

VÁCLAV VODIČKA

ORGANIA SWOBODNE NIEJEDNORODNEJ BŁONY PIERŚCIENIOWEJ

FIG. 111-113

111	112	113
114	115	116
117	118	119
120	121	122
123	124	125
126	127	128
129	130	131
132	133	134
135	136	137
138	139	140
141	142	143
144	145	146
147	148	149
150	151	152
153	154	155
156	157	158
159	160	161
162	163	164
165	166	167
168	169	170
171	172	173
174	175	176
177	178	179
180	181	182
183	184	185
186	187	188
189	190	191
192	193	194
195	196	197
198	199	200
201	202	203
204	205	206
207	208	209
210	211	212
213	214	215
216	217	218
219	220	221
222	223	224
225	226	227
228	229	230
231	232	233
234	235	236
237	238	239
240	241	242
243	244	245
246	247	248
249	250	251
252	253	254
255	256	257
258	259	260
261	262	263
264	265	266
267	268	269
270	271	272
273	274	275
276	277	278
279	280	281
282	283	284
285	286	287
288	289	290
291	292	293
294	295	296
297	298	299
300	301	302
303	304	305
306	307	308
309	310	311
312	313	314
315	316	317
318	319	320
321	322	323
324	325	326
327	328	329
330	331	332
333	334	335
336	337	338
339	340	341
342	343	344
345	346	347
348	349	350
351	352	353
354	355	356
357	358	359
360	361	362
363	364	365
366	367	368
369	370	371
372	373	374
375	376	377
378	379	380
381	382	383
384	385	386
387	388	389
390	391	392
393	394	395
396	397	398
399	400	401
402	403	404
405	406	407
408	409	410
411	412	413
414	415	416
417	418	419
420	421	422
423	424	425
426	427	428
429	430	431
432	433	434
435	436	437
438	439	440
441	442	443
444	445	446
447	448	449
450	451	452
453	454	455
456	457	458
459	460	461
462	463	464
465	466	467
468	469	470
471	472	473
474	475	476
477	478	479
480	481	482
483	484	485
486	487	488
489	490	491
492	493	494
495	496	497
498	499	500
501	502	503
504	505	506
507	508	509
510	511	512
513	514	515
516	517	518
519	520	521
522	523	524
525	526	527
528	529	530
531	532	533
534	535	536
537	538	539
540	541	542
543	544	545
546	547	548
549	550	551
552	553	554
555	556	557
558	559	560
561	562	563
564	565	566
567	568	569
570	571	572
573	574	575
576	577	578
579	580	581
582	583	584
585	586	587
588	589	590
591	592	593
594	595	596
597	598	599
600	601	602
603	604	605
606	607	608
609	610	611
612	613	614
615	616	617
618	619	620
621	622	623
624	625	626
627	628	629
630	631	632
633	634	635
636	637	638
639	640	641
642	643	644
645	646	647
648	649	650
651	652	653
654	655	656
657	658	659
660	661	662
663	664	665
666	667	668
669	670	671
672	673	674
675	676	677
678	679	680
681	682	683
684	685	686
687	688	689
690	691	692
693	694	695
696	697	698
699	700	701
702	703	704
705	706	707
708	709	710
711	712	713
714	715	716
717	718	719
720	721	722
723	724	725
726	727	728
729	730	731
732	733	734
735	736	737
738	739	740
741	742	743
744	745	746
747	748	749
750	751	752
753	754	755
756	757	758
759	760	761
762	763	764
765	766	767
768	769	770
771	772	773
774	775	776
777	778	779
