprowadzimy dla obszarów sprężystego i plastycznego. Poza tym podamy wzór przybliżony, otrzymany metodą energetyczną, z którego otrzymuje się jednak, w przypadkach mogących mieć praktyczne znaczenie, dobre wyniki.

Zasadnicze rozważania przeprowadzimy dla pręta usztywnionego dwiema przeponami w przekrojach skrajnych, posiadających swobodę spaczenia (deplanacji).

Dla pręta tego rodzaju siła krytyczna wyboczenia EULERA wynosi

$$(1.1) \quad P_E = \frac{\pi^2 EI_c}{l^2},$$

gdzie I_c jest momentem bezwładności całego przekroju: $I_c = (2/3)\delta a^3$. Zatem

$$P_E = \frac{2}{3} \frac{\pi^2 E}{l^2} \delta a^3.$$

Siła krytyczna wyboczenia skrętnego (por. [3]) dana jest wzorem²

$$P_\varphi = \frac{GI_a}{r_0^2} = \frac{3}{2} \frac{E}{1+\nu} \delta a.$$

Jak widać, wyboczenie skrętne jest miarodajne, jeżeli długość pręta l jest mniejsza niż $(2/3)\pi a \sqrt{(1+\nu)}$, czyli biorąc $\nu = 0,3$ dla $l < 2,39a$. Oznacza to, że w praktyce z dwu wymienionych sił krytycznych miarodajna jest zawsze siła P_E , do niej zatem będziemy odnosić otrzymane wyniki.

2. Stateczność pręta w zakresie sprężystym

Zakładamy, że pręt jest ściskany siłą osiową P . Ze względu na symetrię przekroju i antysymetrię założonych odkształceń względem osi ξ oraz η można rozpatrywać tylko jedną ściankę pręta. Ścianka ta jest płytą ściskaną równomiernie jednokierunkowo i stosuje się do niej znane równanie (por. np. [1])

$$(2.1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie

$$N_x = \frac{P}{4a}, \quad D = \frac{1}{12} \frac{\delta^3}{1-\nu^2} E.$$

² Oba wzory są wyprowadzone oczywiście dla przekroju nieodkształcalnego.

Istnienie w przekrojach skrajnych sztywnych w swej płaszczyźnie i wiotkich na zginanie przepon daje na krawędziach ścianki $x = 0$ oraz $x = l$ warunki wolnego podparcia:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Warunki te będą spełnione przy określeniu powierzchni ugięcia ścianki za pomocą funkcji

$$w(x, y) = f(y) \sin a_n x,$$

gdzie

$$a_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Po wstawieniu powyższego do (2.1) otrzymujemy równanie różniczkowe dla funkcji $f(y)$:

$$f^{IV} - 2a_n^2 f'' + \left(a_n^4 - \frac{P}{4aD} a_n^2 \right) f = 0,$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \sin qy + C_3 \operatorname{ch} py + C_4 \cos qy,$$

gdzie

$$p = \sqrt{\sqrt{\frac{P}{4aD} a_n^2 + a_n^2}}, \quad q = \sqrt{\sqrt{\frac{P}{4aD} a_n^2 - a_n^2}}.$$

Rozwiązanie to jest poprawne, jeżeli pierwiastek q jest rzeczywisty. Narzuca to pewien warunek na otrzymaną siłę krytyczną, który jednak, jak zobaczymy, nie będzie praktycznie biorąc zmniejszał ogólności rozwiązania.

Odształcenie ścianki jest antysymetryczne względem jej środka, zatem wyrazy symetryczne we wzorze na $f(y)$ możemy odrzucić przyjmując $C_3 = C_4 = 0$. Pozostają zatem do wyznaczenia dwie stałe C_1 i C_2 w uproszczonym wzorze

$$(2.2) \quad f(y) = C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \sin qy.$$

Pierwsze z potrzebnych do tego równań otrzymamy biorąc pod uwagę symetrię odształceń przekroju poprzecznego względem przekątnych, która powoduje, że dla $y = \pm a/2$ mamy

$$(2.3) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Otrzymujemy stąd równanie

$$(2.4) \quad C_1 p \operatorname{ch} \bar{p} + C_2 q \cos \bar{q} = 0,$$

gdzie

$$\bar{p} = p \frac{a}{2}, \quad \bar{q} = q \frac{a}{2}.$$

Drugie równanie będzie natury statycznej. Obliczymy reakcję $r_y(x)$ na krawędzi podłużnej $y = a/2$ ścianki oznaczając ją w dalszym ciągu dla krótkości literą r .

