

JERZY GRYCZ

O PRZEKSZTAŁCENIACH USTROJU CZTEROWĘZŁOWEGO
PRZEZ WYMIANĘ PRĘTÓW

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXL

TOM VIII . ZESZYT 1 . ROK 1960

SPIS TREŚCI

Oznaczenia	45
1. Wstęp	45
2. Podstawowe zależności i twierdzenia z nich wynikające	46
2.1. Schemat ustroju pierwotnego	46
2.2. Potencjał	46
2.3. Równorzędność dwóch argumentów przekształcenia	46
2.4. Pomocnicza funkcja K	48
2.5. Twierdzenia o istnieniu ustrojów odpowiadających minimum potencjału sprężystości	51
3. Sposób wyznaczania ustroju minimalnego	52
4. Przykład liczbowy	52

Oznaczenia

- $\varepsilon_{i,j}$ odkształcenie jednostkowe wzdłużne pręta między węzłami i oraz j ;
- $l_{i,j}$ długość pręta i, j ;
- $A_{i,j}$ pole przekroju normalnego pręta i, j ;
- P_i dana dowolna siła obciążenia zewnętrznego przyłożona do węzła i ;
- X jedna z dwóch sił przyłożonych do węzłów 2 i 4 działających wzdłuż pręta 2-4 oraz przeciwnie skierowanych; siły te mogą przybierać różne wartości; za dodatnie uważamy takie siły X , które powodują wzajemne zbliżenie węzłów 2 i 4;
- $N_{i,j}^P$ siła normalna w pręcie i, j wywołana układem sił P_i ;
- $N_{i,j}^1$ siła normalna w pręcie i, j wywołana siłą $X = 1$;
- $N_{i,j}$ siła normalna w pręcie i, j wywołana obciążeniem P_i oraz siłami X ;
- $N_{i,j}^{a,b}$ siła normalna w pręcie i, j wywołana obciążeniem P_i oraz X w założeniu, że węzły a i b nie są połączone prętem;
- E współczynnik sprężystości odkształceń liniowych.

Przyjmujemy dodatni znak sił normalnych w przypadku rozciągania.

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań są kratownice płaskie izostatyczne o czterech węzłach. Celem analizy jest wskazanie warunków istnienia wśród sześciu ustrojów izostatycznych zbudowanych na danych czterech węzłach tylko jednego ustroju o najmniejszym potencjale, a ponadto wyprowadzenie zależności umożliwiających wyznaczenie ustroju minimalnego bez potrzeby obliczania potencjału.

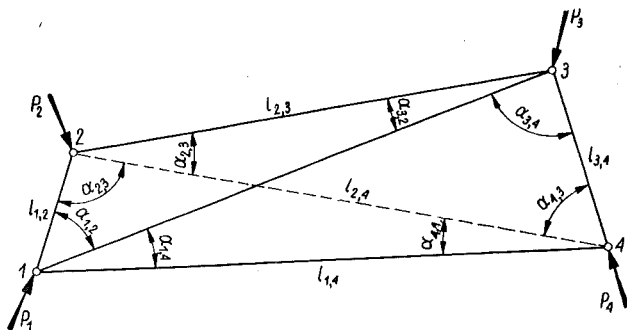
W pracy przyjęto następujące założenia:

- (1) rozpatrywany ustrój znajduje się w równowadze pod działaniem sił przyłożonych do węzłów,
- (2) siły zewnętrzne nie zmieniają się przy przekształcaniu ustroju,
- (3) wzajemne położenia węzłów ulegają zmianom jedynie wskutek odkształceń prętów, a zmiany te pomija się w warunkach równowagi,
- (4) położenia węzłów są dowolne; wyłączono jednak przypadek położenia którychkolwiek trzech węzłów na prostej,

- (5) odkształcenia jednostkowe wzdłużne prętów są sobie równe,
 (6) tworzywo rozpatrywanego ustroju jest jednorodne i naprężenia graniczne na ściskanie równe są naprężeniom granicznym przy rozciąganiu.

