

ZBIGNIEW OLESIAK

DYNAMICZNE ZAGADNIENIA CIAŁ
O WŁASNOŚCIACH LEPKO-SPRĘŻYSTYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCVIII

TOM IX • ZESZYT 3 • ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Mechaniczne własności materiałów zależne od czasu	401
2. Matematyczne ujęcie zagadnienia	402
3. Dane doświadczalne	412
4. Teoretyczne rozwiązania problemów dotyczących zagadnień dynamicznych ciał o własnościach lepko-sprężystych	414

1. Mechaniczne własności materiałów zależne od czasu

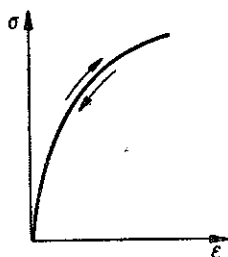
Odształcenia i naprężenia powstające na skutek działania obciążeń zależą między innymi od charakteru zmienności tych obciążeń w czasie. Przy względnie szybkim przyłożeniu obciążenia stan fizyczny ciała nie jest stanem równowagi dla mikro objętości. Przesunięcia molekuł i atomów ze stanu początkowego do końcowego, który byłby stanem równowagi, wymagają pewnego czasu. Z tego powodu możemy oczekiwać, że własności mechaniczne danego ciała będą zależały od czasu w sposób najwyraźniejszy w przypadkach krańcowych, tj. przy bardzo szybkim odształceniu, gdy jest możliwe opóźnienie nawet najszybciej przebiegających procesów przejściowych, oraz przy obciążeniach długotrwałych, gdy występuje działanie różnych mikro procesów.

Odształcenia, z którymi mamy do czynienia w prawie Hooke'a, uwarunkowane są odształceniem całego ciała, dlatego nie przyjmują wartości odpowiadającej przyłożonej sile aż do chwili, gdy całe ciało poddane zostanie jej działaniu. Oczywiście minimalnym okresem czasu będzie czas potrzebny do rozprzestrzenienia się fali sprężystej do najdalszych obszarów ciała oraz jej powrotu. Wynika stąd, że im większe ciało, tym wolniej należy przykładać siłę. Sformułowanie powyższe nie jest jednak ścisłe, bowiem nie uwzględniliśmy możliwości powstania drgań.

Jak dobrze wiadomo, materiały konstrukcyjne takie jak np. stal w temperaturze około 20°C wykazują dla znacznego zakresu zmienności proporcjonalność odształceń do naprężeń. Co prawda ściśle rzecz biorąc proporcjonalność ta jest przybliżona, a krzywe obciążenia i odciążenia nie pokrywają się nawet, gdy po odciążeniu stan próbki powróci do punktu wyjściowego. Materiały pochodzenia organicznego, beton oraz większość metali konstrukcyjnych w podwyższonych temperaturach wykazują własności pełzania i relaksacji naprężeń. Mówimy wtedy, że materiały takie posiadają własności lepko-sprężyste. Zjawisk tych nie należy mylić z nieliniową sprężystością, dla której zależność pomiędzy naprężeniami i odształceniami w przypadku obciążenia i odciążenia pokrywa się, mimo że nie jest liniowa (rys. 1). Przykładami materiałów o nieliniowej sprężystości są wysokie polimery i guma. Często nieliniowość idzie w parze z występowaniem zjawisk pełzania i relaksacji; będą to materiały lepko-sprężyste nieliniowe.

Jeśli chodzi o budowę maszyn, to na ogół w obliczeniach wytrzymałościowych nie uwzględniamy zjawiska pełzania w przypadku pracy w temperaturze pokojowej, gdy mamy do czynienia z częściami wykonanymi ze stali lub żeliwa. Natomiast

należy zjawiska te uwzględnić w przypadku maszyn wykonanych z coraz bardziej popularnych mas plastycznych, np. koła zębate, karoserie samochodów itd. Podobnie należy uwzględniać zjawiska pełzania i relaksacji w przypadku, gdy części maszyn są wykonane ze stali lub innego metalu i pracują w podwyższonych temperaturach. Jest to szczególnie istotne, gdy dany element konstrukcyjny pracuje w stanie podgrzany przez dłuższy okres czasu. W takich warunkach pracują elementy konstrukcyjne silników odrzutowych, maszyn parowych, turbin gazowych i parowych, kotłów parowych oraz wielu aparatów chemicznych i urządzeń ciepłych. Proces pełzania jest tym intensywniejszy, im wyższa jest temperatura. Z praktyki znamy szereg przykładów, gdy odkształcenia części maszyn wskutek pełzania osią-



Rys. 1

gały takie wielkości, że dalsza eksploatacja stawała się niemożliwa. I tak np. wskutek pełzania tarczy i łopatek turbiny gazowej szczeliny przewidziane konstrukcją pomiędzy obudową i łopatkami zmniejszają się do tego stopnia, że łopatki ulegają wyłamaniu. Również wskutek pełzania następuje osłabienie połączenia elementów pasowanych na wcisk.

Jeśli chodzi o budownictwo, to wpływ pełzania ma szczególne znaczenie dla takich materiałów jak beton. Ujemne skutki pełzania znane są od dawna w konstrukcjach wstępnie sprężonych. Praktycznie rzecz biorąc większość nowych materiałów, jak polichlorek winylu, masy plastyczne różnego pochodzenia itd. wykazują własności pełzania i relaksacji.

Dla materiałów o własnościach lepko-sprężystych wykres próby doraźnej na rozciąganie zależy w sposób bardzo istotny od prędkości, z jaką próba jest przeprowadzana. Dlatego należałoby sporządzić wykres przestrzenny w postaci powierzchni $f(\sigma, \epsilon, t) = 0$. Krzywa na tej powierzchni, wychodząca z początku układu, jest krzywą skonstruowaną na podstawie pomiarów w czasie próby doraźnej. Natomiast w przypadku jej zależności od czasu wykres, który otrzymujemy na maszynie wytrzymałościowej, jest rzutem tej krzywej na płaszczyznę $\sigma\epsilon$. Płaszczyzny równoległe do płaszczyzny ϵt układu współrzędnych dają w wyniku przecięcia z powierzchnią krzywe pełzania; z drugiej strony płaszczyzny równoległe do płaszczyzny σt naszego układu współrzędnych dają krzywe relaksacji.

2. Matematyczne ujęcie zagadnienia

W celu teoretycznego rozwiązania zagadnień, dotyczących ciał o własnościach lepko-sprężystych, posługujemy się pewnymi modelami teoretycznymi, które zastępują rzeczywiste ciała i pozwalają ustalać związki pomiędzy naprężeniami σ i odkształceniami γ . Przy założeniu upraszczającym, że związki te są liniowe względem σ i γ i ich pochodnych względem czasu $\dot{\sigma}$ i $\dot{\gamma}$, będziemy mogli wyróżnić w przypadku jednowymiarowego zagadnienia następujące najprostsze modele:

(a) model ciała stałego Voigta-Kelvina

$$\sigma = 2G_2\gamma + 2\eta_1\dot{\gamma};$$

(b) model cieczy Maxwella

$$\sigma + \frac{\eta_1}{G_1} \dot{\sigma} = 2\eta_1 \dot{\gamma},$$

(c) model liniowy standartowy; jest to trzy-parametrowy model będący uogólnieniem dwóch poprzednich

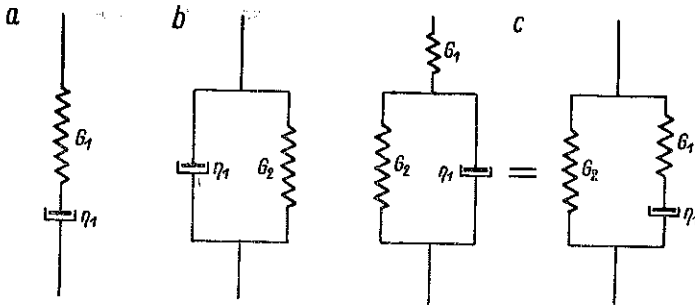
$$(2.1) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\gamma + 2\eta\dot{\gamma}.$$

W równaniu tym występują trzy niezależne stałe materiałowe; przyjmujemy:

$$\mu = G = G_2, \quad \eta = \eta_1(1 + G_2/G_1), \quad \tau_r = \eta_1/G_1,$$

gdzie $\mu = G$ jest modułem odkształcenia postaciowego, σ naprężeniem stycznym, a η jest współczynnikiem lepkości. W przypadkach szczególnych dla $G_1 = \infty$ model standartowy przechodzi w model Voigta-Kelvina, natomiast dla $G_2 = 0$ w model Maxwella. Stosunek $\tau_r = \eta_1/G_1$ nazywamy czasem relaksacji. Jest to czas potrzebny do tego, by naprężenia zmalały e -krotnie (e jest podstawą logarytmów naturalnych). Podobnie stosunek $\tau_0 = \eta_1/G_2$ jest czasem opóźnienia (retardacji). Czasy relaksacji i opóźnienia są wielkościami stałymi tylko dla najprostszych modeli. Czas relaksacji jest różny dla różnych materiałów i stanowi jedną z ważniejszych jego charakterystyk. Np. czas relaksacji dla wody wynosi 10^{-11} . Oznacza to, że dla czasów krótszych od 10^{-11} sek woda zachowuje się jak ciało stałe. Natomiast szkło posiada czas relaksacji rzędu stuleci. W tych warunkach w doświadczeniach trwających godziny czy nawet lata zachowuje się jak ciało stałe, jednak dla czasów przekraczających czas relaksacji zachowuje się jak ciecz. Podobne zjawisko zachodzi w przypadku skorupy ziemskiej.