Znany wzór

$$r_y(x) = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

redukuje się ze względu na (2.3) do pierwszego wyrazu:

$$r(x) = -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$$

Podstawiając (2.2) otrzymamy

$$(2.5) \quad r(x) = -D(C_1 p^3 \operatorname{ch} \bar{p} - C_2 q^3 \cos \bar{q}) \sin \alpha_n x.$$

Dwie takie reakcje obciążają każdą ściankę, która ulega wyboczeniu w swej płaszczyźnie, zatem ma zastosowanie dla niej równanie³

$$(2.6) \quad w_0^{IV} + \frac{P}{4EI} w_0'' + \frac{2}{EI} r(x) = 0,$$

gdzie $w_0(x)$ jest ugięciem ścianki równym ugięciu płyty dla $y = a/2$:

$$(2.7) \quad w_0(x) = f \left(\frac{a}{2} \right) \sin \alpha_n x,$$

zaś I jest momentem bezwładności ścianki, $I = \delta a^3/12$.

Funkcja $w_0(x)$ musi spełniać warunki wolnego podparcia, wynikające z założonej swobody spaczenia przekrojów skrajnych, zatem:

$$\text{dla } x = 0 \text{ oraz } x = l \quad w_0 = 0, \quad w_0' = 0.$$

Jak widać wzór (2.7) spełnia te warunki. Wstawiając do (2.6) $w_0(x)$ według (2.7) z uwzględnieniem (2.2), otrzymamy wyrażenie na reakcję $r(x)$:

$$(2.8) \quad r(x) = \frac{1}{2} (C_1 \operatorname{sh} \bar{p} + C_2 \sin \bar{q}) \left(\alpha_n^2 \frac{P}{4} - \alpha_n^4 EI \right) \sin \alpha_n x.$$

Reakcja z powyższego wzoru musi być równa reakcji według wzoru (2.5). Otrzymujemy w ten sposób drugie równanie, które wraz z równaniem (2.4) daje układ jednorodny ze względu na stałe C_1 i C_2 :

$$(2.9) \quad \begin{cases} C_1 p \operatorname{ch} \bar{p} + C_2 q \cos \bar{q} = 0, \\ C_1 \left[\left(\alpha_n^2 \frac{P}{4} - \alpha_n^4 EI \right) \operatorname{sh} \bar{p} + 2D p^3 \operatorname{ch} \bar{p} \right] + \\ \quad + C_2 \left[\left(\alpha_n^2 \frac{P}{4} - \alpha_n^4 EI \right) \sin \bar{q} - 2D q^3 \cos \bar{q} \right] = 0. \end{cases}$$

³ Pominięto tutaj wpływ sił tnących, który jest mały i może być istotny tylko dla $n > 1$. Jak zobaczymy, miarodajne będą wzory otrzymane dla $n = 1$.

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje równanie przestępne do obliczenia siły krytycznej:

$$(2.10) \quad \left(\alpha_n^2 \frac{P_{kr}}{4} - \alpha_n^4 EI \right) (q \operatorname{th} \bar{p} - p \operatorname{tg} \bar{q}) + 2D(qp^3 + pq^3) = 0.$$

W równaniu tym niewiadomą jest krytyczna wartość P_{kr} siły osiowej P ; wyrazimy ją przez siłę krytyczną wybočenja EULERA:

$$(2.11) \quad P_{kr} = \chi P_E = \chi \frac{\pi^2 EI_c}{l^2}.$$

W ten sposób niewiadomą będzie współczynnik χ ; warunek $\chi > 1$ oznacza, że miarodajna jest siła P_E ; gdy $\chi < 1$, miarodajne jest wybočenje postaciowe; gdy $\chi = 1$ mamy rozgraniczenie obszaru miarodajności obu wymienionych form wybočenja.

