

MAREK KWIECIŃSKI

WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA TEORII NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
USTROJÓW PŁYTOWO-ŻEBROWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXXVII

TOM IX · ZESZYT 1 · ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Wstęp i ogólne założenia teorii nośności granicznej	127
2. Analiza nośności granicznej ustrojów płytowo-żebrowych	128
3. Zasada badań laboratoryjnych i opis przyrządów	132
4. Charakterystyka warunków doświadczeń; momenty jednostkowe	133
5. Ustrój o rzucie kwadratowym	138
6. Ustrój o rzucie prostokątnym	144
7. Uwagi końcowe	148

1. Wstęp i ogólne założenia teorii nośności granicznej

Praktyka projektowania ustrojów nośnych, złożonych z płyt i belek, opiera się na myślowym wyodrębnieniu poszczególnych elementów, określeniu ich sił wewnętrznych w oparciu o przypadające na nie, zgodnie z zasadami statyki ciała sprężystego, obciążenia oraz wymiarowaniu przekrojów. Taki w dużej mierze sztuczny podział ustroju na elementy jedno- i dwuwymiarowe powoduje, że realny współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji jako całości jest na ogół inny (zresztą przeważnie większy) niż przewidywany według obliczeń «klasycznych».

Opracowanie kryterium wspólnego współczynnika bezpieczeństwa dla wszystkich elementów składowych ustroju prowadzi do zgodności z wymaganiami ekonomicznego projektowania.

Najbardziej rozpowszechnionymi w budownictwie układami są ustroje nośne, złożone z płyt oraz belek podpierających te płyty.

Zagadnienie nośności granicznej tych układów, w szczególności ustrojów o płycie kwadratowej i prostokątnej, wyposażonej w cztery żebra krawędziowe jest tematem pracy [1]. Podobne zagadnienie zostało rozpatrzone w pracy [9], lecz bez uwzględnienia anizotropii i warstwowości układu.

Analiza stanu zniszczenia ustroju doprowadza do określenia wielkości sił wewnętrznych w chwili równowagi granicznej oraz pozwala na ocenę stopnia bezpieczeństwa układu jako całości.

Przez stan zniszczenia określa się taki stan konstrukcji, kiedy staje się możliwy proces niepowstrzymany narastania odkształceń plastycznych przy stałej wielkości sił obciążających.

Przy rozpatrywaniu zagadnień nośności granicznej odróżniamy dwa podejścia — statyczne i kinematyczne. Oparte są one na dwu podstawowych twierdzeniach, dotyczących oszacowania granic, w jakich zawarta jest rzeczywista wielkość obciążenia łamiącego (por. np. [2], [7], [8]).

Krótko można powiedzieć, że dolną granicę rzeczywistego obciążenia łamiącego wyznacza się z analizy statycznie dopuszczalnego rozkładu sił wewnętrznych (pola naprężeń). Pole takie występuje wtedy, gdy są spełnione następujące warunki: (a) warunki równowagi wewnętrznej we wszystkich elementach ustroju, (b) naprężeniowe warunki brzegowe oraz (c) w żadnym punkcie nie jest przekroczony warunek plastyczności.

Górną granicę obciążenia łamiącego określa się dla ciała idealnie sztywno-plastycznego, rozpatrując kinematycznie możliwe, tzn. spełniające kinematyczne warunki brzegowe i odpowiednie warunki ciągłości, pole szybkości odkształceń. Inaczej mówiąc bierzemy pod uwagę tę fazę pracy ustroju, kiedy przekształca się on w ruchomy mechanizm.

Przekształcenie konstrukcji w mechanizm zniszczenia zachodzi wtedy, gdy praca obciążeń zewnętrznych nie jest mniejsza od pracy sił wewnętrznych, wykonywanej w trakcie plastycznego płynięcia (w jednostce czasu).

Celem niniejszej pracy jest potwierdzenie na drodze doświadczalnej wyników teoretycznej analizy stanu zniszczenia ustrojów płytowo-żebrowych. Analiza ta będzie krótko zreferowana, a następnie zajmiemy się scharakteryzowaniem zasady doświadczeń i przyrządów. Opracowane wyniki badań ustroju o rzucie kwadratowym oraz prostokątnym podane są w następnych punktach.

2. Analiza nośności granicznej ustrojów płytowo-żebrowych

Rozpatrywać będziemy nośność graniczną zginanych układów płytowo-żebrowych, zbudowanych z zespołu materiałów, które charakteryzują się tym, że poczynając od pewnej wielkości sił wewnętrznych odkształcenia przyrastają bez wzrostu obciążeń. Taki zespół ciał jak żelbet, uformowany w przekrój zginany, dzięki własnościom plastycznym stali cechuje się związanym z wielkością granicy plastyczności pewnym momentem granicznym, stałym przy pominięciu wzmocnienia.

Jeśli chodzi o płytę ustroju, to w związku z przyjętym w praktyce układaniem zbrojenia w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach wyróżnić można płyty plastycznie izotropowe oraz (przy różnym procencie zbrojenia) plastycznie ortotropowe.

Wprowadzenie żeber krawędziowych upoważnia nas do traktowania ustroju jako plastycznie niejednorodnego, przy czym własności plastyczne (na jednostkę długości przekroju poprzecznego) zmieniają się skokowo w miejscu styku płyty z żebrami.

Zakłada się sztywno-plastyczny schemat odkształceń, co oznacza, że zakrzywienia w obszarze uznawanym za sprężyste są pomijalne w porównaniu z krzywiznami, związanymi z wielkościami granicznych sił wewnętrznych (momentów granicznych, inaczej łamiących). Ponadto zakłada się, że odkształcenia plastyczne są małe, co sprowadza się do znanej zasady zeszywnienia, pozwalającej uważać równania statyki za niezmiennie w trakcie narastania odkształceń.

Rozpatrywane jest obciążenie ciągłe, równomiernie rozłożone na górnej powierzchni płyty i żeber. Płyty zgodnie z założeniami pracy [1] są połączone z żebrami w ten sposób, że osie podłużne belek leżą w środkowej powierzchni płyty w trakcie całego procesu odkształcenia. Ponieważ zasada ta jest trudna do zrealizowania w praktycznych rozwiązaniach, podano w odpowiednim miejscu niniejszego opracowania próbę uwzględnienia efektu, który można nazwać «półteowością» belki krawędziowej, przy czym uważamy, że moduły plastyczne płyty i belki (pracujących oddzielnie) są znane.

Układ płytowo-żebrowy oparty jest w narożach na słupach, przy czym żebra mają zdolność przenoszenia momentów skręcających, o ile budowa przekrojów podporowych płyt zapewnia przenoszenie momentów ujemnych.

Stan naprężenia w płycie traktuje się jako płaski, tzn. pomija się wpływ pionowych naprężeń normalnych na rozwój procesu płynięcia oraz pomija się wpływ naprężeń stycznych.

Okazuje się, że dla układu płytowo-żebrowego obie granice obciążenia (których określenie oparte jest na twierdzeniach podstawowych, opisanych we wstępie): dolna, statycznie możliwa, i górna, kinematycznie możliwa, niewiele się różnią (przy odpowiednim wyborze pól statycznych i kinematycznych). Ponadto dzięki pominięciu zjawiska wzmocnienia stali (co leży u podstaw technicznej teorii nośności granicznej), a tym samym dzięki pominięciu związanego z tym wzrostu nośności, możemy za miarodajną wielkość obciążenia łamiącego uważać jego górną granicę (uwarunkowaną podejściem kinematycznym).

Wyniki teorii opartej o powyższe założenia opublikowane są w pracy [1].

Postulujemy tam istnienie szeregu możliwych mechanizmów zniszczenia i wybieramy spośród nich ten, który związany jest z najmniejszym obciążeniem łamiącym. Dla każdego mechanizmu podajemy związek między momentem łamiącym a obciążeniem łamiącym; wykorzystujemy przy tym zależność wynikającą z faktu, że praca obciążeń zewnętrznych zużytkowana zostaje całkowicie w procesie plastycznego płynięcia. Zachodzi więc związek

$$(2.1) \quad \delta L = \delta V,$$

gdzie δL oznacza pracę sił zewnętrznych oraz δV pracę sił wewnętrznych.

Dla ustroju, złożonego z izotropowej, kwadratowej płyty o module plastycznym m (na jednostkę długości przekroju), opartej swobodnie na czterech żebrach krańcowych, charakteryzujących się jednakowymi wartościami momentów granicznych M , dopuszczamy prawdopodobieństwo zrealizowania się kilku kinematycznie możliwych pól szybkości odkształceń plastycznych. Układy siatek zniszczenia, odpowiadające tym stanom, przedstawione są na rysunkach 1a — 1g.