Model standartowy ciała stałego, [1] i [2], oraz najprostsze modele Voigta i Maxwella nie przedstawiają dokładnie żadnego rzeczywistego ciała stałego, jednak jakościowo dobrze tłumaczą pewne cechy ich zachowywania się.



Rys. 2

J. H. POYNTING i J. J. THOMSON, [3], wprowadzili dla powyżej podanych zależności pomiędzy σ i γ , tj. dla modeli tych ciał, tzw. modele reologiczne, złożone z elementów w postaci sprężyn i tłumików. Modele reologiczne pozwalają na łatwe i obrazowe przedstawienie rozpatrywanego modelu ciała, dają poglądową ilustrację

procesów odkształcenia i są dlatego stosowane przez większość autorów prac, dotyczących ciał o własnościach lepko-sprężystych. Przy pomocy modeli reologicznych możemy przedstawić nie tylko trzy powyżej wymienione modele ciał lepko-sprężystych, lecz również modele bardziej skomplikowane a nawet najogólniejszy model liniowy.

Ogólniejszy od powyżej wymienionych modeli jest model ciała stałego, który otrzymamy opisując mechaniczne własności przy pomocy równania różniczkowego analogicznego do równania (2.1), lecz zawierającego również wyższe pochodne czasowe naprężenia i odkształcenia. Droga tą poszedł T. ALFREY, [4] i [5]. Otrzymujemy wtedy następujące ogólne równanie różniczkowe, podające związki pomiędzy σ i γ :

$$(2.2) \quad P_1(D)\sigma = P_2(D)\gamma,$$

gdzie

$$P_i(D) = \sum_{n=0}^{N_i} a_i^{(n)} D^n, \quad D^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (n = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = 1, 2, 3 \text{ lub } 4)$$

oraz gdzie $a_i^{(n)}$ są współczynnikami stałymi.

W przypadku przestrzennego stanu odkształcenia zamiast podanych powyżej związków pomiędzy naprężeniem stycznym i kątem odkształcenia postaciowego otrzymujemy następujące zależności pomiędzy składowymi dewiatora naprężeń i składowymi dewiatora odkształceń:

(a) model Voigta-Kelvina

$$s_{ij} = 2G_2 e_{ij} + 2\eta_1 \dot{e}_{ij};$$

(b) model Maxwella

$$s_{ij} + \frac{\eta_1}{G_1} \dot{s}_{ij} = 2\eta_1 \dot{e}_{ij};$$

(c) model standartowy

$$s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij};$$

(d) ogólny przypadek modelu liniowego

$$(2.3) \quad P_1(D)s_{ij} = P_2(D)e_{ij}.$$

W przypadku przestrzennym powyższe związki nie są wystarczające i musimy również podać zależności pomiędzy średnim naprężeniem normalnym i średnim odkształceniem objętościowym. W ogólnym przypadku zależność ta ma postać

$$(2.4) \quad \sigma_{sr} = \frac{P_4(D)}{P_3(D)} \varepsilon_{sr} \quad \text{lub} \quad \Theta = \frac{P_4(D)}{P_3(D)} \theta,$$

gdzie

$$\Theta = \sum_1^3 \sigma_{ii}, \quad \theta = \sum_1^3 \varepsilon_{ii}.$$

Związki pomiędzy składowymi naprężenia i składowymi odkształcenia są następujące:

$$(2.5) \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij} \Lambda(D) \theta + 2\mu(D) \varepsilon_{ij}.$$

Symbole $\Lambda(D)$ i $\mu(D)$ są operatorami, które możemy wyrazić przy pomocy poprzednio wprowadzonych operatorów (2.2); wtedy

$$(2.6) \quad \Lambda(D) = \frac{P_4(D)P_1(D) - P_2(D)P_3(D)}{3P_1(D)P_3(D)},$$

$$(2.7) \quad \mu(D) = \frac{P_2(D)}{2P_1(D)},$$

przy czym δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Rozwiązywanie zadań szczegółowych napotyka na duże trudności matematyczne i rachunkowe. Dlatego zwykle w tym miejscu przyjmuje się pewne założenia upraszczające, dotyczące postaci równań (2.3) i (2.4).

Najczęściej spotykamy następujące założenia: (1) odkształcenie objętościowe nie zależy od czasu, (2) współczynnik Poissona ν jest stały i nie zależy od czasu. Przyjmujemy ponadto, że dla lepko-sprężystego ciała izotropowego mamy tylko dwa niezależne operatory, odpowiadające dwóm niezależnym stałym w izotropowym ciele idealnie sprężystym.

Wynika stąd, że operator K dla przypadku (1) jest po prostu stałą, a więc mamy

$$3K = \frac{P_4(D)}{P_3(D)} = \text{const.}$$

Wtedy

$$\Lambda(D) = K - \frac{P_2(D)}{3P_1(D)} = K - \frac{2}{3}\mu(D),$$

$$\Lambda(D) + 2\mu(D) = K + \frac{4}{3}\mu(D).$$

Współczynnik Poissona w ogólnym przypadku jest następującym operatorem:

$$\nu = \frac{\Lambda(D)}{2[\Lambda(D) + \mu(D)]} = \frac{3K - 2\mu(D)}{6K + 2\mu(D)} = \frac{3KP_1(D) - P_2(D)}{6KP_1(D) + P_2(D)}.$$

W przypadku założenia (2), gdy $\nu = \text{const}$, otrzymujemy

$$\Lambda(D) = 2 \frac{\nu}{1-2\nu} \mu(D) = \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{P_2(D)}{P_1(D)},$$

$$\Lambda(D) + 2\mu(D) = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \mu(D) = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{P_2(D)}{P_1(D)}.$$

Teraz, w ogólnym przypadku, odkształcenie objętościowe zależy od czasu, a moduł odkształcenia objętościowego jest następującym operatorem:

$$K(D) = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu(D) = \frac{1+\nu}{6(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{P_2(D)}{P_1(D)}.$$

W przypadku tym stosunek $\Lambda(D)$ do $\mu(D)$ jest stały, oznacza to, że Λ i μ posiadają wspólny czas relaksacji.

Równanie różniczkowe (2.3) określa związki pomiędzy składowymi naprężenia i odkształcenia przy odpowiednich warunkach początkowych. Liczba warunków początkowych zależy oczywiście od rzędu równania różniczkowego i jest temu rzędowi równa. Jako chwilę początkową możemy przyjąć dowolny moment czasu, przy czym na ogół zakładamy, że chwilą tą jest albo $t = 0$, albo $t = \infty$. Przyjęcie jednorodnych warunków początkowych (tzn., że dla $t = 0$, $\sigma = 0$, $\dot{\sigma} = 0 \dots$, $d^{m-1}\sigma/dt^{m-1} = 0$, gdzie m jest rzędem równania różniczkowego, i założenie, że zarówno naprężenia jak i odkształcenia znikają dla $t < 0$) jest szczególnie pożyteczne, gdy odpowiednie zagadnienie rozwiązujemy stosując transformację Laplace'a. W przypadku gdy obciążenie jest przyłożone w sposób nagły, przyjmujemy, że wraz z odpowiednią liczbą pochodnych czasowych w chwili $t = 0$ naprężenie równa się zeru oraz że przyłożenie siły następuje w chwili t_1 . Następnie dla otrzymanego rozwiązania obliczamy granicę, gdy t_1 dąży do zera, uzyskując w ten sposób rozwiązanie zadania dla obciążenia w postaci funkcji Heaviside'a $H(t)$. Dyskusję warunków początkowych można znaleźć np. w książce [50].

