

WITOLD GUTKOWSKI

STATYKA I STATECZNOŚĆ  
PRYZMATYCZNYCH POWŁOK RAMOWO-KRATOWYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCI

TOM IX . ZESZYT 3 . ROK 1961

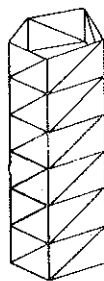
## SPIS TREŚCI

Wstęp	457
1. Oznaczenia, założenia, definicje	458
1.1. Oznaczenia	458
1.2. Definicje i założenia	459
2. Przypadek powłoki odkształcanej osiowo symetrycznie	462
2.1. Równania równowagi	462
2.2. Siły wewnętrzne a przemieszczenia	464
2.3. Równania przemieszczeń	465
2.4. Powłoka obciążona siłą osiową i siłami poprzecznymi	466
3. Ogólny przypadek odkształcenia równoramiennej powłoki ramowo-kratowej	468
3.1. Różnicowe równania równowagi wycinka powłoki	468
3.2. Siły wewnętrzne a przemieszczenia	475
4. Szczególne przypadki powłok ramowo-kratowych	481
4.1. Stateczność powłoki o przekroju kwadratowym ściskanej siłą osiową	481
4.2. Stateczność powłoki o przekroju kwadratowym, obciążonej momentem skręcającym	485
4.3. Przykład	486

## Wstęp

Celem niniejszej pracy jest określenie sił wewnętrznych, odkształceń oraz obciążeń krytycznych układu ramowo-prętowego, stosowanego powszechnie w konstrukcjach wszelkiego rodzaju wież i masztów (rys. 1). Konstrukcje tego typu oblicza się dotychczas z reguły na podstawie bardzo przybliżonych teorii, będących takim czy innym rozwiązaniem teorii zginanego i osiowo ściskanego pręta.

Pierwszy, który rozwinął teorię stateczności pręta osiowo ściskanego, był F. ENGESSER, [4]. W porównaniu z EULEREM uwzględnił on zmianę linii ugięcia pręta, wynikającą nie tylko z sił normalnych, ale i tnących. On też pierwszy zbadał wpływ sztywności wykrzyżowań na wielkość osiowej siły krytycznej ściskającej płaski słup kratowy. Pierwszą teorię stateczności płaskiego słupa kratowego, specjalnie dostosowaną do tego celu, podali R. MISES, [9], i J. RATZERSDORFER, [10], w latach 1923-27. W pracach tych autorzy po raz pierwszy odstąpili od teorii zginanego pręta i rozwiązali zadanie wyżej wymienionego słupa w postaci regularnego układu prętowego o powtarzalnych segmentach. Otrzymana przez nich siła krytyczna została w ten sposób uzależniona od ilości segmentów słupa. Należy również nadmienić o pracach S. TIMOSZENKI, [14], A. R. RŻANICYNA, [13], i innych w tej dziedzinie. Pierwszy z nich uzupełnił teorię F. ENGESSERA rozważaniem płaskich słupów o konstrukcji ramowej. A. R. RŻANICYN, [13], dokonał próby ujęcia wpływu ścinania na stateczność prętów przestrzennych. Ponadto należy wspomnieć o W. W. PINADŻIANIE, [11], który rozszerzył w znacznym stopniu teorię F. ENGESSERA i S. TIMOSZENKI na szereg innych przypadków. W dalszym ciągu jednak rozpatruje on słup jako pręt, a jego gięcie przy założeniu płaskich i nieodkształcalnych przekrojów.



Rys. 1

Dopiero W. Z. WŁASOW, [17], podaje teorię pręta-powłoki uwzględniając zarówno wpływ siły tnącej na wyboczenie jak i odrzucając założenie płaskiego przekroju, a przyjmując że przekrój jest odkształcalny.

Jak wynika jednak z poniższej pracy, zastosowanie tej teorii do słupów ramowo-kratowych przez tzw. «rozmazanie» prętów i zastąpienie ich ściankami, nie daje wyników zgodnych z rzeczywistością. Niemniej jednak teoria W. Z. WŁASOWA jest pierwszą, która rozpatruje tego typu zagadnienia z zupełnie nowego punktu widzenia.

Drugą dziedziną, na której autor oparł swoje wywody jest statyka i stateczność układów ramowych. Szczególnie istotne są prace F. BLEICHA, [1], i E. CHWALLI

[2], rozwiązujące układy ramowe o powtarzalnych segmentach za pomocą rachunku różnicowego. Bardzo duży wkład w te i w pokrewne dziedziny włożył N. W. KORNOUCHOW, [8], dając szereg metod obliczania statyki i stateczności układów ramowokratowych. Wszystkie jego teorie sprowadzają się w ostatecznym wyniku do układów wielu równań liniowych, co przy masztach czy wieżach prowadzi do niezwykle żmudnych rachunków.

Należy wreszcie wspomnieć o szeregu prac doświadczalnych w tej dziedzinie, jak I. DIUBKA, [3], lub W. W. PINADŻIANA, [11]. Prace te nie wnoszą w zasadzie z punktu widzenia teoretycznego nic nowego.

Intencją autora jest przedstawienie w niniejszej pracy teorii, która dokładniej od wymienionych wyżej będzie opisywała zjawiska zachodzące w tego typu konstrukcjach. Dlatego też chcąc uwzględnić większą liczbę stopni swobody przy odkształcaniu konstrukcji rozwiązano omawiane zagadnienie w sposób zbliżony do stosowanego przy powłokach. Stąd też wzięła się nazwa «powłoki ramowokratowe». Jednak tylko przyjęty schemat jest zbliżony do teorii powłok, natomiast pozostawiono konstrukcji jej rzeczywisty charakter układu zarówno prętowego jak i segmentowego.

W celu oddania tego specyficznego charakteru zastosowano rachunek różnicowy, pozwalający uwzględnić odległość między węzłami jako wielkości skończone.

W pracy niniejszej podano zależności na siły wewnętrzne i odkształcenia dla dużych ugięć powłoki. Niemniej jednak konkretne przypadki rozwiązano w zakresie małych ugięć, a więc przy zastosowaniu teorii liniowej. Ograniczenie to wynika z bardzo słabo rozwiniętej dyscypliny matematyki, jaką jest rachunek różnicowy, w szczególności dla dwóch zmiennych.

Ponadto należy nadmienić, że rozwiązano tu zagadnienie dla jednego typu wykrzyżowania (rys. 1), tzw. wykrzyżowania obiegem, można by jednak w podobny sposób rozwiązać i powłoki o innych siatkach prętów, stosowanych w praktyce.

Praca niniejsza obejmuje kolejno statykę osiowo-symetrycznej powłoki ramowokratowej, ogólny przypadek odkształcenia powłoki ramowokratowej, przypadek wybożenia powłoki o przekroju kwadratowym, ściskanej osiową siłą, przypadek wybożenia powłoki o przekroju kwadratowym, poddanej skręcaniu.

W końcu pracy zestawiono wyniki doświadczeń z teoretycznymi obliczeniami dla wyżej wymienionych przypadków powłoki kwadratowej.

## 1. Oznaczenia, założenia, definicje

### 1.1. Oznaczenia

- $x, y, z$  współrzędne prostokątne,
- $u, v, w$  przemieszczenia w kierunku osi  $x, y, z$ ,
- $r$  numer węzła (odcinka pasa) wzdłuż tworzącej,
- $t$  numer węzła (odcinka wręgi) w kierunku obwodowym,
- $a$  promień koła opisanego na powłoce,
- $h$  odległość między węzłami wzdłuż tworzącej,

- $l$  odległość między węzłami na obwodzie,
- $\alpha$  kąt środkowy wielokąta foremnego,
- $\beta$  kąt między prętami wykrzyżowania a prętem wręgi,
- $F_p$  pole powierzchni przekroju pręta pasa,
- $F_w$  pole powierzchni przekroju pręta wykrzyżowania,
- $F_t$  pole powierzchni przekroju pręta wręgi,
- $J_{py}, J_{pz}$  momenty bezwładności przekroju pasa przy gięciu względem osi odpowiednio  $y$  i  $z$ ,
- $J_t$  moment bezwładności przekroju pręta wręgi przy gięciu względem osi  $x$ ,
- $E$  moduł sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu,
- $N_r$  siła osiowa w  $r$ -tym odcinku pasa,
- $N_t$  siła osiowa w  $t$ -tym odcinku wręgi,
- $N_{rt}$  siła osiowa  $r$   $t$ -tym odcinku wykrzyżowania,
- $M_{ry}, M_{rz}$  momenty gnące pas względem osi  $y$  i  $z$  przy węźle  $r$ ,
- $M_{tx}$  moment gnący wręgę względem osi  $x$  przy węźle  $t$ ,
- $\bar{M}_{ry}, \bar{M}_{rz}, \bar{M}_{tx}$  moment gnący w środku pręta,
- $Q_{ry}, Q_{rz}$  siły tnące pas w kierunku osi  $y$  i  $z$ ,
- $Q$  siła zewnętrzna w kierunku osi  $z$ ,
- $P$  siła zewnętrzna w kierunku osi  $x$ .

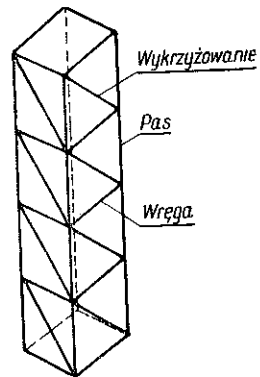
1.2. Definicje i założenia. Powłoką ramowo-kratową nazwano układ prętów (rys. 2), z których część, jako elementy ramy, przenosi zginanie, część zaś, jako elementy kratownicy, tylko siły osiowe.

Powłoka składa się z następujących elementów:

1) wzdłużnych, wzajemnie równoległych prętów (pasów), ciągłych na całej długości powłoki i podatnych na siły osiowe i gięcie;

2) poprzecznych prętów (wręg), stanowiących wielokątne, równoramienne ramy, podatne na gięcie i siły osiowe we własnej płaszczyźnie, a nie sztywnych na gięcie w kierunku prostopadłym do niej (połączenia przegubowe), przy czym płaszczyzny wszystkich wręg są prostopadłe do osi pasów;

3) skośnych prętów wykrzyżowań, mogących przenieść tylko siły osiowe (pręty we wszystkich płaszczyznach połączone są przegubowo).



Rys. 2

Uzasadnienie takiego schematu statycznego jest następujące:

Pręty wzdłużne stanowiąc tworzące powłoki są zawsze w praktyce ciągłe i mają największe wymiary poprzeczne w porównaniu z innymi elementami konstrukcji. Dlatego też odchodząc od klasycznych założeń dla kratownic (założenia te przewidują przegubowe połączenia wszystkich prętów) przyjęto w tym przypadku ciągłość pasa na całej długości, co jest zgodne z rzeczywistością. Ma to szczególne

znaczenie przy odkształceniach powłoki w płaszczyźnie zawierającej oś wzdłużną powłoki.

Jeżeli chodzi o pręty wręg, to w płaszczyźnie wręgi są one elementami stanowiącymi ramę, a nie wielokąt przegubowy. Rama ta współpracuje z innymi elementami konstrukcji przyczyniając się do zachowania sztywności samego profilu powłoki. Natomiast w płaszczyźnie ściany powłoki przyjęto, że te same pręty są podłączane przegubowo. Jest to o tyle bliskie rzeczywistości, iż wspomniane pręty wraz z wykrzyżowaniami stanowią płaską kratownicę obramowaną pasami. Jak wiadomo, przy takiej siatce i wymiarach stosowanych w praktyce można przyjąć, iż pręty obciążone są tylko siłami osiowymi, a wpływ utwierdzenia w węzłach jest pomijalnie mały.

Mówiąc wreszcie o wykrzyżowaniach należy zaznaczyć, że ich wyłącznie przegubowe zamocowanie uzasadnione jest jak wyżej, mianowicie stanowią one element płaskiej kratownicy. Niewątpliwie i wykrzyżowania łącznie z prętami wręg usztywniają przekrój poprzeczny powłoki przenosząc w rzeczywistości zginanie, jednakże ze względu na przestrzenne powiązanie ich z wręgą i pasami wchodzi w grę również podatność skrotna poszczególnych elementów. Dlatego udział tych prętów w usztywnieniu można pominąć.

Ponadto dla powłoki jako całości przyjęto szereg założeń podobnych do tych, jakie przyjmujemy dla powłok klasycznych, mianowicie:

1. Wymiary poprzeczne prętów są małe w stosunku do odległości między węzłami czy to w kierunku wzdłużnym, czy poprzecznym.

2. Przekroje prętów prostopadłe do jego osi przed odkształceniem pozostają prostopadłe do niej również po odkształceniu. Jest to równoznaczne z pominięciem wpływu na linię ugięcia sił tnących. Jak wiadomo, dla prętów pełnych i smukłych wpływ siły tnącej na odkształcenie jest pomijalnie mały.

3. Przyjmuje się, że wszelkie naprężenia prostopadłe do osi pręta są pomijalnie małe.

4. Odkształcenia  $w$  i  $v$  mogą być duże w przeciwieństwie do przemieszczeń  $u$ , co do których przyjmuje się, że nie przekraczają wielkości przyjmowanych przy teoriach liniowych.

5. Powłoka jest regularna, tzn. że przekroje prętów, kąt  $\beta$  i odległości między węzłami są jednakowe dla całej powłoki.

6. Obciążenia zewnętrzne nie zmieniają się ani co do wielkości, ani co do kierunku wskutek odkształceń powłoki.

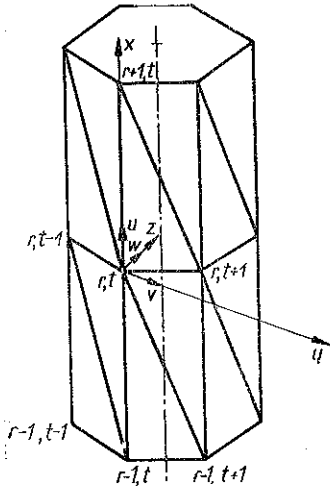
7. Wszelkie odkształcenia zachodzą w zakresie sprężystym przy jednakowych właściwościach materiału na rozciąganie i ściskanie.

Osobne zagadnienie stanowią założenia dotyczące odkształceń powłoki.

