

ALEKSANDER KORNECKI

○ DUŻYCH UGIĘCIACH CIENKOŚCIENNEGO PASMA SPRĘŻYSTEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXXVI

TOM IX • ZESZYT I • ROK 1961

SPIS TREŚCI

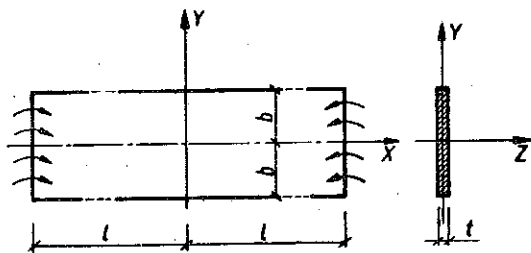
1. Uwagi wstępne	105
2. Wyprowadzenie podstawowych równań różniczkowych	106
3. Wyprowadzenie równań różniczkowych (2.14) inną metodą	109
4. Metody rozwiązywania równań (2.14) lub (2.17)	113

1. Uwagi wstępne

Rozpatrzmy długi pręt sprężysty o przekroju posiadającym kształt wąskiego prostokąta (rys. 1). Jeśli obciążymy go momentami na krawędziach $x = \pm l$, wówczas oś jego przyjmie postać łuku kołowego o promieniu R , jednocześnie zaś przekrój prostokątny ulegnie wygięciu poprzecznemu w przeciwnym kierunku, tak że powierzchnia pasma przyjmie kształt powierzchni siodłowej.

W dalszym ciągu krzywiznę osi pręta $1/R$ będziemy nazywali krótko krzywizną pręta.

W miarę wzrostu krzywizny pręta zakrzywienie poprzeczne zanika i w końcu powierzchnia pręta przyjmuje kształt powierzchni walcowej, przy czym jedynie w pobliżu krawędzi $y = \pm b$ występują nieznaczące odchylenia. Przekrój poprzeczny,



Rys. 1

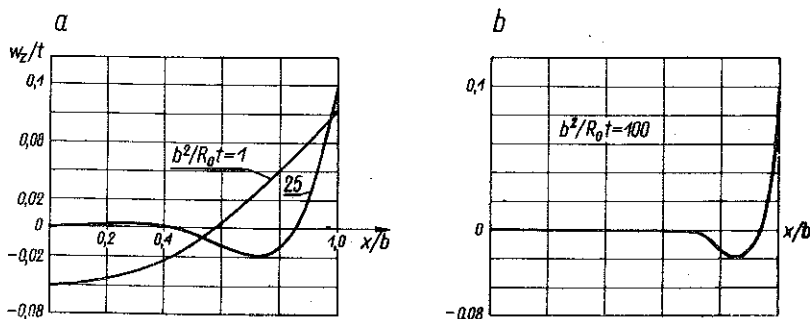
który początkowo miał postać łuku kołowego o promieniu R/ν (gdzie ν oznacza współczynnik POISSONA), zwróconego wypukłością w kierunku przeciwnym do kierunku wypukłości walca (rys. 2a), wyprostowuje się przyjmując postać przedstawioną na rys. 2b¹.

Powyższe zjawisko zanikania ugięcia poprzecznego w miarę wzrostu krzywizny pręta objaśnił w sposób ścisły H. LAMB, [1]. Rozważania LAMBA przytacza również A. E. LOVE, [2], s. 553. W ostatnich czasach w związku z potrzebami lotnictwa podjęto powyższe zagadnienie w szeregu prac.

D. G. ASHWELL, [3], rozwija wywody LAMBA ujmując je w nieco inny sposób. MURRAY i NILES, [5], W. FLUGGE, [6], i Y. C. FUNG, [7], rozszerzają problem na pręty o przekroju innym niż prostokątny, a D. G. ASHWELL, [4], oraz R. I. BISPLINGHOFF, [9], stwierdzają zgodność rozwiązania H. LAMBA z doświadczeniem.

¹ Rysunki 2a i 2b zaczerpnięto z pracy [3], s. 712.

We wszystkich wymienionych pracach rozpatrzono ugięcie poprzeczne przy założeniu, że krzywizna pręta jest stała, czyli że pręt podlega czystemu zginaniu. Jedynie Y. C. FUNG i W. H. WITRICK, [8], zwrócili uwagę na możliwość zastosowania rozwiązania LAMBA również w przypadku zmienności promienia krzywizny pręta,



Rys. 2

ale tylko przy pewnych ograniczeniach, o których mowa będzie niżej. Z drugiej strony A. KOGAN, [10], stwierdza, że przy zmiennej krzywiznie pręta doświadczenie wykazuje często znaczne odchylenia od rozwiązania LAMBA.

W pracy niniejszej podano metody wyznaczania ugięć poprzecznych pręta o przekroju prostokątnym, którego krzywizna zmienia się w sposób dowolny w kierunku długości pręta.

2. Wyprowadzenie podstawowych równań różniczkowych

Jako punkt wyjścia przyjmijmy równania dla dużych ugięć cienkich płyt sprężystych, znane w literaturze pod nazwą równań KÁRMÁNA. Załóżmy, że obciążenie normalne q_n , działające na jednostkę powierzchni płyty, zależy wyłącznie od zmiennej x , $q_n = q_n(x)$; wówczas w przyjętym układzie współrzędnych (rys. 1) równania te można wypisać w sposób następujący:

$$(2.1) \quad D\nabla^4 w = q_n(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$(2.2) \quad \nabla^4 F = Et \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

W równaniach powyższych przyjęto następujące oznaczenia: $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ oznacza sztywność giętą płyty, E moduł sprężystości, t grubość płyty, $w(x, y)$ ugięcie powierzchni środkowej płyty, $F(x, y)$ funkcję naprężeń oraz

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Napięcia działające w powierzchni środkowej płyty wyrażają się za pomocą funkcji naprężeń:

$$(2.3) \quad T_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Zadaniem naszym jest wyznaczenie powierzchni ugięcia $w(x, y)$, spełniającej równania różniczkowe (2.1) i (2.2) przy danym obciążeniu $q_n(x)$, przy czym — ponieważ krawędzie długie pasma $y = \pm b$ są wolne od obciążeń — poszukiwana funkcja powinna spełniać następujące warunki brzegowe: przy $y = \pm b$

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Rozwiązanie uzyskamy w dwóch etapach. W pierwszym przyjmujemy, że płyta pod wpływem obciążenia zewnętrznego $q_n(x)$ odkształca się przechodząc w powierzchnię walcową, przy czym nie pojawiają się oczywiście żadne napięcia błonowe; w drugim etapie następuje nieznaczne² odchylenie ugiętej powierzchni od powierzchni walcowej, tak aby spełnić warunki brzegowe (2.4). Tym odchyleniom towarzyszą nieznaczne napięcia błonowe wyrażone za pomocą funkcji naprężeń $F(x, y)$.