Wprowadzenie zależności pomiędzy σ_{ij} i ε_{ij} w postaci równania różniczkowego (2.3) nie jest konieczne; możemy również wyciągnąć wnioski z faktu, że rzeczywista zależność jest liniowa i otrzymać równanie całkowe. W ten sposób jeszcze w roku 1876 podszedł do zagadnienia L. BOLTZMANN, [6]. Jeżeli związek pomiędzy σ_{ij} , ε_{ij} i ich pochodnymi względem czasu jest liniowy, to rozwiązania będą spełniały zasadę superpozycji (Boltzmanna). Zasadę tę możemy sformułować następująco: odkształcenie w chwili t , spowodowane działaniem następujących po sobie naprężeń, jest sumą naprężeń, jakie byśmy otrzymali w tej samej chwili t , gdyby każde z nich zostało przyłożone niezależnie. BOLTZMANN postulował, że dla odkształceń objętościowych i postaciowych relaksacja może przebiegać w sposób różny. Analiza upraszcza się tylko w kilku przypadkach, jak np. czystego skręcania lub gdy wpływ relaksacji objętościowej jest mały. W przypadku działania tylko naprężeń σ_{12} otrzymujemy równanie całkowe Volterry (przez niego podane) w następującej postaci, [7]:

$$(2.8) \quad \sigma_{12}(\gamma, t) = E[\gamma(t) - \int_{-\infty}^t K(t-t_1)\gamma(t_1) dt_1],$$

gdzie E jest stałą materiałową, a jądro równania całkowego $K(t-t_1)$ funkcją relaksacji.

Uogólnieniem powyższego równania na przypadek przestrzenny będzie równanie pomiędzy składowymi stanu naprężenia i odkształcenia:

$$(2.9) \quad \sigma_{ij}(t) = \lambda_0\theta(t)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(t) - \int_{-\infty}^t [\delta_{ij}\varphi_1(t-t_1)\theta(t_1) + 2\varphi_2(t-t_1)\varepsilon_{ij}(t_1)] dt_1.$$

W równaniu tym $\varphi_1(t-t_1)$ i $\varphi_2(t-t_1)$ są funkcjami relaksacji zależnymi od własności ośrodka. Inną postać zależności rozpatrywali między innymi R. SIMS, [8], i M. I. ROZOWSKI, [9]:

$$(2.10) \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t \lambda(t-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} \theta(t_1) dt_1 + 2 \int_0^t \mu(t-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon_{ij}(t_1) dt_1.$$

Obie postacie (2.9) i (2.10) są równoważne, o ile tylko przyjmiemy, że

$$\varphi_1(t-t_1) = \frac{\partial \lambda(t-t_1)}{\partial t_1}, \quad \varphi_2(t-t_1) = \frac{\partial \mu(t-t_1)}{\partial t_1},$$

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad \theta(t_1) = \varepsilon_{ij}(t_1) = 0 \quad \text{dla} \quad t_1 \leq 0.$$

Równania całkowe (2.9) i (2.10) są ogólniejsze od równań różniczkowych (2.5), ponieważ każde równanie różniczkowe (2.5) wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi da się przedstawić w postaci równań całkowych (2.9) lub (2.10), natomiast istnieją takie jądra równań całkowych (2.9) i (2.10), które nie pozwalają na zastąpienie ich liniowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach.

Dla najprostszych modeli ciał o własnościach lekko sprężystych i dla ogólnego modelu liniowego możemy sporządzić tabl. 1 i tabl. 2. W ostatniej i przedostatniej kolumnie tablicy podaliśmy jądra równania całkowego (2.10). O ile znamy równanie różniczkowe (2.5), to znalezienie jąder $\lambda(t-t_1)$ i $\mu(t-t_1)$ nie nastrocza większych trudności. Wykonujemy mianowicie obustronnie na związku (2.5) transformację Laplace'a, otrzymując

$$\bar{\sigma}_{ij}(p) = \delta_{ij} \bar{\Lambda}(p) \bar{\theta}(p) + 2\bar{\mu}(p) \bar{\varepsilon}_{ij}(p),$$

gdzie

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \bar{\sigma}_{ij}(p) = \int_0^{\infty} \sigma_{ij}(t) e^{-pt} dt.$$

Operatory $\Lambda(D)$ i $\mu(D)$ wyrażają się przez operatory liniowe $P_i(D)$ i o ile są wielomianami stopnia nieujemnego oraz spełniają odpowiednią liczbę jednorodnych warunków początkowych, to mamy np.

$$\mathcal{L}\{\Lambda(D)\theta(t)\} = \bar{\Lambda}(p)\bar{\theta}(p),$$

gdzie $\Lambda(p)$ jest następującym wyrażeniem:

$$\bar{\Lambda}(p) = \frac{P_4(p)P_1(p) - P_2(p)P_3(p)}{3P_1(p)P_3(p)}.$$

Podobnie

$$\mu(p) = \frac{P_2(p)}{2P_1(p)}.$$

Tablica 1

Model	Operatory różniczkowe				
	$P_1(D)$	$P_2(D)$	$P_3(D)$	$P_4(D)$	$\Delta(D)$
$K = \text{const}$	$1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}$	$2\eta_1 D$	1	3K	$K - \frac{2}{3} \frac{\eta_1 D}{1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}}$
Maxwella					
$\nu = \text{const}$	$1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}$	$2\eta_1 D$	1	$\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\eta_1 D}{1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}}$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\eta_1 D}{1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}}$
$K = \text{const}$	1	$2G_2 + 2\eta_1 D$	1	3K	$K - \frac{2}{3}(G_2 + \eta_1 D)$
Voigta-Kelvina					
$\nu = \text{const}$	1	$2G_2 + 2\eta_1 D$	1	$\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} (G_2 + \eta_1 D)$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} (G_2 + \eta_1 D)$
$K = \text{const}$	$1 + \tau D$	$2G + 2\eta D$	1	3K	$K - \frac{2}{3} \frac{G + \eta D}{1 + \tau D}$
Standardowy					
$\nu = \text{const}$	$1 + \tau D$	$2G + 2\eta D$	1	$\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{G + \eta D}{1 + \tau D}$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{G + \eta D}{1 + \tau D}$
$K = \text{const}$	$\sum a_1^{(n)} D^n$	$\sum a_2^{(n)} D^n$	$\sum a_3^{(n)} D^n$	$3K \sum a_3^{(n)} D^n$	$K - \frac{P_2(D)}{3P_1(D)}$
Ogólny liniowy					
$\nu = \text{const}$	$\sum b_1^{(n)} D^n$	$\sum b_2^{(n)} D^n$	$\sum b_3^{(n)} D^n$	$\frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{P_2(D)P_3(D)}{P_1(D)}$	$\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{P_2(D)}{P_1(D)}$