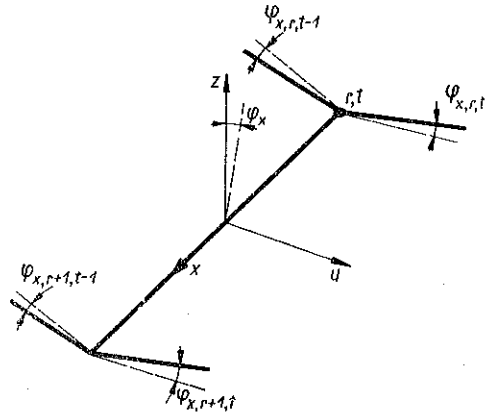
Poniżej przyjęto, iż każdy węzeł o numerze  $r$  wzdłuż tworzącej i numerze  $t$  odliczanym po obwodzie, odkształca się wzdłuż trzech osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  odpowiednio skierowanego, prostokątnego układu współrzędnych. Mianowicie; oś  $x$  ma kierunek tworzącej powłoki, oś  $y$  kierunek stycznej dookoła opisanego na wielokątnej wrędze powłoki i oś  $z$  kierunek normalnej do tego koła.

Przemieszczenia te oznaczono odpowiednio  $u_{rt}$ ,  $v_{rt}$ ,  $w_{rt}$ , (rys. 3). Wobec wynikającej konieczności określenia kątów obrotu przekroju pręta w połowie jego długości przyjęto w równaniach równowagi, zawartych w dalszych rozdziałach niniejszej pracy, następujące założenia:

1. Kąt obrotu przekroju względem osi wzdłużnej równa się średniej arytmetycznej kątów obrotów wzdłużnych osi czterech przylegających doń prętów prostopadłych.



Rys. 3

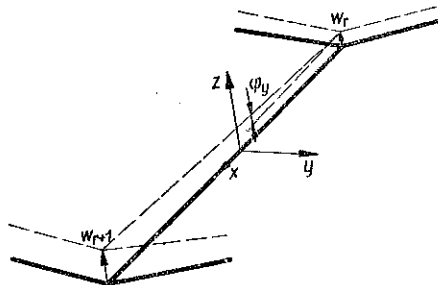


Rys. 4

Natomiast miarą obrotu osi pręta jest obrót odcinka prostej łączącego dwa sąsiednie węzły. I tak np. kąt obrotu przekroju pasa względem osi  $x$ ,  $\varphi_x$  (rys. 4), jest określony za pomocą wzoru

$$\varphi_x = \frac{1}{4} (\varphi_{xr,t} + \varphi_{x,r,t-1} + \varphi_{x,r+1,t} + \varphi_{x,r+1,t-1}).$$

2. Kąt obrotu przekroju względem osi prostopadłych do osi wzdłużnej pręta równa się stosunkowi różnicy przemieszczeń końców pręta w kierunku prostopadłym do jego osi wzdłużnej oraz osi badanej do długości pręta. Jest on równoznaczny



Rys. 5

z kątem obrotu całej osi wzdłużnej pręta. I tak np. kąt obrotu przekroju odcinka pasa w jego środku względem osi  $y$  (rys. 5) wyniesie:

$$\varphi_y = -\frac{w_{r+1} - w_r}{h}$$

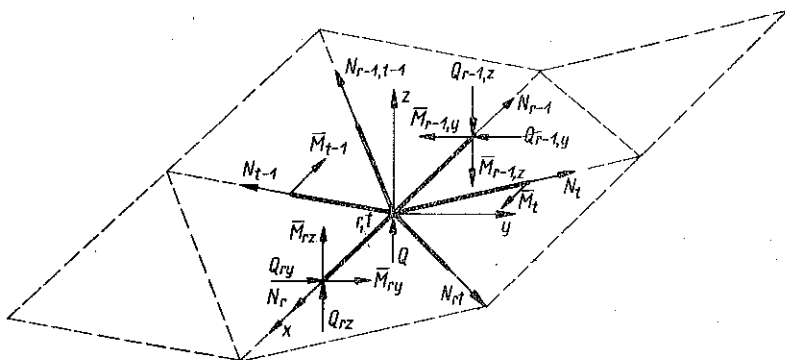
## 2. Przypadek powłoki odkształcanej osiowo symetrycznie

Na wstępie należy nadmienić, że symetryczne odkształcenie omawianej powłoki nie jest możliwe w pełnym tego słowa znaczeniu. Wynika to stąd, iż sama konstrukcja nie jest symetryczna. Pasy i pręty wręg są rozmieszczone osiowo symetrycznie, natomiast wykrzyżowania nie są tak rozmieszczone.

Jak wynika z dalszych rozważań, symetryczne są przemieszczenia  $u$  i  $w$ . Natomiast brak symetrii w rozmieszczeniu wykrzyżowań spowoduje dodatkowe antysymetryczne przemieszczenia węzłów  $v$ . Ze względu na symetrię przemieszczeń  $w$  jest to równoznaczne z obrotem całej wręgi o kąt

$$\varphi_r = \frac{2v_r \sin(\alpha/2)}{l}$$

**2.1. Równania równowagi.** W celu określenia warunków równowagi wycięto powtarzalny element powłoki o wymiarach  $h \times l$ . Przekięcia takie zostały wykonane płaszczyznami prostopadłymi do osi prętów w środku ich długości. Tak więc otrzymano w rezultacie węzeł o numerach  $r$  i  $t$  z przylegającymi do niego połówkami prętów (rys. 6).



Rys. 6

W pōczynionych przekrojach działają siły wewnętrzne zgodne z przyjętymi założeniami i oznaczeniami w p. 1.

Zgodnie z założeniem odkształcenia powinny być w pełni symetryczne, jak już jednak wspomniano nie jest to całkowicie możliwe. Symetria wystąpiłaby w przypadku założenia  $N_{rt} = N_{r-1,t-1}$ , co nie pokrywa się z rzeczywistością. Gdyby bowiem  $N_{rt} = N_{r-1,t-1}$ , to, jak wynika z p. 2.2, przemieszczenia  $w_r$  dla wszystkich węzłów byłyby stałe. Natomiast z symetrii przemieszczeń  $u$  i  $w$  wynika, że  $N_t = N_{t-1}$  oraz  $M_t = M_{t-1} = 0$ .



Przystępując do zestawienia sum rzutów sił i momentów na osie  $x, y, z$  należy w pierwszym rzędzie znaleźć kąty obrotu poszczególnych przekrojów w wyniku odkształceń powłoki. Mamy więc

$$\varphi_{rx} = \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_{ry} = -\frac{w_{r+1} - w_r}{h}, \quad \varphi_{rz} = \frac{v_{r+1} - v_r}{h},$$

$$\varphi_{ix} = \frac{2v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_{iy} = 0, \quad \varphi_{iz} = 0.$$

Poniżej zestawiono wspomniane już równania równowagi przyjmując zapis przyjęty w rachunku różnicowym:

$$N_r - N_{r-1} = \Delta_r N_{r-1}, \quad w_{r+1} - w_r = \Delta_r w_r, \quad w_r - w_{r-1} = \Delta_r w_{r-1},$$

$$M_{r+1,y} - M_{r-1,y} = \Delta_{2r} M_{ry}, \quad \Delta_{rr}^2 w_r = w_{r+1} - 2w_r + w_{r-1}.$$

Same równania mają następującą postać:

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_r N_{r-1} + \Delta_r N_{r-1,t-1} \sin \beta - Q_{rz} \frac{\Delta_r w_r}{h} + Q_{r-1,z} \frac{\Delta_r w_{r-1}}{h} - \\ \quad - Q_{ry} \frac{\Delta_r v_r}{h} + Q_{r-1,y} \frac{\Delta_r v_{r-1}}{h} = 0, \\ \Delta_r Q_{r-1,y} + \Delta_r N_{r-1,t-1} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} + N_r \frac{\Delta_r v_r}{h} - N_{r-1} - \frac{\Delta_r v_{r-1}}{h} - \\ \quad - Q_{rz} \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + Q_{r-1,z} \frac{v_r + v_{r-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \\ 2N_t \sin \frac{\alpha}{2} + (N_{r,t} + N_{r-1,t-1}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \Delta_r Q_{r-1,z} + N_r \frac{\Delta_r w_r}{h} - \\ \quad - N_{r-1} \frac{\Delta_r w_{r-1}}{h} + Q_{ry} \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2} - Q_{r-1,y} \frac{v_r + v_{r-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + Q_r = 0, \\ \Delta_t \bar{M}_t - \bar{M}_{rz} \frac{\Delta_r w_r}{h} + \bar{M}_{r-1,z} \frac{\Delta_r w_{r-1}}{h} - \bar{M}_{ry} \frac{\Delta_r v_r}{h} + \bar{M}_{r-1,y} \frac{\Delta_r v_{r-1}}{h} = 0, \\ \Delta_{2r} M_{ry} - (Q_{rz} + Q_{r-1,z})h - \bar{M}_{rz} \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \bar{M}_{r-1,z} \frac{v_r + v_{r-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \\ \Delta_r \bar{M}_{rz} + (Q_{ry} + Q_{r-1,y})h + \bar{M}_{ry} \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2} - \bar{M}_{r-1,y} \frac{v_r + v_{r-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = 0. \end{array} \right.$$

W przypadkach szukania sił wewnętrznych i przemieszczeń przy obciążeniach dalekich od krytycznych można pominąć iloczyny sił wewnętrznych przez przemieszczenia oraz ich przyrosty. Układ równań (2.1) będzie miał w takim przypadku postać:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Delta_r N_{r-1} + \Delta_r N_{r-1,t-1} \sin \beta = 0, \\ \Delta_r Q_{r-1,y} + \Delta_r N_{r-1,t-1} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} = 0, \\ 2N_t \sin \frac{\alpha}{2} + (N_{rt} + N_{r-1,t-1}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \Delta_r Q_{r-1,z} + Q_r = 0, \\ \Delta_t \bar{M}_t = 0, \\ \Delta_{2r} \bar{M}_{ry} + (Q_{rz} + Q_{r-1,z}) h = 0, \\ \Delta_{2r} \bar{M}_{rz} + (Q_{ry} + Q_{r-1,y}) h = 0. \end{cases}$$

Z równowagi pręta  $r$ -tego otrzymamy

$$\begin{aligned} M_{r+1,y} - M_{ry} &= Q_{rz} h, & \Delta_r M_{ry} &= Q_{rz} h, \\ M_{r+1,z} - M_{rz} &= -Q_{ry} h, & \Delta_r M_{rz} &= -Q_{ry} h. \end{aligned}$$

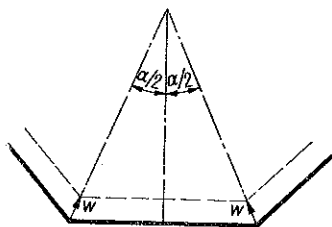
Rugując z pierwszych trzech równań układu (2.2) wartości  $Q_{rz}$  i  $Q_{ry}$  za pomocą powyższych zależności otrzymamy układ trzech równań

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Delta_r N_{r-1} + \Delta_r N_{r-1,t-1} \sin \beta = 0, \\ -\frac{\Delta_{rr}^2 M_{rz}}{h} + \Delta_r N_{r-1,t-1} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} = 0, \\ 2N_t \sin \frac{\alpha}{2} + (N_{rt} + N_{r-1,t-1}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_{rr}^2 M_{ry}}{h} + Q_r = 0. \end{cases}$$

Pozostają do określenia za pomocą przemieszczeń  $u$ ,  $v$ ,  $w$  wartości sił wewnętrznych występujących w układzie (2.3).

**2.2. Siły wewnętrzne a przemieszczenia.** Siła  $N_r$  wynika z różnicy przemieszczeń dwóch końców odcinka pasa o długości  $h$ , ograniczonego węzłami  $r+1$  i  $r$ . Tak więc

$$N_r = \frac{u_{r+1} - u_r}{h} EF_p = \frac{EF_p}{h} \Delta_r u_r.$$



Rys. 7

Siły w prętach węgry powstają w wyniku przemieszczeń wierzchołków wielokąta foremnego (rys. 7):

$$N_t = -\frac{2EF_t}{l} w_r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Wielkości sił  $N_{rt}$  obliczyć można z rzutów przemieszczeń końców pręta wykrzywiania  $rt$ -ego na kierunek osi (rys. 8):

$$N_{rt} = \frac{EF_w \cos \beta}{l} \left[ \Delta_r u_r \sin \beta + \Delta_r v_r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta - (w_r + w_{r+1}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \right].$$

Wielkości momentów znajdziemy z porównania kątów ugięcia dwóch prętów schodzących się w jednym węźle  $r$ , [1]:

$$(2.4) \quad \begin{cases} M_{r-1,y} S_{ry} + M_{ry} (C_{ry} + C_{r+1,y}) + M_{r+1,y} S_{r+1,y} + \frac{EJ_{py}}{h^2} \Delta_{rr}^2 w_r = 0, \\ M_{r-1,z} S_{rz} + M_{rz} (C_{rz} + C_{r+1,z}) + M_{r+1,z} S_{r+1,z} - \frac{EJ_{pz}}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_r = 0, \\ 2M_t (S_t + C_t) = 0, \end{cases}$$

gdzie dla prętów ściskanych,

$$S_{ry} = \frac{1}{\varphi_{ry}^2} \left( \frac{\varphi_{ry}}{\sin \varphi_{ry}} - 1 \right), \quad C_{ry} = \frac{1}{\varphi_{ry}^2} (1 - \varphi_{ry} \operatorname{ctg} \varphi_{ry}),$$

a dla prętów rozciąganych

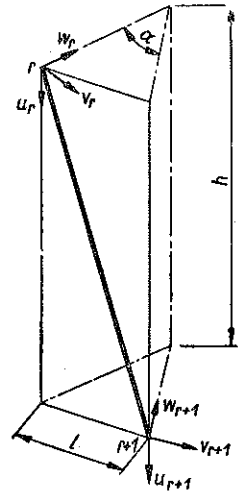
$$S_{ry} = \frac{1}{\varphi_{ry}^2} \left( 1 - \frac{\varphi_{ry}}{\operatorname{sh} \varphi_{ry}} \right), \quad C_{ry} = \frac{1}{\varphi_{ry}^2} (\varphi_{ry} \operatorname{cth} \varphi_{ry} - 1).$$