780	781	782
783	784	785
786	787	788
789	790	791
792	793	794
795	796	797
798	799	800
801	802	803
804	805	806
807	808	809
810	811	812
813	814	815
816	817	818
819	820	821
822	823	824
825	826	827
828	829	830
831	832	833
834	835	836
837	838	839
840	841	842
843	844	845
846	847	848
849	850	851
852	853	854
855	856	857
858	859	860
861	862	863
864	865	866
867	868	869
870	871	872
873	874	875
876	877	878
879	880	881
882	883	884
885	886	887
888	889	890
891	892	893
894	895	896
897	898	899
900	901	902
903	904	905
906	907	908
909	910	911
912	913	914
915	916	917
918	919	920
921	922	923
924	925	926
927	928	929
930	931	932
933	934	935
936	937	938
939	940	941
942	943	944
945	946	947
948	949	950
951	952	953
954	955	956
957	958	959
960	961	962
963	964	965
966	967	968
969	970	971
972	973	974
975	976	977
978	979	980
981	982	983
984	985	986
987	988	989
990	991	992
993	994	995
996	997	998
999	1000	1001
1002	1003	1004
1005	1006	1007
1008	1009	1010
1011	1012	1013
1014	1015	1016
1017	1018	1019
1020	1021	1022
1023	1024	1025
1026	1027	1028
1029	1030	1031
1032	1033	1034
1035	1036	1037
1038	1039	1040
1041	1042	1043
1044	1045	1046
1047	1048	1049
1050	1051	1052
1053	1054	1055
1056	1057	1058
1059	1060	1061
1062	1063	1064
1065	1066	1067
1068	1069	1070
1071	1072	1073
1074	1075	1076
1077	1078	1079
1080	1081	1082
1083	1084	1085
1086	1087	1088
1089	1090	1091
1092	1093	1094
1095	1096	1097
1098	1099	1100
1101	1102	1103
1104	1105	1106
1107	1108	1109
1110	1111	1112
1113	1114	1115
1116	1117	1118
1119	1120	1121
1122	1123	1124
1125	1126	1127
1128	1129	1130
1131	1132	1133
1134	1135	1136
1137	1138	1139
1140	1141	1142
1143	1144	1145
1146	1147	1148
1149	1150	1151
1152	1153	1154
1155	1156	1157
1158	1159	1160
1161	1162	1163
1164	1165	1166
1167	1168	1169
1170	1171	1172
1173	1174	1175
1176	1177	1178
1179	1180	1181
1182	1183	1184
1185	1186	1187
1188	1189	1190
1191	1192	1193
1194	1195	1196
1197	1198	1199
1200	1201	1202
1203	1204	1205
1206	1207	1208
1209	1210	1211
1212	1213	1214
1215	1216	1217
1218	1219	1220
1221	1222	1223
1224	1225	1226
1227	1228	1229
1230	1231	1232
1233	1234	1235
1236	1237	1238
1239	1240	1241
1242	1243	1244
1245	1246	1247
1248	1249	1250
1251	1252	1253
1254	1255	1256
1257	1258	1259
1260	1261	1262
1263	1264	1265
1266	1267	1268
1269	1270	1271
1272	1273	1274
1275	1276	1277
1278	1279	1280
1281	1282	1283
1284	1285	1286
1287	1288	1289
1290	1291	1292
1293	1294	1295
1296	1297	1298
1299	1300	1301
1302	1303	1304
1305	1306	1307
1308	1309	1310
1311	1312	1313
1314	1315	1316
1317	1318	1319
1320	1321	1322
1323	1324	1325
1326	1327	1328
1329	1330	1331
1332	1333	1334
1335	1336	1337
1338	1339	1340
1341	1342	1343
1344	1345	1346
1347	1348	1349
1350	1351	1352
1353	1354	1355
1356	1357	1358
1359	1360	1361
1362	1363	1364
1365	1366	1367
1368	1369	1370
1371	1372	1373
1374	1375	1376
1377		