2. Podstawowe zależności i twierdzenia z nich wynikające

2.1. Schemat ustroju pierwotnego. Jeden z sześciu ustrojów obieramy za punkt wyjścia rozważań. Niech to będzie np. ustrój przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1

2.2. Potencjał. Potencjał sprężystości dowolnej odmiany sześciu ustrojów izostacyjnych zbudowanych na tych samych węzłach wyraża się wzorem, [2], [3],

$$(2.2.1) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i_1, j_1}^{i_5, j_5} N_{i_1, j_1}^{a, b} \varepsilon_{i_1, j_1} l_{i_1, j_1} \quad (a, b = 1, 2, 3, 4, \quad a \neq b).$$

Ponieważ przyjęliśmy, że odkształcenia jednostkowe prętów są sobie równe

$$|\varepsilon_{i, j}| = |\varepsilon_0|,$$

otrzymujemy nowy wzór

$$(2.2.2) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i_1, j_1}^{i_5, j_5} |N_{i_1, j_1}^{a, b}| |\varepsilon_0| l_{i_1, j_1} = \frac{|\varepsilon_0|}{2} \sum_{i_1, j_1}^{i_5, j_5} |N_{i_1, j_1}^{a, b}| l_{i_1, j_1}.$$

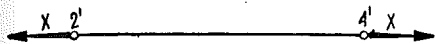
Z równości (2.2.2) wynika, że ustrojem minimalnym spośród sześciu odmian będzie ustrój spełniający zależność

$$(2.2.3) \quad \sum_{i_1, j_1}^{i_5, j_5} |N_{i_1, j_1}^{a, b}| l_{i_1, j_1} = \text{minimum}.$$

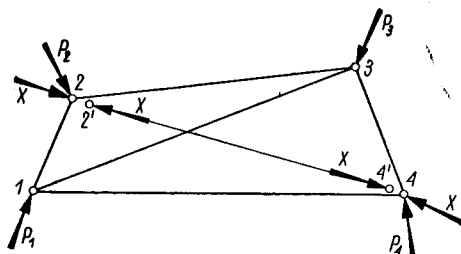
2.3. Równorzędność dwóch argumentów przekształcenia. Wprowadźmy do ustroju pierwotnego szósty pręt. W rozpatrywanym przypadku będzie to pręt 2-4. Zakładamy, że pręt ten jest obciążony siłami X działającymi wzdłuż jego osi i powodującymi rozciąganie (rys. 2).

Początkowo przyjmiemy niezależność odkształceń końców 2', 4' nowego pręta oraz węzłów 2, 4 ustroju pierwotnego, obciążonego siłami P_i i siłami X . Otrzymujemy więc układ przedstawiony na rys. 3.

Przed odkształceniem ustroju węzły 2 i 2' oraz węzły 4 i 4' będą odpowiednio zajmowały te same położenia, zaś po odkształceniu położenia te mogą być różne.



Rys. 2



Rys. 3

Zgodnie z zasadą superpozycji mamy

$$(2.3.1) \quad N_{i,j} = N_{i,j}^P + N_{i,j}^1 X.$$

Kratownicę uprzednio opisaną i przedstawioną na rys. 3 możemy w szczególnym przypadku uważać za ustrój zastępczy układu sześcioprętowego hiperstatycznego, jeżeli jego węzły 2 i 2' oraz 4 i 4' po odkształceniu będą odpowiednio zajmowały te same położenia. Takim szczególnym ustrojem będzie kratownica spełniająca równanie LEVY'EGO, [1],

$$(2.3.2) \quad \sum_{i_1, j_1}^{i_2, j_2} \frac{\partial F}{\partial l_{i,j}} \varepsilon_{i,j} l_{i,j} = 0,$$

przy czym funkcja

$$F = F(l_{1,2}, l_{2,3}, l_{3,4}, l_{1,4}, l_{2,4}, l_{1,3}) = 0$$

wyraża pewną zależność geometryczną pomiędzy wszystkimi długościami $l_{i,j}$ danego ustroju przed odkształceniem.