We wzorach tych

$$\varphi_{ry} = h \sqrt{\frac{N_r}{EJ_{py}}}.$$

Podobnie określane są wartości  $S_{rz}$ ,  $C_{rz}$ ,  $S_t$  i  $C_t$ . W przypadku gdy siły osiowe są dalekie od sił krytycznych dla rozpatrywanych prętów można pominąć zginanie ich przez te siły. W przypadkach takich  $S = 1/6$  oraz  $C = 1/3$ , a związki momentów z przemieszczeniami przyjmują postać

$$(2.5) \quad \begin{cases} M_{r-1,y} + 4M_{ry} + M_{r+1,y} + \frac{6EJ_{py}}{h^2} \Delta_{rr}^2 w_r = 0, \\ M_{r-1,z} + 4M_{rz} + M_{r+1,z} - \frac{6EJ_z}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_r = 0, \\ M_t = 0. \end{cases}$$



Rys. 8

2.3. Równania przemieszczeń. Podstawiając obecnie do układu (2.3) wartości  $N_r$ ,  $N_t$  i  $N_{r,t}$  w funkcji  $u$ ,  $v$ ,  $w$  otrzymamy równania, które wraz z (2.4) dają układ 5 równań określających przemieszczenia powłoki:

$$\begin{cases} \Delta_{rr}^2 u_r \frac{EF_p}{h} + \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \left( \Delta_{rr}^2 u_r \sin \beta + \right. \\ \quad \left. + \Delta_{rr}^2 v_r \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \Delta_{2r} w_r \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \\ \frac{\Delta_{rr}^2 M_{rz}}{h} + \frac{EF_w}{h} \cos \beta \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} \left( \Delta_{rr}^2 u_r \sin \beta + \right. \\ \quad \left. + \Delta_{rr}^2 v_r \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \Delta_{2r} w_r \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{aligned} & -4 \frac{EF_t}{l} w_r \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{EF_w}{h} \cos \beta \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \Delta_{2r} u_r \sin \beta + \right. \\ & \quad \left. + \Delta_{2r} v_r \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - (w_{r+1} + 2w_r + w_{r-1}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \right] + \\ & \quad \quad \quad + \frac{\Delta_{rr}^2 M_{ry}}{h} + Q_r = 0, \\ & M_{r-1,y} S_{ry} + M_{ry} (C_{ry} + C_{r+1,y}) + M_{r+1,y} S_{r+1,y} + \frac{EJ_{py}}{h^2} \Delta_{rr}^2 w_r = 0, \\ & M_{r-1,z} S_{rz} + M_{rz} (C_{rz} + C_{r+1,z}) + M_{r+1,z} S_{r+1,z} - \frac{EJ_{pz}}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_r = 0. \end{aligned} \right.$$

Ogólnie biorąc jest to układ równań różnicowych nieliniowych. Nieliniowość zawarta jest w wyrażeniach  $S_r$  i  $C_r$ , które kryjąc pod pierwiastkiem siłę  $N_r$  zawierają tym samym  $\Delta_r u_r$ .

Należy nadmienić, że jeżeli zagęścić zarówno wręgi jak i pasy, tak by wielkości  $h$  i  $l$  a więc i  $\alpha$ , zdążyły do zera, to przy działaniu siły osiowej otrzymujemy równania zbliżone do równań podanych u S. TIMOSZENKI, [14]. Przycinamy w tym celu powłokę przez  $r$ -te pręty. Z sumy rzutów na oś podłużną otrzymamy:

$$P = N_r + N_{rr} \sin \beta,$$

gdzie  $P$  jest siłą osiową przyłożoną w zewnętrznym przekroju pręta. Wstawiając wartość tę do równania (2.1) otrzymamy

$$2N_t \sin \frac{\alpha}{2} + (2P - N_r - N_{r-1}) \operatorname{ctg} \beta \sin \frac{\alpha}{2} + N_r \frac{\Delta_{rr}^2 w_r}{h} + \Delta_r Q_{r-1,z} + Q_r = 0.$$

Po wstawieniu wartości sił w funkcji przemieszczeń i przejściu do granicy otrzymamy

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q + \frac{1}{a} (P - N_r - N_{r-1}) \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{EF_t}{a^2} \operatorname{ctg} \beta w + N_r \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Równanie odkształceń cylindrycznej powłoki pod działaniem siły osiowej jest według S. TIMOSZENKI następujące:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q + \frac{1}{a} \nu N_x - \frac{Eh}{a^2} w + N_x \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Różnica polega więc głównie na tym, że w równaniu uzyskanym powyżej nie ma liczby Poissona, pomimo że wyrażenie  $(P - N_r - N_{r-1}) \operatorname{ctg} \beta$  zastępuje składnik  $\nu N_x$  w równaniu powłoki.

**2.4. Powłoka obciążona siłą osiową i siłami poprzecznymi.** Przypadek ten można rozbić na dwie części. Pierwsza z nich obejmie siłę osiową rozciągającą i ściskającą przed utratą stateczności, druga zaś siłę osiową ściskającą przy utracie stateczności. Przykładowo rozpatrzone pierwszy wariant.

W przypadku tym można pominąć gięcie prętów siłami osiowymi przyjmując, że momenty gnące wyrażają się zależnościami (2.5). Tak więc układ równań odnoszących się do omawianej powłoki będzie następujący:

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{rr}^2 u_r \frac{EF_p}{h} + \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \left( \Delta_{rr}^2 u_r \sin \beta + \Delta_{rr}^2 v_r \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \Delta_{2r} w_r \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \\ -\frac{\Delta_{rr}^2 M_{rz}}{h} + \frac{EF_w}{h} \cos \beta \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} \left( \Delta_{rr}^2 u_r \sin \beta + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \Delta_{rr}^2 v_r \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \Delta_{2r} w_r \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \\ -4 \frac{EF_t}{l} w_r \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_{rr}^2 M_{ry}}{h} + \frac{EF_w}{h} \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \Delta_{2r} u_r \sin \beta + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \Delta_{2r} v_r \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - (w_{r+1} + 2w_r + w_{r-1}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \right] + Q_r = 0, \\ \Delta_{rr}^2 M_{ry} + 6M_{ry} + \frac{6EJ_{yy}}{h^2} \Delta_{rr}^2 w_r = 0, \\ \Delta_{rr}^2 M_{rz} + 6M_{rz} - \frac{6EJ_{pz}}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_r = 0. \end{array} \right.$$

Przyjmujemy ponadto, że powłoka jest zamocowana na końcach w sztywnych płytach, które mogą obracać się swobodnie około osi powłoki. Przy takich warunkach brzegowych równania (2.7) będą spełniane przez następujące szeregi:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r = \sum A_m \cos mr \frac{\pi}{n_0}, \\ v_r = \sum B_m \cos mr \frac{\pi}{n_0}, \\ w_r = \sum C_m \sin mr \frac{\pi}{n_0}, \end{array} \quad \begin{array}{l} M_{ry} = \sum D_m \sin mr \frac{\pi}{n_0}, \\ M_{rz} = \sum G_m \cos mr \frac{\pi}{n_0}, \end{array} \right.$$

gdzie  $n_0$  jest liczbą segmentów powłoki.

Podobnie możemy rozwinąć w szereg obciążenie zewnętrzne:

$$Q_r = \sum H_m \sin mr \frac{\pi}{n_0} + \sum J_m \cos mr \frac{\pi}{n_0}.$$

Na brzegu powłoki, a więc dla  $r = 0$  i  $r = n_0$ , otrzymamy warunek brzegowy wiążący zewnętrzną siłę osiową, przyłożoną do powłoki, z przemieszczeniami, mianowicie

$$\Delta_r u_0 = \frac{Ph}{EF_p},$$

gdzie  $P$  oznacza część siły osiowej przypadającą na jeden pas.

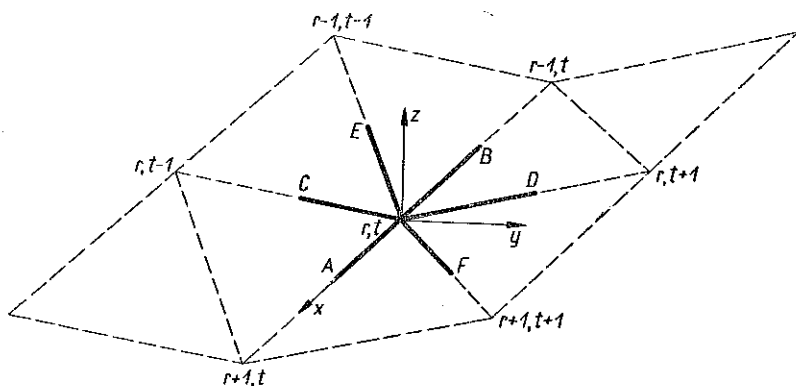
Po wstawieniu wyrażenia (2.8) do (2.7) otrzymamy  $m$  układów równań liniowych, z których można obliczyć  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_m; C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$  itd.;  $G_0, G_1, G_2, \dots, G_m$ , a więc rozwiązać zadanie.

### 3. Ogólny przypadek odkształcenia równoramiennej powłoki ramowo-kratowej

Aby określić równania dla przemieszczeń powłoki  $u, v, w$  wycięto podobnie jak w p. 2 element konstrukcji o wymiarach  $h \times l$  w ten sposób, że płaszczyzny przecięć są prostopadłe do osi prętów. W przekrojach działają siły wewnętrzne zgodne z założeniami p. 1. Siły te wraz z zewnętrzną siłą przyłożoną do węzła elementu powinny być w równowadze. Ponieważ jednak badany element będąc częścią powłoki odkształca się, przeto wyżej wspomniane siły wewnętrzne zmieniają swój kierunek działania.

Poniżej zestawiono równania równowagi z uwzględnieniem tych odchyień.

3.1. Różnicowe równania równowagi wycinka powłoki. Przystępując do zestawienia równań równowagi, powinniśmy znać zmiany kierunków sił wewnętrznych, spowodowane odkształceniem powłoki, dlatego też należy określić na wstępie kąty obrotów poszczególnych przekrojów. Oznaczmy w tym celu literami  $A$  i  $B$  przekroje środkowe prętów ( $r$ -tego i  $r-1$ -ego) pasa. Literami  $C$  i  $D$  przekroje  $t-1$  i  $t$  pręta węgla i wreszcie przez  $E$  i  $F$  przekroje  $r-1, t-1$  i  $rt$  pręta wykrzyżowania.



Rys. 9

Rozpatrzmy kolejno obroty przekroju  $A$  względem osi  $x, y, z$ , przy poczynionych założeniach w p. 1. Obrót tego przekroju  $A$  względem osi  $x$  spowodowany przemieszczeniem  $v$  wyniesie

$$\varphi_{Axv} = \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Jest to średnia arytmetyczna obrotów węzłów  $r$  i  $r+1$  względem osi wzdłużnej powłoki równoległej do osi  $x$ . Obrót względem tej osi spowodowany przemieszcze-

niem  $w$  równy jest średniej arytmetycznej obrotów czterech sąsiednich prętów, mianowicie

$$\varphi_{Axw} = \frac{1}{4} \frac{\cos(\alpha/2)}{l} (\Delta_{2t} w_{r,t} + \Delta_{2t} w_{r+1,t}),$$

gdzie  $\Delta_{2t} w_{rt} = w_{r,t+1} - w_{r,t-1}$ .

Łączny obrót przekroju  $A$  względem osi  $x$  wyniesie więc

$$\varphi_{Ax} = \frac{v_{r+1} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \frac{\cos(\alpha/2)}{l} (\Delta_{2t} w_{r,t} + \Delta_{2t} w_{r+1,t}).$$

Przez analogię do przekroju  $B$  znajdziemy

$$\varphi_{Bx} = \frac{v_r + v_{r-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \frac{\cos(\alpha/2)}{l} (\Delta_{2t} w_{r,t} + \Delta_{2t} w_{r-1,t}).$$

Rozumując jak wyżej można określić obroty przekrojów  $A$  i  $B$  względem osi  $y$  i  $z$ :

$$\varphi_{Ay} = -\frac{w_{r+1} - w_{r,t}}{h} = \frac{\Delta_r w_{rt}}{h}, \quad \varphi_{By} = -\frac{\Delta_r w_{r-1,t}}{h}$$

$$\varphi_{Az} = \frac{v_{r+1,t} - v_{rt}}{h} = \frac{\Delta_r v_{rt}}{h}, \quad \varphi_{Bz} = \frac{\Delta_r v_{r-1,t}}{h}.$$

Obecnie wyznaczmy kąty obrotów przekrojów  $C$  i  $D$ . Kąt obrotu przekroju  $C$  względem osi  $x$  jest określony za pomocą przemieszczeń  $v$  i  $w$  końców pręta  $rt-1$ :

$$\varphi_{Cx} = \frac{v_{r,t-1} + v_{rt}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{w_{rt} - w_{r,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{v_{r,t-1} + v_{rt}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{r,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Analogicznie dla przekroju  $D$  mamy

$$\varphi_{Dx} = \frac{v_{rt} + v_{r,t+1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Kąt obrotu przekroju  $C$  względem osi  $y$  wynika ze średniej arytmetycznej obrotów prętów  $r, t-1$ ;  $r-1, t-1$ ;  $rt$  i  $r-1, t$  pasa:

$$\varphi_{Cy} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sin \alpha}{h} \Delta_{2r} v_{r,t-1} - \frac{\cos \alpha}{h} \Delta_{2r} w_{r,t-1} - \frac{1}{h} \Delta_{2r} w_{rt} \right),$$

gdzie

$$\Delta_{2r} v_{r,t-1} = v_{r+1,t-1} - v_{r-1,t-1}.$$

Analogicznie dla przekroju  $D$  mamy

$$\varphi_{Dy} = \frac{1}{4} \left( -\frac{\sin \alpha}{h} \Delta_{2r} v_{r,t+1} - \frac{\cos \alpha}{h} \Delta_{2r} w_{r,t+1} - \frac{1}{h} \Delta_{2r} w_{rt} \right).$$

Kąt obrotu przekroju  $C$  względem osi  $z$  określa średnia arytmetyczna obrotów osi prętów  $r, t-1$ ;  $r-1, t-1$ ;  $r, t$  i  $r-1, t$ :

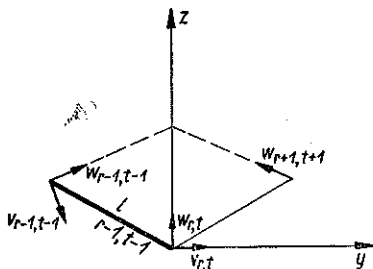
$$\varphi_{Cz} = \frac{1}{4} \left( \frac{\cos \alpha}{h} \Delta_{2r} v_{r,t-1} + \frac{1}{h} \Delta_{2r} v_{rt} + \frac{\sin \alpha}{h} \Delta_{2r} w_{r,t-1} \right);$$

dla przekroju  $D$  natomiast

$$\varphi_{Dz} = \frac{1}{4} \left( \frac{\cos \alpha}{h} \Delta_{2r} v_{r,t+1} + \frac{1}{h} \Delta_{2r} v_{rt} - \frac{\sin \alpha}{h} \Delta_{2r} w_{r,t+1} \right).$$

Jako ostatnie rozpatrzmy obroty przekrojów  $E$  i  $F$  prętów przymocowanych przegubowo we wszystkich płaszczyznach.