Podstawiając (2.11) oraz

$$D = \frac{1}{12} \frac{\delta^3}{1-\nu^2} E, \quad I = \frac{1}{12} \delta a^3, \quad I_c = \frac{2}{3} \delta a^3$$

do równania (2.10) otrzymujemy

$$(2.12) \quad (1-\nu^2)(2\chi-n^2)\pi \frac{a}{l} \left(\gamma_2 \operatorname{th} \frac{n\pi}{2} \frac{a}{l} \gamma_1 - \gamma_1 \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2} \frac{a}{l} \gamma_2 \right) + \\ + 2 \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 n (\gamma_1 \gamma_2^3 + \gamma_2 \gamma_1^3) = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \frac{a}{\delta} \sqrt{2(1-\nu^2)\chi} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \frac{a}{\delta} \sqrt{2(1-\nu^2)\chi} - 1}.$$

Ze względu na warunek wymieniony poprzednio χ musi spełniać nierówność

$$\chi > \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \frac{n^2}{2(1-\nu^2)}.$$

Dla $n = 1$ po wstawieniu wartości liczbowych otrzymamy (biorąc $\nu = 0,3$) równanie:

$$(2.13) \quad 2,85885(2\chi-1) \frac{a}{l} \left(\gamma_2 \operatorname{th} 1,57079 \frac{a}{l} \gamma_1 - \gamma_1 \operatorname{tg} 1,57079 \frac{a}{l} \gamma_2 \right) + \\ + 2 \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 (\gamma_1 \gamma_2^3 + \gamma_2 \gamma_1^3) = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{1,34907 \frac{a}{\delta} \sqrt{\chi} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1,34907 \frac{a}{\delta} \sqrt{\chi} - 1},$$

przy czym musi być spełniony warunek $\chi > 0,54945 (\delta/a)^2$.

W równaniach (2.12) i (2.13) występują jako parametry wielkości l/a oraz a/δ charakteryzujące pręt.

Najciekawsze i najważniejsze praktycznie jest określenie obszaru, w którym siła krytyczna wyboczenia postaciowego jest mniejsza od siły EULERA P_E , dla którego zatem mamy $\chi < 1$. W tym celu należy założyć $\chi = 1$ i z równania (2.13)⁴ znaleźć odpowiadające sobie wartości parametrów l/a oraz a/δ . Wyniki odpowiednich obliczeń dla szerokiego zakresu wartości a/δ zestawione są w tabelicy 1.

Tablica 1

$\chi = 1$			
a/δ	20	100	200
l/a	6,116	13,78	19,53

Jeżeli dla danego stosunku a/δ wielkość l/a jest mniejsza od podanej w tabelicy, wówczas występuje wyboczenie postaciowe, jeżeli jest większa — wyboczenie EULERA.

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewien przypadek szczególny, mianowicie gdy $\cos \bar{q} = 0$; może to nastąpić, jeżeli

$$(2.14) \quad \bar{q} = \frac{m\pi}{2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots).$$

Wówczas z pierwszego równania układu (2.9) otrzymujemy $C_1 = 0$, zaś z drugiego (dla $n = 1$)

$$(2.15) \quad P_{kr} = 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 EI_c}{l^2} = \frac{1}{2} P_E.$$

Zatem przypadkowi temu odpowiada $\chi = 0,5$. Z drugiej strony warunek (2.14) daje bezpośrednio

$$(2.16) \quad P_{kr} = \frac{4Da}{\alpha_n^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \alpha_n^2 \right)^2.$$

Najmniejszą siłę we wzorze (2.16) otrzymamy przyjmując $m = 1$. Porównując dalej prawe strony równań (2.15) i (2.16) otrzymamy prosty związek między parametrami l/a oraz a/δ , przy którego spełnieniu $\chi = 0,5$:

$$(2.17) \quad \frac{l}{a} = \sqrt{\frac{a}{\delta} \sqrt{1 - \nu^2} - 1}$$

lub, biorąc $\nu = 0,3$,

$$\frac{l}{a} = \sqrt{0,95407 \frac{a}{\delta} - 1}.$$

⁴ Jak stwierdzono, dla $\chi = 1$ zawsze miarodajne jest $n = 1$, tzn. wyboczenie ścianki mające postać jednej półfali.