Ponieważ zachodzi związek

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{N_{i,j}}{EA_{i,j}},$$

przeto na podstawie równań (2.3.1) i (2.3.2) wielkość X możemy uważać za funkcję sześciu argumentów $A_{i,j}$. Przy założeniu równości odkształceń jednostkowych pięciu dowolnych prętów funkcja X będzie zależna od jednego obranego argumentu, który oznaczymy przez A_{i_0, j_0} .

$$(2.3.3) \quad X = f(A_{i_0, j_0}).$$

Po elementarnych przekształceniach doprowadzamy równość (2.3.2) do postaci

$$(2.3.4) \quad X = -A_{i_0, j_0} \frac{E \sum_{i_1, j_1}^{i_0, j_0} \frac{\partial F}{\partial l_{i_1, j_1}} \varepsilon_{i_1, j_1} l_{i_1, j_1}}{\frac{\partial F}{\partial l_{i_0, j_0}} l_{i_0, j_0} N_{i_0, j_0}^1} - \frac{N_{i_0, j_0}^p}{N_{i_0, j_0}^1}$$

We wzorze (2.3.4) znak $\sum_{i_1, j_1}^{i_0, j_0}$ odnosi się do wszystkich prętów poza prętem i_0, j_0 .

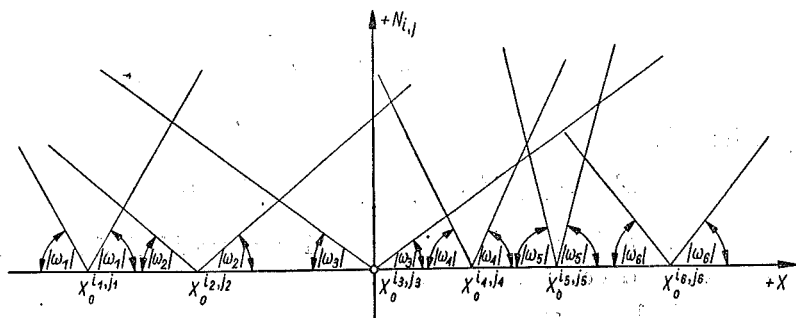
Z zależności (2.3.4) wynika, że każdej wartości A_{i_0, j_0} jednoznacznie odpowiada określona wartość X . Dochodzimy zatem do wniosku równorzędności dwóch argumentów przekształcenia ustroju hiperstatycznego czterowęzłowego — argumentu X oraz argumentu A_{i_0, j_0} .

2.4. Pomocnicza funkcja K . W dalszych rozważaniach oberzemy za argument X i rozpatrzmy funkcję pomocniczą

$$(2.4.1) \quad K = \sum_{i_1, j_1}^{i_0, j_0} |N_{i_1, j_1}| l_{i_1, j_1}$$

Po podstawieniu we wzorze (2.4.1) wartości na $|N_{i_1, j_1}|$ z zależności (2.3.1) mamy

$$(2.4.2) \quad K = \sum_{i_1, j_1}^{i_0, j_0} |N_{i_1, j_1}^p + N_{i_1, j_1}^1 X| l_{i_1, j_1}$$



Rys. 4

Przez $X_0^{i_1, j_1}$ oznaczymy odcięte miejsc zerowych sześciu funkcji

$$|N_{i_1, j_1}| = |N_{i_1, j_1}^p + N_{i_1, j_1}^1 X|$$

Wielkości $X_0^{i_1, j_1}$ można też interpretować w sposób mechaniczny, $X_0^{i_1, j_1}$ jest bowiem taką wartością siły X , przy której siła normalna w pręcie i, j równa jest zero.

Graficznym obrazem sześciu funkcji $|N_{i_1, j_1}|$ jest wykres przedstawiony na rys. 4.