Wprowadzając wskaźnik plastycznej sztywności żeber ustroju płytowo-żebrowego $\varphi = M/ma$ dochodzimy na podstawie związku (2.1) do następujących wielkości obciążeń łamiących:

$$(2.2) \quad p_a = p_b = \frac{8m}{a^2} (1+2\varphi),$$

$$(2.3) \quad p_c = \frac{24m}{a^2},$$

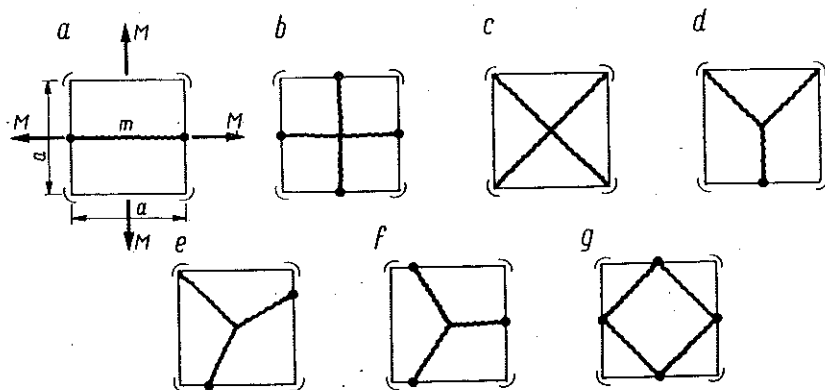
$$(2.4) \quad p_d = \frac{24m}{5a^2} (3+2\varphi),$$

$$(2.5) \quad p_e = \frac{3m}{2a^2} (8+9\varphi),$$

$$(2.6) \quad p_f = \frac{24m}{35a^2} (13 + 24\varphi),$$

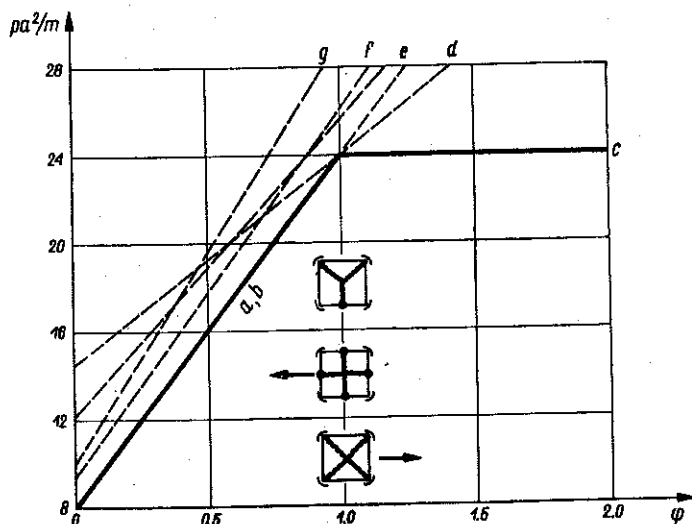
$$(2.7) \quad p_g = \frac{48m}{5a^2} (1 + 2\varphi).$$

Sposób odpowiedniego wyboru, a więc związanego z najmniejszym obciążeniem łamiącym mechanizmu w zależności od współczynnika φ , przedstawiony jest gra-



Rys. 1

ficznie na rys. 2. Odcinki ograniczające od dołu układ prostych wyznaczają obwiednię obciążeń łamiących, informującą nas, która z siatek zniszczenia dla danego φ spełnia warunek maksymalnego oporu plastycznego.



Rys. 2

Szczególnie interesujący jest przypadek, kiedy mechanizmy zniszczenia b i c dają tę samą wartość obciążenia łamiącego. Wtedy występuje jednoczesne wy-

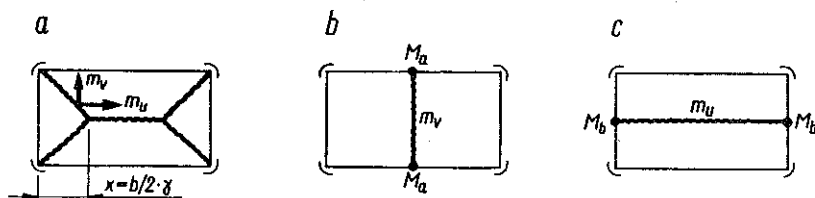
wyczerpanie nośności płyty i żeber ustroju, a mechanizm zniszczenia stanowi kombinację odpowiednich mechanizmów i nie jest jednoznacznie określony. A więc przez odpowiedni dobór współczynnika sztywności żeber można zagwarantować wspólny współczynnik pewności dla ustroju traktowanego jako całość.

Z założenia równości $p_b = p_c$ mamy

$$(2.8) \quad \varphi = 1.$$

Warto dodać, że taką samą wielkość wskaźnika sztywności otrzymuje się przy podejściu statycznym (por. [1]).

Dla przypadku ogólniejszego, mianowicie ustroju płytowo-żebrowego z płytą prostokątną (której ortotropię określamy współczynnikiem $\kappa = m_v/m_u$), opartą



Rys. 3

swobodnie na dwu parach równoległych żeber, różniących się wielkościami momentów granicznych, wystarczy rozpatrzyć możliwość powstania trzech mechanizmów zniszczenia. Mechanizmy te przedstawiono na rys. 3.

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{b}{a} = \beta, \quad \frac{M_b}{m_u a} = \varphi, \quad \frac{M_a}{M_b} = \omega$$

dochodzimy do następujących wielkości obciążeń granicznych:

$$(2.9) \quad p_a = \frac{24m_u \kappa}{b^2 \gamma^2},$$

gdzie

$$\gamma = \kappa \left(\sqrt{\frac{3}{\kappa} + \beta^2} - \beta \right);$$

$$(2.10) \quad p_b = \frac{8m_u}{b^2} (\kappa \beta^2 + 2\varphi \omega \beta),$$

$$(2.11) \quad p_c = \frac{8m_u}{b^2} (1 + 2\varphi).$$

Interesujące jest znalezienie takich wartości φ i ω , które przy znanej ortotropii płyty κ zapewniają wyczerpanie nośności jednocześnie w płycie ustroju oraz w obu parach żeber krawędziowych.

Są to wartości

$$(2.12) \quad \varphi = \frac{3\kappa - \gamma^2}{2\gamma^2},$$

$$(2.13) \quad \omega = \frac{\kappa(3 - \beta^2\gamma^2)}{\beta(3\kappa - \gamma^2)}.$$

Wielkość obciążenia łamiącego, związanego ze wspólnym współczynnikiem pewności całego ustroju, można teraz wyznaczyć bezpośrednio z zależności (2.9).

3. Zasada badań laboratoryjnych i opis przyrządów

3.1. Określenie danych do obliczeń nośności granicznej. Ze względu na eksperymentalne uzasadnienie teorii przytoczonej w p. 2, nieodzowne jest ustalenie wartości modułów plastycznych, czyli momentów łamiących na jednostkę długości linii załomu w płycie m oraz momentów łamiących w belce krawędziowej M . Znajomość tych momentów pozwoli (przy odpowiednim przyjęciu mechanizmu zniszczenia) na wyznaczenie wielkości obciążenia łamiącego na drodze teoretycznej i porównanie jej z rzeczywistym obciążeniem niszcującym.

Modułów tych poszukuje się na drodze doświadczalnej. Wobec tego oparcie się na jednej z metod teorii żelbetu może być istotne tylko dla obliczeń sprawdzających, w szczególności jeśli chodzi o proporcje między momentami łamiącymi dla przekrojów o takich samych wymiarach, posiadających jednak różną moc zbrojenia.

Modele płyt i oddzielnych belek posiadały wymiary i uzbrojenie takie same, jak elementy użyte do wykonania złożonych układów płytowo-żebrowych. Aby płyta posiadała załom o kształcie linii prostej, zastosowano schemat belki swobodnie podpartej, obciążonej w środku rozpiętości siłą skupioną. Podobny schemat przyjęto dla ustalenia nośności na zginanie belek próbnych.