Aby określić obrót przekroju  $E$  względem osi  $x$  zrzutujemy na płaszczyznę  $yz$  pręt wykrzyżowania o numerze  $r-1, t-1$  (rys. 10).



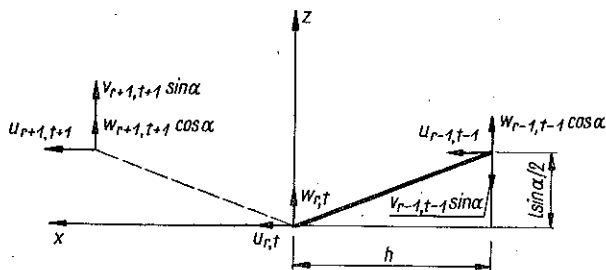
Rys. 10

Poszukiwany kąt obrotu przekroju  $E$  jest równy kątowi obrotu osi pręta względem tejże osi  $x$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{Ex} &= \frac{w_{rt} - w_{r-1,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{v_{rt} + v_{r-1,t-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{\Delta_{rt} w_{r-1,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{v_{rt} + v_{r-1,t-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Analogicznie dla przekroju  $F$

$$\varphi_{Fx} = \frac{\Delta_{rt} w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{v_{rt} + v_{r+1,t+1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2}.$$



Rys. 11

Dla określenia obrotów względem osi  $y$  zrzutujemy rozpatrywany pręt na płaszczyznę. Na podstawie rys. 11 obliczamy ten obrót:

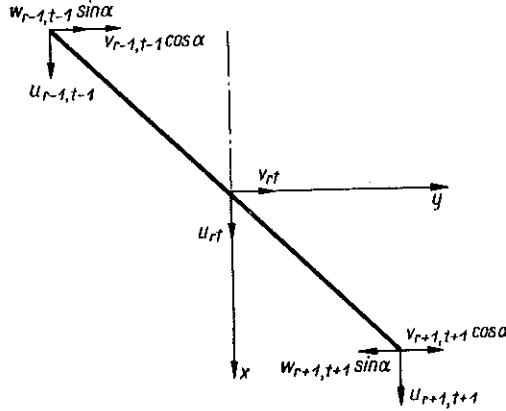
$$\varphi_{Ey} = - \frac{w_{rt} - w_{r-1,t-1} \cos \alpha}{h} - \frac{v_{r-1,t-1} \sin \alpha}{h} - \frac{\Delta_{rt} u_{r-1,t-1}}{\sin(\alpha/2)}.$$



Analogicznie

$$\varphi_{Fy} = -\frac{w_{r+1,t+1} \cos \alpha - w_{rt}}{h} - \frac{v_{r+1,t+1} \sin \alpha}{h} + \frac{\Delta_{rt} u_{rt}}{l \sin(\alpha/2)}$$

Do określenia pozostały jedynie obroty przekrojów *E* i *F* wokół osi *z*. Wykonajmy w tym celu rzut naszego węzła *rt* na płaszczyznę *xy* (rys. 12).

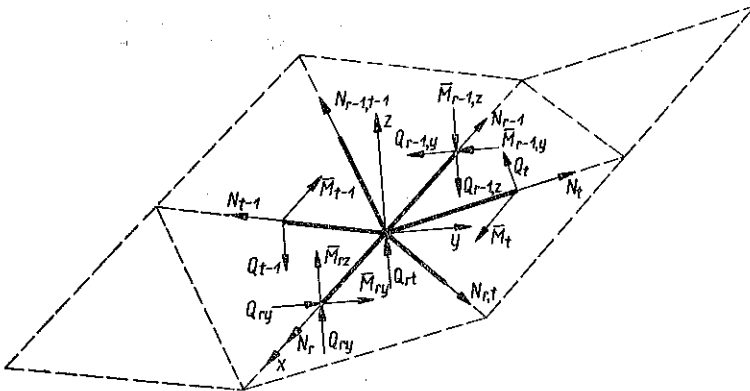


Rys. 12

Z rysunku 12 łatwo określić poszukiwane obroty, mianowicie

$$\varphi_{Ez} = -\frac{w_{r-1,t-1} \sin \alpha}{h} + \frac{v_{rt} - v_{r-1,t-1} \cos \alpha}{h} - \frac{\Delta_{rt} u_{r-1,t-1}}{l \cos(\alpha/2)}$$

$$\varphi_{Fz} = -\frac{w_{r+1,t+1} \sin \alpha}{h} + \frac{v_{r+1,t+1} \cos \alpha - v_{rt}}{h} - \frac{\Delta_{rt} u_{rt}}{l \cos(\alpha/2)}$$



Rys. 13

Znając obroty wszystkich przekrojów rozpatrywanego wycinka możemy zestawić równania równowagi. Siły wewnętrzne działające w przekrojach zestawiono na rys. 13.

Tak więc sumy rzutów sił na trzy osie  $x, y, z$  będą miały postać następującą:

$$\begin{aligned}
 & \Delta_r N_{r-1} + \Delta_{rt} N_{r-1, t-1} \sin \beta - Q_{rz} \frac{\Delta_r w_{rt}}{h} + Q_{r-1, z} \frac{\Delta_r w_{r-1, t}}{h} - \\
 & \quad - Q_{ry} \frac{\Delta_r v_{rt}}{h} + Q_{r-1, y} \frac{\Delta_r v_{r-1, t}}{h} + \\
 & \quad + N_t \frac{1}{4h} \left[ (\Delta_{2r} w_{r, t+1} - \Delta_{2r} w_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} - (\Delta_{2r} v_{r, t+1} + \Delta_{2r} v_{rt}) \cos \frac{\alpha}{2} \right] + \\
 & \quad + N_{t-1} \frac{1}{4h} \left[ (\Delta_{2r} w_{r, t-1} - \Delta_{2r} w_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} + (\Delta_{2r} v_{r, t-1} + \Delta_{2r} v_{rt}) \cos \frac{\alpha}{2} \right] + \\
 & \quad + Q_t \frac{1}{4h} \left[ -(\Delta_{2r} v_{r, t+1} - \Delta_{2r} v_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} - (\Delta_{2r} w_{r, t+1} + \Delta_{2r} w_{rt}) \cos \frac{\alpha}{2} \right] + \\
 & \quad + Q_{t-1} \frac{1}{4h} \left[ -(\Delta_{2r} v_{r, t-1} - \Delta_{2r} v_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} + (\Delta_{2r} w_{r, t-1} + \Delta_{2r} w_{rt}) \cos \frac{\alpha}{2} \right] + \\
 & \quad + N_{r, t} \cos \beta \frac{1}{h} \left[ (w_{r+1, t+1} + w_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} - \Delta_{rt} v_{rt} \cos \frac{\alpha}{2} + 2\Delta_{rt} u_{r, t} \frac{h}{l} \right] + \\
 & \quad + N_{r-1, t-1} \cos \beta \frac{1}{h} \left[ -(w_{rt} + w_{r-1, t-1}) \sin \frac{\alpha}{2} + \Delta_{rt} v_{r-1, t-1} \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. - 2\Delta_{rt} u_{r-1, t-1} \frac{h}{l} \right] = 0, \\
 & \Delta_t N_{t-1} \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_r Q_{r-1, y} + \Delta_{rt} N_{r-1, t-1} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} + N_r \frac{\Delta_r v_{rt}}{h} - \\
 & \quad - N_{r-1} \frac{\Delta_r v_{r-1}}{h} - Q_{rz} \left( \frac{v_{r+1, t} + v_{rt}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
 & \quad + Q_{r-1, z} \left( \frac{v_{rt} + v_{r-1, t}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{r, t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \\
 & \quad - (Q_t + Q_{t-1}) \sin \frac{\alpha}{2} + N_{rt} \frac{\sin \beta}{h} \left[ -\frac{\sin \alpha}{2} (3w_{r+1, t+1} - w_{rt}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} v_{r+1, t+1} (1 - 3 \cos \alpha) - \frac{1}{2} v_{rt} (3 - \cos \alpha) - \frac{\Delta_{rt} u_{rt}}{\cos(\alpha/2)} \frac{h}{l} \right] + \\
 & \quad + N_{r-1, t-1} \frac{\sin \beta}{h} \left[ -\frac{\sin \alpha}{2} (w_{rt} - 3w_{r-1, t-1}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} v_{rt} (3 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} v_{r-1, t-1} (1 - 3 \cos \alpha) + \frac{\Delta_{rt} u_{r-1, t-1}}{\cos(\alpha/2)} \frac{h}{l} \right] - \\
 & \quad - Q_t \frac{1}{l} \left[ (v_{r, t+1} + v_{rt}) \frac{\sin \alpha}{2} + \Delta_t w_{rt} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right] + \\
 & \quad + Q_{t-1} \frac{1}{l} \left[ (v_{rt} + v_{r, t-1}) \frac{\sin \alpha}{2} + \Delta_t w_{rt} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right] = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_r Q_{r-1,tz} + \Delta_t Q_{t-1} \cos \frac{\alpha}{2} + (N_t + N_{t-1}) \sin \frac{\alpha}{2} + (N_{rt} + N_{r-1,t-1}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \\
& + N_r \frac{\Delta_r w_r}{h} - N_{r-1} \frac{\Delta_r w_{r-1,t}}{h} + Q_{ry} \left( \frac{v_{r+1,t} + v_{rt}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \\
& - Q_{r-1,y} \left( \frac{v_{rt} + v_{r-1,r}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{r,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
& + N_t \frac{1}{l} \left[ (v_{rt} + v_{r,t+1}) \frac{\sin \alpha}{2} + \Delta_t w_{rt} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right] - N_{t-1} \frac{1}{l} \left[ (v_{rt} + v_{r,t-1}) \frac{\sin \alpha}{2} + \right. \\
& \left. + \Delta_t w_{r,t-1} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right] + \\
& + N_{rt} \frac{\sin \beta}{h} \left[ \frac{1}{2} w_{r+1,t+1} (1 + 3 \cos \alpha) - \frac{1}{2} w_{rt} (3 + \cos \alpha) + \frac{\sin \alpha}{2} (3v_{r+1,t} + v_{rt}) - \right. \\
& \left. - \frac{\Delta_{rt} u_{rt}}{\sin(\alpha/2)} \frac{h}{l} \right] + N_{r-1,t-1} \frac{\sin \beta}{h} \left[ \frac{1}{2} w_{rt} (3 + \cos \alpha) - \frac{1}{2} w_{r-1,t-1} (3 + \cos \alpha) + \right. \\
& \left. + \frac{\sin \alpha}{2} (v_{rt} + 3v_{r-1,t-1}) + \frac{\Delta_{rt} u_{r-1,t-1}}{\sin(\alpha/2)} \frac{h}{l} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Podobnie, biorąc pod uwagę obroty poszczególnych przekrojów, można zestawzić równania momentów względem trzech osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned}
& \Delta_{2t} M_t + (Q_t + Q_{t-1}) l - (M_{r+1,y} + M_{ry}) \frac{\Delta_r v_{rt}}{h} + (M_{ry} + M_{r-1,y}) \frac{\Delta_r v_{r-1,t}}{h} - \\
& - (M_{r+1,z} + M_{rz}) \frac{\Delta_r w_{rt}}{h} + (M_{rz} + M_{r-1,z}) \frac{\Delta_r w_{r-1,t}}{h} = 0, \\
& \Delta_{2r} M_{ry} - (Q_{rz} + Q_{r-1,z}) h - (M_{r+1,z} + M_{rz}) \left( \frac{v_{r+1,t} + v_r}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
& + (M_{rz} + M_{r-1,z}) \left( \frac{v_r + v_{r-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{r,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
(3.2) \quad & + (M_{t+1} + M_t) \frac{1}{4h} (\Delta_{2r} v_{r,t+1} \cos \alpha + \Delta_{2r} v_{rt} - \Delta_{2r} w_{r,t+1} \sin \alpha) - \\
& - (M_t + M_{t-1}) \frac{1}{4h} (\Delta_{2r} v_{r,t-1} \cos \alpha + \Delta_{2r} v_{rt} + \Delta_{2r} w_{r,t-1} \sin \alpha) = 0, \\
& \Delta_{2r} M_{rz} + (Q_{ry} + Q_{r-1,y}) h + (M_{r+1,y} + M_{ry}) \left( \frac{v_{r+1,t} + v_{rt}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \\
& - (M_{ry} + M_{r-1,y}) \left( \frac{v_r + v_{r-1,t}}{l} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta_t w_{r,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \\
& - (M_{t+1} + M_t) \frac{1}{4h} \left[ -(\Delta_{2r} v_{r,t+1} - \Delta_{2r} v_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} - (\Delta_{2r} w_{r,t+1} + \Delta_{2r} w_{rt}) \cos \frac{\alpha}{2} \right] + \\
& + (M_t + M_{t-1}) \frac{1}{4h} \left[ -(\Delta_{2r} v_{r,t-1} - \Delta_{2r} v_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} + (\Delta_{2r} w_{r,t-1} + \Delta_{2r} w_{rt}) \cos \frac{\alpha}{2} \right] = 0.
\end{aligned}$$

W równaniach tych i dalszych wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\Delta_{rt} N_{r-1,t-1} &= N_{rt} - N_{r-1,t-1}, \\ \Delta_{2rt} &= N_{r+1,t+1} - N_{r-1,t-1}, \\ \Delta_{rt}^2 u_{rt} &= u_{r+1,t+1} - 2u_{rt} + u_{r-1,t-1}.\end{aligned}$$

Jeżeli w układach równań (3.1) i (3.2) przejść do granicy tak by wielkości  $h$  i  $l$  zdążyły do zera, to otrzymamy równania równowagi zbliżone do równań powłoki cylindrycznej.