Pochodna funkcji $K(X)$ wynosi

$$(2.4.3) \quad \frac{dK}{dX} = \sum_{i,j}^{i_0, j_0} \frac{d|N_{i,j}|}{dX} l_{i,j} = \sum_{i,j}^{i_0, j_0} (\pm 1) |N_{i,j}^1| l_{i,j}.$$

Znaki pochodnych

$$\frac{d|N_{i,j}|}{dX} l_{i,j} = \pm |N_{i,j}^1| l_{i,j} = \pm (\operatorname{tg} |\omega_{i,j}|) l_{i,j}$$

dobieramy według reguły:

- (1) przy $X > X_0^{i,j}$ przyjmujemy znak plus,
- (2) przy $X < X_0^{i,j}$ przyjmujemy znak minus.

Rozpatrzmy dowolną funkcję

$$|N_{i,j}| = |N_{i,j}^p + N_{i,j}^1 X|.$$

Wykres tej funkcji ma postać pokazaną na rys. 5.

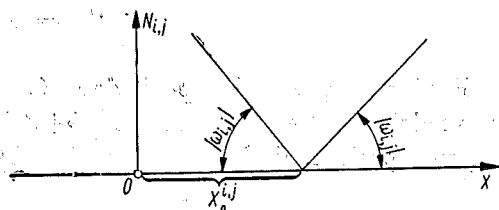
Wypisane zasady doboru znaków wynikają z charakteru funkcji $|N_{i,j}|$.

Wartości odciętych $X_0^{i,j}$ wyznaczamy z zależności

$$(2.4.4) \quad N_{i,j} = N_{i,j}^p + N_{i,j}^1 X = 0,$$

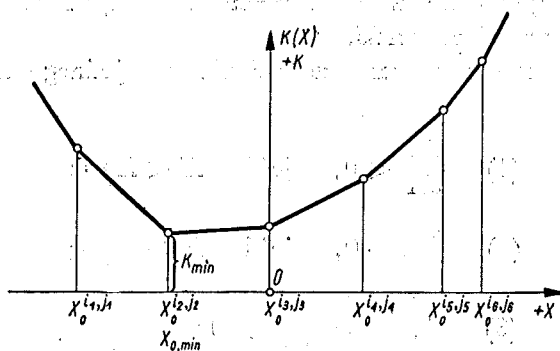
otrzymujemy więc

$$(2.4.5) \quad X_0^{i,j} = -\frac{N_{i,j}^p}{N_{i,j}^1}.$$



Rys. 5

Obrazem funkcji $K(X)$ jest krzywa składająca się z odcinków prostych (rys. 6).



Rys. 6

Krzywa ta posiada cztery podstawowe cechy:

- (1) nie przecina osi X ,
- (2) przyrosty kątów nachylenia są zawsze dodatnie,

(3) pochodna

$$\frac{dK}{dX} < 0, \quad \text{jeśli} \quad X < X_0^{i_0, j_1},$$

(4) pochodna

$$\frac{dK}{dX} > 0, \quad \text{jeśli} \quad X > X_0^{i_0, j_0}.$$

Cechy (3) i (4) wynikają bezpośrednio z zależności (2.4.3), zaś własność (2) wykażemy.

Rozważmy fragment funkcji $K(X)$ przy dowolnej odciętej $X_0^{i_0, j_0}$.

Gdy $X = X_0^{i_0, j_0} - dX$, pochodna

$$\frac{d|N_{i_0, j_0}|}{dX} l_{i_0, j_0} = -|N_{i_0, j_0}^1| l_{i_0, j_0},$$

zaś przy $X = X_0^{i_0, j_0} + dX$

$$\frac{d|N_{i_0, j_0}|}{dX} = |N_{i_0, j_0}^1| l_{i_0, j_0}.$$

Ponieważ pozostałe pochodne $(d|N_{i, j}|/dX) l_{i, j}$ nie zmieniają wartości w przedziale $X_0^{i_0, j_0} - dX \leq X \leq X_0^{i_0, j_0} + dX$, zatem zgodnie ze wzorem (2.4.3), przyrost pochodnej dK/dX przy $X = X_0^{i_0, j_0}$ równy jest

$$(2.4.6) \quad \Delta \left[\frac{dK}{dX} \right]_{X=X_0^{i_0, j_0}} = 2|N_{i_0, j_0}^1| l_{i_0, j_0}.$$