SPIS TREŚCI

Wstęp	667
1. Sformułowanie zagadnienia	667
2. Całki szczególne	668
3. Równanie charakterystyczne i widmo wartości własnych	668
4. Rozwiązania szczególne	669
5. Pomocnicze warunki ortogonalności	670
6. Rozwiązanie zagadnienia ruchu błony	671
7. Zestawienie wyników	672
8. Błona jednorodna	673

Wstęp

Praca niniejsza poświęcona jest zagadnieniu swobodnych drgań symetrycznych złożonej błony o kształcie pierścienia kołowego. Niektóre z podanych wyników nie były dotychczas znane.

1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy błonę o kształcie pierścienia kołowego, ograniczonego promieniami ϱ_0 i ϱ_n , składającą się z n jednorodnych części

$$\varrho_{k-1} \leq \varrho \leq \varrho_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

których masa na jednostkę powierzchni wynosi odpowiednio σ_k . Zakładamy, że położenie równowagi błony pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$, zaś błona poddana jest równomiernemu rozciąganiu siłami o wielkości S . Zagadnienie polega na wyznaczeniu swobodnych drgań błony, gdy jej początkowe przemieszczenia i szybkości dane są w postaci dwóch funkcji $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ względem współrzędnej ϱ .

Z matematycznego punktu widzenia mamy znaleźć rozwiązanie $u_k = u_k(\varrho, t)$ równań

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = c_k^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_k}{\partial \varrho} \right), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad c_k^2 = \frac{S}{\sigma_k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

przy warunkach

$$(1.2) \quad u_1(\varrho_0, t) = 0, \quad u_n(\varrho_n, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_{k+1}(\varrho_k, t) = u_k(\varrho_k, t), \quad t > 0,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varrho} = \frac{\partial u_k}{\partial \varrho}, \quad \varrho = \varrho_k, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(1.4) \quad u_k(\varrho, 0) = f(\varrho), \quad \left[\frac{\partial u_k}{\partial t} \right]_{t=0} = g(\varrho), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2. Całki szczególne

Przyjmijmy całki $v_k = v_k(\varrho, t)$ równań (1.1) w postaci

$$(2.1) \quad v_k(\varrho, t) = R_k(\varrho) T(t), \quad R_k(\varrho) = A_k J_0(\lambda_k \varrho) + B_k Y_0(\lambda_k \varrho), \\ T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t, \quad \lambda_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Z warunków (1.2), (1.3) znajdujemy wtedy układ równań

$$(2.2) \quad A_1 J_0(\lambda_1 \varrho_0) + B_1 Y_0(\lambda_1 \varrho_0) = A_n J_0(\lambda_n \varrho_n) + B_n Y_0(\lambda_n \varrho_n) = 0$$

$$(2.3) \quad A_{k+1} J_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) + B_{k+1} Y_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) = A_k J_0(\lambda_k \varrho_k) + B_k Y_0(\lambda_k \varrho_k), \\ A_{k+1} J_1(\lambda_{k+1} \varrho_k) + B_{k+1} Y_1(\lambda_{k+1} \varrho_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [A_k J_1(\lambda_k \varrho_k) + \\ + B_k Y_1(\lambda_k \varrho_k)], \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Korzystając z Wrońskianu $W\{J_0, Y_0\}$

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}$$

możemy napisać równania (2.3) w innej postaci

$$A_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k (a_k A_k + \alpha_k B_k), \quad B_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k (b_k A_k + \beta_k B_k), \\ a_k = a_k(\omega) = A_k J_1(\lambda_k \varrho_k) Y_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) - J_0(\lambda_k \varrho_k) Y_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ \alpha_k = \alpha_k(\omega) = A_k Y_1(\lambda_k \varrho_k) Y_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) - Y_0(\lambda_k \varrho_k) Y_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ (2.3.1) \quad b_k = b_k(\omega) = -A_k J_1(\lambda_k \varrho_k) J_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) + J_0(\lambda_k \varrho_k) J_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ \beta_k = \beta_k(\omega) = -A_k Y_1(\lambda_k \varrho_k) J_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) + Y_0(\lambda_k \varrho_k) J_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ \Lambda_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

3. Równanie charakterystyczne i widmo wartości własnych

Pisząc związki (2.3.1) w postaci macierzy, [1], [2],

$$(3.1) \quad K_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k M_k(\omega) K_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ K_k = \begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad M_k(\omega) = \begin{Bmatrix} a_k(\omega), \alpha_k(\omega) \\ b_k(\omega), \beta_k(\omega) \end{Bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

możemy łatwo znaleźć wyrażenie na wszystkie nie znane współczynniki A_k, B_k ($1 \leq k \leq n$) w zależności od nie określonych wartości A_1, B_1 :

$$(3.2) \quad K_{k+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1} \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k Q_k(\omega) \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ Q_k(\omega) = M_k(\omega) M_{k-1}(\omega) \dots M_2(\omega) M_1(\omega), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.3) \quad \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k = \varrho^{(k)}, \quad \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1} = \lambda^{(k)}, \quad Q_k(\omega) = \|q_k^{(r,s)}(\omega)\|, \\ r, s = 1, 2, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

oraz korzystając z (3.2), otrzymujemy wyrażenia

$$(3.4) \quad \begin{matrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}^k \lambda^{(k)} \varrho^{(k)} \begin{pmatrix} q_k^{(11)} A_1 + q_k^{(12)} B_1 \\ q_k^{(21)} A_1 + q_k^{(22)} B_1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

z pomocą których łatwo wyprowadzamy ze związków (2.2) równanie charakterystyczne o dość skomplikowanej postaci:

$$(3.5) \quad J_0(\lambda_1 \varrho_0) [q_{n-1}^{(12)}(\omega) J_0(\lambda_n \varrho_n) + q_{n-1}^{(22)}(\omega) Y_0(\lambda_n \varrho_n)] = \\ = Y_0(\lambda_1 \varrho_0) [q_{n-1}^{(11)}(\omega) J_0(\lambda_n \varrho_n) + q_{n-1}^{(21)}(\omega) Y_0(\lambda_n \varrho_n)].$$

Wielkości λ_1, λ_n określone są związkami (2.1) w zależności od ω .

