

ANDRÉ RIPIANU

O RUCHACH CENTRALNYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXXXIII

TOM IX • ZESZYT 1 • ROK 1961

1. Rozważać będziemy punkt  $M$  poddany działaniu siły centralnej  $\vec{F}$ , której kierunek przechodzi stale przez ognisko  $A$  paraboli  $(P)$ , po której porusza się punkt  $M$  (rys. 1).

Niech  $O$  będzie wierzchołkiem paraboli. Wykreślmy okrąg przechodzący przez punkty  $OAM$ . Środek  $C$  tego okręgu znajduje się na symetralnej  $(\Delta)$  odcinka  $OA$ .

Zgodnie z twierdzeniem NEWTONA punkt  $C$  porusza się po prostej  $(\Delta)$  z prędkością stałą równą  $3/8$  chwilowej prędkości punktu  $M$  w wierzchołku  $O$  paraboli.

Dla dowiedzenia tego twierdzenia rozważa się równanie toru parabolicznego  $P$  we współrzędnych biegunowych odniesionych do bieguna  $A$  umieszczonego w ognisku paraboli i osi  $AX$  (rys. 1):

$$(1) \quad r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

i oblicza się, że prędkość połowa jest stała:

$$(2) \quad C dt = r^2 d\theta = \frac{p^2 d\theta}{(1 - \cos \theta)^2}$$

Przez całkowanie uzyskuje się wyrażenie określające rzędną wierzchołka  $C$  (rys. 1):

$$(3) \quad \eta = -\frac{3}{4} \frac{C}{p} t + K.$$

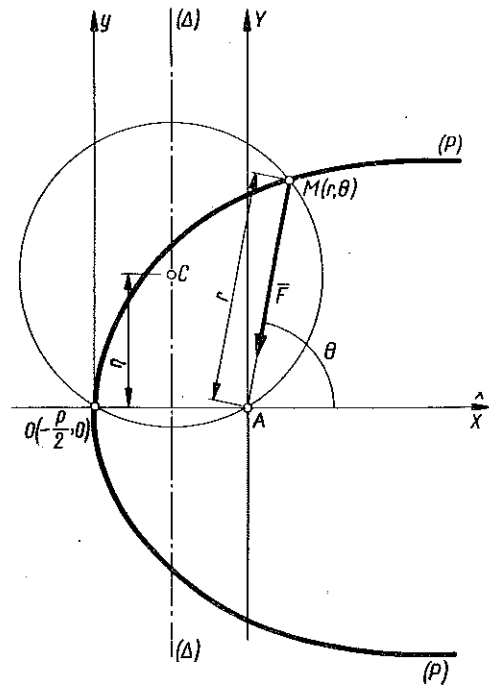
Kwadrat prędkości, z jaką porusza się punkt  $M$  po torze  $(P)$ , wynosi

$$(4) \quad v^2 = \frac{2C^2}{p^2} (1 - \cos \theta).$$

Widać, że dla  $\theta = \pi$  jest  $v_0 = 2C/p$ . Stąd

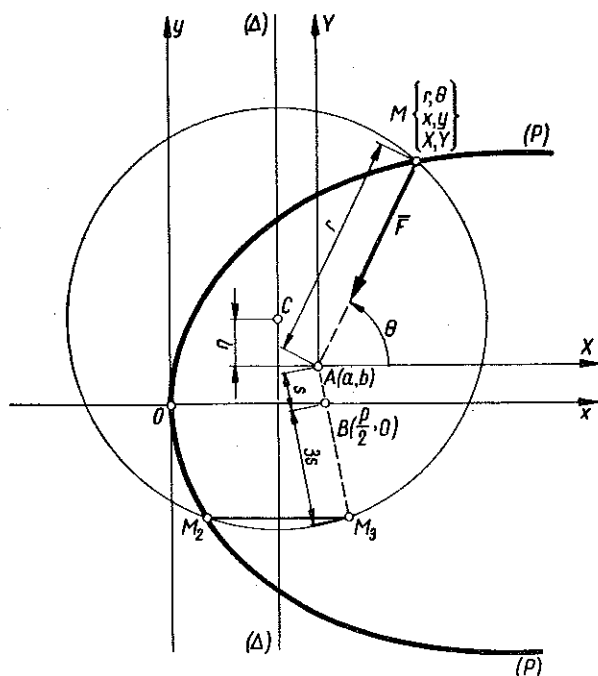
$$(5) \quad -\frac{3}{4} \frac{C}{p} = \frac{3}{8} v_0.$$

Twierdzenie NEWTONA jest więc udowodnione.