Na podstawie wymienionych i udowodnionych czterech cech krzywej K dochodzimy do dalszego wniosku, że funkcja $K(X)$ ma minimum dodatnie przy $X = X_{0, \min}$, gdy dwie wartości pochodnej dK/dX w tymże punkcie nieciągłości mają przeciwne znaki.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia tylko jednego minimum funkcji K mają postać:

$$(1) \quad \frac{dK}{dX} < 0, \quad \text{jeśli} \quad X < X_0^{i_0, j_1};$$

$$(2) \quad \frac{dK}{dX} > 0, \quad \text{jeśli} \quad X > X_0^{i_0, j_0};$$

$$(3) \quad \Delta \left[\frac{dK}{dX} \right]_{X=X_0^{i_0, j_0}} \geq 0;$$

$$(4) \quad \frac{dK}{dX} \neq 0.$$

Przez $X_0^{i_0, j_0}$ oznaczono odcięta dowolnego punktu nieciągłości krzywej dK/dX .

Trzy pierwsze warunki spełnia dowolna funkcja K określona przez (2.4.1).
 W przypadku, gdy pochodna $dK/dX = 0$, w przedziale $X_0^{i_m'j_m} < X < X_0^{i_{m+1}'j_{m+1}}$ istnieje minimum dodatnie funkcji K w każdym punkcie tego przedziału. Odciętym $X_0^{i_m'j_m}$ oraz $X_0^{i_{m+1}'j_{m+1}}$ odpowiadać będzie ta sama rzędna K_{min} .

Przy odciętych $X_0^{i_j'j}$ rzędne funkcji K są równe odpowiednim wyrażeniom $\sum_{i_j'j}^{i_{s,j}} |N_{i_j'j}^{a,b}| l_{i_j'j}$. Zależność ta wynika stąd, że przy wartości argumentu X równej którejkolwiek z odciętych $X_0^{i_j'j}$, w jednym z prętów ustroju sześcioprętowego siła normalna równa jest zeru; możemy przeto sumowanie wyrażen $|N_{i_j'j}| l_{i_j'j}$ ograniczyć do pięciu prętów. Ponieważ funkcja K ma minimum przy jednej z odciętych $X_0^{i_j'j}$, dlatego minimum funkcji K odpowiada najmniejsza wartość zbioru liczb

$$\sum_{i_j'j}^{i_{s,j}} |N_{i_j'j}^{a,b}| l_{i_j'j}.$$

Otrzymujemy zatem zgodnie z zależnością (2.2.2) wzór na potencjał sprężystości ustroju minimalnego.

$$(2.4.7) \quad U_{min} = \frac{|\varepsilon_0|}{2} K_{min}.$$

Szczególne funkcje $K(X)$ mogą posiadać tę właściwość, że niektóre odcięte $X_0^{i_j'j}$ są sobie równe.

Odcięte spełniające warunki $X_0^{i_{m_1}'j_{m_1}} = X_0^{i_{m_2}'j_{m_2}} = \dots = X_0^{i_{m_r}'j_{m_r}} = X_{0,min}$ nazywamy wielokrotnymi.

2.5. Twierdzenia o istnieniu ustrojów odpowiadających minimum potencjału sprężystości. Na podstawie analizy zawartej w rozdziale 2 formułujemy następujące twierdzenia:

1. Na danych czterech węzłach przy danym obciążeniu P_i można zbudować tylko jeden ustrój izostatyczny minimalny, jeżeli:

$$(a) \quad \frac{dK}{dX} \neq 0 \quad (X \cong X_0^{i_j'j});$$

(b) funkcja $K(X)$ nie posiada w punkcie odpowiadającym minimum odciętych wielokrotnych.