Obliczone wartości l/a zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 2

$\chi = 0,5$					
a/δ	20	50	100	150	200
l/a	4,25	6,83	9,72	11,92	13,78

Zauważmy, że przypadek $\chi = 0,5$ rozgranicza zjawisko wyboczenia postaciowego na dwa obszary o odmiennym sensie fizycznym. Mianowicie ze wzoru (2.8) widać, że dla $\chi = 0,5$ reakcja r znika, zatem każda ścianka ulega wówczas wyboczeniu niezależnie: istotnie, czwarta część siły krytycznej według (2.15) jest równa sile EULERA dla jednej ścianki o momencie bezwładności I . Jeżeli $\chi > 0,5$, wówczas reakcja r jest dodatnia, tzn. utrudnia wyboczenie ścianki. Gdy natomiast $\chi < 0,5$, wówczas reakcja jest ujemna, tzn. skierowana zgodnie z ugięciem ścianki w_0 . Dochodzi do pozornego paradoksu: ścianki przyległe nie utrudniają, lecz wprost przeciwnie ułatwiają jej wyboczenie. Siła krytyczna przeliczona na jedną ściankę jest wtedy mniejsza niż siła EULERA $\pi^2 EI/l^2$ dla ścianki wolnostojącej.

3. Rozwiązanie metodą energetyczną

Rozwiązanie ściśle podane w p. 2 prowadzi do skomplikowanego równania przestępnego. Jak wiadomo, wyniki o dobrej na ogół dokładności i jednocześnie stosunkowo proste można otrzymać stosując metody energetyczne. Zastosujemy do naszego zagadnienia jedną z nich, mianowicie znaną metodę TIMOSZENKI. Jak wiadomo, polega ona na przyjęciu dowolnego, spełniającego warunki brzegowe odkształcenia układu i wykorzystania równości

$$(3.1) \quad \Delta V = \Delta T,$$

gdzie ΔV jest energią potencjalną przyjętego odkształcenia, zaś ΔT przedstawia pracę sił zewnętrznych na przemieszczeniach odpowiadających temu odkształceniu.

Przyjmujemy w naszym zagadnieniu powierzchnię ugięcia ścianki rozpatrywanej jako płyta w postaci

$$(3.2) \quad w(x, y) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 3, 5, \dots).$$

Równanie powyższe spełnia warunki wolnego podparcia na krawędziach poprzecznych i warunek geometryczny (2.3) na krawędzi podłużnej. Podstawiając $y = a/2$ do (3.2) otrzymamy równanie linii ugięcia ścianki rozpatrywanej jako pręt,

$$(3.3) \quad w_0(x) = A(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

które spełnia również wymagane warunki wolnego podparcia dla $x = 0$ oraz $x = l$.

Ze względu na antysymetrię odkształceń przekroju poprzecznego możemy rozpatrywać tylko jedną ściankę. Energię potencjalną jej zginania płytowego wyliczymy ze wzoru (por. np. [1])

$$\Delta V' = \frac{D}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

natomiast energia potencjalna zginania prętowego określona jest znanym wzorem

$$\Delta V'' = \frac{EI}{2} \int_0^l (w_0'')^2 dx.$$

Podstawiając odpowiednie równania (3.2) i (3.3) i całkując otrzymujemy pełną energię potencjalną założonego odkształcenia

$$\Delta V = A^2 \frac{1}{8} \pi^4 a l D \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{a^2} \right)^2 + A^2 \frac{1}{4} EI \frac{n^4 \pi^4}{l^3}.$$

Praca sił zewnętrznych na odkształceniach zginania płytowego przedstawia się jako całka (por. np. [1]):

$$\Delta T' = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^l N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy,$$

zaś praca sił zewnętrznych na odkształceniach prętowych wynosi:

$$\Delta T'' = \frac{1}{2} \frac{P}{4} \int_0^l (w_0')^2 dx.$$

Obliczając całki otrzymamy pełną pracę sił zewnętrznych:

$$\Delta T = A^2 P \frac{\pi^2 n^2}{32l} + A^2 P \frac{\pi^2 n^2}{16l}.$$

Biorąc pod uwagę (3.1) mamy

$$P_{kr} = \frac{\frac{1}{8} \pi^4 a l \frac{D}{EI} \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n^4 \pi^4}{l^3}}{\frac{3}{32} \frac{\pi^2 n^2}{l}} EI$$

lub, po prostych przekształceniach,

$$P_{kr} = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{1}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \left[n^2 + \left(\frac{l}{a} \right)^2 m^2 \right]^2 + \frac{1}{3} n^4 \right\} \frac{\pi^2 EI_c}{l^2}.$$

Jak widać, najmniejszą siłę krytyczną otrzymamy przyjmując $m = 1$; zatem

$$(3.4) \quad P_{kr} = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{1}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \left[n^2 + \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right]^2 + \frac{n^4}{3} \right\} P_E.$$

Stąd wzór na współczynnik χ :

$$(3.5) \quad \chi = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{1}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \left[n^2 + \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{3} n^4 \right\}.$$

Dla $\nu = 0,3$ mamy:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \chi = 0,1831 \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{3} & \text{dla } n = 1, \\ \chi = 0,04579 \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right]^2 + \frac{4}{3} & \text{dla } n = 2. \end{cases}$$

Zestawienie obliczonych powyższymi wzorami współczynników χ zawiera tablica 3.