Rys. 1

2. W bardzo interesującym artykule opublikowanym przez Arnaldo MASOTTIEGO, [1], uogólnia się twierdzenie NEWTONA przez umieszczenie bieguna siły centralnej  $\vec{F}$  w dowolnym punkcie  $A$ , który nie pokrywa się z ogniskiem  $B$  toru parabolicznego  $(P)$  punktu  $M$  (rys. 2). Wykazuje się, że zawsze istnieją dwa dobrze określone stałe punkty  $M_2$  i  $M_3$  o tej własności, że środek okręgu przechodzącego przez punkty  $M$ ,  $M_2$  i  $M_3$  porusza się po symetralnej  $(\Delta)$  odcinka  $\overline{M_2 M_3}$  ze stałą prędkością.



Rys. 2

Równanie biegowe paraboli  $(P)$  (rys. 2) i stałość prędkości polowej pozwalają wprowadzić związek

$$(6) \quad K - 3Ct = 2p^2 \operatorname{ctg}^3 \theta - 6bp \operatorname{ctg}^2 \theta + 3(b^2 + 2ap) \operatorname{ctg} \theta + 2(p \operatorname{ctg}^2 \theta - 2b \operatorname{ctg} \theta + 2a) \sqrt{p^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - 2bp \operatorname{ctg} \theta + 2ap}.$$

Przyjmuje się oznaczenia

$$(7) \quad X_2 + X_3 = s, \quad X_2 X_3 = q,$$

gdzie  $X_2$  i  $X_3$  są odcięzami punktów  $M_2$  i  $M_3$ . Pisząc równanie koła przechodzącego przez punkty  $M$ ,  $M_2$  i  $M_3$  i wykorzystując równanie biegunowe toru  $(P)$  wyprowadza się wyrażenie określające rzędną środka  $C$  tego koła:

$$(8) \quad \eta = \frac{1}{2[p \operatorname{ctg} \theta - (b+l) + \sqrt{p^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - 2bp \operatorname{ctg} \theta + 2ap}]} \left\{ (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) [2p^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - 4bp \operatorname{ctg} \theta + b^2 + 2ap + 2(p \operatorname{ctg} \theta - b) \sqrt{p^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - 2bp \operatorname{ctg} \theta + 2ap}] - s[p \operatorname{ctg} \theta - b + \sqrt{p^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - 2b \operatorname{ctg} \theta + 2ap}] \operatorname{ctg} \theta + q - l^2 \right\}.$$

Identyfikując współczynniki przy różnych potęgach  $\text{ctg } \theta$  w związkach (6) i (8) otrzymuje się związek

$$(9) \quad 4p\eta = K - 3Ct - 4b(3a+p),$$

który mówi, że  $C$  porusza się po symetralnej ( $\Delta$ ) ze stałą prędkością.

Współrzędne punktów  $M_2$  i  $M_3$  wynoszą:

$$(10) \quad M_2: x_2 = \frac{9}{2p}b^2, \quad y_2 = -3b; \quad M_3: x_3 = 2p-3a, \quad y_3 = -3b.$$

Łatwo sprawdzić, że  $M_2$  znajduje się na paraboli ( $P$ ),

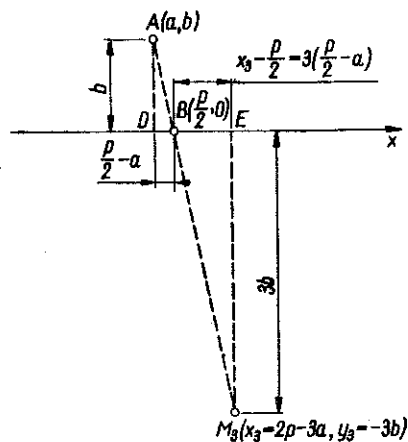
$$(11) \quad y_2^2 = 2px_2;$$

i że punkty  $A$ ,  $B$  i  $M_3$  (rys. 2) są współliniowe:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \\ 2p-3a & -3b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zachodzi również związek