Tablica 2

Model	Operatory różniczkowe			Jądra równania całkowego	
	$\nu(D)$	$K(D)$	$A(D)+2\mu(D)$	$\lambda(t-t_1)$	$\mu(t-t_1)$
$K = \text{const}$	$\frac{3K + \left(3\frac{K}{G_1} - 2\right)\eta_1 D}{6K + 2\eta_1 \left(3\frac{K}{G_1} + 1\right)\eta_1 D}$	K	$K + \frac{4}{3} \frac{\eta_1 D}{1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}}$	$K - \frac{2}{3} G_1 \exp\left[-\frac{G_1}{\eta_1}(t-t_1)\right]$	$G_1 \exp\left[-\frac{G_1}{\eta_1}(t-t_1)\right]$
Maxwella $\nu = \text{const}$	ν	$\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \eta_1 D$	$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\eta_1 D}{1 + \frac{\eta_1 D}{G_1}}$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} G_1 \exp\left[-\frac{G_1}{\eta_1}(t-t_1)\right]$	$G_1 \exp\left[-\frac{G_1}{\eta_1}(t-t_1)\right]$
$K = \text{const}$	$\frac{3K - 2G_2 + 2\eta_1 D}{6K + 2G_2 + 2\eta_1 D}$	K	$K + \frac{4}{3} (G_2 + \eta_1 D)$	$K - \frac{2}{3} G_2 - \frac{2}{3} \eta_1 \delta(t-t_1)$	$G_2 + \eta_1 \delta(t-t_1)$
Voigta- Kelvina $\nu = \text{const}$	ν	$\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} (G_2 + 2\eta_1 D)$	$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} (G_2 + \eta_1 D)$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} [G_2 + \eta_1 \delta(t-t_1)]$	$G_2 + \eta_1 \delta(t-t_1)$
$K = \text{const}$	$\frac{3K - 2G + (3K\tau - 2\eta)D}{6K + 2G + (6K\tau + 2\eta)D}$	K	$K + \frac{4}{3} \frac{G + \eta D}{1 + \tau D}$	$K - \frac{2}{3} \left\{ G + \left(\frac{\eta}{\tau} - G\right) \exp\left[-\frac{1}{\tau}(t-t_1)\right] \right\}$	$G + \left(\frac{\eta}{\tau} - G\right) \exp\left[-\frac{1}{\tau}(t-t_1)\right]$
Standar- towy $\nu = \text{const}$	ν	$\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G + \eta D}{1 + \tau D}$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{G + \eta D}{1 + \tau D}$	$\frac{2\nu}{1-2\nu} \left\{ G + \left(\frac{\eta}{\tau} - G\right) \exp\left[-\frac{1}{\tau}(t-t_1)\right] \right\}$	$G + \left(\frac{\eta}{\tau} - G\right) \exp\left[-\frac{1}{\tau}(t-t_1)\right]$
$K = \text{const}$	$\frac{3K P_1(D) - P_2(D)}{6K P_1(D) + P_2(D)}$	K	$K + \frac{2}{3} \frac{P_2(D)}{P_1(D)}$	$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-pt_1} \left[\frac{K}{P} \frac{\sum a_2^{(n)} p^n}{3 \sum a_1^{(n)} p^{n+1}} \right] \right\}$	$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-pt_1} \frac{\sum a_2^{(n)} p^n}{2 \sum a_1^{(n)} p^{n+1}} \right\}$
Ogólny liniowy $\nu = \text{const}$	ν	$\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{P_2(D)}{P_1(D)}$	$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{P_2(D)}{P_1(D)}$	$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \nu e^{-pt_1} \frac{\sum a_2^{(n)} p^n}{1-2\nu \sum a_1^{(n)} p^{n+1}} \right\}$	$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-pt_1} \frac{\sum a_2^{(n)} p^n}{2 \sum a_1^{(n)} p^{n+1}} \right\}$

$\delta(t-t_1)$ oznacza funkcję Diraca.

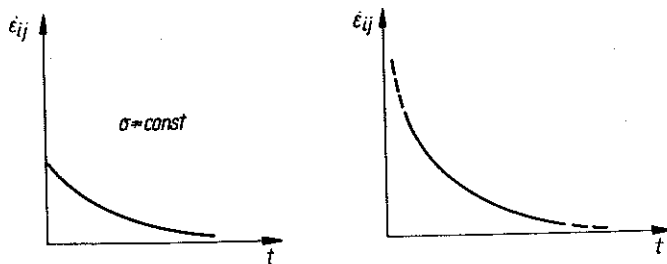
Biorąc obecnie transformację odwrotną i wykonując spłot otrzymujemy

$$(2.11) \quad \sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-pt_1} \frac{\bar{A}(p)}{p} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial t_1} dt_1 + 2 \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-pt_1} \frac{\bar{\mu}(p)}{p} \right\} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t_1} dt_1.$$

Jako przykład rozpatrzmy model standartowy (przy $\nu = \text{const}$); mamy wtedy

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G+\eta p}{(1+\tau p)p} e^{-pt_1} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial t_1} dt_1 + 2 \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G+\eta p}{(1+\tau p)p} e^{-pt_1} \right\} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t_1} dt_1 = \\ &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \int_0^t \left[G + \left(\frac{\eta}{\tau} - G \right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_1)} \right] \frac{\partial \theta}{\partial t_1} dt_1 + 2 \int_0^t \left[G + \left(\frac{\eta}{\tau} - G \right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_1)} \right] \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t_1} dt_1. \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań wynika, że równanie różniczkowe (2.5) określa postać jąder równania całkowego. O ile związki pomiędzy σ_{ij} i ε_{ij} są dane w postaci bardziej skomplikowanego równania różniczkowego od równania liniowego ze stałymi współczynnikami, to na ogół możemy je również sprowadzić do równania całkowego, lecz o bardziej skomplikowanych jądrach. Na odwrót, możemy dobrać takie jądra równania całkowego Volterry (2.8), że nie da się ono sprowadzić do równania różniczkowego o postaci (2.5).



Rys. 3

Modele reologiczne przedstawione za pomocą liniowych równań różniczkowych (2.5) odzwierciedlają zachowywanie się rzeczywistych materiałów jedynie w dużym przybliżeniu. A. R. RZANICYN, [10], zwrócił uwagę na różnicę pomiędzy zachowaniem się materiałów rzeczywistych, a wykresami teoretycznymi. Mianowicie z danych doświadczalnych dla różnych materiałów (drzewo, stal, beton, guma itd.) wynika, że krzywa zmiany prędkości odkształcenia przy stałych naprężeniach dąży asymptotycznie do obu osi współrzędnych układu $\dot{\varepsilon}_{ij}$, t , podczas gdy taka krzywa nie może odpowiadać żadnemu liniowemu związkowi pomiędzy σ_{ij} i ε_{ij} danemu w postaci (2.5).

Dane doświadczalne wskazują, że liniowe równania różniczkowe w postaci (2.5) mogą opisać zachowanie się tylko małej części materiałów o własnościach lepko-sprężystych (np. układy koloidalne i pewne wysokie polimery). W celu opi-

sania zachowania się większości materiałów możemy zależności pomiędzy σ_{ij} i ε_{ij} w postaci liniowego równania różniczkowego traktować jako przybliżenie dostateczne jedynie do jakościowego opisu zachodzących zjawisk. Stwierdzono to już dosyć dawno i dlatego wielu autorów zaproponowało, w celu opisu zagadnienia, najrozmaitsze nieliniowe równania różniczkowe. Nieliniowe związki nie są uniwersalne i zwykle poszczególne z nich dotyczą jednego lub niewielu materiałów. Pewną popularność osiągnęły związki podane przez R. W. BAILEY'EGO, [11], dla przypadku pełzania metali oraz uogólnienie cieczy Maxwella podane przez DAVENPORTA, [12]. Uogólniona ciecz Maxwella posiada tę własność, że z czasem gęstnieje, a lepkość jej wzrasta. Z innych propozycji wymienimy zależności podane przez RABOTNOWA, [13],

$$f(\gamma) = \frac{\sigma}{H} + \int_{-\infty}^t K(t-t_1)\sigma(t_1) dt_1$$

i przez ROZOWSKIEGO, [14],

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{H} + \int_{-\infty}^t K(t-t_1)f(\sigma) dt_1.$$

Oprócz powyżej wymienionych związków istnieje cały szereg innych i tak np. dla betonu dla przypadku jednowymiarowego stanu naprężenia N. ARUTUNIAN, [15], zaproponował funkcję pełzania betonu w postaci

$$C(t, t_1) = \varphi_1(t)[1 - e^{-f(t-t_1)}];$$

gdzie $\varphi_1(t_1)$ jest jedynie funkcją wieku betonu. Po wstawieniu powyższej funkcji pełzania do związków pomiędzy σ i γ otrzymujemy równanie całkowe Volterry, które można sprowadzić do rozwiązywania nieliniowego równania różniczkowego drugiego rzędu ze zmiennymi współczynnikami. Należy zaznaczyć, że jest to jeden z prostszych przypadków zależności, które zastosowane do jednowymiarowych zadań dotyczących pełzania betonu wykazują zgodność, również jeśli chodzi o wyniki liczbowe, a nie tylko stronę jakościową zagadnienia.

SOROKIN wprowadził nieliniowy model, w którym siła tłumienia jest proporcjonalna do bezwzględnej wartości odkształcenia. Podamy jeszcze kilka typów jąder równań całkowych zaproponowanych przez różnych autorów.