Poniżej zestawiono kolejno równania równowagi po sprowadzeniu ich do granicy i porównano z równaniami teorii cylindrycznych powłok według S. TIMOSZENKI, [15]. I tak na oś  $x$ , po sprowadzeniu wartości  $h$  i  $l$  do zera otrzymamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_r}{\partial x} + \frac{\partial N_{rt}}{\partial x} \sin \beta - Q_{rz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Q_{ry} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\ - N_{rt} \cos \beta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,\end{aligned}$$

natomiast odpowiednie równanie teorii powłok cylindrycznych ma postać

$$\frac{\partial N_r}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{a \partial \theta} - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \frac{1}{a} - N_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że wielkości  $N_r$  odpowiada  $N_x$  wartości  $Q_{rz} - Q_x$ , wartości  $Q_{ry}$  — wartość  $N_{xy}$ , wartości  $Q_t$  wartość  $Q_y$  i wreszcie wartości  $N_r$  wielkość  $N_y$ , można stwierdzić, że obydwie powyższe równania są równoważne z wyjątkiem wyrazów z siłami  $N_{rt}$ . Niezgodność ta wynika stąd, że siły  $N_{r-1,t-1}$  i  $N_{rt}$  przechodzą przez środek badanego elementu, a siły  $N_{yx}$  są nawzajem równoległe. Pewna odmiennosc wynika ponadto z nieprawidłowości w wyrazie zawierającym  $Q_y$ , w równaniach TIMOSZENKI. Jak nie trudno się przekonać, wektor siły  $Q_y$  jest ortogonalny do wektora przemieszczenia  $v$ , a więc nie powinien dawać żadnej składowej wynikającej z tego przemieszczenia.

Podobnie wygląda porównanie dalszych równań równowagi przy sprowadzeniu  $h$  i  $l$  do zera, mianowicie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_t}{\partial y} + \frac{\partial Q_{ry}}{\partial x} + N_r \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_{rz} \left( \frac{\partial v}{a \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial N_{rt}}{\partial x} \cos \beta - \\ - Q_t \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} a \right) \frac{1}{a} + N_{rt} \sin \beta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial Q_{rz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_t}{\partial y} + N_t \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} a \right) \frac{1}{a} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_{ry} \left( \frac{\partial v}{a \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ + 2N_{rt} \sin \beta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Podobnie porównanie równań sumy momentów (3.2) daje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_t}{\partial y} - Q_t - M_{ry} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{rz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_{ry}}{\partial x} - Q_{rz} - M_{zr} \left( \frac{\partial v}{a \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + M_t \frac{\partial w}{\partial x a} &= 0, \\ \frac{\partial M_{rz}}{\partial x} + Q_{ry} + M_{ry} \left( \frac{\partial v}{a \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - M_t \frac{\partial w}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Jak widać z powyższego, poszczególne wyrazy z wyjątkiem tych, które zawierają siłę w wykrzyżowaniu  $N_{rt}$ , pokrywają się z odpowiednimi wyrazami teorii powłok cylindrycznych (por. np. z książką [15]).

Przy zagadnieniach statyki, w których obciążenie zewnętrzne jest dalekie od krytycznego dla danej powłoki, można w powyższych równaniach pominąć iloczyny sił wewnętrznych przez przemieszczenia i ich przyrosty.

W przypadku takim układy (3.1) i (3.2) przyjmą postać:

$$(3.3) \left\{ \begin{aligned} \Delta_r N_{r-1} + \Delta_{rt} N_{r-1, t-1} \sin \beta &= 0, \\ \Delta_t N_{t-1} \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_r Q_{r-1, y} + \Delta_{rt} N_{r-1, t-1} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - (Q_t + Q_{t-1}) \sin \frac{\alpha}{2} &= 0, \\ \Delta_r Q_{r-1, z} + \Delta_t Q_{t-1} \cos \frac{\alpha}{2} + (N_t + N_{t-1}) \sin \frac{\alpha}{2} + \\ &+ (N_{rt} + N_{r-1, t-1}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + Q_{rt} = 0, \\ \Delta_{2t} M_t + (Q_t + Q_{t-1}) l &= 0, \\ \Delta_{2r} M_{ry} - (Q_{rz} + Q_{r-1, z}) h &= 0, \\ \Delta_{2r} M_{rz} + (Q_{ry} + Q_{r-1, y}) h &= 0. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli narzucić na otrzymany układ (3.3) warunki symetrii, to nie trudno wykazać, iż przejdzie on w układ równań (2.2).

**3.2. Siły wewnętrzne a przemieszczenia.** Dla pełnej analizy badanej powłoki należy jeszcze określić po zestawieniu równań równowagi wyciętego elementu wielkości sił wewnętrznych w funkcji przemieszczeń  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . A oto one:

Siła  $N_r$  może być określona z różnicy przemieszczeń, ogólnie rzecz biorąc  $u$ ,  $v$ ,  $w$  i wyniesie (rys. 14):

$$N_r = \frac{EF_p}{h} \left[ \sqrt{(h + \Delta_r u_{rt})^2 + (\Delta_r w_{rt})^2 + (\Delta_r v_{rt})^2} - h \right].$$

Przyjmując pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg pierwiastka otrzymamy:

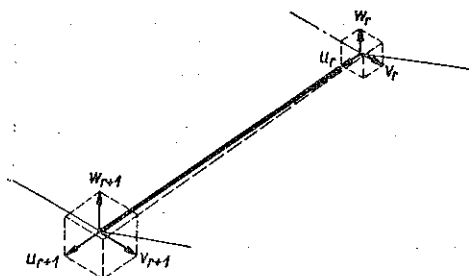
$$N_r = EF_p \left[ \frac{\Delta_r u_{rt}}{h} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_r u_{rt}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_r w_{rt}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_r v_{rt}}{h} \right)^2 \right].$$

Przyjmując przemieszczenia  $u$  za małe w stosunku do  $w$  i  $v$  ostatecznie otrzymamy:

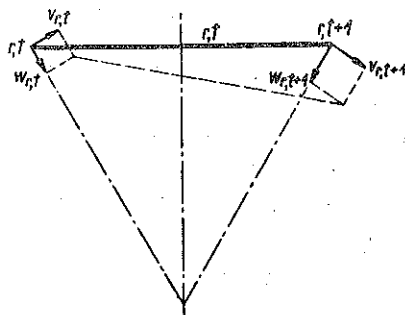
$$N_r = EF_r \left[ \frac{\Delta_r u_{rt}}{h} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_r w_{rt}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_r v_{rt}}{h} \right)^2 \right].$$

Przy klasycznych zagadnieniach liniowych statyki i stateczności można przyjąć

$$N_r = \frac{EF_p}{h} \Delta_r u_{rt}.$$



Rys. 14



Rys. 15

Rozpatrzmy obecnie związek siły  $N_t$  z przemieszczeniami  $v$  i  $w$ . Przemieszczenie  $u$  jako małe w tym przypadku pominięto. Na rysunku 15 pokazano wydłużenie się pręta o początkowej długości  $l$  po przemieszczeniu się jego końców.

Na podstawie tegoż rysunku można określić siłę  $N_t$ :

$$N_t = \frac{EF_t}{l} \left[ \sqrt{l^2 + 2l\Delta_t v_{rt} \cos(\alpha/2) - 2l(w_{r,t+1} + w_{rt}) \sin(\alpha/2)} + \right. \\ \left. + \sqrt{[\Delta_t v_{rt}]^2 + [\Delta_t w_{rt}]^2} \cos^2(\alpha/2) + \right. \\ \left. + \sqrt{[w_{r,t+1} + w_{rt}]^2 + [v_{rt} + v_{r,t+1}]^2} \sin^2(\alpha/2) + \Delta_t w_{rt} (v_{rt} + v_{r,t+1}) \sin \alpha - l \right].$$

Po rozwinięciu pierwiastka w szereg i wzięciu dwóch pierwszych wyrazów otrzymamy ostatecznie

$$N_t = EF_t \left[ \frac{\Delta_t v_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} - \left( \frac{w_{r,t+1} + w_{rt}}{l} \right) \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta_t v_{rt}}{l} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{w_{r,t+1} + w_{rt}}{l} \right)^2 + \left( \frac{v_{rt} + v_{r,t+1}}{l} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_t w_{rt}}{l} \frac{v_{rt} + v_{r,t+1}}{l} \sin \alpha \right].$$

Przy małych ugięciach można pominąć kwadraty przemieszczeń i ich przyrostów. Wtedy siła  $N_t$  wyniesie

$$N_t = EF_t \left[ \frac{\Delta_t v_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} - \left( \frac{w_{r,t+1} + w_{rt}}{l} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \right].$$

Z kolei określimy wielkość siły  $N_{rt}$ . Na rysunku 16 oznaczono przemieszczenia końców pręta wykrzywionego i obliczono posługując się układem współrzędnych  $a, b, c$  długość tego pręta po odkształceniu. Siła wywołana tym wydłużeniem wyniesie

$$N_{rt} = \frac{EF_w}{h} \sin \beta \left\{ \left[ l_w^2 + (\Delta_{rt} u_{rt})^2 + 2l_w \sin \beta \Delta_{rt} u_{rt} + \left( (\Delta_{rt} w_{rt})^2 + (\Delta_{rt} v_{rt})^2 \right) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( (w_{r+1,t+1} + w_{rt})^2 + (v_{r+1,t+1} + v_{rt})^2 \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2l_w \cos \beta \Delta_{rt} v_{rt} \cos \frac{\alpha}{2} - 2l_w \cos \beta (w_{r+1,t+1} + w_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \alpha \left( \Delta_{rt} w_{rt} (v_{r+1,t+1} + v_{rt}) - \Delta_{rt} v_{rt} (w_{r+1,t+1} + w_{rt}) \right) \right]^{1/2} - l_w \right\}.$$

Po rozwinięciu pierwiastka w szereg i wzięciu dwóch pierwszych wyrazów otrzymamy (odrzucając  $(\Delta_{rt} u_{rt})^2$  jako pomijalnie małe):

$$N_{r,t} = EF_w \left\{ \frac{\Delta_{rt} u_{rt}}{h} \sin^2 \beta + \frac{\Delta_{rt} v_{rt}}{h} \cos \beta \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\ \left. - \frac{w_{r+1,t+1} + w_{rt}}{h} \sin \beta \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \left[ \left( \frac{\Delta_{rt} w_{rt}}{h} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\Delta_{rt} v_{rt}}{h} \right)^2 \right] \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta + \left[ \left( \frac{w_{r+1,t+1} + w_{rt}}{h} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{v_{r+1,t+1} + v_{rt}}{h} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta + \right. \\ \left. + [\Delta_{rt} w_{rt} (v_{r+1,t+1} + v_{rt}) - \Delta_{rt} v_{rt} (w_{r+1,t+1} + w_{rt})] \sin \alpha \sin^2 \beta \right\}.$$

Przy małych ugięciach można pominąć kwadraty przemieszczeń jak i ich przyrostów traktując je jako małe wyższego rzędu. Wówczas siła  $N_{rt}$  będzie miała postać następującą:

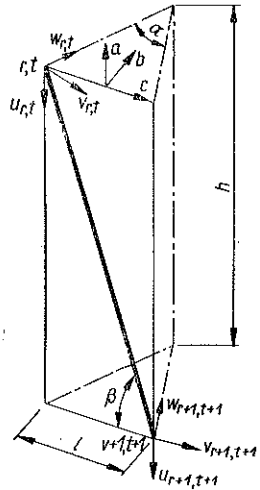
$$N_{rt} = \frac{EF_w}{h} \sin \beta \left[ \Delta_{rt} u_{rt} \sin \beta + \Delta_{rt} v_{rt} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - (w_{r+1,t+1} + w_{rt}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right].$$

Obecnie pozostają jeszcze do określenia momenty  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  i  $M_t$ .

Jeżeli chodzi o momenty  $M_{ry}$  i  $M_{rz}$ , to możemy skorzystać z wartości uzyskanych w p. 2, gdyż w przypadku ogólnym nie ulegają one zmianie. Tak więc

$$M_{r-1,y} S_{ry} + M_{ry} (C_{ry} + C_{r+1,y}) + M_{r+1,y} S_{r+1,y} + \frac{EJ_{py}}{h^2} \Delta_{rr}^2 w_{rt} = 0,$$

$$M_{r-1,z} S_{rz} + M_{rz} (C_{rz} + C_{r+1,z}) + M_{r+1,z} S_{r+1,z} - \frac{EJ_{pz}}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_{rt} = 0.$$



Rys. 16

Moment  $M_t$  wynika ze zmiany kształtu wręgi. Na rys. 17 przedstawiono przemieszczenia trzech sąsiednich węzłów powodujących tę zmianę.

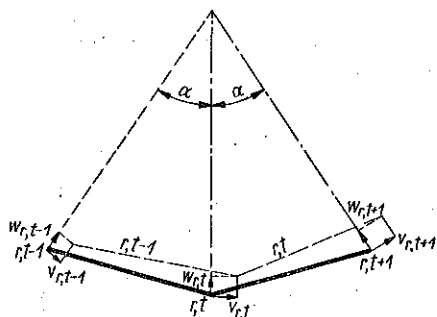
Mając przemieszczenia poszczególnych węzłów można określić obroty prętów  $rt$  i  $r, t-1$  go, mianowicie:

dla pręta  $r, t-1$

$$\varphi_{t-1} = \frac{w_{rt} - w_{r,t-1}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{v_{rt} + v_{r,t-1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2};$$

dla pręta  $rt$

$$\varphi_t = \frac{w_{r+1,t+1} - w_{rt}}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{v_{rt} + v_{r+1,t+1}}{l} \sin \frac{\alpha}{2}.$$



Rys. 17.