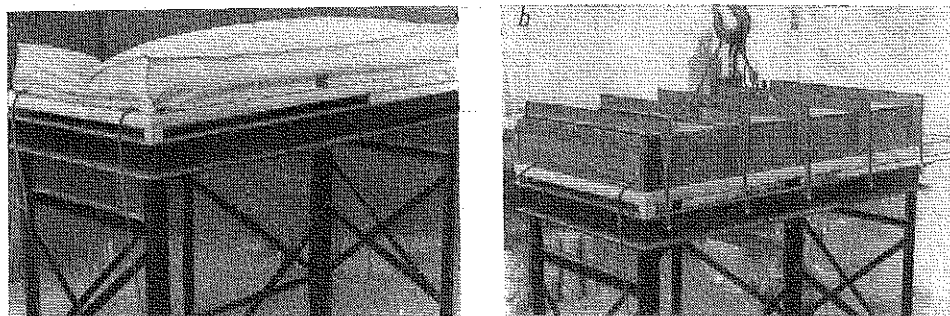
Wyniki badań tych płyt i «belek-świadków» podano w p. 4.2.

3.2. Obciążenie. Po obciążeniu modelu ustroju płytowo-żebrowego odpowiednio podpartego odczytywano te wartości intensywności sił zewnętrznych, których przyrosty są już niemożliwe z powodu powstania stałych granicznych sił wewnętrznych, związanych z płynięciem plastycznym w załomach.

W doświadczeniach zdecydowano się na zastosowanie pneumatycznego sposobu obciążania górnej powierzchni modelu, co zapewniło stałe natężenia w każdym punkcie.

Doświadczenia te wymagały skonstruowania specjalnego stołu badawczego o konstrukcji stalowej, przedstawionego na rys. 4a i 4b, składającego się ze sztywnej ramy zbudowanej z ceowników nr. 14, o wymiarach (w świetle średnic) 95 cm × 195 cm, wspartej na sześciu nogach usztywnionych za pomocą odpowiedniego skratowania. Na ramie układu się badany model, oparty w narożach przegubowo na czterech klockach 5 cm × 5 cm × 5 cm. Górną płaszczyznę modelu i płyty uzupeł-

niającej gabaryt ramy pokrywa się elastycznym szczelnym workiem z płótna gumowanego o wymiarach $95 \text{ cm} \times 195 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, zaopatrzonym w dwie końcówki z węża gumowego. Następnie ustawia się nad workiem sztywną obudowę drewnianą, wzmocnioną żebrami z kątownika, odpowiadającą mu wymiarami wewnętrznymi. Obudowę mocuje się z ramą stołu specjalnymi uchwytami śrubowymi ze stali okrągłej. Wszystkie elementy urządzenia, jak rama, obudowa i uchwyty, zostały obliczone na ciśnienie 4000 kG/m^2 .



Rys. 4

Ciśnienie w naczyniu szczelnym wywołuje się za pomocą elektrycznego kompresora, a naprężony worek przekazuje je na badany model. Prędkość obciążania, zwalniana dodatkowym wentylem, wynosiła około $50 \text{ kG/m}^2\text{sek}$ ($0,005 \text{ at/sek}$). Należy zaznaczyć, że w fazie obciążania obudowa worka nie uciska krawędzi modelu dzięki pozostawieniu małego (rzędu 2 mm) luzu w uchwytach śrubowych.

Obciążenia odczytywano na manometrze rtęciowym¹ o skali pochyłej, o zakresie od 0 do 4000 kG/m^2 i dokładności odczytów 5 kG/m^2 .

Warto dodać, że wyżej opisany stół badawczy umożliwia realizację różnych warunków podparcia modeli oraz może służyć do badania mało wyniosłych sklepień i tarczownic obciążanych w sposób równomierny prostopadle do ich górnej powierzchni.

4. Charakterystyka warunków doświadczeń; momenty jednostkowe

4.1. Opis modeli. Modele do badań wykonane były z zaprawy cementowej o stosunku wagowym składników $1 : 2,6$ i wskaźniku $w/c = 0,31 \text{ l/kG}$. Wytrzymałość na ściskanie walców $\varnothing 8$ wynosiła około 160 kG/cm^2 .

Modele zbrojone były w sposób następujący.

Płytę uzbrojono siatką z drutu o średnicy $2,8 \text{ mm}$; granica plastyczności $Q_r = 2470 \text{ kG/cm}^2$, a wytrzymałość $R_r = 3750 \text{ kG/cm}^2$. Strefa pozioma na wykresie roboczym rozciągania przy osiągnięciu Q_r odpowiadała przyrostowi wydłużeń około 2% .

Żebra krawędziowe były zbrojone dołem prętami okrągłymi jak w płycie.

¹ Manometr skonstruowano i wykonano w Instytucie Aerodynamiki Politechniki Warszawskiej.

4.2. Momenty jednostkowe. Moment graniczny dla jednego żebra krawędziowego został ustalony na podstawie łamania belek o wymiarach 5 cm × 5 cm × 105 cm. Momenty zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1. Zginanie belek

Sym-bol	Zbrojenie nominalne	Siła niszcząca (kG)	Siła średnia	Moment niszczący M (kGm)
1	2Ø3	130	127	30,2
		135		
		115		
2	4Ø3	250	239	56,7
		240		
		225		
3	6Ø3	295	300	71,2
		310		
		295		
4	8Ø3	490	472	112,0
		460		
		465		
5	3Ø5,5	450	435	103,5
		405		
		450		
6	5Ø5,5	670	613	146,0
		620		
		550		

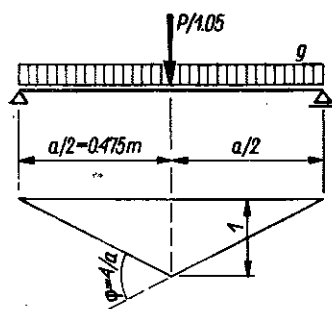
Płyty o wymiarach 105 cm × 105 cm × 3 cm były łamane jednokierunkowo przy wykorzystaniu jako oparcia dwu przeciwległych krawędzi ramy stołu badawczego. Siłę ostrzową uzyskano za pomocą sztywnej ceowej belki stalowej nr. 14, której ciężar 16 kG został wliczony do odczytów z prasy. Jednostkowy moment łamiący (w kGm/m) obliczono stosując zasadę prac przygotowanych. Uwzględniono ciężar własny płyty $g = 57 \text{ kG/m}^2$.

Zgodnie z wymiarami i schematem zniszczenia podanym na rys. 5 otrzymano wzór

$$(4.1) \quad m = 0,226P + 6,4 \text{ (kGm/m)}.$$

Momenty łamiące, obliczone zgodnie ze wzorem (4.1), podane są w tablicy 2.

Wartości m_v , obliczone z danych doświadczalnych, odpowiadają rozciąganiu tych prętów siatki, których odległość od rozciąganej powierzchni płyty jest mniejsza. Płyta żelbetowa o jednakowej ilości zbrojenia w obu głównych (wzajemnie prostopadłych) kierun-



Rys. 5

kach staje się w rzeczywistości płytą ortotropową o różnych wartościach momentów, związanych z kierunkami ortotropii, które są wyznaczone osiami prętów armatury. Stosunek tych momentów, o ile pręty obu kierunków dotykają się, jest w przybliżeniu zależny jedynie od ich średnicy:

$$\frac{m_u}{m_v} = \frac{h_u}{h_v} = 1 - \frac{d}{h_v},$$

gdzie d jest średnicą pręta, h_u i h_v odległościami osi prętów od zewnętrznej krawędzi strefy ściskanej.

Tablica 2. Zginanie płyt

Sym- bol płyty	Siła niszcząca $P(\text{kG})$	Siła średnia	Moment $m_v \left(\frac{\text{kGm}}{\text{m}} \right)$	Moment średni $m = km_v$
C1	286	295	73	69
	301			
	296			
C2	321	313	77	73
	301			
	316			
C3	506	498	119	Stosowane w ustrojach prostokąt- nych
	491			

Do obliczeń nośności będziemy wykorzystywać jedynie średni «zredukowany» moment jednostkowy, reprezentujący schemat płyty plastycznie izotropowej. Dla płyty kwadratowej, (por. [3]) moment ten wynosi

$$(4.2) \quad m = \frac{m_u + m_v}{2} = km_v,$$

gdzie $k = 1 - d/2h_v$.

Tak więc dla płyty o grubości $h = 30$ mm, średnicy prętów $d = 2,8$ mm i wielkości $h_v = 30 - 1,5 \times 2,8 = 25,8$ mm otrzymujemy $k = 0,946$.

Momenty średnie dane są w ostatniej kolumnie tablicy 2.