Tłumacząc powyższe na język matematyczny przyjmujemy, że

$$(2.5) \quad w(x, y) = w_1(x) + w_2(x, y),$$

przy czym

$$(2.6) \quad \frac{w_2}{t} \ll 1$$

oraz odpowiednio

$$(2.7) \quad F(x, y) = F_1(x) + F_2(x, y) = F_2(x, y).$$

Podstawiając (2.5) i (2.7) do (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$(2.8) \quad D \frac{d^4 w_1}{dx^4} = q_n(x),$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} D \nabla^4 w_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}, \\ \nabla^4 F = Et \left[\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right]. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę założenie (2.6), zgodnie z którym powierzchnia ugięcia odchyła się nieznacznie od powierzchni walcowej, oraz uwzględniając to, że towarzyszące owym odchyleniom naprężenia błonowe określone funkcją F są również nieznaczne,

² Niżej uzasadnimy dopuszczalność założenia «nieznacznych» odchyleni powierzchni ugięcia od powierzchni walcowej.

możemy pominąć wyrazy podkreślone jako małe wyższego rzędu, po czym otrzymujemy zamiast nieliniowych równań (2.9) następujący układ równań liniowych:

$$(2.10) \quad \begin{cases} DV^4 w_2 = -\frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \nabla^4 F = \frac{Et}{R(x)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}. \end{cases}$$

W równaniach (2.10) oznaczono główną część krzywizny pręta przez $1/R$,

$$(2.11) \quad \frac{1}{R} = -\frac{d^2 w_1}{dx^2}.$$

Zgodnie z założeniem (2.5) oraz z zależnościami (2.4) i (2.11) funkcje w_2 oraz F powinny spełniać następujące warunki brzegowe: przy $y = \pm b$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} &= \frac{\nu}{R(x)}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Dla uproszczenia dalszych wywodów wprowadzimy bezwymiarowe funkcje oraz zmienne niezależne:

$$(2.13) \quad \alpha = \frac{x}{b}, \quad \beta = \frac{y}{b}, \quad \zeta(\alpha, \beta) = \frac{w_2(x, y)}{t}, \quad \Phi(\alpha, \beta) = \frac{F(x, y)}{Et b^2}.$$

Podstawiając nowe zmienne do równań (2.10) otrzymamy

$$(2.14) \quad \begin{cases} \nabla^4 \zeta + \frac{b^4}{Rt^3} 12(1-\nu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = 0, \\ \nabla^4 \Phi - \frac{t}{R} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.15) \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}.$$

Korzystając z symetrii powyższych równań pomnożmy drugie z nich przez jednostkę urojoną i , po czym odejmiemy je stronami od równania pierwszego. W rezultacie wprowadzając nową funkcję ε zespoloną zmiennych α i β według wzoru

$$(2.16) \quad \varepsilon(\alpha, \beta) = V_r(\alpha, \beta) + i V_i(\alpha, \beta) = \zeta - i \frac{b^2}{t^2} \sqrt{12(1-\nu^2)} \Phi$$

otrzymamy zamiast układu równań (2.14) równoważne im jedno równanie różniczkowe

$$(2.17) \quad \nabla^4 V + i 2k^2 \frac{R_0}{R(\alpha)} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0,$$

gdzie

$$(2.18) \quad k^2 = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{b^2}{R_0 t}.$$

We wzorze (2.16) V_r i V_i oznaczają odpowiednio części rzeczywistą i urojoną poszukiwanej funkcji $V(\alpha, \beta)$, zaś R_0 pewną stałą wartość promienia krzywizny pręta $R_0 = R(\alpha_0)$.

Warunki brzegowe (2.12) w nowych oznaczeniach przyjmują postać: przy $\beta = \pm 1$

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial \alpha^2} = \nu \frac{k^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{R_0}{R(\alpha)}, \\ \frac{\partial^3 V_r}{\partial \beta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 V_r}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 0, \\ \frac{\partial^2 V_i}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_i}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \end{array} \right.$$

Czytelnik znający tzw. techniczną teorię powłok sprężystych stwierdzi, że podstawowe równanie różniczkowe (2.17) jest w istocie równaniem małych ugięć powłoki walcowej o zmiennym promieniu krzywizny.

Zgodność ta nie jest bynajmniej przypadkowa. Zanim przejdziemy do omówienia metod rozwiązania równania (2.17) wyprowadzimy je zupełnie inną drogą, uwypuklając związek między dużymi ugięciami płyt i małymi ugięciami powłok oraz uzasadniając w znacznej mierze słuszność założenia (2.6).

3. Wyprowadzenie równań różniczkowych (2.14) inną metodą

Załóżmy, że długą, giętą, ale nierozciągliwą płytę o stałym przekroju prostokątnym zgięto nadając jej kształt walca o danym zmiennym promieniu krzywizny $R = R(\alpha)$, przy czym linie równoległe do boków krótkich stały się tworzącymi walca. Znajdźmy obciążenia brzegowe i powierzchniowe niezbędne dla utrzymania płyty w tej postaci. W tym celu napiszmy równania równowagi elementu powłoki walcowej oraz zależności między składowymi stanu napięcia i odkształcenia.