Tablica 3

$a/\delta \backslash l/a$	4	8	12	16	20
20	0,4556	2,267*	—	—	—
50	0,3545	0,6427	1,873*	—	—
100	0,3386	0,4107	0,7183	1,543	—
150	0,3357	0,3677	0,5042	0,8707	—
200	0,3346	0,3526	0,4295	0,6356	1,069

Dla wszystkich wartości współczynnika χ podanych w tablicy 3 miarodajne jest $n = 1$ (z wyjątkiem wartości oznaczonych gwiazdką, gdzie miarodajne jest $n = 2$).

Równanie (3.5) pozwala na określenie zależności $l/a = f(a/\delta)$ dla $\chi = 1$; otrzymamy (przyjmując $\nu = 0,3$)

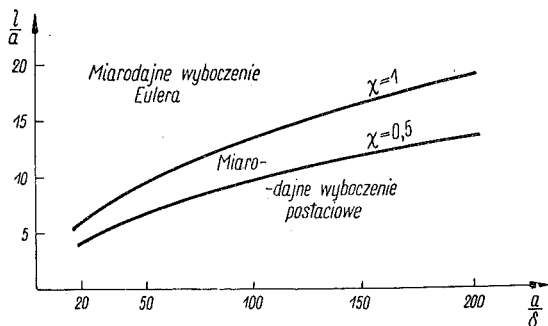
$$(3.7) \quad \frac{l}{a} = \sqrt{1,9081 \frac{a}{\delta} - 1}.$$

Tablica 4 przedstawia odpowiednie wartości liczbowe:

Tablica 4

$\chi = 1$ metoda energetyczna					
a/δ	20	50	100	150	200
l/a	6,096	9,768	13,77	16,89	19,51

Tablica ta porównywana z tablicą 1 daje dobrą orientację odnośnie dokładności wzoru przybliżonego (3.5). Jak widać, błędy nie przekraczają ułamka procentu. Przeprowadzone przez autora obliczenia wykazują, że również dla wszystkich nie przekraczających jedności współczynników χ zestawionych w tablicy 3 błąd jest mniejszy od jednego procentu. Dla $\chi > 1$ błąd rośnie, lecz wówczas miarodajne jest wyoboczenie EULERA. Jasne jest, że także dla bardzo małych współczynników χ błąd będzie większy, ponieważ wzór (3.5) nie może dać χ mniejszego niż $1/3$, podczas gdy w rozwiązaniu ścisłym współ-



Rys. 3

Zauważmy na koniec, że dla $\chi = 0,5$ wzór (3.5) daje wynik ścisły, identyczny z (2.17). Przyczyną jest fakt, że dla $\chi = 0,5$ rozwiązanie ściśle redukuje się, jak wiemy, do części trygonometrycznej, identycznej ze wzorem (3.2).

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy $l/a = f(a/\delta)$ dla $\chi = 1$ oraz $\chi = 0,5$. Krzywa $\chi = 1$ oddziela obszary miarodajności wyoboczenia EULERA i postaciowego.

4. Wyoboczenie w obszarze plastycznym

Rozszerzymy obecnie nasze rozważania na obszar plastyczny. Jako podstawę przyjmijmy dla zginania prętowego hipotezę modułu stycznego wysuniętą przez ENGESSERA, która zarzucona następnie na rzecz teorii «modułu zredukowanego» KÁRMÁNA odzyskała ponownie uznanie w świetle nowych badań doświadczalnych i teoretycznych prac SHANLEYA. Dla zginania płytowego oprzemy się na teorii BLEICHA (por. np. [1], [2]), która, jakkolwiek nie posiada ścisłego uzasadnienia, daje jednak wyniki dobrze zgadzające się z danymi doświadczalnymi. Przyjmijmy zatem dla odkształconej powierzchni płyty równanie