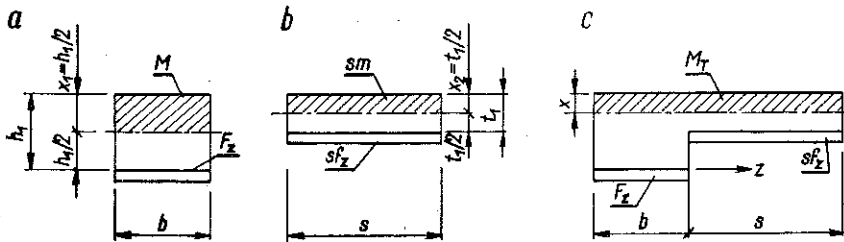
Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia zagadnienie następujące. Momenty jednostkowe ustalono oddzielnie dla żebra i płyty. W rzeczywistym ustroju płytowo-żebrowym w trakcie jego obciążania (na skutek monolitycznego połączenia żebra z przylegającą do niego partią płyty) poziome płaszczyzny symetrii żebra i płyty nie pokrywają się; tworzy się tzw. przekrój półteowy, co stoi w sprzeczności z przyjęciami pracy [1], s. 337. Efektem tego jest zmiana położenia osi obojętnej przekroju żebro-płyta, a co za tym idzie niemożność stosowania superpozycji momentów, ustalonych dla oddzielnych układów żebro i płyta. Ukształtowanie żebra wystającego od spodu płyty musi pociągnąć za sobą obniżenie położenia osi obojętnej płyty, a co za tym

idzie zmniejszenie wielkości ramienia jej sił wewnętrznych, a więc i jej granicznej nośności. Odwrotnie dzieje się z żebrzem, co doprowadza do wniosku, że nośność ustroju jako całości zmienia się:

$$M_T \neq M + ms.$$

Postaramy się ująć to zagadnienie analitycznie.

Otrzymane doświadczalnie momenty łamiące dla żebrza M i płyty ms można przedstawić jako funkcję ilości zbrojenia oraz wysokości użytecznej przekroju (rys. 6a i 6b). Zakładając brak wzmocnienia stali i przyjmując, że w chwili wyczerpania



Rys. 6

nośności naprężenie w stali osiąga granicę plastyczności Q_r , a naprężenie w betonie wytrzymałość R_m oraz wykorzystując znane założenie o prostokątnym rozkładzie naprężeń ściskających i o nieuwzględnieniu pracy betonu w strefie rozciąganej — możemy z warunków równowagi przekroju napisać dla żebrza

$$M = S_b R_m, \quad F_z Q_r = F_b R_m.$$

Stąd

$$M = S_b \frac{F_z Q_r}{F_b}.$$

Ponieważ $S_b = F_b z$, to otrzymujemy $M = F_z Q_r z$.

Zakładając, że $S_b = 0,75 S_0$, co jest zgodne z normą PN-56/03260, możemy obliczyć położenie osi obojętnej:

$$bx_1 \left(h_1 - \frac{x_1}{2} \right) = 0,75 \frac{bh_1^2}{2},$$

czyli

$$x_1^2 - 2h_1 x_1 + 0,75 h_1^2 = 0;$$

stąd $x_1 = h_1/2$.

We wzorach powyższych S_b oznacza moment statyczny strefy ściskanej względem osi zbrojenia rozciąganego oraz S_0 moment statyczny całego przekroju użytecznego względem osi zbrojenia rozciąganego.

Ostatecznie mamy

$$(4.3) \quad M = 0,75 h_1 F_z Q_r.$$

Podobnie dla płyty

$$(4.4) \quad sm = 0,75 st_1 f_z Q_r.$$

Rozpatrując następnie przekrój półteowy (rys. 6c) i określając położenie wspólnej osi obojętnej parametrem x , możemy znaleźć z równowagi przekroju następujące związki:

$$M_T = (b+s)x \left(h_1 - \frac{x}{2} \right) R_m - s f_z (h_1 - t_1) Q_r,$$

$$(b+s)x R_m = (F_z + s f_z) Q_r.$$

Wykorzystując wzory (4.3) i (4.4), otrzymujemy

$$(4.5) \quad M_T = 1,333(M+sm) - \frac{x}{2} (F_z + s f_z) Q_r.$$

W celu określenia położenia osi obojętnej x zastosujemy konsekwentnie założenie $S_b = 0,75 S_0$ dotyczące osi zbrojenia żebra:

$$(b+s)x \left(h_1 - \frac{x}{2} \right) = 0,75 \left[\frac{b h_1^2}{2} + s t_1 \left(h_1 - \frac{t_1}{2} \right) \right].$$

Oś obojętną określa wtedy wielkość

$$x = h_1 - \frac{1}{2(b+s)} \sqrt{b h_1^2 (b+5s) + s^2 (4h_1^2 + 3t_1^2) - 6s t_1 h_1 (b+s) + 3s t_1^2 b}.$$

W naszym przypadku $s = 9,5b$. Stąd

$$(4.6) \quad x = h_1 - \sqrt{0,68 t_1^2 + 0,93 h_1^2 - 1,36 t_1 h_1}.$$

Można wykazać, że dla interesujących nas M_T/M_0 wartości

$$h_1 = 5 - 1,5 \cdot 0,28 = 4,58 \text{ cm},$$

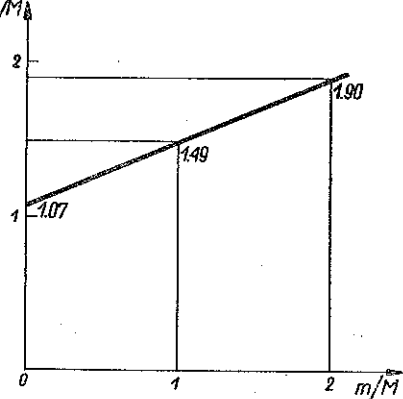
$$t_1 = 3 - 1,5 \cdot 0,28 = 2,58 \text{ cm}$$

wystarczy przyjąć

$$(4.7) \quad x \approx 0,25 (h_1 + t_1).$$

Zgodnie z tym przybliżeniem wzór (4.5), określający wielkość momentu łamiącego w przypadku, gdy w mechanizmie zniszczenia pojawia się uplastycznienie jednocześnie żebra i płyty, przybiera postać

$$(4.8) \quad M_T = 1,167 (M+sm) - 0,167 \left(M \frac{t_1}{h_1} + sm \frac{h_1}{t_1} \right).$$



Rys. 7

Dla wartości $t_1/h_1 = 0,565$, $h_1/t_1 = 1,78$ oraz $s = 0,475$ m otrzymujemy ostatecznie (4.9)

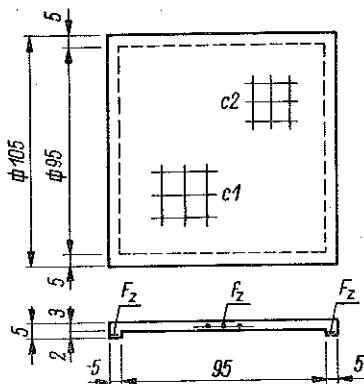
$$M_T \approx 1,073 M + 0,413 m.$$

Zależność ta zilustrowana jest wykresem na rys. 7.

5. Ustrój o rzucie kwadratowym

Zbadano serię modeli ustrojów płytowo-żebrowych o rzucie kwadratowym 105×105 cm, grubości płyty 3 cm i przekrojach żeber krawędziowych $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.

Wymiary modeli oraz rozmieszczenie zbrojenia przedstawia rys. 8. Badaniem objęto 6 rodzajów ustrojów, których płyty uzbrojono siatką typu C1 przy różnym



Rys. 8

stosunku mocy zbrojenia żebra do mocy zbrojenia pasma płytowego, $\varphi = M/ma$ (oznaczenia A1—A6). Wielkość φ zawiera się w granicach 0,5-2,0. Następnie zbadano serię 6 rodzajów ustrojów przy podobnej zmienności wskaźnika plastycznej sztywności żeber, lecz przy zbrojeniu płyty siatką typu C2 (oznaczenia B1-B6).

Na początku konieczne jest przeprowadzenie analizy jakościowej charakteru siatek zniszczenia oraz ustalenie, przy jakiej wartości φ plastyczne wyczerpanie nośności następuje jednocześnie w płycie i w żebrach krawędziowych.

Zgodnie z warunkiem (2.8) dla $\varphi \leq 1$ powinny się utworzyć przeguby plastyczne w żebrach, zaś dla $\varphi \geq 1$ powinna powstawać taka siatka, jaka jest typowa dla wyczerpania nośności płyty bez udziału pracy plastycznej żeber (spełniają one wtedy w myśl założenia schematu sztywno-plastycznego rolę jedynie stałych podparć krawędziowych płyty).