Dodatknie pierwiastki ω_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) równania (3.5) tworzą widmo wartości własnych zagadnienia, czyli częstości drgań składających się na wypadkowy ruch błony.

4. Rozwiązania szczególne

Rozważmy wartość własną ω_m . Z zależności (3.4) otrzymujemy układ współczynników, odpowiadających tej wartości własnej

$$\begin{matrix} A_{k+1,m} \\ B_{k+1,m} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}^k \lambda_m^{(k)} \varrho^{(k)} [q_k^{(11)}(\omega_m) A_{1m} + q_k^{(12)}(\omega_m) B_{1m}], \\ \begin{matrix} A_{k+1,m} \\ B_{k+1,m} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}^k \lambda_m^{(k)} \varrho^{(k)} [q_k^{(21)}(\omega_m) A_{1m} + q_k^{(22)}(\omega_m) B_{1m}], \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Tutaj

$$(4.1) \quad \lambda_{km} = \frac{\omega_m}{c_k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \lambda_m^{(k)} = \lambda_{2m} \lambda_{3m} \dots \lambda_{k+1,m}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

zaś wartości A_{1m}, B_{1m} spełniają pierwszy ze związków (2.2), to znaczy

$$(4.1.1) \quad A_{1m} J_0(\lambda_{1m} \varrho_0) + B_{1m} Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) = 0.$$

Wstawienie tych wyrażeń do (2.1) prowadzi do rozwiązania szczególnego

$$(4.2) \quad v_{km}(\varrho, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \lambda_m^{(k-1)} \varrho^{(k-1)} S_{km}(\varrho) T_m(t), \quad 1 \leq k \leq n,$$

gdzie

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} \lambda_m^{(0)} &= \varrho^{(0)} = 1, \quad S_{1m}(\varrho) = Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) J_0(\lambda_{1m} \varrho) - J_0(\lambda_{1m} \varrho_0) Y_0(\lambda_{1m} \varrho), \\ S_{km}(\varrho) &= [q_{k-1}^{(11)}(\omega_m) Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) - q_{k-1}^{(12)}(\omega_m) J_0(\lambda_{1m} \varrho_0)] J_0(\lambda_{km} \varrho) + \\ &+ [q_{k-1}^{(21)}(\omega_m) Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) - q_{k-1}^{(22)}(\omega_m) J_0(\lambda_{1m} \varrho_0)] Y_0(\lambda_{km} \varrho), \quad 2 \leq k \leq n, \\ T_m(t) &= \frac{A_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0)} (C \cos \omega_m t + D \sin \omega_m t). \end{aligned}$$

5. Pomocnicze warunki ortogonalności

Spróbujmy teraz znaleźć pewne związki ortogonalności między funkcjami własnymi $S_{km}(\varrho)$ występującymi w (4.2). Ta interesująca próba opiera się na stwierdzeniu, że wyrażenia (4.2) spełniają zarówno układ równań (1.1), jak i warunki (1.2), (1.3).

Ujęcie matematyczne prowadzi do układu równań [symbol (ϱ) wprowadzono dla oznaczenia pochodnych względem ϱ]

$$(5.1) \quad \frac{d}{d\varrho} (\varrho S'_{km}) + \lambda_{km}^2 \varrho S_{km} = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$(5.2) \quad S_{1m}(\varrho_0) = 0, \quad S_{nm}(\varrho_n) = 0,$$

$$(5.3) \quad \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1,m} \varrho_k S_{k+1,m}(\varrho_k) = S_{km}(\varrho_k),$$

$$\frac{\pi}{2} \lambda_{k+1,m} \varrho_k S'_{k+1,m}(\varrho_k) = S'_{km}(\varrho_k), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Równania te spełnione są dla $m = 1, 2, 3, \dots$. Dla pewnych dwóch wartości własnych ω_m, ω_q otrzymujemy ze związków (5.1)