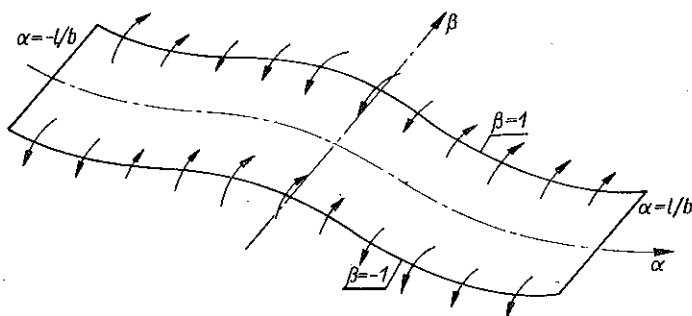
W układzie krzywoliniowych współrzędnych bezwymiarowych $\alpha = x/b$, $\beta = y/\beta$ (rys. 3), równania równowagi mają następującą postać:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} - \frac{b}{R} N_x + b q_x = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_y}{\partial \beta} + b q_y = 0, \\ \frac{\partial N_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_y}{\partial \beta} - \frac{b}{R} T_x + b q_n = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} - b N_x = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_y}{\partial \beta} - b N_y = 0. \end{array} \right.$$

Między napięciami i momentami z jednej strony, a odkształceniami z drugiej istnieją następujące związki:

$$(3.2) \quad \begin{cases} T_x = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0), & M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \\ T_y = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0), & M_y = D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \\ S = \frac{Et}{2(1+\nu)} \omega^0, & H = D(1-\nu)\tau. \end{cases}$$

W wyrażeniach powyższych T_m , N_m i M_m oznaczają odpowiednio napięcia normalne, napięcia poprzeczne i momenty gnące, działające na jednostkę długości przekroju $\alpha = \text{const}$ lub $\beta = \text{const}$ w zależności od wskaźnika $m = x$ lub $m = y$,



Rys. 3

S i H oznaczają odpowiednio siłę tnącą i moment skręcający, działające na jednostkę długości przekroju, q_m obciążenia na jednostkę powierzchni walca w kierunku linii α , β lub normalnym w zależności od wskaźnika x , y lub n .

Pozostałe oznaczenia są zrozumiałe jako powszechnie używane, przy czym wskaźnik 0 u góry przy odkształceniach ε_x^0 , ε_y^0 , ω^0 oznacza, że mowa o odkształceniach warstwy środkowej walca. W przypadku płyty nierozciągliwej ($\varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = \omega^0 = 0$), zgiętej w kształcie walca ($\kappa_x = 1/R$, $\kappa_y = 0$, $\tau = 0$) mamy zgodnie z zależnościami (3.2)

$$(3.3) \quad \begin{cases} T_x = 0, & T_y = 0, & S = 0, \\ M_x = \frac{D}{R(\alpha)}, & M_y = \frac{\nu D}{R(\alpha)}, & H = 0, \end{cases}$$

a po podstawieniu do równań równowagi (3.1) otrzymujemy

$$(3.4) \quad \begin{cases} q_x = \frac{1}{R} N_x = \frac{1}{bR} \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} = \frac{D}{bR} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R} \right), \\ q_y = 0, \\ q_n = \frac{1}{b} \frac{\partial N_x}{\partial \alpha} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 M_x}{\partial \alpha^2} = \frac{D}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{1}{R} \right). \end{cases}$$

Stwierdzamy więc, że płytę można utrzymać w postaci walca o danym promieniu krzywizny $R(\alpha)$, jeżeli obciążymy ją zgodnie z równaniami (3.3) i (3.4), mianowicie:

- (a) wzdłuż krawędzi krótkich $\alpha = \pm l/b$ momentami gnącymi $M_x = D/R(\pm l/b)$;
- (b) wzdłuż krawędzi długich $\beta = \pm 1$ momentami gnącymi $M_y = \nu D/R(\alpha)$;
- (c) obciążeniem powierzchniowym, którego składowe określone są wyrażeniami (3.4).

Zauważmy, że wydłużenia zewnętrznych warstw pasma ($z = \pm t/2$) wskutek zginania wynoszą

$$\varepsilon_x = \pm \frac{t}{2} \kappa_x = \pm \frac{t}{2R}$$

i muszą leżeć w granicach odkształceń sprężystych materiału pasma

$$\varepsilon_x \leq \varepsilon_p \ll 1;$$

odkształcenia te są, jak wiadomo, znacznie mniejsze od jedności, a więc stosunek grubości ścianki do promienia krzywizny walca musi być bardzo małym ułamkiem,

$$(3.5) \quad t/R \ll 1.$$

Przypuśćmy, że płytę obciążono zarówno siłami powierzchniowymi według (3.4), jak również momentami brzegowymi M_x wzdłuż krawędzi krótkich (por. wyżej p. a), jednakże krawędzie długie $\beta = \pm 1$ pozostawiono bez jakichkolwiek obciążeń. Oczywiście tak obciążona płyta nie będzie miała kształtu powierzchni walcowej, jednakże założenie, że kształt jej będzie tylko nieznacznie odbiegał od kształtu walca, będzie naturalne. Zadaniem naszym jest wyznaczenie tego odchylenia od postaci walcowej przy założeniu, że jest ono nieznaczne.

Powyższe zagadnienie można również sformułować inaczej. Przypuśćmy, że płytę obciążono ściśle według wymagań sformułowanych wyżej w punktach a, b i c otrzymując w ten sposób walec. Następnie powłokę walcową o danym promieniu krzywizny obciążono wzdłuż krawędzi zakrzywionych $\beta = \pm 1$ momentami brzegowymi $M_y = -\nu D/R$ (rys. 3). Należy wyznaczyć ugięcia powierzchni środkowej walca pod wpływem danego obciążenia brzegowego przy założeniu, że są one nieznaczne.

Musimy przy tym oczywiście odrzucić założenie nierozciągliwości powłoki, w przeciwnym bowiem przypadku równowaga byłaby niemożliwa.

W rezultacie zagadnienie nieliniowe (badanie dużych ugięć płyty) sprowadzono do stosunkowo prostego problemu z dziedziny liniowej teorii powłok walcowych o zmiennej krzywiznie, obciążonych momentami brzegowymi.

Wobec tego, że dana powłoka jest bardzo długa w kierunku zmiennej α , można traktować ją jako powłokę o małym wzniosie (powłokę płaską) i skorzystać z odpowiednich uproszczeń klasycznej teorii powłok KIRCHHOFFA-LOVE'A.