$$(13) \quad \overline{BM_3} = 3\overline{BA}.$$



Rys. 3

3. Poniżej będziemy zajmować się zagadnieniem, którym mamy nadzieję, nie zajmowano się dotychczas. Rezultaty, które osiągniemy, są prawdopodobnie nowe. Podstawimy problem określenia krzywych ( $R$ ) o następujących własnościach. Jeśli punkt  $M$  porusza się po jednej z krzywych ( $R$ ) pod działaniem siły centralnej  $\overline{F}$ , której kierunek przechodzi przez dowolny biegun  $O$ , to środek  $C$  okręgu ( $I'$ ) przechodzącego stałe przez ruchomy punkt  $M$  i dwa ustalone punkty  $M_2$  i  $M_3$  porusza się po symetrycznej ( $\Delta$ ) odcinka  $\overline{M_2M_3}$  z prędkością stałą (rys. 4). W płaszczyźnie ruchu dany jest układ współrzędnych  $Oxy$ , gdzie  $O$  jest biegunem siły centralnej  $\overline{F}$ , a oś  $Ox$  jest równoległa do odcinka  $\overline{M_2M_3}$  (rys. 4).

Jeśli  $\eta$  jest rzędną środka  $C$  okręgu ( $I'$ ) przechodzącego przez punkty  $M$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , to

$$\eta = \frac{x^2 + y^2 - sx + q - l^2}{2(y-l)},$$

gdzie

$$s = x_2 + x_3, \quad q = x_2x_3.$$

Ale  $x = r \cos \theta$  i  $y = r \sin \theta$ , więc

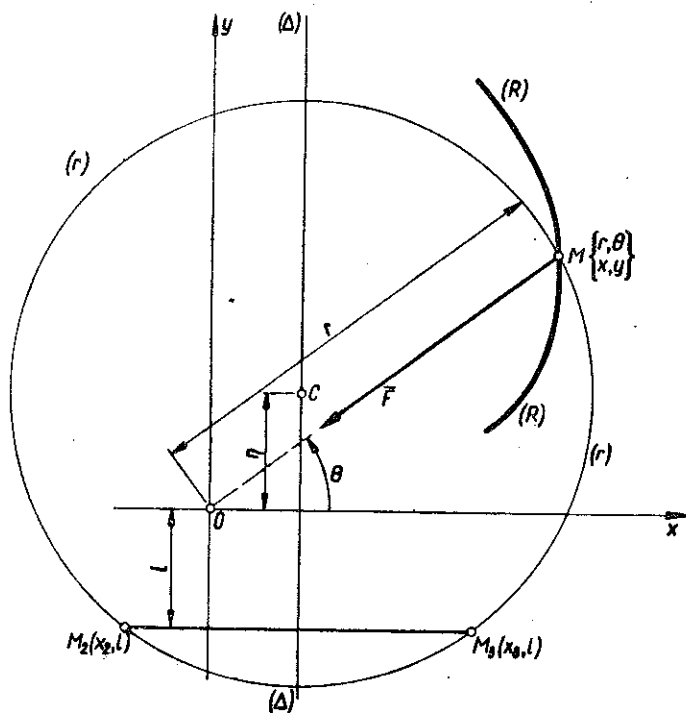
$$(14) \quad \eta = \frac{r^2 - sr \cos \theta + q - l^2}{2(r \sin \theta - l)}.$$

Aby środek okręgu  $C$  poruszał się po prostej  $(\Delta)$  z prędkością stałą musi być

$$(15) \quad \frac{d\eta}{dt} = \text{const.}$$

Przy stałej prędkości połowej mamy

$$(16) \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = C.$$



Rys. 4

Ze związków (14), (15) i (16) otrzymujemy

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \frac{r^2 - sr \cos \theta + q - l^2}{l - r \sin \theta} = A = \text{const.},$$

skąd, po przyjęciu oznaczenia  $m = q - l^2$ , wynika

$$(17) \quad (m \sin \theta - ls \cos \theta + 2lr - r^2 \sin \theta) \frac{dr}{d\theta} = -r(m \cos \theta + ls \sin \theta) + \\ + r^2(s + Al^2) - r^3(\cos \theta + 2Al \sin \theta) + Ar^4 \sin^2 \theta.$$