BOLTZMANN, [6], rozpatruje postać $K(t-t_1) = A/(t-t_1)$. DUFFING, [16], proponuje dla pasów skórzanych następującą postać

$$K(t-t_1) = A_1(t-t_1)^{-\alpha},$$

gdzie $\alpha = 4/5$. Dla gumy A. BRONSKI, [17], i Z. SŁONIMSKI, [18], rozważają następujące jądro równania całkowego:

$$K(t-t_1) = (t-t_1)^\alpha \exp[-(t-t_1)^{1-\alpha}].$$

Oczywiście, przykłady powyższe nie wyczerpują wszystkich propozycji.

Przy uwzględnianiu wpływu temperatury na naprężenia otrzymamy następującą zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami zamiast równania różniczkowego (2.5):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda(D)\theta + 2\mu(D)\varepsilon_{ij} - [3\lambda(D) + 2\mu(D)]\alpha_t T$$

(α_t jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej). Odpowiednikiem równania całkowego (2.10) będzie następujące równanie:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t \lambda(t-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} \theta(t_1) dt_1 + 2 \int_0^t \mu(t-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon_{ij}(t_1) dt_1 - \\ - \alpha_t \int_0^t [3\lambda(t-t_1) + 2\mu(t-t_1)] \frac{\partial T(t_1)}{\partial t_1} dt_1. \end{aligned}$$

3. Dane doświadczalne

W poprzednim p. podaliśmy analizę podstawowych fenomenologicznych teorii ciał o własnościach lepko-sprężystych. Podane ogólne związki posiadają znaczenie teoretyczne i praktyczne. Wyprowadzone z zasad termodynamiki związki pomiędzy parametrami charakteryzującymi proces odkształcenia pozwalają znacznie uprościć zakres prac doświadczalnych, koniecznych do opracowania teorii odkształceń różnych materiałów. Z drugiej strony w celu zbudowania teorii dotyczącej poszczególnych materiałów konieczne jest pewne minimum danych doświadczalnych. Musimy niestety stwierdzić, że dane eksperymentalne dotyczą na ogół najprostszych przypadków obciążenia i dotychczas nie posiadamy jeszcze dostatecznych rezultatów doświadczalnych, potrzebnych do zbudowania teorii chociażby dla jednego konkretnego materiału. Dlatego w praktyce konstrukcyjnej rozpowszechniły się metody obliczeń z dużym przybliżeniem na podstawie ekstrapolacji danych doświadczalnych, ograniczonych do niewielu przypadków obciążenia i naprężenia. W doświadczeniach przeprowadzanych na materiałach o własnościach lepko-sprężystych dość często korzysta się z analogii. Polegają one w tym przypadku na badaniu materiałów o podobnej charakterystyce i takich, że z pewnych względów lepiej jest wykonywać badania na modelach z nich wykonanych. W ten sposób robi się doświadczenia na modelach z ołowiu w temperaturze pokojowej, zamiast na częściach stalowych w wysokiej temperaturze, lub na modelach z plastycznej masy fenolowej zamiast na betonie. Po wyciągnięciu wniosków z serii doświadczeń sprawdza się wyniki na modelach wykonanych z właściwych materiałów. Ołów zastępuje stal z powodu łatwości wykonania doświadczenia w temperaturze pokojowej, a doświadczenia przeprowadzone na plastycznej masie fenolowej trwają znacznie krócej od doświadczeń z betonem.

Doświadczenia przeprowadzone przez G. I. TAYLORA, [19], E. VOLTERRE, [20], i H. KOLSKYEGO, [21], na małych próbkach z gumy i plastiku przy dużych prędkościach przyłożenia obciążenia i przy założeniu stosowalności zasady superpozycji Boltzmanna potwierdzają z dużym stopniem dokładności, że funkcja pamięci (jądro równania całkowego naszego zagadnienia) posiada wykładniczą postać. Wynika stąd, że możemy przyjąć liniowy model reologiczny, chociaż statyczny wykres $\sigma = \sigma(\epsilon)$ nie jest liniowy. Otrzymane wartości czasu relaksacji różnią się bardzo w wymienionych doświadczeniach G. I. TAYLORA, E. VOLTERRA i H. KOLSKYEGO. Dla polietylenu VOLTERRA znalazł wartość $\tau_r = 1700 \mu \text{ sek}$, gdy KOLSKY — $\tau_r = 2 \mu \text{ sek}$. Należy jednak wziąć pod uwagę, że w doświadczeniach TAYLORA i VOLTERRA obciążenie było przyłożone $10\,000 \mu \text{ sek}$, gdy w doświadczeniach KOLSKYEGO około $20 \mu \text{ sek}$. Wyniki te wskazują na to, że wykładnicza postać funkcji pamięci nie jest właściwym przedstawieniem własności lepko-sprężystych w szerokim zakresie odkształceń, natomiast jest dobrym przedstawieniem w ograniczonym zakresie, gdy czas trwania odkształcenia jest tego samego rzędu co czas relaksacji. W związku z tym łatwo zauważyć, że czas relaksacji zmienia się i należy wprowadzić ciągle widmo (spektrum) czasów relaksacji (L. TRELOAR, [22], i B. GROSS, [23]). Wyjątek stanowią pewne materiały o własnościach lepko-sprężystych i prostej budowie molekularnej (J. J. BENBOW, [24]). Zachowują się one w dość szerokim zakresie jak ciało o modelu Maxwella.

Zespolony moduł odkształcenia postaciowego możemy pomierzyć doświadczalnie dla częstości większych od około 10^{-6} sek^{-1} , natomiast funkcje pełzania i relaksacji dla czasów większych od 1 sek, [25]. Dlatego zwykle do zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami wprowadzamy moduł zespolony, gdy naprężenia zmieniają się w sposób sinusoidalny lub nagły, a korzystamy z funkcji pełzania lub relaksacji, gdy zmieniają się wolno.

Jeśli chodzi o rozchodzenie się fali sinusoidalnej, to nie dysponujemy bogatym materiałem doświadczalnym szczególnie dla szerokiego zakresu zmienności. Dane, którymi dysponujemy, nie pozwalają nawet zdecydować czy materiał zachowuje się jak model Voigta-Klevina, Maxwella, czy też bardziej skomplikowany. H. KOLSKY, [26], podał wyniki dotyczące zmiany prędkości fazowej i grupowej dla polietylenu przy temperaturze 10°C i dla częstości od 1 do 20 k cykli/sek; prędkość fazowa wzrasta wraz z częstością od $8,6 \cdot 10^4 \text{ cm/sek}$ do $9,7 \cdot 10^4 \text{ cm/sek}$, a prędkość grupowa od $9,0 \cdot 10^4$ do $10 \cdot 10^4 \text{ cm/sek}$. H. KOLSKY również wykonał doświadczenia dotyczące rozchodzenia się impulsu w przecie z polietylenu o długości 15 cali. Rozpatrywał on zmianę postaci impulsu o początkowym czasie trwania $20 \mu \text{ sek}$.

R. S. BODNER i H. KOLSKY, [27], zajmowali się rozchodzeniem się fal w ciałach o nieliniowych własnościach lepko-sprężystych. Stwierdzono, że dla prętów ołowianych, pomimo że własności materiału są nieliniowe, współczynnik tłumienia nawet dla małych drgań jest funkcją amplitudy oraz że postać impulsu przewidziana teorią liniową nie różni się zbytnio od postaci zaobserwowanej w doświadczeniach.

4. Teoretyczne rozwiązania problemów dotyczących zagadnień dynamicznych ciał o własnościach lepko-sprężystych

W rozważaniach dotyczących rozchodzenia się fal przyjmuje się często następujące upraszczające założenia:

(a) Dla wielu materiałów o własnościach lepko-sprężystych (np. dla gumy) współczynnik Poissona jest bliski $1/2$, zakłada się więc, że takie materiały są nieściśliwe.

(b) Materiały lepko sprężyste są idealnie sprężyste dla odkształceń czysto objętościowych.

(c) Odkształcenie zarówno objętościowe jak i postaciowe jest tego samego charakteru (tłumaczy się to faktem, że w obu rodzajach odkształcenia zachodzą podobne procesy molekularne). Założenie to jest równoznaczne z tym, że współczynnik Poissona ν jest stały i nie zależy od czasu.

W modelu reologicznym energia jest kumulowana w sprężynach jako energia sprężysta i jest rozpraszana w tłumikach w postaci energii cieplnej. Całkowita zmagazynowana energia jest równa sumie energii zmagazynowanych w składowych sprężynach modelu. Całkowita energia pochłonięta jest sumą energii rozproszonej we wszystkich tłumikach.