Jeżeli teraz założymy, że kąt między prętami  $t$  i  $t-1$ -szy mają być takie same przed i po odkształceniu, to otrzymamy zależność wyrażającą  $M_t$  i wiążącą ten moment z przemieszczeniami:

$$M_{t-1}S_t + M_t(C_t + C_{t+1}) + M_{t+1}S_{t+1} - \frac{EJ_t}{l} \left( \Delta_{tt}^2 w \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_{2t} v \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

gdzie dla prętów ściskanych

$$S_t = \frac{1}{\varphi_t^2} \left( \frac{\varphi_t}{\sin \varphi_t} - 1 \right), \quad C_t = \frac{1}{\varphi_t^2} (1 - \varphi_t \operatorname{ctg} \varphi_t),$$

a dla różciąganych

$$S_t = \frac{1}{\varphi_t^2} \left( 1 - \frac{\varphi_t}{\operatorname{sh} \varphi_t} \right), \quad C_t = \frac{1}{\varphi_t^2} (\varphi_t \operatorname{cth} \varphi_{t-1}).$$

We wzorach tych przyjęto

$$\varphi_{ry} = l \sqrt{\frac{N_t}{EJ_t}}.$$



W przypadku gdy siły osiowe są dalekie od krytycznych dla rozpatrywanych prętów można pominąć zginanie ich przez te siły. W przypadkach takich  $S_t = 1/6$  oraz  $C_t = 1/3$ , a równanie określające moment  $M_t$  będzie miało postać

$$M_{t-1} + 4M_t + M_{t+1} - \frac{6EJ_t}{l^2} \left( \Delta_{tt}^2 w \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_{2t} v \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

lub inaczej

$$\Delta_{tt}^2 M_t + 6M_t - \frac{6EJ_t}{2} \left( \Delta_{tt}^2 w \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_{2t} v \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0.$$

Jeżeli teraz w otrzymanych zależnościach przejdziemy do granicy, tak by wielkości  $h$ ,  $l$  i  $\alpha$  zdążyły do zera, to w przypadku zagadnienia liniowego otrzymamy następujące siły wewnętrzne:

$$N_r = EF_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_t = EF_t \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{a} \right),$$

$$M_{ry} = -EJ_{py} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_t = EJ_t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{a \partial y} \right).$$

Jeżeli otrzymane wartości porównać z teorią powłok cylindrycznych (por. [15]), to widzimy, że wartości siły  $N_r$  odpowiada siła

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} \right) \right].$$

Tak więc różnica polega na tym, że w niniejszej teorii pominięto szerokości prętów w stosunku do ich długości i stąd w wyrażeniu  $N_r$  brak jest współczynnika Poissona.

Podobnie wygląda porównanie siły  $N_t$ , oznaczonej przez S. TIMOSZENKĘ przez  $N_\varphi$ , mianowicie:

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

w porównaniu z

$$N_t = EF_t \left( \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} \right).$$

Analogicznie wygląda sprawa z momentami. Przy pominięciu liczby Poissona otrzymujemy zupełną zgodność momentów  $M_x$  w [15] z  $M_{ry}$ , jak i  $M$  z  $M_t$ .

Opierając się na powyższych porównaniach nie należy sądzić, iż wobec pominięcia liczby Poissona nie ma w ogóle powiązania między przemieszczeniami  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Zjawisko zmiany wymiarów poprzecznych przy obciążeniach wzdłużnych, opisane uogólnionym prawem Hooke'a, znajduje swoje odbicie w działaniu wykrzyżowań. Już w p. 2 wykazano, że zmiana przemieszczeń, np.  $u$ , wpływa poprzez wykrzyżowania na zmianę w przemieszczeniach  $w$ .

Jak już wspomniano na wstępie, w dalszym ciągu tej pracy rozpatrzone są przypadki przy małych ugięciach. Ostateczne więc równania przemieszczeń otrzymamy z układu (3.3) i wartości sił wewnętrznych obliczonych w p. 3.2 w przypadku małych ugięć węzłów.

Poniższy układ powstał z wyrugowania w układzie (3.3) wielkości  $Q_{ry}$ ,  $Q_{rz}$  i  $Q_t$  i zastąpienia wielkości  $N_r$ ,  $N_t$  i  $N_{rt}$  obliczonymi w p. 3.2 w funkcji przemieszczeń  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . W przeciwieństwie do układu równań różniczkowych powłok cylindrycznych nie można tutaj ze względu na równania różnicowe wyeliminować wartości momentów. Tak więc ostatecznie otrzymano układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  i  $M_t$ . Jak już wcześniej wspomniano, układ ten jest słuszny przy obciążeniach dalekich od krytycznych:

$$(3.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta_{rr}^2 u_{rt}}{h} EF_p + \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \left( \Delta_{rt}^2 u_{rt} \sin \beta + \Delta_{rt}^2 v_{rt} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\ \left. - \Delta_{2rt} w_{rt} \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0, \\ \frac{EF_t}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \left( \Delta_{tt}^2 v_{rt} \cos \frac{\alpha}{2} - \Delta_{2t} w_{rt} \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\Delta_{rr}^2 M_{rz}}{h} + \\ + \frac{EF_w}{h} \sin \beta \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} \left( \Delta_{rt}^2 u_{rt} \sin \beta + \Delta_{rt}^2 v_{rt} \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\ \left. - \Delta_{2rt} w_{rt} \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\Delta_{2t} M_t}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \\ \frac{\Delta_{rr}^2 M_{ry}}{h} - \frac{\Delta_{tt}^2 M_t}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \\ + \frac{EF_w}{h} \sin \beta \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \Delta_{2rt} u \sin \beta + \Delta_{2rt} v \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \right. \\ \left. - (\Delta_{rt}^2 w_{rt} + 4w_{rt}) \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} \right] + \\ + \frac{EF_t}{l} \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \Delta_{2t} v_{rt} \cos \frac{\alpha}{2} - (\Delta_{tt}^2 w_t + 4w_{rt}) \sin \frac{\alpha}{2} \right] + Q_{rt} = 0, \\ \Delta_{rr}^2 M_{ry} + 6M_{ry} + \frac{EJ_{py}}{h^2} \Delta_{rr}^2 w_{rt} = 0, \\ \Delta_{rr}^2 M_{rz} + 6M_{ry} - \frac{EJ_p}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_{rt} = 0, \\ \Delta_{tt}^2 M_t + 6M_t - \frac{6EJ_t}{2} \left[ \Delta_{tt}^2 w \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_{2t} v \sin \frac{\alpha}{2} \right] = 0. \end{array} \right.$$

Z kolei w dwóch następnych punktach podamy równania i ich rozwiązania dla dwu szczególnych przypadków, mianowicie przy utracie stateczności kwadratowej powłoki obciążonej osiową siłą i skręcającym momentem.

#### 4. Szczególne przypadki powłok ramowo-kratowych

4.1. Stateczność powłoki o przekroju kwadratowym ściskanej siłą osiową. W praktyce spotyka się najczęściej powłoki ramowo-kratowe o przekroju kwadratowym. Dlatego też poniżej podano rozwiązanie takiej powłoki wybaczonej siłą osiową. Jeżeli chodzi o warunki brzegowe, to przyjęto, że powłoka zamocowana jest w sztywnych płytach, mających możliwość swobodnego przesuwania się i obracania względem siebie w stosunku do osi  $x$ . Takie też jest najczęściej zamocowanie kratownic przyrmatycznych w praktyce. Wieża (lub maszt) utwierdzona jest zwykle jednym końcem w podstawie, a na drugim jest swobodna i zakończona sztywną wręgą.

W samych równaniach równowagi poczyniono następujące założenia:

1. Wszystkie siły wewnętrzne, z wyjątkiem  $N_r$ , są małe i można pominąć ich iloczyny przez przemieszczenia i ich przyrosty.

2. Siła  $N_r$  jest we wszystkich odcinkach pasa równa sile  $P$ , przyłożonej do skrajnego przekroju pasa. Przy omówionych wyżej warunkach brzegowych założenie to jest dopuszczalne, gdyż współdziałanie sił  $N_{rt}$  w przenoszeniu siły osiowej jest tak małe, że można go pominąć.

Tak więc w układzie (3.1) odrzucono wspomniane iloczyny sił wewnętrznych przez przemieszczenia z wyjątkiem siły  $N_r$ , na miejsce której wstawiono  $-P$ . Natomiast w równaniach odkształceń wstawiono  $S_{ry} = S_{r+1,y} = S_y$  i  $C_{ry} = C_{r+1,y} = C_y$ . Ponadto za kąt  $\alpha$  wstawiono  $\pi/2$ . Ostatecznie równania stateczności mają postać:

$$(4.1) \quad \frac{EF_p}{h} \Delta_{rr}^2 u_{rt} + \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \left[ \Delta_{rt}^2 u_{rt} \sin \beta + (\Delta_{rt}^2 v_{rt} - \Delta_{2rt} w) \cos \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,$$

$$\frac{EF_t}{2} (\Delta_{tt}^2 v_{rt} - \Delta_{2t} w_{rt}) - \frac{\Delta_{rr}^2 M_{rz}}{h} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EF_w}{h} \sin 2\beta \left[ \Delta_{rt}^2 u_{rt} + \sin \beta + (\Delta_{rt}^2 v_{rt} - \Delta_{2rt} w_{rt}) \cos \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \right] +$$

$$+ \frac{\Delta_{2t} M_t}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{\Delta_{rr}^2 v_r}{h} = 0,$$

$$\frac{\Delta_{rr}^2 M_{ry}}{h} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Delta_{tt}^2 M_t}{l} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EF_w}{h} \sin 2\beta \left[ \Delta_{2rt} u_{rt} \sin \beta + \right.$$

$$\left. + (\Delta_{2rt} v_{rt} - \Delta_{rt}^2 w_{rt} - 4w_{rt}) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta \right] +$$

$$+ \frac{EF_t}{2} (\Delta_{2t} v_{rt} - \Delta_{tt}^2 w - 4w_{rt}) - P \frac{\Delta_{rr}^2 w_{rt}}{h} = 0,$$

$$M_{r-1,y} S_y + 2M_{ry} C_y + M_{r+1,y} S_y + \frac{EJ_{py}}{h} \Delta_{rr}^2 w_{rt} = 0,$$

$$M_{r-1,z} S_z + 2M_{rz} C_z + M_{r+1,z} S_z - \frac{EJ_{pz}}{h^2} \Delta_{rr}^2 v_{rt} = 0,$$

$$\Delta_{tt}^2 M_t + 6M_t - \frac{6EJ_t}{l^2} \left( \Delta_{tt}^2 w \cos \frac{\alpha}{2} + \Delta_{2t} v \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0.$$

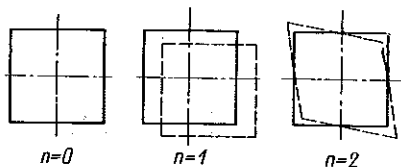
Widać tu zasadniczą różnicę między budową powyższych równań a równaniami dla powłoki cylindrycznej, obciążonej także siłą osiową.

W równaniach opisujących powłokę cylindryczną są tylko parzyste lub nieparzyste pochodne jednego przemieszczenia względem jednej i tej samej zmiennej niezależnej. Natomiast w każdym z powyższych równań występują parzyste lub nieparzyste przyrosty tego samego przemieszczenia, ale w odniesieniu do jednej lub dwóch zmiennych niezależnych. Wynika stąd, że tworzące badanej powłoki kratowej nie są po odkształceniu płaskimi sinusoidami lub cosinusoidami, lecz krzywymi przestrzennymi.

Wynika to z charakteru budowy powłoki. Pręty wykrzywowań tworzą na powierzchni linie śrubowe, co jest przyczyną skręcania się powłoki przy jej ściskaniu. Dlatego też, aby spełnić układ równań (4.2), podstawmy następujące funkcje, które oddają rzeczywistą postać odkształcenia:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{rt} = A \cos \left( nt \frac{\pi}{2} - mr \frac{\pi}{n_0} \right), \\ v_{rt} = B \cos \left( nt \frac{\pi}{2} - mr \frac{\pi}{n_0} \right), \\ w_{rt} = C \sin \left( nt \frac{\pi}{2} - mr \frac{\pi}{n_0} \right), \\ M_{ry} = D \sin \left( nt \frac{\pi}{2} - mr \frac{\pi}{n_0} \right), \\ M_{rz} = G \cos \left( nt \frac{\pi}{2} - mr \frac{\pi}{n_0} \right), \\ M_t = H \sin \left( nt \frac{\pi}{2} - mr \frac{\pi}{n_0} \right). \end{array} \right.$$

W równaniach tych  $n_0$  oznacza liczbę segmentów w powłoce,  $m$  liczbę fal wzdłużnych powłoki, zaś  $n$  liczbę półfal w kierunku poprzecznym. W rzeczywistości dla powłoki o przekroju kwadratowym  $n$  może przyjąć tylko trzy wartości  $n = 0$ ,  $n = 1$  i  $n = 2$ . Przy pierwszej i drugiej z nich przekrój poprzeczny pozostaje



Rys. 18

nieodkształcony, natomiast przy  $n = 2$  przekrój poprzeczny odkształca się przemieniając się z kwadratu w romb (rys. 18).

Zróbmy jednak początkowo założenie, że wymiar poprzeczny jest co najmniej kilkakrotnie mniejszy od długości całej powłoki  $n_0 h$  i w związku z tym sposób za-

mocowania poszczególnych pasów w końcowych wręgach nie ma wpływu na siłę krytyczną. W takim przypadku po podstawieniu założonych funkcji (4.2) do równań (4.1) i wyrugowaniu wartości  $D$ ,  $G$  i  $H$  za pomocą wielkości  $A$ ,  $B$  i  $C$ , otrzymamy następujący układ trzech równań z trzema niewiadomymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ A \left\{ F_p \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right) + F_w \sin^3 \beta \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] \right\} + \right. \\
 & \quad + B \left\{ F_w \sin^2 \beta \cos \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] \right\} + \\
 & \quad + C \left[ -F_w \sin^2 \beta \cos \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) \right] = 0, \\
 & A \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} F_w \sin^2 \beta \cos \beta \left[ \cos \left( \pi \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] \right\} + \\
 & \quad + B \left[ \frac{F_t}{2} \operatorname{tg} \beta \left( \cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{E_w}{2} \sin \beta \cos^2 \beta \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{J_{pz}}{s_z h^2} \frac{\left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)^2}{\cos m \frac{\pi}{n_0} + \frac{c_z}{s_z}} - \frac{P}{E} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} \right) - \frac{3J_t}{l^2} \operatorname{tg} \beta \frac{\sin^2 n \frac{\pi}{2}}{\cos n \frac{\pi}{2} + 2} \right] + \\
 & \quad + C \left[ -\frac{F_t}{2} \operatorname{tg} \beta \sin n \frac{\pi}{2} - \frac{F_w}{2} \sin \beta \cos^2 \beta \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3J_t}{l^2} \operatorname{tg} \beta \frac{\left( \cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin n \frac{\pi}{2}}{\cos n \frac{\pi}{2} + 2} \right] = 0, \\
 & A \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} F_w \sin^2 \beta \cos \beta \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) \right] + \\
 & \quad + B \left[ -\frac{F_w}{2} \sin \beta \cos^2 \beta \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - \frac{F_t}{2} \operatorname{tg} \beta \sin n \frac{\pi}{2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3J_t}{l^2} \operatorname{tg} \beta \frac{\sin n \frac{\pi}{2} \left( \cos n \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)}{\cos n \frac{\pi}{2} + 2} \right] +
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &+ C \left[ - \frac{J_{py} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)^2}{s_y h^2 \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} + \frac{c_y}{s_y} \right)} - \frac{F_w}{2} \sin \beta \cos^2 \beta \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) + 1 \right] - \right. \\
 &\left. - \frac{F_t}{2} \operatorname{tg} \beta \left( 1 + \cos n \frac{\pi}{2} \right) - \frac{P}{E} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right) - \frac{3J_t}{I^2} \operatorname{tg} \beta \frac{\left( \cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\cos n \frac{\pi}{2} + 2} \right] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Aby układ równań (4.3) miał rozwiązanie niezerowe, jego wyznacznik charakterystyczny powinien równać się zeru. Rozwiązanie tego wyznacznika da dla dowolnych wartości  $n$  i  $m$  wielkość siły krytycznej  $P$ . Nie należy przy tym zapominać, że  $P$  jest siłą przypadającą na jeden pas. Tak więc w przypadku rozpatrywanym powyżej, siła krytyczna dla całej powłoki będzie wielkością  $4P$ .