Przyjmując  $\varphi(\theta) = 1/r(\theta)$  otrzymamy

$$(18) \quad [\sin \theta - 2l\varphi + (ls \cos \theta - m \sin \theta)\varphi^2] \frac{d\varphi}{d\theta} = A \sin^2 \theta - (\cos \theta + 2Al \sin \theta)\varphi + \\ + (s + Al^2)\varphi^2 - (m \cos \theta + ls \sin \theta)\varphi^3.$$

Równanie różniczkowe (18) określa poszukiwaną rodzinę krzywych ( $R$ ). Zauważmy, że równanie różniczkowe (17) jest zupełnie ogólne w tym sensie, że nie nakłada ono żadnych ograniczeń na wzajemne położenie punktów  $M_2$ ,  $M_3$  i biegun  $O$ . Wydaje się, że scałkowanie równania (18) nie jest możliwe w przypadku ogólnym. Zajmiemy się przypadkiem szczególnym, gdy  $l = 0$  i  $m = 0$ , a więc  $q = 0$ , to znaczy przypadkiem, gdy jeden z punktów stałych  $M_2$  lub  $M_3$  pokrywa się z biegunem  $O$  (przypadek NEWTONA).

Równanie różniczkowe (18) w tym przypadku przyjmuje postać

$$(19) \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = A \sin\theta - \varphi \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \varphi^2 \frac{s}{\sin\theta}.$$

Równanie (19) jest równaniem typu RICCATIEGO i może być rozwiązane w przypadku, gdy znane jest rozwiązanie szczególne  $\varphi_1$  tego równania. Może to być jakiegokolwiek rozwiązanie szczególne spełniające równanie (19) przy stałych  $A$  i  $s$ .

Będziemy rozważać jedynie całą szczególną odpowiadającą przypadkowi newtonowskiemu, w którym tor punktu jest parabolą, to znaczy

$$(20) \quad \varphi_1 = \frac{1 - \cos\theta}{p}.$$

Z (19) i (20) otrzymujemy wartości stałych

$$A = \frac{3}{2p}, \quad s = -\frac{p}{2}.$$

Równanie (19) przyjmuje postać

$$(21) \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{3}{2p} \sin\theta - \varphi \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \varphi^2 \frac{p}{2} \frac{1}{\sin\theta}.$$

Dokonując zamiany funkcji niewiadomej

$$\varphi = \frac{1}{p} (1 - \cos\theta) + z$$

i przyjmując  $1/z = \psi$  otrzymamy z (21)

$$(22) \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \psi + \frac{p}{2 \sin\theta}.$$

Dla scałkowania tego równania różniczkowego położmy

$$\psi(\theta) = \psi_1(\theta) \psi_2(\theta)$$

nakładając jednocześnie warunek

$$\frac{d\psi_2}{d\theta} - \frac{1}{\sin\theta} \psi_2 = 0.$$

Otrzymamy

$$\psi = \psi_1 \psi_2 = p \left( K \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

gdzie  $K$  jest stałą całkowania.

Uwzględniając teraz kolejno, że  $z = 1/\psi$ ,  $\varphi = (1/p)(1 - \cos\theta) + z$  i  $r = 1/\varphi$  otrzymamy

$$(23) \quad r = \frac{p \left( K \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)}{K \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)},$$

czyli równanie biegunowe poszukiwanych krzywych ( $R$ ).

Aby przejść do równania krzywych ( $R$ ) we współrzędnych kartezjańskich wykorzystujemy związek

$$(24) \quad x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta$$

i otrzymujemy równania

$$y = 0$$

lub

$$(25) \quad \left( K^2 - \frac{1}{4} \right) y^3 + 4Kx^3 + 3Kxy^2 + 2pKy^2 + 4pKx^2 + \frac{p}{2} (1 - 4K^2) xy + \\ + \frac{p^2}{4} (1 - 4K^2) y + p^2 Kx = 0.$$

Przyjmując  $K = C/2$  możemy równanie (25) przepisać w postaci

$$(25.1) \quad (C^2 - 1)y^3 + 8Cx^3 + 6Cxy^2 + 4Cpy^2 + 8Cpx^2 + 2p(1 - C^2)xy + \\ + p^2(1 - C^2)y + 2Cp^2x = 0.$$

Jedną z krzywych ( $R$ ) jest osią  $Ox$ , inne są krzywymi trzeciego stopnia.