W literaturze spotykamy kilka metod rozwiązania dynamicznych zagadnień dotyczących ciał o własnościach lepko-sprężystych. Na ogół zagadnienie rozwiązuje się albo za pomocą całki Fouriera, albo szeregów Fouriera metodą charakterystyk, lub metodą transformacji całkowych. Jeśli chodzi o metodę transformacji całkowych, to największe rozpowszechnienie w tych zagadnieniach znalazła jednostronna wykładnicza transformacja Fouriera i transformacja Laplace'a. Np. stosując transformację Laplace'a do równań równowagi sześciennego elementu wyciętego z ciała o własnościach lepko-sprężystych mamy

$$(4.1) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(p)}{\partial x_j} + \bar{X}_i(p) = \rho p^2 \bar{u}_i(p).$$

Podobnie stosując transformację Laplace'a do związków Cauchy'ego i równań (2.10), otrzymujemy

$$(4.2) \quad \bar{\varepsilon}_{ij}(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

$$(4.3) \quad \bar{\sigma}_{ij}(p) = \delta_{ij} p \bar{\lambda}(p) \bar{\theta}(p) + 2p \bar{\mu} \bar{\varepsilon}_{ij},$$

gdzie $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ i \bar{u}_i są funkcjami x_i oraz parametru p . Równania (4.1)-(4.3) tworzą układ 15 równań o 15 niewiadomych transformatach Laplace'a składowych naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, dając oczywiście wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi po rozwiązaniu układu równań jednoznaczne rozwiązanie problemu. Przypadek idealnej sprężystości otrzymujemy podstawiając $\bar{\lambda}(p) = \lambda_s/p$, $\bar{\mu}(p) = \mu_s/p$. Z równań (4.1)-(4.3) wynika, że transformacja Laplace'a dowolnego zagadnienia teorii sprężystości będzie transformacją Laplace'a tego samego zagadnienia.

teorii ciał o własnościach lepko-sprężystych z tymi samymi warunkami brzegowymi, gdy stałe sprężystości λ_s i μ_s zastąpimy przez $p\bar{\lambda}(p)$ i $p\bar{\mu}(p)$.

Podobny wynik otrzymamy dla stanu ustalonego. Przypuśćmy, że po dostatecznie długim czasie działania sinusoidalnej siły wymuszającej wszystkie procesy osiągnęły stan ustalony, a odpowiadające im wielkości ustaliły się. Sinusoidalną siłą wymuszającą może być siła masowa; jeżeli siły masowe nie są sinusoidalne, musimy założyć ich znikanie. Otrzymujemy wtedy następujący układ równań:

$$(4.4) \quad \sigma_{ij}^* = \delta_{ij} \Lambda(\omega) \theta^* + 2\bar{\mu}(\omega) \varepsilon_{ij}^*,$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} = -\rho \omega^2 u_i^*,$$

$$(4.6) \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right),$$

gdzie wszystkie wielkości z gwiazdką są amplitudami drgań oraz

$$\Lambda(\omega) = i\omega \bar{\lambda}(i\omega), \quad \mu(\omega) = i\omega \bar{\mu}(i\omega).$$

W przypadku idealnej sprężystości mamy $\Lambda(\omega) = \lambda_s$ i $\mu(\omega) = \mu_s$, tak że rozwiązanie zagadnienia lepko-sprężystego dostajemy z odnośnego zagadnienia teorii sprężystości podstawiając zamiast stałych Lamégo zespolone wielkości $\Lambda(\omega)$ i $\mu(\omega)$. Wielkość $\mu(\omega)$ zwykle nazywa się zespolonym modułem odkształcenia postaciowego. Taki sposób otrzymywania rozwiązań zagadnień w przypadku ciał o własnościach lepko-sprężystych nazywamy zasadą odpowiedniości. Jej sformułowanie dla problemu sinusoidalnego jest następujące. Jeżeli rozwiązanie zagadnienia teorii sprężystości ma postać $f = \text{Re}[f_s \exp(i\omega t)]$, to rozwiązanie odnośnego zagadnienia lepko-sprężystego otrzymamy w postaci $f = \text{Re}[f_{1s} \exp(i\omega t)]$, gdzie w funkcji f_s zastąpiliśmy moduły sprężystości modułami zespolonymi otrzymując f_{1s} , [43].

Przez zagadnienia quasi-statyczne rozumiemy takie, w których zmienne zależne zmieniają się w zależności od czasu tak wolno, że możemy pominąć w równaniach ruchu wyrazy inercyjne. Dla zagadnień quasi-statycznych w przypadku gdy stosujemy transformację Laplace'a, zasada odpowiedniości może być sformułowana następująco. Rozwiązanie zagadnienia lepko-sprężystego otrzymujemy dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a na rozwiązaniu układu równań różniczkowych cząstkowych (4.1)-(4.2) lub innych równań równoważnych, pomijając w tych równaniach wyrazy inercyjne.

Dla pewnych przypadków, zwłaszcza dla nagle przyłożonych obciążeń wygodniej jest stosować zamiast transformacji Laplace'a jednostronną wykładniczą transformację Fouriera.

Jeśli chodzi o otrzymane wyniki, to dla bardzo długiego pręta, gdy możemy pominąć wpływ fali odbitej, a siła wymuszająca, działająca na końcu pręta $A \cos \omega t$ wywołuje fale podłużne, otrzymujemy w odległości x od końca odkształcenie w po-

staci $\exp(-ax) \cos \omega(t-x/c)$, gdzie a jest współczynnikiem tłumienia, a c prędkością fazową. Dla niewielkich wartości tłumienia $c \approx (E/\rho)^{1/2}$ i $a = \omega \operatorname{tg}(\delta/2c)$, gdzie E jest amplitudą zespolonego modułu, ρ gęstością, δ stosunkiem części urojonej zespolonego modułu do rzeczywistej. Dla ciał o własnościach lepko-sprężystych E i a wzrastają wraz ze wzrostem częstości siły wymuszającej. Funkcja $\operatorname{tg} \delta$ wzrasta lub maleje ze wzrostem częstości, jednak maleje nie prędzej niż ω/c . Wynika stąd wniosek, że fale o większej częstości rozchodzą się z większą prędkością i są bardziej tłumione wraz z odległością. Prędkość fazowa c i współczynnik tłumienia a zostały obliczone w wielu pracach dla różnych modeli ciał lepko-sprężystych. Otrzymane wyniki są zgodne z danymi doświadczalnymi jakościowo, natomiast ilościowo znacznie odbiegają od rzeczywistości z wyjątkiem bardzo małych zakresów częstości. Dla modelu Voigta-Kelvina $c \rightarrow \infty$ dla dużych częstości, a dla modelu Maxwella $c \rightarrow 0$ dla małych częstości. Bardziej skomplikowane modele ciał o własnościach lepko-sprężystych mają za zadanie wierniejsze odtworzenie rzeczywistości. Jako przypadek graniczny postuluje się ciągle widmo relaksacji.

Tylko materiały o najprostszej strukturze molekularnej mogą zachowywać się jak model Maxwella, [24], przy dość dużym zakresie zmiany częstości.

Zagadnienia dotyczące fal wywołanych nagłym przyłożeniem siły były rozpatrywane przez wielu autorów. J. H. THOMPSON jeszcze w roku 1933 rozpatrzył nagłe skręcanie pręta o skończonej długości dla modelu Voigta-Kelvina. Rozprzestrzenianie się impulsu wzdłuż lepko-sprężystego pręta rozpatrzył H. KOLSKY, [29].

W przypadku ciał o własnościach lepko-sprężystych należy być ostrożnym w stosowaniu pojęcia prędkości grupowej, ponieważ zmiana kształtu impulsu może być wynikiem nie tylko różnic fazowych pomiędzy oddzielnymi składowymi Fouriera, lecz również wynikiem względnych zmian w amplitudzie. Można wykazać, że dla modelu Maxwella w przypadku obciążenia określonego za pomocą funkcji Heavyside'a czoło fali takiego impulsu porusza się z największą prędkością, natomiast rozważania posługujące się pojęciem prędkości grupowej dawałyby wartość prędkości rozchodzenia się czoła fali większą 1,09 razy, [30].