Tak więc w pierwszym równaniu równowagi (3.1) pomijamy napięcie poprzeczne N_x , w wyniku czego dwa pierwsze równania równowagi przyjmują postać (przy $q_x = q_y = 0$)

$$(3.6) \quad \frac{\partial T_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_y}{\partial \beta} = 0$$

i będą spełnione tożsamościowo, jeśli wprowadzimy funkcję naprężeń:

$$(3.7) \quad \frac{T_x}{Et} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}, \quad \frac{T_y}{Et} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{S}{Et} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Dalej, upraszczając znane związki między odkształceniami i przemieszczeniami

$$(3.8) \quad \begin{cases} \kappa_x = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R} \right) \approx -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \\ \kappa_y = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \\ \tau = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{bR} \frac{\partial u}{\partial \beta} \approx -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{cases}$$

otrzymamy po uwzględnieniu (3.2):

$$(3.9) \quad \begin{cases} M_x = -\frac{D}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \\ M_y = -\frac{D}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right), \\ H = -\frac{D}{b^2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{cases}$$

Eliminując napięcia poprzeczne N_x i N_y z trzech ostatnich równań równowagi (3.1) oraz biorąc pod uwagę równanie (3.7) i uwzględniając, że nie działa żadne obciążenie powierzchniowe, otrzymamy następujący związek

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial \beta^2} - \frac{b^2 Et}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = 0,$$

który po podstawieniu zależności (3.9) i wprowadzeniu bezwymiarowego ugięcia $\zeta = w/t$ da nam pierwsze podstawowe równanie różniczkowe (2.14):

$$\nabla^4 \zeta + \frac{b^4}{Rt^3} 12(1-\nu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = 0.$$

Dla wyznaczenia drugiego związku między funkcjami ζ i Φ skorzystamy z równań nierozdzielności

$$(3.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \kappa_y}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \omega^0}{\partial \beta} - \frac{\partial \varepsilon_y^0}{\partial \alpha} \right) = 0, \\ \frac{\partial \kappa_x}{\partial \beta} - \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\kappa_y}{R} + \frac{1}{b^2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \varepsilon_y^0}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^0}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^0}{\partial \alpha} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Drugie równanie (3.10) jest spełnione tożsamościowo. Pierwsze jest również spełnione tożsamościowo, jeśli pominąć w nim dwa ostatnie składniki z małym mnożnikiem $1/R$ podobnie jak uprościliśmy wyżej pierwsze równanie równowagi (3.1). Trzecie natomiast po przekształceniu go na podstawie wzorów (3.8), (3.2) i (3.7) da ostatecznie poszukiwany związek w postaci drugiego podstawowego równania różniczkowego (2.14):

$$\nabla^4 \Phi - \frac{t}{R(\alpha)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} = 0.$$

Co się tyczy warunków brzegowych, to zgodnie z powyższymi wywodami krawędzie $\beta = \pm 1$ obciążone są momentami brzegowymi $M_y = -\nu D/R$, a więc przy $\beta = \pm 1$ powinno być

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} = \frac{\nu b^3}{tR(\alpha)}, & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \beta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 0, & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Porównując równania (3.11) z (2.12) stwierdzamy całkowitą zgodność wyników obu wywodów.

W rezultacie więc odrzucając małe wyższego rzędu bądź też badając raz płytę nierozciągliwą, a następnie powłokę rozciągliwą, dokonaliśmy linearyzacji nieliniowego zagadnienia dla dużych ugięć długiego pasma, na które działa dowolne obciążenie $q_n(x)$ i którego dwie krawędzie długie $y = \pm b$ są całkowicie swobodne.

4. Metody rozwiązywania równań (2.14) lub (2.17)

A. Przypadek szczególny $R(\alpha) = R_0 = \text{const}$. W tym szczególnym przypadku rozpatrzonym przez LAMBA oraz w szeregu prac cytowanych na wstępie można z łatwością uzyskać rozwiązanie w postaci skończonej. Ponieważ należy spełnić warunki brzegowe wyłącznie wzdłuż krawędzi $\beta = \pm 1$ oraz ponieważ krzywizna nie zależy od zmiennej α , przeto można założyć, że funkcje poszukiwane również nie zależą od α ,

$$(4.1) \quad \zeta = \zeta(\beta), \quad \Phi = \Phi(\beta).$$

Podstawiając (4.1) do (2.14) otrzymujemy

$$(4.2) \quad \frac{d^4 \zeta}{d\beta^4} + \frac{b^4}{R_0 t^3} 12(1-\nu^2) \frac{d^2 \Phi}{d\beta^2} = 0, \quad \frac{d^4 \Phi}{d\beta^4} - \frac{t}{R_0} \frac{d^2 \zeta}{d\beta^2} = 0.$$

Z drugiego równania (4.2) mamy

$$(4.3) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\beta^2} = \frac{t}{R_0} \zeta(\beta) + C_1 + C_2 \beta.$$

Stała C_2 musi zniknąć wobec symetrii ugięć ζ względem zmiennej β . Stałą C_1 wyznaczamy z warunku równowagi:

$$\int_{-1}^1 T_x d\beta = 0.$$

Podstawiając pod znak całki wyrażenie (4.3) przy uwzględnieniu (3.7) otrzymamy

$$2C_1 = -\frac{t}{R} \int_{-1}^1 \zeta d\beta.$$

Jeżeli ugięcie ζ liczyć będziemy od linii przechodzącej przez środek ciężkości krzywej $\zeta(\beta)$ (rys. 2a); to całka powyższa będzie równa zero i ostatecznie otrzymamy na podstawie (4.3)

$$(4.4) \quad \frac{d^2\Phi}{d\beta^2} = \frac{t}{R_0} \zeta(\beta).$$

Po podstawieniu do pierwszego równania (4.2) znajdziemy

$$(4.5) \quad \frac{d^4\zeta}{d\beta^4} + 4k^4\zeta = 0.$$

Z warunków brzegowych (3.11) dwa spełnione są tożsamościowo wobec założeń (4.1), dwa pozostałe zaś przyjmują następującą postać: przy $\beta = \pm 1$

$$(4.6) \quad \frac{d^2\zeta}{d\beta^2} = \nu \frac{k^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad \frac{d^3\zeta}{d\beta^3} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że całką równania (4.5) spełniającą warunki (4.6) jest funkcja (parzysta)

$$(4.7) \quad \zeta = C_1 \operatorname{ch} k\beta \cos k\beta + C_2 \operatorname{sh} k\beta \sin k\beta,$$

gdzie

$$(4.8) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\operatorname{sh} k \cos k - \operatorname{ch} k \sin k}{\operatorname{sh} 2k + \sin 2k}, \\ C_2 = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\operatorname{sh} k \cos k + \operatorname{ch} k \sin k}{\operatorname{sh} 2k + \sin 2k}. \end{cases}$$

Zauważmy, że w danym przypadku, gdy krzywizna jest stała, równania (4.2) są równaniami ścisłymi w ramach teorii KÁRMÁNA dla dużych ugięć płyty. Otrzymujemy je z równań (2.9) bez pominięcia jakichkolwiek składników. Wobec powyższego analiza rozwiązania (4.7) pozwoli zorientować się, o ile założenie (2.6) było słuszne.