Równaniami parametrycznymi tych krzywych przy wyborze parametru  $w = \operatorname{tg} \theta/2$  są

$$(26) \quad x = \frac{p}{2} \frac{(1 - w^2)(Cw - 1)}{Cw^3 + 1}, \quad y = p \frac{w(Cw - 1)}{Cw^3 + 1}.$$

Postawione zagadnienie zostało zatem rozwiązane w przypadku szczególnym, gdy jeden z punktów stałych  $M_2$  lub  $M_3$  pokrywa się z biegunem siły centralnej  $F$ .

Dla rozwiązania problemu w przypadku ogólnym, gdy położenia bieguna  $O$  i punktów  $M_2$  i  $M_3$  są dowolne, należałoby scałkować równanie różniczkowe (17) albo (18).

Dla skonstruowania krzywych ( $R$ ) przyjmujemy

$$(27) \quad y = ux.$$

Równanie (25.1) przejdzie wtedy w równanie

$$(28) \quad [(C^2 - 1)u^3 + 6Cu^2 + 8C]x^2 + 2p[2Cu^2 + (1 - C^2)u + 4C]x + \\ + p^2[(1 - C^2)u + 2C] = 0.$$

Rozwiązując je względem  $x$ , uwzględniając (27) i oznaczając

$$a = \frac{1 - C^2}{2C},$$

czyli dla  $C > 0$

$$(29) \quad \sqrt{1+\alpha^2} = \frac{1+C^2}{2C},$$

otrzymamy równania parametryczne

$$(30) \quad \begin{cases} x = -p \frac{au+1}{u^2+au+2 \pm \sqrt{1+\alpha^2}u\sqrt{1+u^2}}, \\ y = -pu \frac{au+1}{u^2+au+2 \pm \sqrt{1+\alpha^2}u\sqrt{1+u^2}}. \end{cases}$$

Obliczamy

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = p \frac{au^2+2u-\alpha \pm \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+u^2}}(au^3+2u^2+1)}{[u^2+au+2 \pm \sqrt{1+\alpha^2}u\sqrt{1+u^2}]^2}, \\ \frac{dy}{du} = p \frac{(1-\alpha^2)u^3-4au-2 \pm \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+u^2}}u^2(u-\alpha)}{[u^2+au+2 \pm \sqrt{1+\alpha^2}u\sqrt{1+u^2}]^2}. \end{cases}$$

Przyrównujemy pochodne  $dx/du$  i  $dy/du$  do zera i otrzymujemy

$$(32) \quad \begin{cases} (au+1)^3(\alpha^2u^4+2au^3+2au+1) = 0, \\ (au+1)^2[(\alpha^2-3)u^4+8au^3+8au+4] = 0. \end{cases}$$

Dla  $u = -1/a$  uzyskamy

$$(33) \quad \begin{cases} x\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{p}{2}, & y\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{p}{2a} & \text{dla } a > 0, \\ x\left(-\frac{1}{a}\right) = 0, & y\left(-\frac{1}{a}\right) = 0 & \text{dla } a < 0. \end{cases}$$

Jeśli  $C < 0$ , to zamiast (29) otrzymamy (29.1)

$$-\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{1+C^2}{2C}$$

i znaki  $\pm$  w związkach (30) i (31) należy zastąpić przez  $\mp$ . Związki (33) przyjmą w tym przypadku postać

$$(34) \quad \begin{cases} x\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{p}{2}, & y\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{p}{2a} & \text{dla } a < 0, \\ x\left(-\frac{1}{a}\right) = 0, & y\left(-\frac{1}{a}\right) = 0 & \text{dla } a > 0. \end{cases}$$

Współrzędne  $x$  i  $y$  dążą do nieskończoności dla wartości  $u$  będących pierwiastkami równania

$$(35) \quad au^3-3u^2-4 = 0.$$

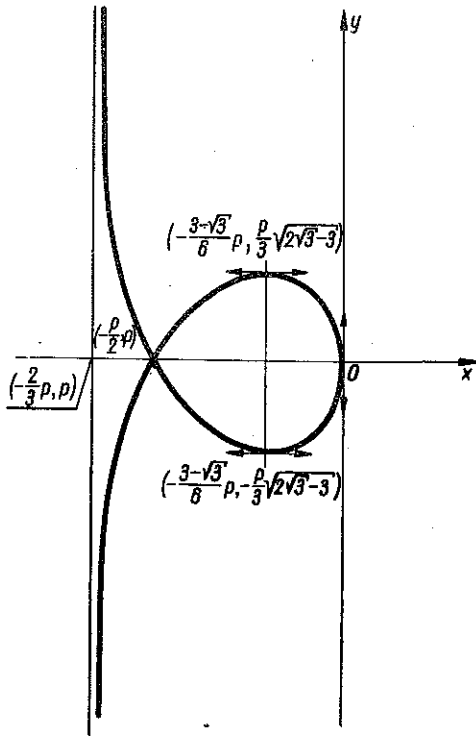


Rozważmy dwie wartości szczególne  $C$ .