Obok metody transformacji całkowej stosuje się często w rozwiązywaniu zadań dotyczących rozchodzenia się impulsu metodę charakterystyk. Badając rozchodzenie się fal w modelu Voigta-Kelvina, [31], dochodzi się do wniosku, że prędkość fazowa wzrasta nieograniczenie wraz z częstością. Z drugiej jednak strony składowe o dużej częstości niezwykle szybko maleją wraz z odległością, tak że praktycznie największy wpływ na rozchodzenie się czoła fali mają składowe o mniejszej częstości, a anomalia powyższa nie jest tak poważna, jak się to wydaje na pierwszy rzut oka.

Inni autorzy rozpatrywali modele 3 i 4-parametrowe. Porównanie rozchodzenia się impulsu dla różnych modeli podali E. H. LEE i J. A. MORRISON, [32]. To czy kształt impulsu otrzymamy przy założeniu tego lub innego modelu będzie zgodny z rzeczywistym zaobserwowanym w doświadczeniu zależy również od początkowego kształtu i od tego o ile zmalały składowe o wyższej częstotliwości w pewnej odległości od punktu zaburzenia początkowego.

Kilka prac rozpatruje rozchodzenie się fal przy założeniu ogólnego modelu podlegającego zasadzie superpozycji Boltzmanna, jednak rozwiązania szczegółowe podano jedynie w pracy D. S. BERRY'EGO i S. C. HUNTERA, [33], w przypadku gdy funkcja pamięci odpowiada modelowi Maxwella.

M. BIENIEK w pracy [34] rozpatruje rozchodzenie się fali płaskiej, walcowej i kulistej w przypadku modelu pięcioparametrowego oraz drgania podłużne i skrętne pręta i uderzenia osiowe pręta.

Pustkę kulistą w przestrzeni nieograniczonej rozpatrują H. C. MATTICE i P. LIEBER, [35], dla modelu Voigta-Kelvina, H. L. OSTERREICHER, [36], oraz D. S. BERRY dla modelu Maxwella ze stałym współczynnikiem Poissona, [37]; tylko w tej pracy rozwiązanie otrzymano bez daleko idących uproszczeń przy obliczaniu odwrotnej transformacji. Z. OLESIAK w pracy [38] podaje rozwiązanie tego zagadnienia dla modelu standartowego ($\nu = \text{const}$) oraz dla modelu Maxwella ($K = \text{const}$).

Rozprzestrzenianie się naprężeń wywołanych w nieograniczonej przestrzeni lepko-sprężystej na skutek działania sił skupionych zmieniających się w czasie omawia W. NOWACKI w pracy [39]. Jako przykłady rozpatrzono działanie siły skupionej i obciążenia równomiernie rozłożonego wzdłuż linii i płaszczyzny oraz działanie skupionego i liniowego ośrodka ściskania. Wyniki podano dla modelu Maxwella ($\nu = \text{const}$).

W sejsmologii i geologii, [40], gdzie zagadnienia rozprzestrzeniania się fal grają kapitalną rolę, również rozpatruje się modele ciał o własnościach lepko-sprężystych. Rozchodzenie się płaskiej fali Rayleigha dla modelu Voigta-Kelvina rozpatrzył P. CALOI, [41]. M. NEWLANDS, [42], uogólnił zagadnienie Lamba na przypadek modelu Voigta-Kelvina.

Zagadnienia lepko-sprężystości oraz pełzania i relaksacji zostały rozpatrzone w szeregu monografii [1], [15], [43], [44] i [45]. Rozdziały dotyczące naprężeń w ciałach o własnościach lepko-sprężystych możemy również znaleźć w szeregu monografii i podręczników, jak np. [40], [46], [47], [48], [49] i [50]. Zagadnienia te są już rozpatrywane przez autorów pewnych podręczników akademickich wytrzymałości materiałów, [51] i [52]. Z artykułów przeglądowych dotyczących rozprzestrzeniania się fal w ciałach lepko-sprężystych wymienimy prace R. M. DAVIESA, [53], i H. KOLSKYEGO, [54]. Rozprzestrzenianiem się fali termicznej w przestrzeni z pustką kulistą zajmował się A. M. KATASONOW, [55]. W. NOWACKI zajmuje się w szeregu prac dynamicznymi zagadnieniami termicznymi w ciałach o własnościach lepko-sprężystych. W pracy [56] rozpatrzono stan naprężenia w przestrzeni pod działaniem skupionego liniowego i quasi-statycznego źródła ciepła (z pominięciem wyrazów inercyjnych). Rozwiązanie szczegółowe podano dla modelu Maxwella i Voigta-Kelvina. W pracy [57] podano rozwiązanie zadania dla przypadku chwilowego źródła ciepła w przestrzeni przy uwzględnieniu wpływu sił bezwładności; rozwiązanie szczegółowe dotyczy modelu Maxwella dla $\nu = \text{const}$. Podobnie w pracy [58] rozpatrzono działanie liniowego i płaskiego źródła ciepła, rozważono tam również przypadek nagłego ogrzania powierzchni półprzestrzeni lepko-sprężystej.

żystej. Rozszerzeniem metody W. Majzela na ciała lepko-sprężyste zajmuje się W. NOWACKI w pracy [58]. Rozpatrzono tu dwuetapowy sposób rozwiązywania zagadnień dynamicznych przy nieustalonym polu temperatury. W pierwszym etapie otrzymuje się rozwiązanie zagadnienia quasi-statycznego, a w drugim uwzględnia siły bezwładności.

Wpływ temperatury w płaskim zagadnieniu lepko-sprężystości dla symetrycznie ogrzanej kuli i powłoki kulistej oraz cienkiej płyty rozważył M.I. ROZOWSKI, [60]. M. SOKOŁOWSKI, [61], rozpatruje nagłe oziębienie kuli wykonanej z materiału o własnościach lepko-sprężystych; rozwiązanie podano dla modelu standartowego. Stan naprężenia pod działaniem płaskiego źródła ciepła z uwzględnieniem wyrazów inercyjnych dla modelu Voigta-Kelvina w przypadku półprzestrzeni lepko-sprężystej podał M. ŻÓRAWSKI, [62]. Również ten sam autor rozpatruje ruchome dynamiczne źródła ciepła w przypadku modelu Maxwella ($\nu = \text{const}$) i modelu Voigta-Kelvina, [63], dynamiczne jądro termosprężystego odkształcenia, [64], oraz nagłe podniesienie temperatury na powierzchni warstwy i wydrążonej kuli, [65].

Powyższy przegląd nie wyczerpuje omówienia dynamicznych zagadnień dotyczących ciał o własnościach lepko-sprężystych. W szczególności pominieliśmy, poza małymi wyjątkami, omówienie zagadnień nieliniowych, kierunków o mniejszym znaczeniu praktycznym lub znajdujących się w stadium początkowego rozwoju. Pominieliśmy również omówienie zagadnień specjalnych, na ogół o mniejszym znaczeniu teoretycznym, opartych na pół empirycznych wzorach i posiadających mniejsze znaczenie. Omówienie tych wszystkich problemów rozszerzyłoby jednak nadmiernie objętość artykułu.

Literatura cytowana w tekście

- [1] C. ZENER, *Elasticity and anelasticity of metals*, Chicago 1948.
- [2] А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, *Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел*, Известия АН СССР ОТН, 3, 1945.
- [3] J. H. POYNTING and J. J. THOMSON, Podręcznik fizyki, rozdział *Properties of Matter*, Londyn 1907.
- [4] T. ALFREY, *Quart. J. of Appl. Math.* 2, 113 (1944) i 3, 143 (1945-1946).
- [5] T. ALFREY, E. F. GURNEE, *Rheology*, t.I, New York 1956.
- [6] L. BOLTZMANN, *Ann. d. Physik* 7, 624 (1876) oraz *Sitzungsb. Akad. Wiss. Wien-Berlin*, 70, 275 (1874).
- [7] V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions des lignes*, 1913.
- [8] R. SIPS, *General theory of deformation of viscoelastic substances*, *J. of Polym. Sci.*, 2-3, 7 (1951).
- [9] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Приложение интегро дифференциальных уравнений к некоторым динамическим задачам теории упругости при наличии последетисвия*, Прикл. Мат. Мех., 11 (1947), 329.
- [10] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени*, Гостехтеоретиздат, 1949.
- [11] R. W. BAILEY, *The Utilization of Creep Test Data in Engineering Design*, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 131 (1935), 131.