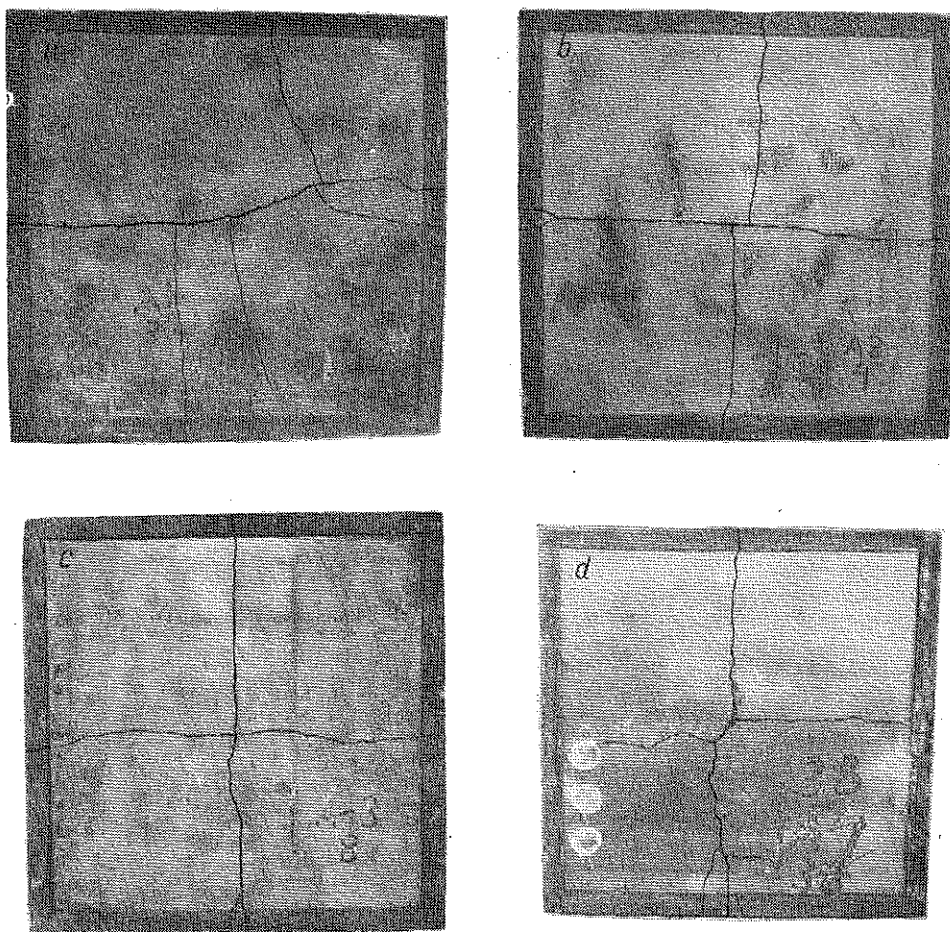
Analiza fotografii rozwarzonych rys w betonie spowodowanych płynięciem zbrojenia (rys. 9 i rys. 10) prowadzi do wniosku, że schematem obliczeniowym ustrojów A1-A4 powinien być schemat *a* lub *b* (są one równoważne), zaś dla modeli A5 i A6 schemat *c* (por. rys. 1). Między tymi dwiema grupami wyraźnie widać jakościową zmianę mechanizmu zniszczenia. Dla pierwszej grupy $\varphi \leq 0,98$, dla drugiej $\varphi \geq 1,1$.

Podobnie w przypadku modeli B (rys. 11 i 12) widać, że ustroje B1, B2 i częściowo B3 i B4 ulegają zniszczeniu według schematu *a* lub *b*, natomiast w ustrojach B5 i B6

następuje zniszczenie według schematu *c* (ewentualnie *d*). Dla pierwszej grupy (*B1* i *B2*) $\varphi \leq 1,03$, dla drugiej $\varphi \geq 1,62$.

Tak więc pod względem jakościowym teoria nośności granicznej ustrojów płytowo-żebrowych znajduje dobre potwierdzenie doświadczalne.

Przejdźmy teraz do analizy ilościowej wyżej opisanych modeli.



Rys. 9

Dla przykładu przytoczone będą obliczenia wskaźników sztywności żeber i obciążeń łamiących dla układów *A1*, *B3* i *B6*.

Układ *A1*. W tym przypadku mamy:

$$M = 30,2 \text{ kGm}, \quad m = 69 \text{ kGm/m}, \quad \varphi = \frac{30,2}{69 \cdot 0,95} = 0,46,$$

$$M_T = 1,073 \cdot 30,2 + 0,413 \cdot 69 = 60,8 \text{ kGm}.$$

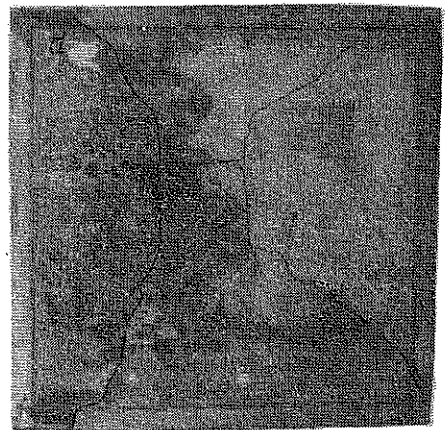
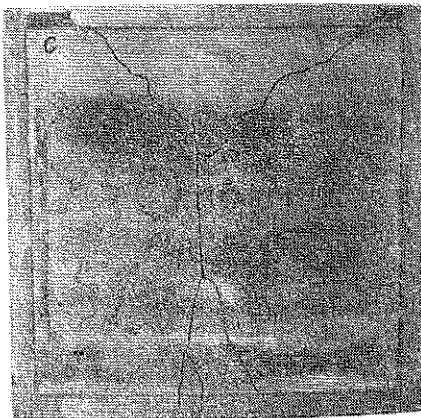
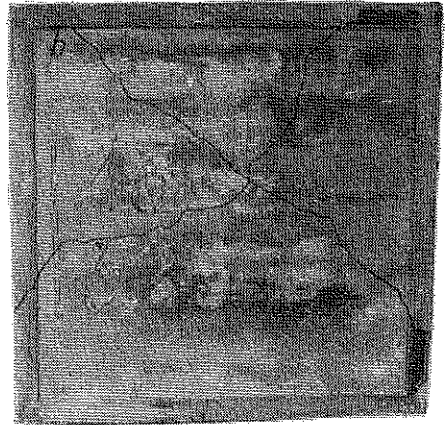
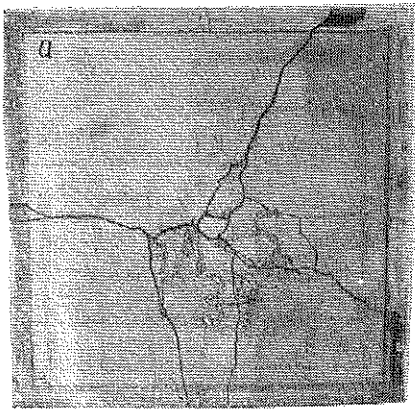
Ponieważ mechanizm zniszczenia jest zgodny ze schematem *a*, to mamy

$$q \frac{l_1 l_2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 M_T \frac{4}{l_1},$$

a stąd

$$(5.1) \quad q = \frac{16 M_T}{l_1^2 l_2}.$$

Identyczny wzór otrzymuje się z analizy schematu *b*.