$$\begin{aligned} (\lambda_{km}^2 - \lambda_{kq}^2) \varrho S_{km} S_{kq} &= S_{km} \frac{d}{d\varrho} (\varrho S'_{kq}) - S_{kq} \frac{d}{d\varrho} (\varrho S'_{km}) = \\ &= \frac{d}{d\varrho} [\varrho (S_{km} S'_{kq} - S'_{km} S_{kq})], \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Całkując to wyrażenie w granicach $\varrho_{k-1} \leq \varrho \leq \varrho_k$, znajdujemy

$$\begin{aligned} (\lambda_{km}^2 - \lambda_{kq}^2) \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho &= \varrho_k \left| \begin{matrix} S_{km}(\varrho_k) & S_{kq}(\varrho_k) \\ S'_{km}(\varrho_k) & S'_{kq}(\varrho_k) \end{matrix} \right| - \\ &- \varrho_{k-1} \left| \begin{matrix} S_{km}(\varrho_{k-1}) & S_{kq}(\varrho_{k-1}) \\ S'_{km}(\varrho_{k-1}) & S'_{kq}(\varrho_{k-1}) \end{matrix} \right|, \quad 1 \leq k \leq n, \quad m, q = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Jednak, zgodnie z (5.3), mamy ogólnie

$$S_k(\varrho_{k-1}) = \frac{2}{\pi \lambda_k \varrho_{k-1}} S_{k-1}(\varrho_{k-1}), \quad S'_k(\varrho_{k-1}) = \frac{2}{\pi \lambda_k \varrho_{k-1}} S'_{k-1}(\varrho_{k-1}), \quad 2 \leq k \leq n,$$

stąd nasze poprzednie związki całkowe przyjmują postać

$$\begin{aligned} (\lambda_{km}^2 - \lambda_{kq}^2) \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho &= D_{kmq} - H_{k-1,mq} D_{k-1,mq}, \\ D_{kmq} &= \varrho_k \left| \begin{matrix} S_{km}(\varrho_k) & S_{kq}(\varrho_k) \\ S'_{km}(\varrho_k) & S'_{kq}(\varrho_k) \end{matrix} \right|, \quad H_{k-1,mq} = \frac{2^2}{\pi^2 \varrho_{k-1}^2 \lambda_{km} \lambda_{kq}}, \quad 1 \leq k \leq n; \end{aligned}$$

oczywiście dla $k = 1$ należy napisać zero zamiast $H_{0mq} D_{0mq}$.

Wprowadzenie oznaczeń

$$H_{mq}^{(k)} = H_{kmq} H_{k+1, mq} \dots H_{n-1, mq}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad H_{mq}^{(n)} = 1$$

i utworzenie liniowej kombinacji podanych poprzednio wyrażeń całkowych ze współczynnikami $H_{mq}^{(1)}, H_{mq}^{(2)}, \dots, H_{mq}^{(n)}$ daje [porównaj również drugi ze związków (5.2)]

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_{km}^2 - \lambda_{kq}^2) H_{mq}^{(k)} \int_{e_{k-1}}^{e_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho = H_{mq}^{(n)} D_{nmq} = 0, \quad m, q = 1, 2, 3, \dots$$

Łatwo teraz zauważyć, że

$$H_{mq}^{(k)} = \left(\frac{2^{n-k} \varrho^{(k-1)}}{\pi^{n-k} \varrho^{(n-1)}} \right)^2 \frac{\lambda_m^{(k-1)} \lambda_q^{(k-1)}}{\lambda_m^{(n-1)} \lambda_q^{(n-1)}}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

zaś poprzednie równanie przyjmuje postać [porównaj określenie λ_{km} w (4.1)]

$$(\omega_m^2 - \omega_q^2) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)}}{2^k c_k} \right) \lambda_m^{(k-1)} \lambda_q^{(k-1)} \int_{e_{k-1}}^{e_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho = 0,$$

$$m, q = 1, 2, 3, \dots$$

Otrzymujemy stąd warunki ortogonalności

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)}}{2^k c_k} \right) \lambda_m^{(k-1)} \lambda_q^{(k-1)} \int_{e_{k-1}}^{e_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho = 0,$$

$$m \neq q, \quad m, q = 1, 2, 3, \dots$$

konieczne do zbudowania ogólnego rozwiązania naszego zagadnienia.