- [12] DAVENPORT, *Correlation of Creep and Relaxation Properties of Copper*, J. of Appl. Mech., 2, 5 (1938).
- [13] Ю. Н. РАБОТНОВ, *Расчет деталей машины на ползучесть*, Изв. АН СССР ОТН, 6, 1948.
- [14] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Приложение интегро-дифференциальных уравнений к некоторым динамическим задачам теории упругости при наличии последействия*, Прикл. Мех. Мех., 11 (1947), 329.
- [15] Н. Х. АРУТЮНЯН, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Гостехиздат, 1952.
- [16] G. DUFFING, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 3, 2 (1931).
- [17] А. П. БРОНСКИЙ, *Явления последействия в твердом теле*, Прикл. Мех. Мат., 1, 5 (1941).
- [18] Г. Л. СЛОНИМСКИЙ, *О законах деформаций реальных материалов*, Журн. Техн. Физики, 20, 9 (1939).
- [19] G. I. TAYLOR, J. Inst. Civil Engrs, 26 (1946), 486.
- [20] E. VOLTERRA, Nuovo Cim., 4 (1948).
- [21] H. KOLSKY, Proc. Phys. Soc. B, 62 (1949), 676.
- [22] L. R. G. TRELOAR, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford Clarendon Press, 1949.
- [23] B. GROSS, *Mathematical Structure of the Theories of Visco-Elasticity*, Paris 1953,
- [24] J. J. BENBOW, *The Dynamic Mechanical Properties of Some Organic Glasses*, Proc. Phys. Soc. B, 67 (1954), 120-130.
- [25] J. D. FERRY, *Rheology*, V. 2, New York 1956.
- [26] H. KOLSKY, *Attenuation of Short Mechanical Pulses by High Polymers*, Proc. 2nd. Int. Congress on Rheology, Londyn 1954, 79-84.
- [27] S. R. BODNER, H. KOLSKY, *Stress Wave Propagation in Lead*, Proc. 3rd. U. S. Nat. Congress of Appl. Mech., New York 1958, Amer. Soc. Mech. Engrs.
- [28] J. H. C. THOMSON, *On the Theory of Viscoelasticity: a Thermodynamical Treatment of Viscoelasticity and Some Problems of the Vibrations of Viscoelastic Solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. (A) 231, 1933, 339-407.
- [29] H. KOLSKY, *The Propagation of Stress Pulses in Visco-Elastic Solids*, Phil. Mag., 1, 1956, 693-710.
- [30] E. H. LEE, I. KANTER, *Wave Propagation in Finite Rods of Visco-Elastic Material*, J. Appl. Phys., 24, 1953, 1115-1122.
- [31] И. Н. ЗВЕРЕВ, *Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне*, Прикл. Мех. Мат., 3, 14 (1950), 295-302.
- [32] E. H. LEE, J. A. MORRISON, *A Comparison of Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Visco-Elastic Materials*, J. Polym. Sci., 19 (1956), 93-110.
- [33] D. S. BERRY, S. C. HUNTER, *The Propagation of Dynamic Stresses in Visco-Elastic Rods*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 1956, 72-95.
- [34] М. БИЕНЕК, *Podstawy dynamiki ciał niesprężystych*, Arch. Mech. Stos., 4 (1952), 43-92.
- [35] H. C. MATTICE, P. LIEBER, *On Attenuation of Waves Produced in Visco-Elastic Materials*, Trans. Amer. Geophysical Union, 35, 1954, 614-624.
- [36] H. L. OSTERREICHER, *Field and Impedance of an Oscillating Sphere in a Visco-Elastic Medium with an Application to Biophysics*, J. Acoust. Soc. Amer., 23, 1951, 707-714.
- [37] D. S. BERRY, *Stress Propagation in Visco-Elastic Bodies*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 6 (1958).
- [38] Z. OLESIAK, *Rozprzestrzenianie się naprężeń w lepko-sprężystej przestrzeni z pustką kulistą*, (w przygotowaniu).
- [39] W. NOWACKI, *Stress Propagation in an Infinite Viscoelastic Body Produced by a Time-Variable Point Force*, Arch. Mech. Stos., 6, 11 (1959), 737.
- [40] W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, F. PRESS, *Elastic Waves in Layered Media*, 1957.
- [41] P. CALOI, *Comportement des ondes de Rayleigh dans un milieu firmo-élastique indéfini*, Publ., Bur. Central Séism. Intern. A, 17 (1948), 89-108.

- [42] M. NEWLANDS, *Lamb's Problem with Internal Dissipation. I*, J. Acoust. Soc. Amer., 26, 1954, 434-448.
- [43] D. R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, London 1960.
- [44] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, Н. А. НИКОЛАВЕНКО, *Теория ползучести строительных материалов и ее приложение*, Госстройиздат, 1960.
- [45] А. М. КАЧАНОВ, *Теория ползучести*, Физматгиз, 1960.
- [46] H. KOLSKY, *Stress Waves in Solids*, Oxford 1953.
- [47] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN Warszawa 1960.
- [48] W. NOWACKI, *Thermal Stresses*, London 1962.
- [49] S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Wyd. Wojsk. Akad. Techn., Warszawa 1957.
- [50] B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of Thermal Stresses*, New York, London 1960, 502-508.
- [51] А. А. ИЛЬЮШИН, В. С. ЛЕНСКИЙ, *Сопротивление материалов*, Физматгиз, 1959.
- [52] В. А. ГАСТЕВ, *Краткий курс сопротивления материалов*, Физматгиз, 1959.
- [53] R. M. DAVIES, *Surveys in Mechanics*, G. I. Taylor 70-th Anniversary Vol., Cambridge 1956.
- [54] H. KOLSKY, *The Propagation of Stress Waves in Viscoelastic Solids*, Appl. Mech. Reviews, 9, 11 (1958).
- [55] А. М. КАТАСОНОВ, *Распространение сферических термо-вязко-упругих возмущений*, Вестник Моск. Унив., 3, 1957, 39-49.
- [56] W. NOWACKI, *Thermal Stresses Due to the Action of Heat Sources in a Viscoelastic Space*, Arch. Mech. Stos., 1, 11 (1959), 111.
- [57] W. NOWACKI, *Thermal Stress Propagation in Viscoelastic (I)*, Bull. Pol. Acad. Sci. Sér. IV, 4, 7 (1959), 257, oraz cz. (II) Bull. Pol. Acad. Sci. IV, 7-8, 7 (1959), 459.
- [58] W. NOWACKI, *Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Bodies (I)*, Arch. Mech. Stos., 5, 11 (1959), 649.
- [59] W. NOWACKI, *Ausbreitung der Wärmespannungen in viscoelastischen Körpern*, Österreich. Ing. Archiv, 1961.
- [60] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Температурные напряжения при наличии последействия*, Журн. Техн. Физ., 6, 19 (1949), 696-710.
- [61] M. SOKOŁOWSKI, *Naprężenia cieplne w kuli wykonanej z materiału o własnościach lekko-sprężystych*, Księga Jubil. Prof. W Wierzbickiego, PWN Warszawa 1959.
- [62] M. ŻÓRAWSKI, *States of Stress Generated in a Viscoelastic Semi-space by a Flat Heat Source*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série IV, 4, 8 (1960).
- [63] M. ŻÓRAWSKI, *Moving Dynamic Heat Sources in a Viscoelastic Space and Corresponding Basic Solutions for Moving Sources*, Arch. Mech. Stos., 2, 13 (1961).
- [64] M. ŻÓRAWSKI, *Determination of Stresses Generated in a Layer and a Viscoelastic Closed Spherical Shell*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série IV, 10, 8 (1960).
- [65] M. ŻÓRAWSKI, *Dynamic Nucleus of Thermoelastic Strain in Viscoelastic Space*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série IV, 2, 9 (1961).

Резюме

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛ, ОБЛАДАЮЩИХ ВЯЗКО - УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ

Статья является обзором, в котором автор расширяет аналогичный обзор, приведенный Р. М. Девисом, [53], и Х. Кольским, [54]. В особенности обращается внимание на монографии и книги, опубликованные в последние годы (от п.п [43] до [52]), а также оригинальные работы польских авторов. Обсуждается математическое описание вопросов экспериментальные данные и методика решения теоретических задач, касающихся тел, обладающих вязко-упругими свойствами.

Summary

DYNAMIC PROBLEMS OF VISCOELASTIC BODIES

This is a survey written with the purpose of completing the analogous survey written by R. M. DAVIES, [53], and H. KOLSKY, [54]. In particular, it includes monographs and textbooks published in recent years (items [43] to [52]) and original works of Polish authors. The mathematical description of the problem is discussed as well as the methods of solving theoretical problems of viscoelastic bodies.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1961 r.