$$(4.1) \quad \tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\tau} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie τ jest stosunkiem modułu stycznego E_t do modułu sprężystości E : $\tau = E_t/E$. Jego rozwiązanie ogólne jest identyczne z otrzymanym poprzednio dla zakresu sprężystego

$$(4.2) \quad w(x, y) = (C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \sin qy + C_3 \operatorname{ch} py + C_4 \cos qy) \sin a_n x.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego dane tu są za pomocą wzorów:

$$p = \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\sqrt{\frac{P}{4D\tau a} \alpha_n^2 + \alpha_n^2}}, \quad q = \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\sqrt{\frac{P}{4D\tau a} \alpha_n^2 - \alpha_n^2}}.$$

Reakcja r wynosi

$$r(x) = -D(C_1 p^3 \operatorname{ch} \bar{p} - C_2 q^3 \cos \bar{q}) \sin \alpha_n x.$$

Ta sama reakcja wzięta jako obciążenie pręta określona jest za pomocą wzoru

$$r(x) = -w_0^{IV} EI \tau - w_0' \frac{P}{4}.$$

Jak widać, wzory są podobne do wzorów p.2, różnią się jedynie występowaniem mnożnika τ przy niektórych wyrazach, zaś przy $\tau = 1$ będą z nimi identyczne.

Dalsze rozważania analogiczne do przeprowadzonych dla zakresu sprężystego prowadzą do równania przestępnego

$$(4.3) \quad \left(\alpha_n^2 \frac{P_{kr}}{4} - \alpha_n^4 EI \tau \right) (q \operatorname{th} \bar{p} - p \operatorname{tg} \bar{q}) + 2D(p^3 q + q^3 p) = 0.$$

Wprowadzenie współczynnika χ wprost do równania przestępnego jest w obszarze plastycznym niemożliwe ze względu na to, że wyboczenie postacowe zachodzi (poza przypadkiem $\chi = 1$) przy innych naprężeniach niż wyboczenie EULERA, zatem ważny jest w obu przypadkach inny współczynnik τ .

Wygodniejsze jest wprowadzenie do równania przestępnego wprost naprężeń krytycznych σ_{kr} . Przyjmując więc $P_{kr} = 4a\delta\sigma_{kr}$ i wyrażając I oraz D przez wymiary przekroju poprzecznego pręta otrzymamy równanie przestępne w postaci:

$$(4.4) \quad \sqrt[4]{\tau} \left[\sigma_{kr} - \frac{1}{12} n^2 \pi^2 E \tau \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \left[\gamma_2 \operatorname{th} \frac{n\pi}{2} \frac{a}{l} \sqrt[4]{\tau} \gamma_1 - \gamma_1 \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2} \frac{a}{l} \sqrt[4]{\tau} \gamma_2 \right] + \frac{n\pi}{6(1-\nu^2)} E \tau \frac{l}{a} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 (\gamma_1 \gamma_2^3 + \gamma_2 \gamma_1^3) = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{l}{\delta} \frac{1}{n\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{\sigma}{E\tau} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{l}{\delta} \frac{1}{n\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{\sigma_{kr}}{E\tau} - 1}.$$

Jak wiadomo współczynnik τ jest funkcją naprężeń krytycznych σ_{kr} . Mając dokładny wykres zależności $\sigma = f(\varepsilon)$ można dla każdej wartości naprężeń σ określić odpowiadający jej moduł styczny E_t , a zatem również współczynnik τ . Podstawiając zatem do (4.4) pary odpowiadających sobie liczb σ_{kr} , τ , otrzymamy równanie przestępne o dwu niewiadomych parametrach l/a i l/δ . Przyj-

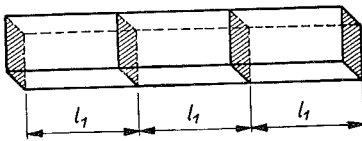
mując dalej wartość jednego z nich, możemy określić drugi. Celem ewentualnego znalezienia współczynnika należy parametry l/a i a/δ podstawić do wzoru na siłę krytyczną wyboczenia typu EULERA

$$P = \frac{\pi^2 EI_c \tau}{l^2},$$

którą można następnie obliczyć drogą prób i porównać z siłą krytyczną wyboczenia postaciowego.