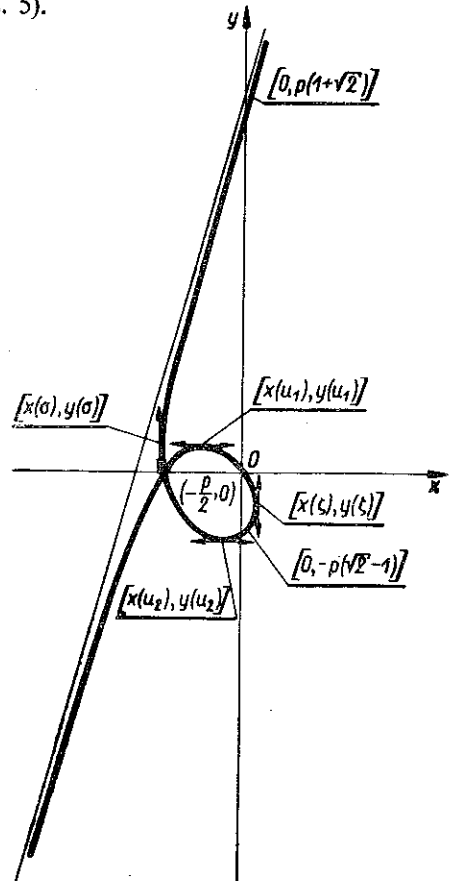
Dla  $C = 1$  otrzymujemy z (28)

$$y = \pm(2x+p) \sqrt{\frac{-x}{3x+2p}}$$

i konstruujemy odpowiadającą krzywą (rys. 5).



Rys. 5



Rys. 6

Dla  $C = 0$  równanie (28) redukuje się do

$$y(y^2 - 2px - p^2) = 0$$

otrzymujemy więc oś  $Ox$  i parabolę.

W przypadku gdy  $\alpha = 1$ , dyskusja związków (31) prowadzi do wniosku, że krzywa ma asymptotę różną od osi  $Oy$  (rys. 6).

#### Literatura cytowana w tekście

[1] A. MASOTTI, *Sopra una estensione di un teorema di Newton relative ai moti centrali parabolici*, Volume «Scritti Matematici in onore di Filippo Sibirani», Bologna 1957.

## Резюме

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В работе дается прежде всего теорема касающаяся центрального параболического движения материальной точки, тогда как полюс центральной силы находится в фокусе параболы.

Затем дается новая интерпретация обобщенной теоремы Ньютона, разработанная А. Массоти, в слудает когда полюс центральной силы находится в фокусе параболы.

В заключение дается оригинальное решение теоремы Ньютона, определяя семейство кривых третьей степени, представляющей траекторию материальной точки в центральном движении. Для этих кривых справедлива теорема Ньютона, касающаяся центрального параболического движения.

Дается несколько кривых третьей степени этого семейства для некоторых значений отдельных параметров.

## Résumé

### ÉTUDE DES MOUVEMENTS CENTRAUX

Dans ce travail on énonce premièrement le théorème de NEWTON relatif au mouvement central parabolique du point matériel quand le pôle de la force centrale se trouve dans le foyer de la parabole.!

Puis l'on donne une nouvelle démonstration a l'extension donnée par A. MASSOTI au théorème de NEWTON pour le cas ou le pôle de la force centrale ne se trouve plus dans le foyer de la parabole.

On donne, enfin, un extension originale au théorème de Newton trouvant une classe de courbes du troisième degré représentant les trajectoires du point matériel en mouvement central pour lesquelles est valable le théorème de NEWTON relatif au mouvement central parabolique.

On représente quelques unes des courbes du troisième degré de cette classe pour quelques valeurs particulières du paramètre  $C$ .

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE CLUJ  
ROUMANIE

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lutego 1960 r.*