Rys. 10

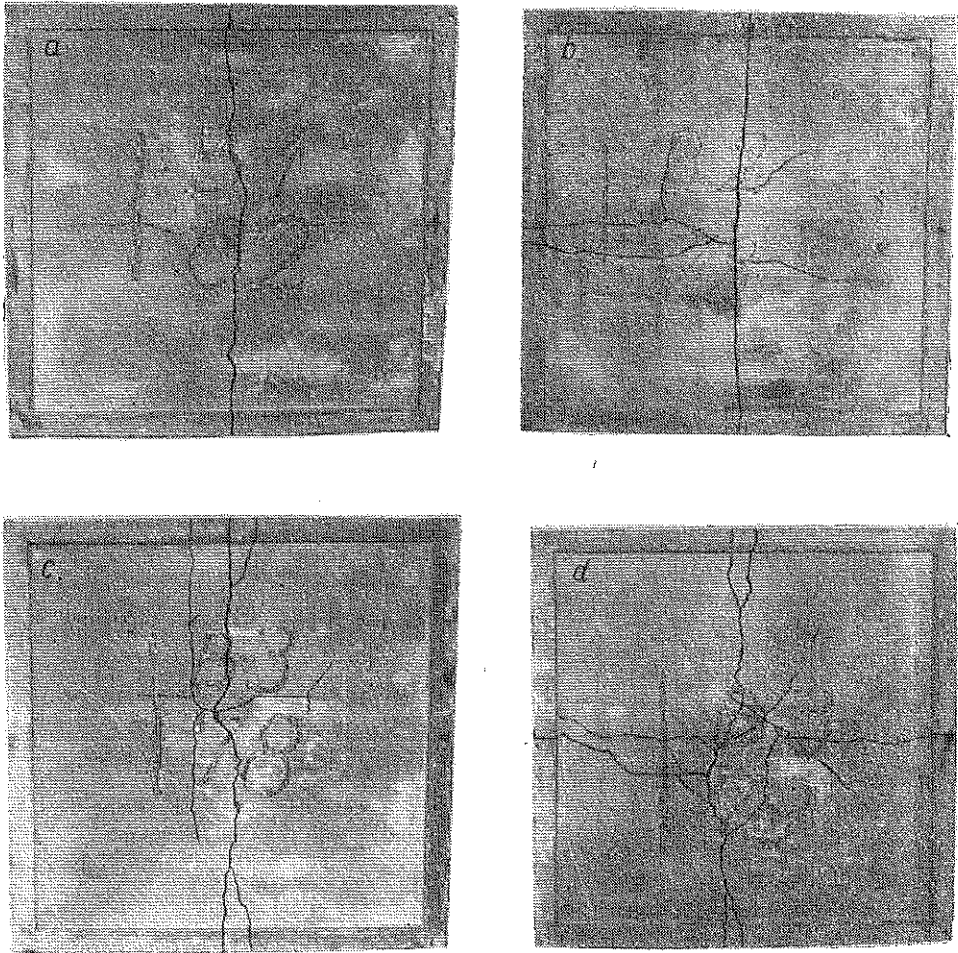
Ze wzoru (5.1) wynika obciążenie $q = 927 \text{ kG/m}^2$, a po potrąceniu ciężaru własnego płyty $p = q - g = 927 - 57 = 870 \text{ kG/m}^2$.

Układ B3. Dla tego przypadku znajdujemy:

$$M = 112 \text{ kGm}, \quad m = 73 \text{ kGm/m}, \quad \varphi = 1,62.$$

Cztery modele spośród modeli badanych osiągnęły zniszczenie zgodnie ze schematem *a*, więc $M_T = 150,2 \text{ kGm}$, $q = 2287 \text{ kG/m}^2$. Po odliczeniu ciężaru własnego płyty obciążenie łamiące wynosi

$$p = 2287 - 57 = 2230 \text{ kG/m}^2.$$



Rys. 11

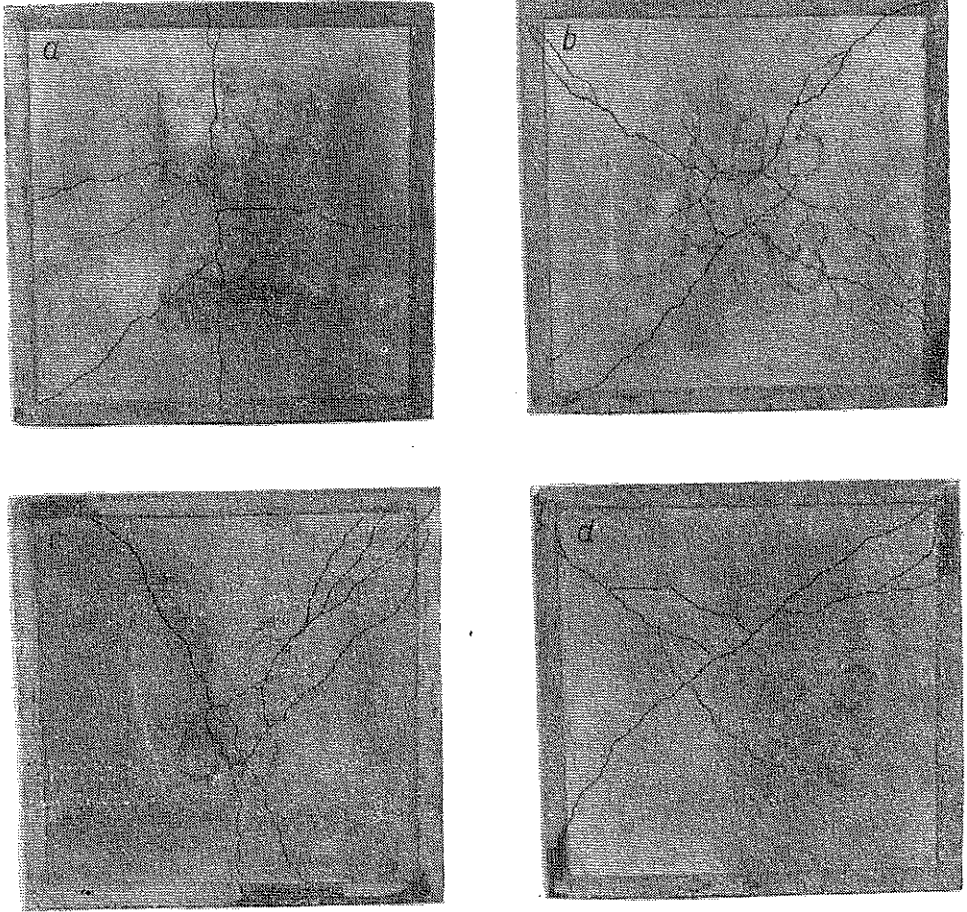
Dwa modele zostały zniszczone według schematu *c*. W tym przypadku ma zastosowanie wzór (2.3), na podstawie którego znajdziemy $q = 1757 \text{ kG/m}^2$, $p = 1700 \text{ kG/m}^2$.

Obciążenie łamiące jest tu funkcją jedynie parametrów płyty. Żebra nie zostały zniszczone.

Układ B6. W tym przypadku

$$M = 146 \text{ kGm}, \quad m = 73 \text{ kGm/m}, \quad \varphi = 2,11.$$

Dwie płyty uległy zniszczeniu według schematu *c*. Obciążenie łamiące było takie, jak w przypadku poprzednim, tzn. $p = 1700 \text{ kG/m}^2$. Schemat zniszczenia płyty przedstawionej na rys. 12c, wyraźnie wskazuje na uformowanie się załamów w kształ-



Rys. 12

cie litery *Y*, co odpowiada mechanizmowi *d*. Zgodnie ze wzorem (2.4) obciążenie łamiące osiąga wartość $q = 2530 \text{ kG/m}^2$. Ostatecznie $p = 2530 - 57 = 2473 \text{ kG/m}^2$.

Wszystkie wyniki dla ustrojów o rzucie kwadratowym zestawiono w tablicy 3.

Z tablicy tej wynika, że istnieje tendencja osiągania mniejszej wartości obciążenia łamiącego przez ustroje płytowo-żebrowe, niżby to wynikało z obliczeń opartych na podejściu kinematycznym.

Tablica 3. Zestawienie wyników dla ustroju kwadratowego

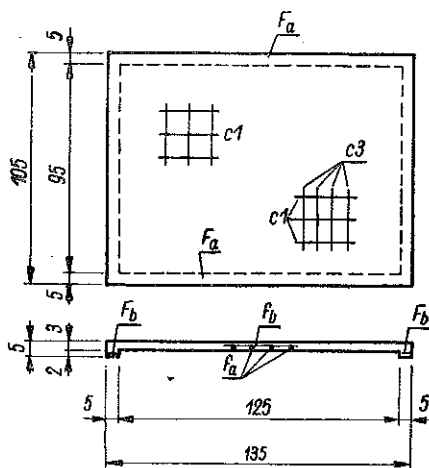
Oznaczenie modelu	Momenty jedn.		$\varphi = \frac{M}{ma}$	Schemat zniszczenia	Obciążenie łamiące bez cięż. wł. (kG/m ²)			
	żebro płyta $M(kGm)m$	$\frac{kGm}{m}$			obliczone	z dośw.	średnia z dośw.	różnica %
A-1	30,2	69	0,46	a lub b	870	760 775 750	762	-12,4
A-2	43,5	69	0,66	a lub b	1083	850 825 820	832	-23,2
A-3	56,7	69	0,86	a lub b	1293	850 975 750	860	-33,5
A-4	64,0	69	0,98	a lub b	1423	— — 980	980	-31,0
A-5	71,2	69	1,1	a lub b	1533	900 1080	1080	-29,5
				c	1600	1280		-32,5
A-6	112,0	69	1,7	c	1600	1020 1100 960	1030	-35,5
B-1	56,7	73	0,82	a lub b	1330	1580 1280 1470	1443	8,5
B-2	71,2	73	1,03	c	1700	2020 2200 1980	2066	21,5
B-3	112,0	73	1,62	a lub b	2230	2350 2350 2450 2620	2440	9,4
				c	1700	1700		1700
B-4	103,5	73	1,5	a lub b	2093	1980 1780 2330	2030	-3,0
B-5	125,0	73	1,8	c	nie obl. wskutek wadliwego uzbrojenia	2250 2380 2300	2310	—
B-6	146,0	73	2,11	c	1700	1780 1850	1815	6,8
				d	2473	2450		2450

Jak wiadomo, podejście, którego istotą jest przyjęcie twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym jako kryterium wyboru odpowiedniego mechanizmu zniszczenia, daje górną granicę obciążenia łamiącego. Jest to zatem wielkość, od której rzeczywiste obciążenie łamiące powinno być mniejsze.