5. Uwagi końcowe

W punktach 2-4 rozważano pręt stężony dwiema przeponami w przekrojach skrajnych posiadających swobodę spaczenia. W praktyce możemy mieć do czynienia z prętami stężonymi kilkoma przeponami (rys. 4). Jeżeli odstępki między nimi będą jednakowe i jeżeli założymy swobodę spaczenia przekrojów



Rys. 4

skrajnych, wówczas rozwiązanie ściśle otrzymamy przyjmując l_1 zamiast l we wszystkich wyprowadzonych poprzednio wzorach. Ścianka wyboczy się wówczas podług sinusoidy, przy czym długość półfali będzie równa l_1 . Jeżeli przekroje skrajne nie mają swobody spaczenia (co w praktyce z reguły zachodzi), wówczas otrzymamy w ten sposób wyniki przybliżone, tym dokładniejsze, im więcej jest przepon. Należy się spodziewać, że już przy czterech przeponach będą one wystarczająco dokładne.

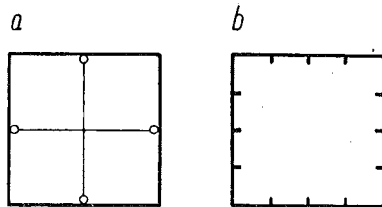
Rozważania powyższe wyczerpują w zasadzie zagadnienie. Z wyników zestawionych w tab. 3 widoczne jest, że możliwość wyboczenia postaciowego jest w obszarze sprężystym znikoma, jeżeli chodzi o pręty wykonane ze stali używanych w konstrukcjach. Wydaje się również oczywiste, że przy stosowanych wymiarach prętów, także w obszarze plastycznym, siła krytyczna wyboczenia postaciowego będzie na ogół większa niż siła krytyczna wyboczenia typu EULERA. Natomiast gdy pręt wykonany jest z materiału o małym module sprężystości, ale znacznej wytrzymałości i wysokiej granicy plastyczności, wówczas również w niektórych przypadkach praktycznych sytuacja może być odwrotna. Niektóre stopy aluminiowe spełniają te warunki.

Nie należy jednak zapominać, że omówiona tu forma utraty stateczności nie jest tak niebezpieczna jak wyboczenie prętowe typu EULERA. Przekroczenie siły EULERA oznacza bowiem na ogół poważne zbliżenie się do obciążenia niszczącego. Nie można tego powiedzieć o wyboczeniu postaciowym. Oś pręta pozostaje tu prosta i nie ma gwałtownego wzrostu sił wewnętrznych przy przechodzeniu od niestateczności do statecznej postaci równowagi. Przy tym znaczna część odkształceń ma charakter płytowy, a jak wiadomo nośność graniczna płyt jest wielokrotnie większa niż obciążenie krytyczne.

Interesujące jest porównanie naprężeń krytycznych wyoboczenia postacowego z naprężeniami krytycznymi wyoboczenia płytowego, które (por. np. [1]) wynoszą

$$(5.1) \quad \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2.$$

Łatwo stąd stwierdzić, że parametry l/a i a/δ , zestawione w tabl. 1 i 2, odpowiadające zarówno $\chi = 1$ jak i $\chi = 0,5$, dają większe naprężenia krytyczne, czyli że utrata stateczności nastąpi przez wyoboczenie płytowe ścianek w obu tych przypadkach. Możliwe są jednak pręty, w których wyoboczenie płytowe odpowiadające wzorowi (5.1) nie może w ogóle mieć miejsca, podczas gdy rozpatrywane przez nas zniekształcenie przekroju nie jest skrępowane (rys. 5a). Warto też zwrócić uwagę na pręt uźebrowany podłużnie (rys. 5b), dla którego naprężenia krytyczne wyoboczenia płytowego wzrosną wielokrotnie w porównaniu z naprężeniami pręta o ściankach nieuźebrowanych, zaś naprężenia wyoboczenia postacowego — tylko nieznacznie.



Rys. 5

Pomimo tych zastrzeżeń wyniki przeprowadzonej analizy można uważać za ciekawe, zwłaszcza dlatego, że stanowią pierwszy krok w kierunku zbadania wpływu odkształcalności zamkniętego przekroju poprzecznego pręta cienkościennego na obciążenie krytyczne. Pożądane jest rozszerzenie badań w tej dziedzinie na elementy bardziej złożone i bardziej skomplikowane postaci utraty stateczności, w których zniekształcenie przekroju poprzecznego jest połączone z zakrzywieniem lub skręceniem pręta. Można się spodziewać, że w wielu rodzajach przekrojów wpływ ich zniekształcenia na miarodajne obciążenie krytyczne może być znacznie większy niż w opisanym tu prostym przypadku.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.
- [2] F. BLERICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York 1952.
- [3] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.