Przy małych wartościach parametru k

$$(4.9) \quad k \ll 1$$

otrzymujemy z równania (4.5)

$$\zeta = C_1 + C_2\beta + C_3\beta^2 + C_4\beta^3.$$

Jeśli pominąć nieistotną stałą C_1 , to wobec parzystości funkcji ζ , znajdziemy

$$\zeta = C_3\beta^2.$$

Z czterech warunków brzegowych (3.11) trzy ostatnie spełnione są tożsamościowo, a pierwszy daje

$$\zeta = \frac{\nu b^2}{2R_0 t} \beta^2,$$

czyli zgodnie z (2.13)

$$(4.10) \quad w_2 = \frac{\nu}{2R_0} y^2.$$

Wynik ten jest znany z elementarnej teorii zginania pręta.

Ugięcia poprzeczne określone wzorem (4.10) są bardzo małe, gdyż wobec założenia (4.9)

$$\frac{w_2}{t} = \frac{\nu}{2R_0 t} y^2 \leq \frac{\nu}{2R_0 t} y_{max}^2 = \frac{\nu b^2}{2R_0 t} = \frac{\nu}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} k^2 \ll 1.$$

Przy bardzo dużych wartościach parametru k :

$$(4.11) \quad k \gg 1$$

można przyjąć

$$\operatorname{sh} k \approx \operatorname{ch} k \approx \frac{1}{2} e^k,$$

$$\operatorname{sh} 2k + \sin 2k \approx \operatorname{sh} 2k \approx \frac{1}{2} e^{2k}$$

i w rezultacie wzory (4.8) przyjmują następującą postać:

$$(4.12) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-k} (\cos k - \sin k), \\ C_2 = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-k} (\cos k + \sin k). \end{cases}$$

Z warunku (4.11) wynika, że stałe całkowania są bardzo małymi liczbami, a zatem zgodnie z (4.7) największych ugięć należy się spodziewać tam, gdzie $\operatorname{ch} k\beta$ i $\operatorname{sh} k\beta$ osiągają największe wartości, tj. w pobliżu krawędzi $\beta = \pm 1$.

Gdy $\beta \approx 1$, to jak wynika z (4.11) można przyjąć

$$\operatorname{ch} k\beta \approx \operatorname{sh} k\beta \approx \frac{1}{2} e^{k\beta}$$

i wtedy funkcja (4.7) przy uwzględnieniu (4.12) ma postać:

$$\xi = \frac{\nu}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-k(1-\beta)} [\cos k(1-\beta) - \sin k(1-\beta)].$$

Wprowadzając nową zmienną niezależną

$$(4.13) \quad \beta_1 = 1 - \beta,$$

otrzymujemy przy $k \gg 1$

$$(4.14) \quad \xi = \frac{\nu}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-k\beta_1} (\cos k\beta_1 - \sin k\beta_1).$$

Stwierdzamy więc, że w tym przypadku odchylenia od powierzchni walcowej mają charakter efektu wybitnie brzegowego i zanikają szybko w miarę wzrostu zmiennej β_1 , tj. w miarę oddalania się od swobodnych krawędzi $\beta_1 = 0$. Na tym właśnie polega zjawisko «wyprostowywania się» pasma, o czym wspomniano we wstępie (rys. 2b). Największe odchylenie występujące wzdłuż krawędzi wynosi

$$\xi = \frac{w_2}{t} = \frac{\nu}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \ll 1.$$

A zatem w omawianym przypadku stałej krzywizny osi pręta odchylenia powierzchni ugięć od powierzchni walcowej są istotnie nieznaczne i założenie (2.6) jest słuszne.

B. Parametr $k \gg 1$, promień krzywizny zmienny. Całkowanie asymptotyczne. Wyżej przytoczone rozważania o efekcie brzegowym w przypadku, gdy parametr k jest duży, nie są czymś nowym, jeśli zauważymy, że omawiane zagadnienie sprowadza się do badania odkształceń powłoki walcowej, obciążonej momentami wzdłuż krawędzi zakrzywionych. Wiadomo bowiem, że tego rodzaju efekt brzegowy jest charakterystyczny dla wszelkich cienkościennych powłok sprężystych o nieujemnej krzywiznie GAUSSA, o ile tylko krawędzie obciążone nie są liniami asymptotycznymi powierzchni środkowej powłoki. Zjawisko to omawiane już przez LOVE'A, [2], zostało ostatnio szczegółowo zbadane przez A. L. GOLDIENWIEZIERA, [11]. Autor ten uzasadnił również i zbadał dokładność asymptotycznej metody całkowania równań różniczkowych teorii powłok o zerowej krzywiznie Gaussa.

Postępując zgodnie z metodą GOLDIENWIEZIERA szukamy przy $k \gg 1$ rozwiązania równania (2.17) w postaci następującego szeregu asymptotycznego:

$$(4.15) \quad V(\alpha, \beta, k) = e^{kf(\alpha, \beta)} \left[V_0(\alpha, \beta) + \frac{V_1(\alpha, \beta)}{k^2} + \frac{V_2(\alpha, \beta)}{k^4} + \dots \right],$$

przy czym funkcje $f(\alpha, \beta)$ oraz $V_n(\alpha, \beta)$ nie zależą od parametru k . Podstawiając szereg (4.15) do równania (2.17) i zachowując wyłącznie wyrazy przy najwyższej potędze parametru k otrzymujemy

$$(4.16) \quad k^4 V_0(\alpha, \beta) e^{kf(\alpha, \beta)} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^4 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^4 + 2i \frac{R_0}{R(\alpha)} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 \right] = 0.$$

Dla wyznaczenia funkcji $f(\alpha, \beta)$ zauważmy, że po pierwsze interesuje nas jej postać przede wszystkim w pobliżu krawędzi swobodnej $\beta = 1$ (lub $\beta = -1$), bowiem w miarę oddalania się od tej krawędzi funkcja $V(\alpha, \beta)$ szybko dąży do zera; po drugi z założenia funkcja V zmienia się znacznie szybciej w kierunku zmiennej β aniżeli w kierunku α . Nadając powyższym postulatom formę matematyczną możemy napisać: po pierwsze

$$(4.17) \quad f(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial f}{\partial \beta} \right]_{\beta=1} \frac{\beta-1}{1!} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right]_{\beta=1} \frac{(\beta-1)^2}{2!} + \dots \approx \left[\frac{\partial f}{\partial \beta} \right]_{\beta=1} (\beta-1),$$

po drugie

$$(4.18) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{\beta=1} \ll \left[\frac{\partial f}{\partial \beta} \right]_{\beta=1}$$