6. Ustrój o rzucie prostokątnym

Ze względu na zbrojenie płyty poddano badaniu dwie serie ustrojów. Modele *D* posiadały płytę plastycznie izotropową, zbrojoną jak w ustrojach kwadratowych *A*, tzn. siatką typu *C1*. Modele *E* posiadały płytę zbrojoną wzdłuż krótszego boku zespołem prętów typu *C3*, zaś w kierunku dłuższego boku armaturą typu *C1*. W wyniku tego otrzymano model plastycznie ortotropowej struktury płyty o wskaźniku ortotropii $\kappa = m_v/m_u = 73/119 = 0,614$.

Wymiary modeli pokazano na rys. 13.

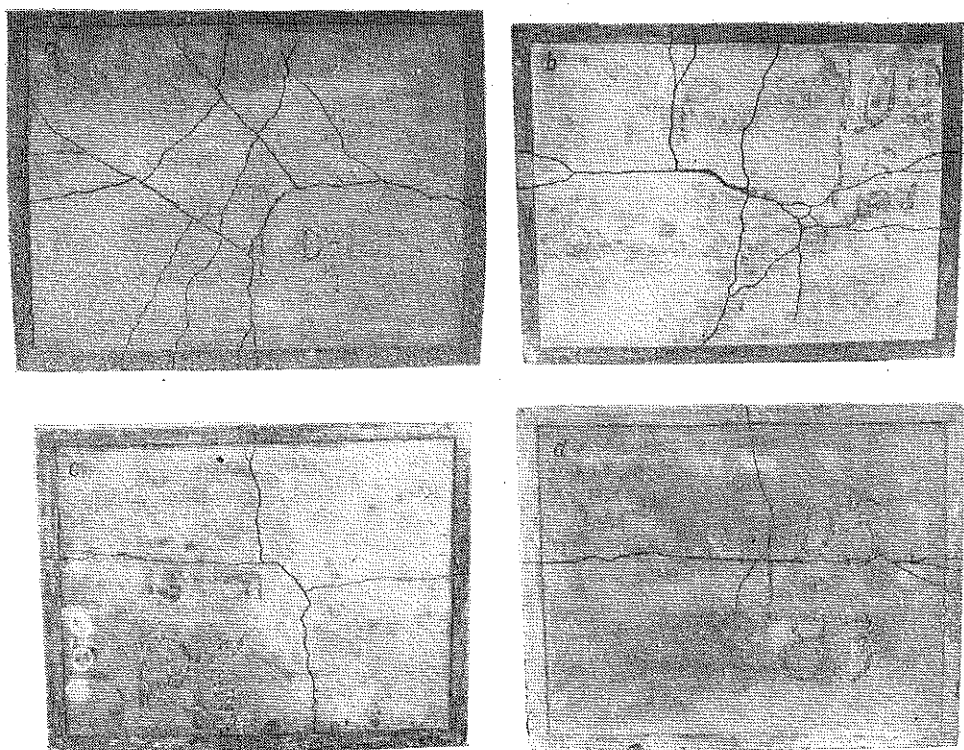


Rys. 13

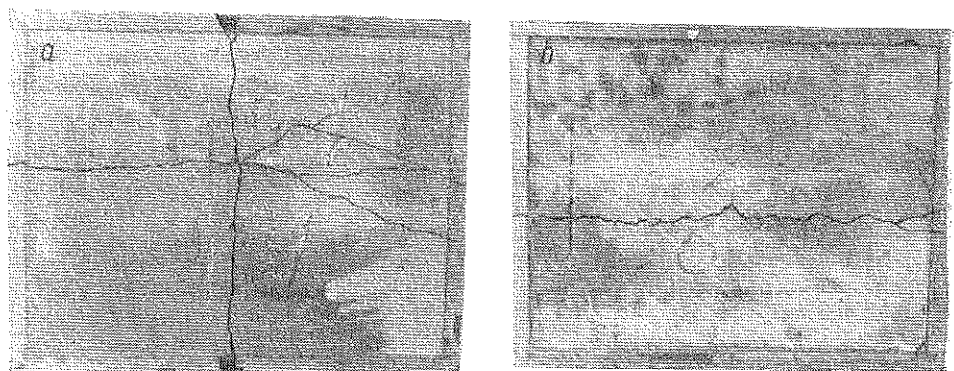
Stosunek momentów granicznych sąsiednich żeber oznaczono przez $\omega = M_a/M_b$, stosunek boków wynosi $\beta = 1,0/1,3 = 0,77$. Wskaźnik sztywności plastycznej żeber krawędziowych $\varphi = M_b/m_a a$.

Jak już stwierdzono w związku z rys. 3 możliwe są trzy mechanizmy zniszczenia: *a*, *b* i *c*. Warto jeszcze dodać, że schemat czwarty, stanowiący sumę załomów *b* i *c* jest równoważny (przy parametrach występujących w badanych modelach) schematowi *c*. Tak więc przy zniszczeniu ustroju prostokątnego przez utworzenie się przegubów plastycznych w żebrach dłuższych należy dla teoretycznej oceny nośności stosować wzór (2.10), natomiast przy utworzeniu się przegubów w żebrach krótszych lub w obu parach żeber wzór (2.11). Fotografie ciekawszych siatek załomów pokazano na rys. 14a-14d i 15a-15b.

Dla przykładu obliczono wielkości charakteryzujące oraz obciążenia graniczne dla układów *D3* i *E1*.



Rys. 14



Rys. 15

Układ D3. W tym przypadku mamy

$$M_a = 112 \text{ kGm}, \quad M_b = \frac{56,7 + 71,2}{2} = 63,95 \text{ kGm}, \quad \beta = 0,77,$$

$$m_a = m_b = 69 \text{ kGm/m}.$$

Wskaźnik ortotropii $\kappa = 1$. Stosunek modułów plastycznych żeber $\omega = 1,75$.
Wskaźnik sztywności żeber

$$\varphi = \frac{63,95}{69 \cdot 1,30} = 0,713.$$

Moment graniczny krótszego żebra z uwzględnieniem współpracy płyty o długości $s_1 = 0,625$ m wynosi, zgodnie ze wzorem (4.8)

$$M_T = 1,167 (M_b + s_1 m_a) - 0,167 \left(M_b \frac{t_1}{h_1} + s_1 m_a \frac{h_1}{t_1} \right) = 106,2 \text{ kGm}.$$

Ze wzoru odnoszącego się do schematu zniszczenia c (por. rys. 15) analogicznego do wzoru (5.1) otrzymujemy

$$q = \frac{16M_T}{b^2(a+0,05)} = 1257 \text{ kG/m}^2.$$

Po odjęciu ciężaru własnego płyty obciążenie łamiące wynosi

$$p = 1257 - 57 = 1200 \text{ kG/m}^2.$$

Układ $E1$. Dla tego układu mamy:

$$M_a = 112 \text{ kGm}, \quad M_b = 43,5 \text{ kGm}, \quad m_a = 119 \text{ kGm/m}, \quad m_b = 73 \text{ kGm/m}.$$

Wskaźnik ortotropii $\kappa = 0,614$ oraz $\beta = 0,77$, $\omega = 2,58$, $\varphi = 0,28$.

Z rys. 15a widać, że siatka załomów ma kształt najbardziej zbliżony do schematu b . W tym przypadku moduł plastyczny przekroju półteowego można obliczyć ze wzoru (4.9):

$$M_T = 1,073 M_a + 0,413 m_b = 150,2 \text{ kGm}.$$

Wyrażenie na obciążenie graniczne przyjmuje postać

$$q = \frac{16M_T}{a^2(b+0,05)} = 1350 \text{ kG/m}^2.$$

Po uwzględnieniu ciężaru płyty znajdziemy

$$p = 1350 - 57 = 1293 \text{ kG/m}^2.$$

Należy zaznaczyć, że obliczenie obciążenia granicznego przy wykorzystaniu schematu d (c) doprowadza do wielkości $p = 1258 \text{ kG/m}^2$. Odbiega ono nieznacznie od wielkości wyżej obliczonej. Wyniki obliczeń dla wszystkich modeli prostokątnych zestawiono w tabelicy 4.