Analiza otrzymanego wyniku na liczbach ogólnych jest niezwykle złożona ze względu na powikłaną budowę poszczególnych wyrazów. Wynika to stąd, że w powłoce ramowo-kratowej występuje o wiele więcej parametrów niż w klasycznej powłoce cylindrycznej. Tak więc w powłokach cylindrycznych mamy do czynienia z trzema wielkościami: grubością pokrycia, promieniem powłoki i jej długością, a w przypadku powłoki ramowo-kratowej mamy do czynienia już z ośmioma parametrami. Są nimi  $n_0$ ,  $J_{py}$ ,  $J_{pz}$ ,  $F_p$ ,  $I_t$ ,  $F_t$  i  $F_w$ . Z tego też względu obraz całego zagadnienia nie jest tak jasny i analizę szczegółową należy przeprowadzić osobno dla każdego badanego przypadku.

Do osobnego zagadnienia prowadzi pytanie, jaką powłokę można uznać za dostatecznie długą, to znaczy przy ilu segmentach powłoki można pominąć wpływ zamocowania na wielkość siły krytycznej. Inaczej niż w przypadku powłok walcowych odpowiedź na to pytanie w postaci ogólnej zależności dla  $n_0 h/l$  jest tu niemal niemożliwa.

Chcąc otrzymać ściślejsze rozwiązanie (szczególnie przy powłokach 2-4-segmentowych, gdzie wpływ zamocowania jest znaczny) można uwzględnić warunki brzegowe w następujący sposób.

Na wstępie należy rozwiązać wyznacznik charakterystyczny układu równań (4.3) przy założonych z góry wartościach  $P$  i  $n$ . Biorąc jednak pod uwagę, że

$$\cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 = -2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n_0},$$

otrzymamy równanie dziesiątego stopnia względem  $\sin m(\pi/2n_0)$  a więc i  $m/n_0$ . Po rozwiązaniu tego równania otrzymamy dziesięć różnych wartości stosunku  $m/n_0$ . Jeżeli wstawimy je kolejno do układu równań (4.2), to otrzymamy nowy układ w postaci sumy dziesięciu rozwiązań, mianowicie

$$(4.4) \left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^{10} A_i \cos \left[ nt \frac{\pi}{2} - \left( \frac{m}{n_0} \right)_i \pi r \right], \\ v = \sum_{i=1}^{10} B_i \cos \left[ nt \frac{\pi}{2} - \left( \frac{m}{n_0} \right)_i \pi r \right], \\ w = \sum_{i=1}^{10} C_i \sin \left[ nt \frac{\pi}{2} - \left( \frac{m}{n_0} \right)_i \pi r \right], \\ M_{ry} = \sum_{i=1}^{10} D_i \sin \left[ nt \frac{\pi}{2} - \left( \frac{m}{n_0} \right)_i \pi r \right], \\ M_{rz} = \sum_{i=1}^{10} G_i \cos \left[ nt \frac{\pi}{2} - \left( \frac{m}{n_0} \right)_i \pi r \right], \\ M_t = \sum_{i=1}^{10} H_i \sin \left[ nt \frac{\pi}{2} - \left( \frac{m}{n_0} \right)_i \pi r \right]. \end{array} \right.$$

Jednakże wielkości  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  można wyznaczyć jako funkcję wartości  $A_i$  za pomocą układu równań (4.3), tak że w rezultacie mamy do znalezienia tylko 10 niezależnych parametrów. W tym celu należy wykorzystać 10 następujących warunków brzegowych:

na końcu utwierdzonym na stałe

$$u_{0t} = v_{0t} = w_{0t} = \frac{\Delta_r w_{-1,t}}{h} = \frac{\Delta_r v_{-1,t}}{h} = \Delta_r u_{-1,t} = 0;$$

na końcu utwierdzonym w obrotowej wřędze

$$w = \frac{\Delta_r w_{nt}}{h} = \frac{\Delta_r v_{n_0,t}}{h} = \Delta_r u_{n_0,t} = 0.$$

Spełnienie tych warunków w odniesieniu do funkcji (4.4) daje nam układ dziesięciu równań z dziesięcioma niewiadomymi. Wyznacznik charakterystyczny tych równań określa liczba segmentów  $n_0$  przy z góry założonych wielkościach  $P$  i  $n$ , a więc rozwiązuje zadanie.

**4.2. Stateczność powłoki o przekroju kwadratowym, obciążonej momentem skręcającym.** Podobnie jak w p. 4.1 przyjęto i tu, że powłoka utwierdzona jest w dwu sztywnych płytach.

Jeżeli chodzi o równania, to przyjęto następujące założenia:

1) siły wewnętrzne z wyjątkiem  $N_r$ ,  $N_{rt}$  i  $N_t$  są małe i można pominąć ich iloczyn przez przemieszczenia i ich przyrosty;

2) siły  $N_r$ ,  $N_{rt}$  i  $N_t$  są równe siłom wyliczonym w sposób statycznie wyznaczalny za pomocą zależności Wagnera, mianowicie:

$$(4.5) \quad N_r = -\frac{M}{2l^2} h, \quad N_t = -\frac{M}{2l}, \quad N_{rt} = \frac{M}{2l} \frac{1}{\cos \beta},$$

gdzie  $M$  oznacza moment skręcający powłokę. Siły te są jednakowe we wszystkich odpowiednich elementach powłoki.

Oczywiście rozpatrzono przypadek, w którym siła  $N_{rt}$  jest siłą rozciągającą, w przeciwnym bowiem razie o stateczności powłoki decydowałaby właśnie ona ze względu na przegubowe zamocowanie pręta wykrzyżowania. W przypadku siły ściskającej w wykrzyżowaniu obciążeniem krytycznym przy skręcaniu

$$M = \frac{2\pi^2 EJ}{l} \cos^3 \beta.$$

Poniżej rozpatrzono zagadnienie przy sile rozciągającej  $N_{rt}$  i siłach ściskających  $N_r$  i  $N_t$ . W tym celu według przyjętych założeń odrzucono wspomniane iloczyny sił wewnętrznych przez przemieszczenie z wyjątkiem sił określonych równaniami. Natomiast w równaniach odkształceń wstawiono  $S_{ry} = S_{r+1,y} = S_y$  i  $C_{ry} = C_{r+1,y} = C_y$ . Ponadto zamiast kąta  $\alpha$  wstawiono  $\pi/2$ . W rezultacie otrzymujemy poniższy układ równań określających żadaną stateczność:

$$(4.6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{EF_p}{h} \Delta_{rr}^2 u_r + \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \left[ \Delta_{rt}^2 u_{rt} \sin \beta + (\Delta_{rt}^2 v_{rt} - \Delta_{2r} w) \cos \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \\ & \quad + \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg} \beta \left[ (\Delta_{2rt} w_{rt} - \frac{1}{4} \Delta_{2rt}^3 w_{rt}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\Delta_{2t} v_{rt}}{4} - \Delta_{rt}^2 v_{rt} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\Delta_{rt}^2 u_{rt} \operatorname{tg} \beta \right] = 0, \\ & \frac{EF_t}{2l} (\Delta_{tt}^2 v_{rt} - \Delta_{2t} w_{rt}) - \frac{\Delta_{rr}^2 M_{rz}}{h} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \left[ \Delta_{rt}^2 u_{rt} \sin \beta + \right. \\ & \quad \left. + (\Delta_{rt}^2 v_{rt} - \Delta_{2r} w) \cos \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \\ & \quad + \frac{\Delta_{2t} M_t}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \left[ -\sqrt{2} \operatorname{tg} \beta \Delta_{rt}^2 u_{rt} - \frac{1}{2} (v_{r+1,t+1} + v_{r-1,t-1}) - \right. \\ & \quad \left. - 3v_{rt} - \Delta_{rr}^2 v_{rt} + (\Delta_{tt}^2 v_{rt} + 4v_{rt}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \Delta_{2t} w_{rt} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \Delta_{2rt} w_{rt} \right] = 0, \\ & \frac{\Delta_{rr}^2 M_{ry}}{h} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Delta_{tt}^2 M_t}{l} - \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \left[ \operatorname{tg} \beta \sqrt{2} \Delta_{2rt} u_{rt} + \frac{1}{2} \Delta_{2t} v_{rt} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} \Delta_{2rt} v_{rt} + \frac{1}{2} \Delta_{tt}^2 w_{rt} - \frac{1}{2} (w_{r+1,t+1} + w_{r-1,t-1}) + 3w_{rt} \right] = 0, \\ & \Delta_{rr}^2 M_{ry} + 2 \left( 1 + \frac{C_y}{S_y} \right) M_{ry} + \frac{EJ_{yy}}{h^2 S_y} \Delta_{rr}^2 w_{rt} = 0, \\ & \Delta_{rr}^2 M_{rz} + 2 \left( 1 + \frac{C_z}{S_z} \right) M_{rz} - \frac{EJ_{zz}}{h^2 S_z} \Delta_{rr}^2 v_{rt} = 0, \\ & \Delta_{tt}^2 M_t + 2 \left( 1 + \frac{C_t}{S_t} \right) M_t - \frac{EJ_t}{l^2} (\Delta_{tt}^2 w_{rt} + \Delta_{2t} v_{rt}) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{aligned} \right.$$



Podobnie jak przy stateczności pod obciążeniem siłą osiową tworzące przy odkształceniu nie pozostają w jednej płaszczyźnie, lecz przechodzą w krzywe przestrzenne, a funkcję (4.2) spełnia również układ równań (4.6).

Przyjmując podobnie jak w p. 4.1, chwilowe założenie, że warunki zamocowania nie wpływają na wielkość momentu krytycznego po wstawieniu odpowiednich wielkości z układu (4.2) do (4.6) otrzymamy po wyrugowaniu  $D$ ,  $G$  i  $H$ , następujący układ równań z trzema niewiadomymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ A \left\{ \frac{EF_p}{h} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right) + \frac{EF_w}{h} \sin^3 \beta + \frac{M}{h^2} \operatorname{tg} \beta \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] \right\} + \right. \\
 & \quad + B \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \cos \beta + \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg} \beta \right] \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + \frac{M}{8h^2} \operatorname{tg} \beta \sqrt{2} \sin n \frac{\pi}{2} \sin m \frac{\pi}{n_0} \right\} + \\
 & \quad + C \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \left( \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg} \beta - \frac{EF_w}{h} \sin^2 \beta \cos \beta \right) \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + \frac{M}{4h^2} \operatorname{tg} \beta \left( \cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \frac{m\pi}{n_0} \right] = 0, \\
 & A \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EF_w}{h} - \frac{M}{h^2} \operatorname{tg}^3 \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] \right\} + \\
 & \quad + B \left\{ \left( \frac{EF_t}{2l} + \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{EF_w}{h} \sin \beta \cos^2 \beta \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - 1 \right] + \\
 & \quad + \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right) \right] - \frac{EJ_{pz}}{h^3 S_z} \frac{\left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)^2}{\cos m \frac{\pi}{n_0} + \frac{C_z}{S_z}} - \\
 & \quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EJ_t}{l^3 S_t} \frac{\sin^2 n \frac{\pi}{2}}{\cos n \frac{\pi}{2} + \frac{C_t}{S_t}} \right\} +
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
& + C \left\{ \left( \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{EF_t}{2l} + \frac{\sqrt{2} EJ_t}{2 l^3 S_t} \frac{\cos n \frac{\pi}{2} - 1}{\cos n \frac{\pi}{2} + \frac{C_t}{S_t}} \right) \sin n \frac{\pi}{2} - \right. \\
& \quad \left. - \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{EF_w}{h} \sin \beta \cos^2 \beta + \frac{3}{4} \frac{M}{h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \right) \right\} = 0, \\
& A \left[ \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg}^2 \beta \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) \sqrt{2} \right] + B \left\{ \frac{M}{4h^2} \operatorname{tg} \beta \left[ \sin n \frac{\pi}{2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 3 \sin \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) \right] + \frac{\sqrt{2} EJ_t}{2 l^3 S_t} \frac{\sin n \frac{\pi}{2} (\cos n \frac{\pi}{2} - 1)}{\cos n \frac{\pi}{2} + \frac{C_t}{S_t}} \right\} + \\
& \quad + C \left\{ \frac{M}{2h^2} \operatorname{tg} \beta \left[ \cos \left( n \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{n_0} \right) - \cos n \frac{\pi}{2} - 2 \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sqrt{2} EJ_t}{2 l^3 S_t} \frac{\cos n \frac{\pi}{2} - 1}{\cos n \frac{\pi}{2} + \frac{C_t}{S_t}} \sin n \frac{\pi}{2} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Aby układ równań (4.7) miał rozwiązania niezerowe, jego wyznacznik charakterystyczny powinien być równy zero. Rozwiązanie tego wyznacznika da wielkość momentu krytycznego przy danych z góry wartościach  $n$  i  $m$ .