Z zależności (4.18) i (4.16) wynika:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \beta} \right]_{\beta=1} = \pm (1-i) \sqrt{\frac{R_0}{R(\alpha)}}$$

Interesuje nas wyłącznie znak ujemny; otrzymujemy więc po uwzględnieniu (4.17)

$$(4.19) \quad f(\alpha, \beta) \approx -(1-i) \sqrt{\frac{R_0}{R(\alpha)}} (\beta-1).$$

Podstawiając (4.19) do szeregu (4.15), w którym zachowujemy tylko jeden wyraz, oraz rozdzielając część rzeczywistą od części urojonej, następnie określając funkcję $V_0(\alpha, \beta)$ tak, aby spełnić (w przybliżeniu) warunki brzegowe (2.19), otrzymujemy

$$(4.20) \quad V_r = \zeta = \frac{\nu}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-k_1\beta_1} (\cos k_1\beta_1 - \sin k_1\beta_1),$$

gdzie

$$(4.21) \quad k_1 = k \sqrt{\frac{R_0}{R(\alpha)}}$$

Zmienną β_1 określono za pomocą wzoru (4.13).

Porównując (4.20) z (4.14) stwierdzamy, że mimo zmienności promienia krzywizny otrzymano identyczne rozwiązanie z tą tylko różnicą, że zamiast stałej k figurującej w (4.14) występuje obecnie zmienna $k_1(\alpha)$. Tego rezultatu można było oczekiwać, gdyż przyjęcie założeń (4.16) i (4.18) jest w istocie równoważne pominięciu pochodnych funkcji $V(\alpha, \beta)$ względem α wobec jej pochodnych względem β , tj. równoważne założeniu

$$(4.22) \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} \ll \frac{\partial V}{\partial \beta}$$

FUNG i WITTRICK przyjmując założenie (4.22) uzyskali również w wymienionej na wstępie pracy [8] rozwiązanie (4.20), jednakże przeprowadzając całkowanie w sposób opisany wyżej umożliwiamy analizę dokładności otrzymanego rozwiązania i w razie konieczności możemy podwyższyć jego dokładność, obliczając dalsze wyrazy szeregów (4.15) i (4.17) (por. [12]).

Założenie szybkiej zmienności nieznannej funkcji $V(\alpha, \beta)$ w kierunku zmiennej β , przy dużych wartościach parametru k jest dopuszczalne tylko w przypadku, gdy krzywizna $1/R(\alpha)$ zmienia się znacznie wolniej niż funkcja $V(\beta)$, co jednak nie zawsze ma miejsce. W miarę wzrostu prędkości wzrastania funkcji $1/R(\alpha)$ w kierunku α zanika efekt brzegowy, którego cechą charakterystyczną jest szybka zmienność funkcji w jednym kierunku.

Zajmijmy się nieco szczegółowiej przypadkiem, gdy $k \geq 1$, jednakże krzywizna $1/R$ zmienia się prawie tak szybko jak funkcja $V(\alpha, \beta)$ w kierunku zmiennej β , co oznacza, że przy różniczkowaniu wzrasta ona prawie k -krotnie.

W tym przypadku można funkcję $1/R$ przedstawić na przykład w takiej postaci:

$$(4.23) \quad \begin{cases} \frac{1}{R(\alpha)} = \frac{1}{R_0}, & \text{jeśli } \alpha \leq 0, \\ \frac{1}{R(\alpha)} = \frac{1}{R_0(1+c)}(1+c e^{-\lambda k \alpha}), & \text{jeśli } \alpha \geq 0, \end{cases}$$

gdzie c jest stałą dowolną, a λ jest stałą rzędu jedności.

Rozwiązania równania (2.17) można obecnie szukać w postaci szeregu

$$(4.24) \quad V(\alpha, \beta) = V_0(\beta) + V_1(\beta) e^{-\lambda k \alpha} + V_2(\beta) e^{-2\lambda k \alpha} + \dots$$

Podstawiając (4.23) i (4.24) do równania (2.17) i przyrównując wyrażenia przy jednakowym wykładniku otrzymujemy szereg równań różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami:

$$(4.25) \quad \begin{cases} \frac{d^4 V_0}{d\beta^4} + i \frac{2k^2}{1+c} \frac{d^2 V_0}{d\beta^2} = 0, \\ \frac{d^4 V_n}{d\beta^4} + 2 \left[(n\lambda k)^2 + i \frac{k^2}{1+c} \right] \frac{d^2 V_n}{d\beta^2} + (n\lambda k)^4 V_n = -i 2k^2 \frac{c}{1+c} \frac{d^2 V_{n-1}}{d\beta^2} \end{cases}$$

($n = 1, 2, 3, \dots$).

Rozwiązanie tego układu nie nastrocza zasadniczych trudności, ale jest dość żmudne.

C. Parametr k mały. Metoda kolejnych przybliżeń. Zgodnie z nierównością (3.5) stosunek t/R_0 jest wielkością bardzo małą, nasuwa się więc myśl przedstawienia obu poszukiwanych funkcji w postaci szeregów potęgowych względem małego parametru t/R_0 , jak to ostatnio zaproponował A.A. NAZAROW, [13], przy rozwiązywaniu równań różniczkowych teorii powłok o małym wzniosie.