Warto dodać, że w pracy [1] podano przytoczone w (2.12) i (2.13) takie wartości wskaźnika sztywności żeber φ i stosunku momentów żeber ω , przy których otrzymujemy optymalną nośność prostokątnego ustroju płytowo-żebrowego².

² Wpływ «półteowości» żeber na te wartości może być przy podejściu przybliżonym pominięty, gdyż wynika to z samego charakteru np. współczynnika ω . Jest on stosunkiem dwu zmieniających się podobnie modułów plastycznych żeber przy uwzględnieniu «półteowości».

Oznacza to, że w plastycznym wyczerpaniu nośności układu biorą udział jednocześnie obie pary żeber oraz oba kierunki załomów w płycie. Współczynnik pewności dla płyty, żeber krótszych i dłuższych jest taki sam.

Tablica 4. Zestawienie wyników dla ustroju prostokątnego

Oznaczenie modelu	Momenty jednostkowe				$\kappa = \frac{m_b}{m_a}$	$\omega = \frac{M_a}{M_b}$	$\varphi = \frac{M_b}{m_a a}$	Obciążenie łamiące bez cięż. wł. (kG/m ²)				
	dla rozpiętości $a = 1,30$ m		dla rozpiętości $b = 1,0$ m					dla schematu	obliczone	z doświadczenia	średnio z doświadczenia	różnica %
	źebro M_a (kGm)	płyta m_a ($\frac{\text{kGcm}}{\text{m}}$)	źebro M_b (kGm)	płyta m_b ($\frac{\text{kGcm}}{\text{m}}$)								
D-1	56,7	69	30,2	69	1	1,88	0,34	c	770	750 710 650	703	-8,7
D-2	91,6	69	56,7	69	1	1,62	0,63	c	1100	920 680 850 750	800	-27,4
D-3	112	69	64	69	1	1,75	0,71	c	1200	1075 1250	1163	-3,1
E-1	112	119	43,5	73	0,61	2,58	0,28	c/b	1258 1293	1550 1130	1340	3,6
E-2	124,7	119	64	73	0,61	1,95	0,42	c/b	1520 1420	1160 1180 1540	1293	-9

Otrzymane wartości obciążenia granicznego, obliczone ze schematu zarówno b jak i c , powinny być jednakowe.

Dla ustroju typu D otrzymujemy

$$\gamma = 1,125, \quad \varphi = 0,69, \quad \omega = 1,7.$$

Jak widać w tablicy 4 ustroje $D3$ ($\kappa = 1$, $\varphi = 0,71$, $\omega = 1,75$) spełniają dość dokładnie te warunki, co było zresztą zamierzone przy projektowaniu tych modeli. Z rys. 14d widać, że utworzenie się rys w obu parach żeber krawędziowych wskazuje na ich równą «wytrzymałość plastyczną».

Podobnie jest w przypadku ustrojów E .

Ogólnie rozbieżności są niewielkie i wskazują na dobrą zgodność wyników doświadczalnych z teorią. Różnice te są ujemne; wyjaśnia to uwaga umieszczona na końcu p. 5 przy omawianiu interpretacji wyników doświadczeń dla ustrojów kwadratowych.

7. Uwagi końcowe

Opracowane wyżej badania dowodzą dość dobrej zgodności teorii nośności granicznej ustrojów płytowo-żebrowych z wynikami doświadczeń.

Zbadane w p. 4.2 zagadnienie współpracy płyty z żebrem w stadium zginania plastycznego spełnia rolę rozwiązania przybliżonego, właściwego przy opracowaniach technicznych. Dokładna analiza tego problemu należącego do teorii żelbetu wybiega poza ramy niniejszej pracy.

Uzasadnienie doświadczalne teorii nośności granicznej ustrojów płytowo-żebrowych, poparte ponadto badaniami na modelach w skali technicznej (których wykonanie wydaje się pożyteczne) pozwoli wprowadzić tę metodę do praktyki inżynierskiej.

Należy dodać, że oparcie się na analizie stanu granicznego konstrukcji usuwa dotychczasową niekonsekwencję postępowania, polegającą na określaniu sił wewnętrznych przy traktowaniu ustroju jako sprężystego (oraz izotropowego i jednorodnego) a wymiarowaniu przekrojów na podstawie tzw. metody odkształceń plastycznych i wprowadzaniu w fazie «dobierania przekrojów» faktycznej ortotropii i warstwowości.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. SAWCZUK, M. KWIECIŃSKI, *Nośność graniczna ustrojów płytowo żebrowych*, Arch. Inżyn. Łódow., 3, 3 (1957).
- [2] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Basel 1955.
- [3] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955).
- [4] M. KWIECIŃSKI, *Rozwiązanie jednokierunkowo ciągłej płyty ortotropowej w oparciu o teorię nośności granicznej*, Zesz. Nauk. Pol. Warsz., nr. 23, Bud. nr. 6, 1956.
- [5] A. SAWCZUK, *O możliwościach praktycznego korzystania z rozwiązań teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Inżyn. Łódow., 1-2, 1956.
- [6] M. KWIECIŃSKI, *O zagadnieniach teorii nośności granicznej płyt ortotropowych*, Inż. i Budown., 6, 1956.
- [7] Ц. М. ФЕЙНБЕРГ, *Принцип предельной напряженности*, Прикл. Мат. Мех., 12 (1948).
- [8] D.C. DRUCKER, W. PRAGER, H.J. GREENBERG, *Extendend Limit Design Theorems for Continuous Media*, Quart. Appl. Math. 4, 9 (1952).
- [9] R.H. WOOD, *Studies in Composite Construction*, Part II, Building Research Studies, 22, London 1955.

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРИИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ УЖЕСТОЧЕННЫХ РЕБРАМИ

Автор задается целью проверить экспериментальным путем результаты теоретического анализа разрушения систем ужесточенных ребрами, являющихся в строительстве часто применяемой конструкцией работающей на изгиб.

Во вступлении характеризуются общие положения теории несущей способности, а затем кратко приводится анализ несущей способности жесточенных ребрами пластинчатых систем. Рассматривается подробно система с квадратными и прямоугольными пластинками снабженная по краям ребрами.

Учитывается ортотропия пластинки и пластическая неоднородность системы, свойства которой изменяются скачкообразно в точке стыка пластинки с ребром.

Далее, описывается принцип испытаний, конструкция модели и прибор для испытаний, дающий возможность осуществить, благодаря применению пневматического способа нагрузки системы, равномерную непрерывную нагрузку. Это достигается путем приложения к поверхности испытываемой модели — упругого непроницаемого сосуда, в котором с помощью компрессора вызывается сверхдавление.

Затем разработано теоретически приближенное определение значения предельного момента ребра, которое сотрудничает с определенной зоной пластинки, соединенной с ней монолитически. Принимается заданные значения пластических модулей ребра и пластинки изгибаемых отдельно.

После экспериментального определения этих модулей даются результаты испытаний двух серий систем: квадратной и прямоугольной.

В рамках каждой серии находятся с различным показателем пластической жесткости ребер. Величины разрушающих нагрузок, вычисленные теоретически и полученные экспериментальным путем, а так же и их разницы даются на таблицах.

Окончательные предложения представлены в форме заключительных примечаний.

Summary

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE THEORY OF LIMIT LOAD OF RIBBED PLATE STRUCTURES

The object of the present work is to verify by experiment the results of the theoretical analysis of the state of destruction of ribbed plate structures which constitute bent elements of common usage in building.

First, the general assumptions of the theory of limit load are recalled, followed by a brief account of the principles of limit analysis of ribbed plate structures. Square and rectangular plates with two pairs of edge ribs are considered in detail. The orthotropy of the plate is taken into consideration as well as the plastic non-homogeneity of the structure, of which the properties vary in a jump-like manner at the joints between the plate and the ribs.

Next, the paper contains a description of the principles of the investigation, the construction of the models and a device enabling the realization of a uniform

continuous load by means of compressed air. This is made possible by using a tightly fitting chamber in which air was compressed by means of a compressor.

Next, the limit moment of the rib co-working with a definite region of the plate and constituting with it a monolithic structure is determined theoretically. The values of the plastic moduli of the rib and the plate taken separately are assumed to be known.

After the experimental determination of these moduli two sets of structures, square and rectangular, were tested. Each set contained models with various indices of plastic rigidity of ribs. The values of the ultimate loads computed theoretically and obtained experimentally and the discrepancies are collated in tables.

The paper ends with final conclusions.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1960 r.