Podobnie jak przy ściskaniu (por. p. 4.1) analiza otrzymanego wyniku na liczbach ogólnych jest niezwykle złożona i nie daje korzyści. Analizę szczegółową można przeprowadzić tylko dla każdego konkretnego przypadku.

Jeśli chodzi o powłoki krótkie, takie, przy których nie można pominąć warunków jej zamocowania, to przebieg zjawiska i obliczeń jest identyczny z ich przebiegiem przy ściskaniu i został już opisany w p. 4.1.

**4.3. Przykład.** Poniżej obliczymy i sprawdzimy doświadczalnie wielkość siły krytycznej ściskającej osiowo powłokę o przekroju kwadratowym. Przyjęto przy tym następujące dane (wymiary w kG i mm):

$$h = 100, \quad l = 200, \quad \operatorname{tg} \beta = 0,5;$$

pasy wykonano z pręta okrągłego  $\varnothing 3$ ; wykrzyżowania i wręgi wykonano z pręta okrągłego  $\varnothing 2$ ; materiał wszystkich elementów o module sprężystości  $E = 1,36 \cdot 10^4$

kG/mm<sup>2</sup>; liczba segmentów  $n_0 = 5$ . Powłoka została utwierdzona jednym końcem w nieruchomej płycie, a drugim w płycie mającej swobodę obrotu względem osi wzdłużnej powłoki.

Ze względu na osiowosymetryczny przekrój pasów mamy

$$J_{pz} = J_{py} = J_p, \quad S_z = S_y = S \quad \text{oraz} \quad C_z = C_y = C.$$

Biorąc to pod uwagę, oznaczono w równaniu drugim i trzecim układu (4.3) wyrażenie

$$(4.8) \quad d = - \frac{J_p}{Sh^2} \frac{\left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)^2}{\cos m \frac{\pi}{n_0} + \frac{C}{S}} - \frac{P}{E} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right).$$

Jedynie wyrażenie to w układzie równań (4.3) zawiera niewiadomą siłę  $P$ . Dlatego też rozwiązano ten układ szukając wartości  $d$ , w zależności od  $m$  równego kolejno 1, 2, 3, 4, 5, przy  $n = 0$  i przy  $n = 2$ .

Poniżej w tablicy 1 zestawiono wartości  $d_1$  i  $d_2$  otrzymanych z rozwiązania równania kwadratowego uzyskanego z wyznacznika charakterystycznego układu (4.3).

Tablica 1

$m$	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$	
	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$	$d_1$	$d_2$
$n = 0$	0,253	2,32	0,591	2,12	0,936	1,65	1,03	1,71	1,13	1,64
$n = 2$	-2,40	0,169	0,132	2,48	0,632	2,05	1,01	1,66	0,764	1,10

Z rozważań wykluczono wielkość  $n = 1$ , gdyż powłoka ma stosunek całkowitej wysokości  $n_0 h$  do długości boku  $l$

$$i = \frac{n_0 h}{l} = 2,5,$$

co wyklucza utratę stateczności przy tej postaci.

Rozpatrując kolejne wartości  $d$  widać, że przy każdej z nich wielkość

$$- \frac{P}{E} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)$$

jest pomijalnie mała, jeżeli utrata stateczności ma mieć miejsce w zakresie sprężystym.

Po pominięciu tej wartości i przekształceniu równania (4.8) otrzymamy

$$- \frac{J_p}{dh^2} \left( \cos m \frac{\pi}{n_0} - 1 \right)^2 = S \cos m \frac{\pi}{n_0} + C,$$

co w danym przypadku ze względu na to, że

$$\frac{J_p}{h^2} = 3,98 \cdot 10^{-4},$$

sprowadza się praktycznie do równości

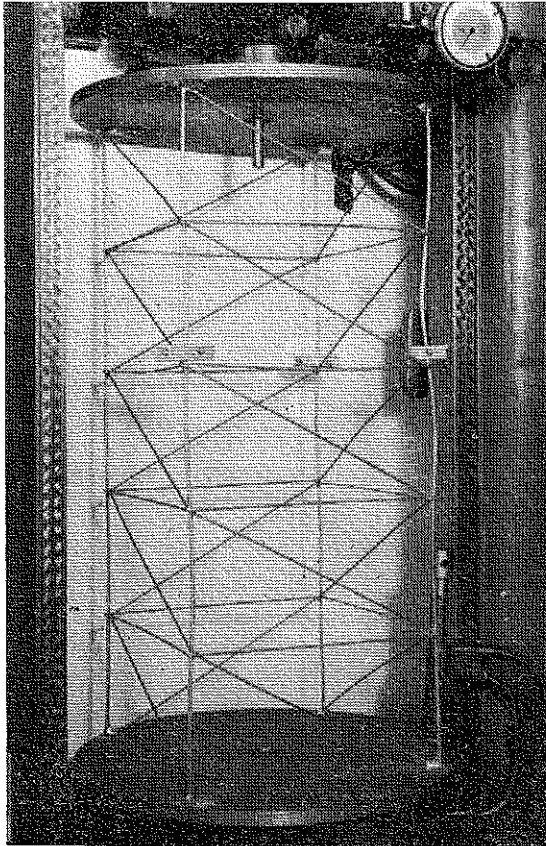
$$S \cos m \frac{\pi}{n_0} + C = 0.$$

Pamiętając, że

$$S = \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right), \quad C = \frac{1}{\varphi^2} (1 - \varphi \operatorname{ctg} \varphi), \quad \varphi = h \sqrt{\frac{P}{EJ_p}},$$

otrzymamy minimum  $P$  przy  $\varphi = \pi$ . W rezultacie daje to ostateczną wielkość siły krytycznej dla całej powłoki:

$$4P = 4 \frac{\pi^2 EJ}{h^2} = 214 \text{ kG}.$$



Rys. 19

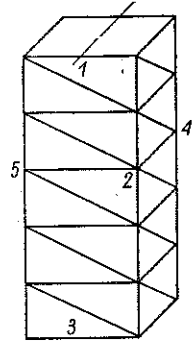
Siła ta wywołuje w pasach naprężenia  $\sigma = 7,56 \text{ kG/mm}^2$ , a więc niższe od  $\sigma_p = 14,1 \text{ kG/mm}^2$ .

Jak więc widać, wielkość siły krytycznej nie zależy w tym przypadku od  $n$ , a wobec tego, że końce powłoki utwierdzone są symetrycznie, wyboczenie nastąpi przy  $n = 0$ .

Mówiąc o warunkach brzegowych podanych w p. 4.2 należy zaznaczyć, iż tylko część z nich nie jest spełniona, mianowicie w płycie nieruchomej niespełnione są następujące warunki:  $u_0 \neq 0$ ,  $v_0 \neq 0$ ,  $\Delta_r u_{-1} \neq 0$ ,  $\Delta_r v_{-1} \neq 0$ , natomiast spełnione są warunki  $w_0 = 0$ ,  $\Delta_r w_{-1} = 0$ . Jeżeli chodzi o płytę swobodną, to nie są spełnione warunki  $\Delta_r u_5 \neq 0$ ,  $\Delta_r v_5 \neq 0$ , a spełnione  $w_5 = 0$ ,  $\Delta_r w_5 = 0$ . Jak jednak wynika z przeprowadzonego doświadczenia, opisanego poniżej, nie spełnienie powyższych warunków wpływa w minimalnym stopniu na wielkość siły krytycznej.

Jeżeli chodzi o samo doświadczenie, to przeprowadzono je na maszynie wytrzymałościowej z błędem około  $\pm 1\%$  przy zakresie 500 kG. (rys. 19). Model wykonano z drutu miedzianego, a węzły były łączone cyną. Końce powłoki były wlotowane w dwie tarcze stalowe o grubości 10 mm. Wykrzyżowania powłoki wykonano z czterech jednolitych odcinków drutu zagiętego w węzłach. Zrobiono to dlatego, aby uniknąć ewentualnych niedokładności łączenia w węzłach.

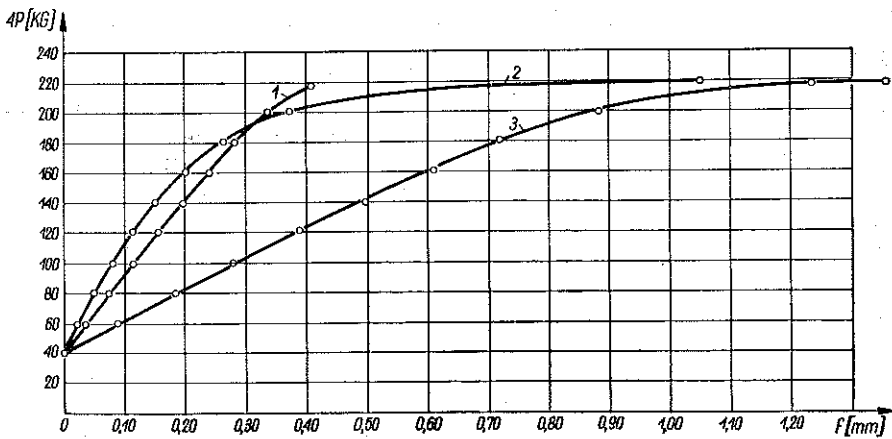
Do modelu przystawiono 5 czujników według oznaczeń na rys. 20. Czujnik pierwszy mierzył przemieszczanie  $v$  obrotowej tarczy na jej obwodzie (średnica tarczy 300 mm). Drugi czujnik mierzył również przemieszczenie  $v$  pokazanego węzła. Trzeci czujnik mierzył pionowe względne przemieszczenia dwóch skrajnych płyt. Wreszcie czujniki 4 i 5 mierzyły przemieszczenia  $w$  węzłów leżących na przekątnej jednej i tej samej wręgi.



Rys. 20

Na rys. 21 zestawiono wskazania czujników 1, 2, 3 jako funkcję siły  $4P$ . Na wykresie tym nie podano wskazań czujników 4, 5, gdyż były one bardzo małe, a więc obciążone dużym błędem ze względu na przemieszczanie się w innych kierunkach powierzchni styków. Niemniej jednak, zgodnie z przedstawioną teorią, przemieszczenia te były skierowane na zewnątrz powłoki.

Wskazania czujników 1, 2 potwierdzają wyraźnie przyjęte w powyższej teorii rozwiązanie [por. równania (2.8) i (4.2)], mówiące o tym, że powłoka taka przy ścisaniu osiowym podlega również skręcaniu.



Rys. 21

Ponadto, jak widać z wykresu, asymptotą dla wskazań czujników 2 i 3 jest wyraźnie linia pozioma o wartości  $4P = 220$  kG, a dla czujnika 1, ekstrapolując jego wykres, siła około 230 kG. Wynika stąd, że maksymalna siła otrzymana w doświadczeniu  $4P = 220$  kG jest tylko o 3,2% większa od obliczeniowej. Należy przy tym

zaznaczyć, że model został wykonany szczególnie starannie z punktu widzenia prostoliniowości tworzących i osiowego przyłożenia siły. Tak więc można przyjąć, że asymptota, do której dążą wykresy, jest rzeczywistą siłą krytyczną dla powłoki. Ponadto jako wniosek z tego doświadczenia nasuwa się spostrzeżenie, że praktycznie rzecz biorąc miarą utraty stateczności kratownicy jest w tym przypadku siła krytyczna Eulera (dla pręta o długości  $h$ , zamocowanego przegubowo na obu końcach).

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York 1952.
- [2] E. CHWALLA, F. JOKISCH, *Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens*, Der Stahlbau, 14, 1941.
- [3] И. ДЮБК, *Исследование, прочность и устойчивость некоторых пространственных стержневых систем*, Диссертация Л.И.С.И., Ленинград 1955.
- [4] F. ENGESSER, Zentr. Bauverwaltung, 1891.
- [5] А. В. ГЕММЕРЛИНГ, *Несущая способность стержневых стальных конструкций*, Гастройиздат, Москва 1958.
- [6] P. JASTRZĘBSKI i R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Kratownice, Obliczenia statyczne*, Arkady Warszawa 1959.
- [7] T. KÁRMÁN, M. A. BIOT, *Mathematical Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York 1940.
- [8] Н. В. КОРНОУХОВ, *Прочность и устойчивость стержневых систем*, Стройиздат, 1949.
- [9] R. MISES, *Zeitsch. angew. Math. Mech.*, 3, 1923, 407.
- [10] R. MISES, RATZERSDORFER, *Zeitsch. angew. Math. Mech.*, 5, 1924, 218.
- [11] В. В. ПИНАДЖИЯН, *К расчету сжатых составных стальных стержней с раскосной соединительной решеткой*, Изд. АН АССР, 1954.
- [12] L. A. PIPES, *Appl. Math. Engineers Phys.*, McGraw-Hill, New York 1958.
- [13] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Стройиздат, Москва 1955.
- [14] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York 1936.
- [15] S. TIMOSHENKO, I. WOJNOSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York 1959.
- [16] А. А. УМАНСКИЙ, *Расчет пространственных конструкций*, Москва 1950.
- [17] В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные пространственные системы*, Госстройиздат, Москва 1958.

#### Резюме

### СТАТИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ РАМНО-СТЕРЖНЕВЫХ ОБОЛОЧЕК

Приводятся уравнения, определяющие силы перемещения и устойчивости оболочки с регулярной сеткой стержней. В особенности рассматривается устойчивость квадратной оболочки, подверженной последовательно осевому сжатию и кручению. Из этих рассуждений вытекает, что такая оболочка, сжимаемая осевой силой, теряет устойчивость в изгибно-крутильной форме, похожей на ту, которая появляется при кручении классической цилиндрической оболочки.

Во всей работе все уравнения представлены при использовании метода в разностном исчислении, что имеет целью воспроизвести действительное строение оболочки.

В заключение дается описание и результаты эксперимента проведенного на 5-ти сегментной оболочке, сжимаемой осевой силой.

## Summary

### STRUCTURAL ANALYSIS AND STABILITY OF PRISMATIC-LATTICE SHELLS

This paper contains the equations for the determination of the forces, displacements and stability conditions for a shell with a regular net of bars. In particular, the stability of a quadratic shell subjected successively to axial compression and torsion is considered. From these considerations it follows that such a shell, compressed by an axial force loses, its flexural-torsional stability similar to that appearing during the torsion of the classical cylindrical shell.

All the equations are expressed in the difference form.

In conclusion the paper contains a description and the results of an experiment on five-segment shell compressed by an axial force.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1961 r.*

---