2. Na danych czterech węzłach przy danym obciążeniu P_i można zbudować dwa ustroje izostatyczne minimalne, których potencjały są równe, jeżeli:

$$(a) \quad \frac{dK}{dX} = 0, \quad \text{przy} \quad X_0^{i_m'j_m} < X < X_0^{i_{m+1}'j_{m+1}};$$

(b) funkcja $K(X)$ nie posiada w punktach $X_0^{i_m'j_m}$ i $X_0^{i_{m+1}'j_{m+1}}$ odciętych wielokrotnych.

3. Na danych czterech węzłach przy danym obciążeniu P_i można zbudować $r \leq 5$ ustrojów izostatycznych minimalnych, których potencjały są równe, jeżeli:

$$(a) \quad \frac{dK}{dX} \neq 0 \quad (X \cong X_0^{i_0, j_0});$$

(b) punktowii minimalnemu odpowiada $r \leq 5$ odciętych wielokrotnych

$$X_0^{i_1, j_1} = X_0^{i_2, j_2} = \dots = X_0^{i_r, j_r} = X_{0, min}$$

Odcięta $X_0^{i_m, j_m} = X_{0, min}$ określa ustrój minimalny. Wskaźniki i_m, j_m umieszczone przy $X_0^{i_m, j_m}$ oznaczają bowiem, że siła normalna w przecię i_m, j_m równa jest zeru, a więc w ustroju minimalnym węzły i_m oraz j_m nie są połączone prętem.

3. Sposób wyznaczania ustroju minimalnego

Na początku wyznaczamy wszystkie siły $N_{i,j}^p$ oraz $N_{i,j}^t$, a następnie odcięte $X_0^{i,j} = -(N_{i,j}^p/N_{i,j}^t)$.

Według wzoru (2.4.3) obliczamy pochodną dK/dX przy dowolnej odciętej $X_0^{i_0, j_0} + dX$.

Jeżeli $dK/dX > 0$ ($X = X_0^{i_0, j_0} + dX$), wnioskujemy, że K_{min} będzie przy $X < X_0^{i_0, j_0}$; analogicznie stwierdzamy istnienie K_{min} przy $X > X_0^{i_0, j_0}$, gdy

$$\frac{dK}{dX} < 0 \quad (X = X_0^{i_0, j_0} + dX),$$

Następnie w określonym przedziale obliczamy kolejno wartości pochodnej dK/dX aż do odciętej $X_0^{i_0, j_0} = X_{0, min}$, przy której pochodna dK/dX zmienia znak lub przybiera wartość równą zeru.

Potencjał sprężystości ustroju minimalnego obliczamy na podstawie wzoru (2.4.7).

4. Przykład liczbowy

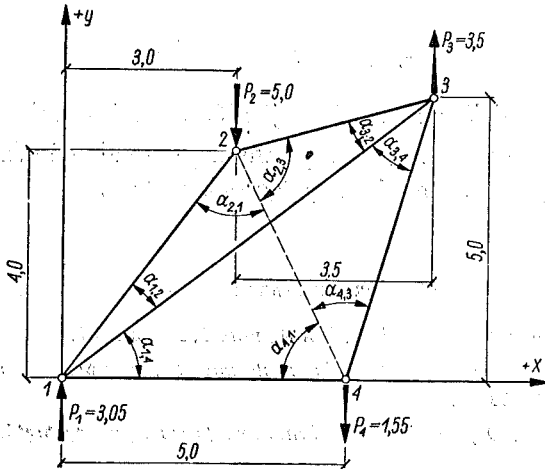
Dany jest ustrój pierwotny przedstawiony na rys. 7. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicach 1, 2 i 3.