Резюме

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВСЛЕДСТВИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТВЕРЖНЯ

Рассматривается сжимаемый в осевом направлении, тонкостенный стержень с замкнутым, квадратным сечением (рис. 1). Исследуется возможность потери устойчивости, состоящей в том, что продольному изгибу в своей

плоскости подвергаются все стенки стержня, при чем ось его остается прямой, а поперечное сечение деформируется. Предполагается, что крайние сечения $x = 0$ и $x = l$, ужесточены диафрагмами, имеют свободу деформации. Исходной точкой является уравнение (2.6) для стенки с моментом инерции I , сжимаемой силой $P/4$ и нагруженной двумя реакциями r . Эти реакции являются воздействием деформированных как пластинки соседних стенок (рис. 2) при чем исходным пунктом расчета является уравнение (2.1) для пластинки сжимаемой в одном направлении. Критическая сила получается из трансцендентного уравнения (2.10). Ее можно выразить как критическую силу эйлерового продольного изгиба (2.11) при помощи коэффициента χ , который определяется по трансцендентному уравнению (2.12). Размеры стержня, при которых $\chi = 1$, сопоставлены на таблице 1. При $\chi = 0,5$ нет взаимной реакции r между стенками, которые тогда независимо подвергаются продольному изгибу. В разделе 3 выводится энергетическим методом, при предположении поверхности прогиба стенки в виде (3.2), приближенная формула (3.5). Значения коэффициента χ , полученные по этой формуле, сопоставляются на таблице 3. Погрешности не превышают 1%. В разделе 4, основываясь на гипотезе касательного модуля и теории Блейха, выводится трансцендентное уравнение (4.4) для пластической области.

Полученные результаты приводят к заключению, что критическая нагрузка согласно предлагаемой теории может быть значительно меньше эйлеровой силы, однако учитывая применяемые обычно размеры стальных стержней этот случай является как в упругой так и в пластической областях — мало вероятным. В стержнях же, изготовленных из материалов с малым модулем упругости и высоким пределом пластичности, потеря устойчивости по обсуждаемой форме выпучивания может оказаться более вероятная чем Ейлера.

Summary

STABILITY LOSS DUE TO THE DEFORMATION OF THE CROSS-SECTION

We consider a thin-walled bar with closed quadratic cross-section (Fig. 1). The possibility is investigated of stability loss where all the walls buckle in their planes, the axis of the beam remaining rectilinear. The cross-section of the bar is thus deformed. It is assumed that the end sections $x = 0$, $x = l$ are stiffened by ribs and are free to warp. The starting point is the Eq. (2.6) for a wall with the moment of inertia I compressed by the force $P/4$ and loaded by the two reactions r . These reactions are due to the neighbouring walls constituting plates subject to deformation (Fig. 2), and are calculated from the Eq. (2.1) for a plate compressed in one direction. The critical force is obtained from the transcendental equation (2.10). This force may be expressed in terms of the critical force of Eulerian buckling (2.11) by using the coefficient χ ,

which is computed from the transcendental equation (2.12). The dimensions of the bar, for which we have $\chi = 1$, are represented in Table 1. For $\chi = 0,5$ there is no interaction between the walls which suffer independent buckling. In Sec. 3, an approximate equation (3.5) is obtained by means of the energy method, assuming the deflection surface of the wall in the form (3.2). The values of the coefficient χ obtained from that equation are shown in Table 3. The errors do not exceed one percent. In Sec. 4, the transcendental equation (4.4) is derived for the plastic range on the basis of shear modulus the hypothesis and BLEICH's theory. The results obtained lead to the conclusion that the critical load may, according to the theory presented, be considerably lower than the EULERIAN force, but that for the usual dimensions of steel bars this case is unlikely to occur either in the elastic or in the plastic range. On the other hand, for bars made of materials with low modulus of elasticity and high elastic limit the buckling form under consideration may prove to be of some importance also in practical cases.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 kwietnia 1959 r.