Dla zilustrowania tej metody rozwiązania wygodniej będzie przyjąć za punkt wyjścia równania (2.14), przy czym przepiszemy je w następującej postaci:

$$(4.26) \quad \begin{cases} \nabla^4 \zeta = -A g(\alpha) \frac{t}{R_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}, \\ \nabla^4 \Phi = g(\alpha) \frac{t}{R_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2}, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.27) \quad A = \frac{b^4 E}{tD}, \quad g(\alpha) = \frac{R_0}{R(\alpha)}.$$

Szukamy rozwiązania w postaci szeregów potęgowych

$$(4.28) \quad \begin{cases} \zeta = \zeta_0 + \frac{t}{R_0} \zeta_1 + \left(\frac{t}{R_0}\right)^2 \zeta_2 + \dots, \\ \Phi = \Phi_0 + \frac{t}{R_0} \Phi_1 + \left(\frac{t}{R_0}\right)^2 \Phi_2 + \dots. \end{cases}$$

Podstawiając szeregi (4.28) do równań (4.26) i przyrównując wyrazy przy jednakowych potęgach parametru otrzymamy szereg równań biharmonicznych:

$$(4.29) \quad \begin{cases} \nabla^4 \zeta_0 = 0, & \nabla^4 \Phi_0 = 0, \\ \nabla^4 \zeta_1 = -Ag(\alpha) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \beta^2}, & \nabla^4 \Phi_1 = g(\alpha) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \beta^2}, \\ \dots & \dots \\ \nabla^4 \zeta_n = -Ag(\alpha) \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial \beta^2}, & \nabla^4 \Phi_n = g(\alpha) \frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial \beta^2}, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Warunki brzegowe (3.11) przyjmują następującą postać: przy $\beta = \pm 1$

$$(4.30) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \alpha^2} = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} k^2 g(\alpha), & \frac{\partial^2 \zeta_{n+1}}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_{n+1}}{\partial \alpha^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 \zeta_n}{\partial \beta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \zeta_n}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 0, & \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} = 0, & \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Równania różniczkowe określające funkcję Φ_0 oraz odpowiednie warunki brzegowe są jednorodne, a zatem można przyjąć

$$\Phi_0 = 0.$$

Rozumując podobnie stwierdzamy, że wszystkie funkcje ζ z nieparzystymi wskaźnikami oraz funkcje Φ z parzystymi znikają:

$$\Phi_0 = \Phi_2 = \Phi_4 = \dots \Phi_{2n} = 0,$$

$$\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_5 = \dots \zeta_{2n+1} = 0.$$

W rezultacie więc zamiast (4.28) otrzymujemy następujące szeregi:

$$(4.31) \quad \begin{cases} \zeta(\alpha, \beta) = \zeta_0(\alpha, \beta) + \left(\frac{t}{R_0}\right)^2 \zeta_2(\alpha, \beta) + \dots + \left(\frac{t}{R_0}\right)^{2n} \zeta_{2n}(\alpha, \beta) + \dots, \\ \Phi(\alpha, \beta) = \frac{t}{R_0} \left[\Phi_1(\alpha, \beta) + \left(\frac{t}{R_0}\right)^2 \Phi_3(\alpha, \beta) + \dots + \left(\frac{t}{R_0}\right)^{2n} \Phi_{2n+1}(\alpha, \beta) + \dots \right]. \end{cases}$$

W celu zbadania zbieżności powyższych szeregów najlepiej zastosować powyższą metodę do rozwiązywania równań, których ściśle rozwiązanie jest znane, a więc np.

do przypadku stałej krzywizny $R = R_0 = \text{const}$. W tym przypadku można równania (4.26) w postaci następującej:

$$(4.32) \quad \begin{cases} \frac{d^4 \zeta}{d\beta^4} = -A \frac{t}{R_0} \frac{d^2 \Phi}{d\beta^2}, \\ \frac{d^4 \Phi}{d\beta^4} = \frac{t}{R_0} \frac{d^2 \zeta}{d\beta^2}. \end{cases}$$

Szukamy rozwiązania w postaci szeregów (4.31), przy czym oczywiście ζ_n i Φ_n są funkcjami wyłącznie zmiennej β .

Podstawiając (4.31) do (4.32) i przyrównując wyrazy przy jednakowych potęgach parametru t/R_0 otrzymujemy

$$(4.33) \quad \begin{cases} \frac{d^4 \zeta_0}{d\beta^4} = 0, & \frac{d^4 \Phi_1}{d\beta^4} = \frac{d^2 \zeta_0}{d\beta^2}, \\ \frac{d^4 \zeta_2}{d\beta^4} = -A \frac{d^2 \Phi_1}{d\beta^2}, & \frac{d^4 \Phi_3}{d\beta^4} = \frac{d^2 \zeta_2}{d\beta^2}, \\ \frac{d^4 \zeta_4}{d\beta^4} = -A \frac{d^2 \Phi_3}{d\beta^2}, & \frac{d^4 \Phi_5}{d\beta^4} = \frac{d^2 \zeta_4}{d\beta^2}. \end{cases}$$

Rozwiązując układ powyższy z uwzględnieniem warunków brzegowych (4.30) znajdujemy

$$(4.34) \quad \zeta = \frac{\nu k^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[\beta^2 - \frac{4k^4}{24} \left(\beta^2 - \frac{\beta^4}{3} + \frac{\beta^6}{15} \right) + \dots \right].$$

Okazuje się więc, że w istocie mamy rozwinięcie funkcji według parametru k . Obliczenia wykazują, że całkowanie układu równań (4.29) jest bardzo kłopotliwe przy konieczności zachowania dużej ilości wyrazów w szeregach (4.31), toteż metoda ta, aczkolwiek może być zawsze poprawna, jest jednak efektywna wyłącznie przy szybkiej zbieżności użytych szeregów, a więc przy małych wartościach parametru k .

D. Parametr k dowolny. Rozkład w szereg trygonometryczny. Nie ograniczając ogólności rozważań załóżmy, że krzywizna $1/R$ jest funkcją parzystą zmiennej α , tak że można ją rozłożyć w szereg kosinusów

$$(4.35) \quad \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R_n} \cos n p \alpha,$$

gdzie

$$(4.36) \quad p = \frac{\pi}{2} \frac{b}{l}.$$

Całki równania (2.17) szukamy również w postaci szeregu kosinusów

$$(4.37) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\beta) \cos n p \alpha,$$

w którym funkcje zespolone $V_n(\beta)$ zależą wyłącznie od zmiennej β^3 . Zauważmy przy sposobności, że przy odpowiednim doborze stałych całkowania w całce $w_1(x)$, spełniającej równanie różniczkowe (2.8), rozwiązanie równania (2.17) w postaci (4.37) odpowiada oparciu krawędzi krótkich płyty ($a = \pm l/b$) o przepony sztywne w swojej płaszczyźnie, a idealnie giętkie w kierunku prostym, tzn. spełnia następujące warunki brzegowe: przy $a = \pm l/b$

$$(4.38) \quad M_x = 0, \quad T_x = 0, \quad w = w_1(a) + w_2(a, \beta) = 0, \quad v = 0.$$