Tablica 1. Zestawienie wartości geometrycznych ustroju pierwotnego

i, j	$\alpha_{i, j}$	$\alpha_{j, i}$	$l_{i, j}$
1,2	15° 33' 41"	63° 26' 6"	5,00000
2,3	79° 22' 49"	21° 37' 23"	3,64006
3,4	35° 43' 55"	43° 15' 51"	5,22016
4,1	63° 26' 6"	37° 34' 7"	5,00000
1,3			8,20061
2,4			4,47214

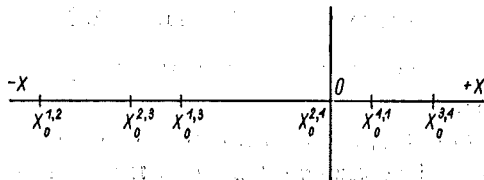
Tablica 2. Zestawienie sił $N_{i,j}^I$, $N_{i,j}^P$ oraz odciętych $X_0^{i,j}$

i,j	$N_{i,j}^I$	$N_{i,j}^P$	$X_0^{i,j}$
1,2	-1,6262	-7,9545	-4,8914
2,3	-1,4799	-4,9637	-3,3541
3,4	-0,9338	1,6183	1,7330
4,1	-0,7155	0,4650	0,6499
1,3	2,1338	5,4348	-2,5470
2,4	1,0000	0	0



Rys. 7

Na rys. 8 podano położenie odciętych $X_0^{i,j}$ na osi.



Rys. 8

W celu określenia obszaru, w którym zawarta jest odcięta $X_{0,min}$, obliczamy pochodną

$$\frac{dK}{dX}, \quad \text{przy } X = 0 + dX,$$

$$\frac{dK}{dX} = 27,036, \quad (X = 0 + dX) \quad [\text{według wzoru (2.4.7)}]$$

Tablica 3. Zestawienie rzędnych funkcji

$$\frac{dK}{dX}, \text{ gdy } X < 0$$

X	dK/dX
$X_0^{1,3} + dX$	18,092
$X_0^{1,3} - dX$	-16,905
$X_0^{2,3} - dX$	

Z rachunku wynika, że

$$X_{0, \min} = X_0^{2,3} = -2,547,$$

ponieważ przy odciętej $X_0^{1,3}$ rzędne funkcji dK/dX mają odmienne znaki.

Ustrojem minimalnym w rozpatrywanym przypadku będzie ustrój izostaticzny, którego węzły 1 i 3 nie będą połączone prętem.

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. LÉVY, *La statique graphique*, Vol. 4, note I, Paryż 1907.
 [2] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształceniu kratownic przez wprowadzenie nowych prętów*, Inżyn. Budown., 11, 7 (1950).
 [3] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształceniu kratownic przez wymianę prętów*, Inżyn. Budown., 1958.

Резюме

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЧЕТЫРЕХУЗЛОВОЙ СИСТЕМЫ ПУТЕМ ОБМЕНА СТЕРЖНЕЙ

В работе рассматривается произвольное четырехузловое изостатическое поле плоской фермы.

Работа имеет целью определить такую стержневую систему при заданной нагрузке и неизменяющейся системе узлов, в которой потенциал упругости получает минимальное значение.

В работе заключаются теоремы, касающиеся существования четырехузловых систем, накопляющих минимум потенциала упругости. Кроме того в работе выводятся зависимости, служащие для определения минимальной системы.

Рассуждения, касающиеся четырехузлового поля фермы являются основой анализа минимума потенциала произвольных изостатических плоских ферм, обсуждая преобразования путем обмена стержней.

Summary

ON THE TRANSFORMATIONS OF A FOUR-NODE STRUCTURE BY EXCHANGING BARS

An arbitrary four-node isostatic field of plane lattice is considered.

The object of the paper is to determine such a system of bars for a prescribed load and an invariable configuration of the nodes, that the elastic potential takes its minimum value.

The paper contains theorems on the existence of four-node structures gathering the minimum value of the elastic potential. In addition, it gives the derivation of the relations for determining the minimum value structure.

The considerations concerning the four-node lattice field constitute a basis for the analysis of the minimum value of the potential of an arbitrary isostatic plane lattice with transformations by exchanging bars.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1959 r.