Podstawiając szeregi (4.35) i (4.37) do równania (2.17) i przyrównując wyrazy stojące przy kosinusach jednakowych kątów, otrzymamy nieskończony układ równań różniczkowych liniowych, zwyczajnych, ze stałymi współczynnikami:

$$(4.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 V_0}{d\beta^4} + i2k^2 \frac{R_0}{2} \left(\frac{2}{R_0} \frac{d^2 V_0}{d\beta^2} + \frac{1}{R_1} \frac{d^2 V_1}{d\beta^2} + \frac{1}{R_2} \frac{d^2 V_2}{d\beta^2} + \dots + \frac{1}{R_n} \frac{d^2 V_n}{d\beta^2} + \dots \right) = 0, \\ \frac{d^4 V_1}{d\beta^4} - 2(p \cdot 1)^2 \frac{d^2 V_1}{d\beta^2} + (p \cdot 1)^4 V_1 + i2k^2 \frac{R_0}{2} \left\{ \frac{1}{R_0} \frac{d^2 V_1}{d\beta^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} \right) \frac{\partial^2 V_0}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta^2} + \dots + \left(\frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right) \frac{d^2 V_n}{d\beta^2} + \dots \right\} = 0, \\ \dots \\ \frac{d^4 V_j}{d\beta^4} - 2(pj)^2 \frac{d^2 V_j}{d\beta^2} + (pj)^4 V_j + 2ik^2 \frac{R_0}{2} \left\{ \frac{1}{R_0} \frac{d^2 V_j}{d\beta^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{R_{n-j}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{R_{n+j}} \right) \frac{d^2 V_n}{d\beta^2} \right] \right\} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right.$$

Stosując w praktyce powyższą metodę zachowujemy kilka pierwszych wyrazów szeregu (4.37) np. do wskaźnika $n = m$. Wówczas układ (4.39) będzie się składał z $(m+1)$ równań różniczkowych rzędu $4(m+1)$. Układ taki można rozwiązać stosując znane metody teorii równań liniowych ze stałymi współczynnikami.

Dla określenia $8(m+1)$ rzeczywistych stałych całkowania należy spełnić $8(m+1)$ warunków brzegowych po $4(m+1)$ warunków na każdej krawędzi zakrzywionej $\beta = \pm 1$. Zgodnie z (2.19), (4.35) i (4.37) warunki te mają następującą postać: przy $\beta = \pm 1$

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V_{rn}}{d\beta^2} - \nu(pn)^2 V_{rn} = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} k^2 \frac{R_0}{R_n}, \\ \frac{d^3 V_{rn}}{d\beta^3} + (2-\nu)(pn)^2 \frac{dV_{rn}}{d\beta} = 0, \\ V_{in} = 0, \quad \frac{dV_{in}}{d\beta} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

³ O ile pasmo jest nieskończenie długie, można szeregi trygonometryczne zastąpić całkami FOURIERA.

Co się tyczy szybkości zbieżności w powyższym procesie, to zależy ona przede wszystkim od zbieżności danego szeregu trygonometrycznego (4.35).

Obliczenia podobnego typu wykonane przy rozwiązywaniu innych zagadnień a przytoczone w książce W.W. NOWOŻIŁOWA, ([14], s. 225 i dalsze), wykazują, że całkowicie wystarcza zachowanie 3-5 wyrazów w szeregach (4.35) i (4.37), nawet przy nader niekorzystnej postaci funkcji krzywizny pręta $1/R(\alpha)$.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. LAMB, *On the Flexure of a Thin Elastic Spring*, Philosophical Mag., Ser. 5, **31** (1891) 182.
- [2] A.E. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Public., 1944.
- [3] D.G. ASHWELL, *The Anticlastic Curvature of Rectangular Beams and Plates*, J. Royal Aeron. Soc., **54**, 1950, 708-715.
- [4] D.G. ASHWELL and GREENWOOD, *The Pure Bending of Rectangular Plates*, Engineering, **170** (1950), 51-53.
- [5] MURRAY and NILES, *Bending of Wide Beams of Doubly Symmetrical Section*, Techn. Report N.4, G.A.L. Stanford University, 1949.
- [6] W. FLUGGE, *Large Deflections of Thin Wings*, Techn. Report 3, 1949.
- [7] Y.C. FUNG, *The Anticlastic Curvature of a Strip with Lateral Thickness Variation*, J. appl. Mech., **21** (1954), 351-358.
- [8] Y.C. FUNG and W.H. WITTRICK, *A Boundary Layer Phenomenon in the Large Deflection of Thin Plates*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **8** (1955), 191-210.
- [9] R.L. BISPLINGHOFF, *The Finite Twist and Bending of Heated Elastic Liftig Surfaces*, Thesis for the deg. of D.T.S., Zurich 1957.
- [10] A. KOGAN, *Anticlastic Bending of Plates*, Bull. Res. Council of Israel, Sect. C, **1**, 1957, 88.
- [11] А.Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, *Теория тонких упругих оболочек*, Москва 1953.
- [12] А.Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, *Уточнение теории простого краевого эффекта*, Прикл. Мат. Мех., **3**, **20** (1956), 335-348.
- [13] А.А. НАЗАРОВ, *Метод последовательных приближений в теории пологих оболочек*, Уч. Зап. Саратовского Унив., **52**, вып. механ.ч., 1956, 33-39.
- [14] В.В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, 1951.

Резюме

О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

В работе рассматриваются большие прогибы, длинной, тонкой, упругой пластинки, прямоугольного поперечного сечения, нагруженной произвольной нормальной поверхностной нагрузкой, изменяющейся вдоль длины пластинки и постоянными изгибающими моментами, действующими вдоль коротких сторон. Длинные стороны пластинки — свободны.

Задача линеаризована и приведена к определению комплексной функции двух вещественных переменных, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению (2.17) с переменными коэффициентами и соответствующим граничным условиям.

Указан ряд методов решения упомянутого уравнения, причем эти методы заимствованы из линейной теории тонких, упругих, пологих оболочек.

Summary

ON LARGE DEFLECTION OF THIN ELASTIC STRIP

This paper deals with large deflections of a long, thin elastic plate of a rectangular cross section, loaded by any lateral forces varying along the length of the plate and by constant bending moments acting on the short edges. The long edges of the plate are free.

The problem is linearized, and reduces to the evaluation of a complex function of real variables that satisfies a linear differential equation (2.17) with variable coefficients, and suitable boundary conditions.

Some methods of solution of this equation are considered, the methods being based on the linear theory of thin-walled, elastic, shallow shells.

AERONAUTICAL DEPARTMENT
ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
HAIFA, ISRAEL

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lipca 1960 r.