6. Rozwiązanie zagadnienia ruchu błony

Zanim przystąpimy do zbudowania poszukiwanego rozwiązania, zwróćmy uwagę, że zależności (5.4) pozwalają na napisanie rozwinięcia

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \lambda_m^{(k-1)} S_{km}(\varrho) = F_k(\varrho), \quad e_{k-1} < \varrho < e_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$(6.1) \quad \gamma_m = \frac{Z_m}{N_m}, \quad Z_m = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)}}{2^k c_k} \right)^2 \lambda_m^{(k-1)} \int_{e_{k-1}}^{e_k} \varrho S_{km}(\varrho) F_k(\varrho) d\varrho,$$

$$N_m = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)} \lambda_m^{(k-1)}}{2^k c_k} \right)^2 \int_{e_{k-1}}^{e_k} \varrho S_{km}^2(\varrho) d\varrho, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Wracając do poszukiwanego rozwiązania $u_k(\varrho, t)$ zagadnienia opisanego związkami (1.1)-(1.4), przyjmujemy jak zwykle

$$(6.2) \quad u_k(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{km}(\varrho, t), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

gdzie wyrażenia $v_{km}(\varrho, t)$ są określone przez (4.2), (4.2.1). Zatem jedyna para nie spełnionych warunków (1.4) przyjmie postać

$$(6.3) \quad \begin{aligned} C \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0)} \lambda_m^{(k-1)} S_{km}(\varrho) &= f(\varrho), \\ D \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_m A_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0)} \lambda_m^{(k-1)} S_{km}(\varrho) &= g(\varrho), \end{aligned}$$

$\varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leq k \leq n.$

Z porównania (6.3) i (6.1) otrzymujemy

$$(6.4) \quad \frac{CA_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0)} = \frac{f_m}{N_m}, \quad \frac{DA_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0)} = \frac{g_m}{\omega_m N_m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie N_m jest określone przez (6.1), zaś f_m, g_m należy obliczyć z wzorów

$$(6.4.1) \quad \begin{aligned} f_m &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi^{k+1} \varrho^{(k-1)}}{2^{k+1} c_k^2} \lambda_m^{(k-1)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) \frac{f(\varrho)}{g(\varrho)} d\varrho, \\ g_m &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi^{k+1} \varrho^{(k-1)}}{2^{k+1} c_k^2} \lambda_m^{(k-1)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) \frac{f(\varrho)}{g(\varrho)} d\varrho, \end{aligned} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Wykorzystanie tych związków oraz zależności (4.2), (4.2.1) prowadzi do uzyskania ostatecznego rozwiązania (6.2) w postaci

$$(6.5) \quad u_k(\varrho, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{(k-1)}}{N_m} S_{km}(\varrho) \left(f_m \cos \omega_m t + \frac{g_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

7. Zestawienie wyników

Uważamy, że korzystne jest podanie krótkiego streszczenia rozważań, które doprowadziły do naszego skomplikowanego wyniku (6.5).

1. Wychoząc z założonych stałych $S, \sigma_k, k = 1, 2, \dots, n, \varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_{n-1}$ wyznaczamy na wstępie wielkości pomocnicze

$$(7.1) \quad c_k = \sqrt{\frac{S}{\sigma_k}}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \varrho^{(0)} = 1, \quad \varrho^{(k)} = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

i budujemy wyrażenia

$$(7.2) \quad \lambda_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad 1 \leq k \leq n;$$

ω jest nieokreślonym parametrem.

2. Stosujemy wzory (2.3.1) i (3.1) do skonstruowania macierzy $M_k(\omega)$, $1 \leq k \leq n-1$, które służą do ustawienia innego układu macierzy $Q_k(\omega)$, $1 \leq k \leq n-1$, zgodnie z (3.2).

3. Znajomość elementów $q_k^{(r,s)}(\omega)$ macierzy $Q_k(\omega)$, gdzie $r, s = 1, 2$, $1 \leq k \leq n-1$, pozwala napisać równanie charakterystyczne (3.5) i znaleźć jego dodatnie pierwiastki ω_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, czyli widmo wartości własnych naszego zagadnienia.

4. Wzory (4.1) pozwalają na wyznaczenie wielkości λ_{km} , $1 \leq k \leq n$, $\lambda_m^{(k)}$, $1 \leq k \leq n-1$, $m = 1, 2, 3, \dots$; prócz tego mamy $\lambda_m^{(0)} = 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

5. Wykorzystanie (4.2.1) prowadzi do wyznaczenia funkcji własnych $S_{km}(\rho)$, $1 \leq k \leq n$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

6. Z poprzednich wyników uzyskujemy możliwość wyznaczenia wielkości N_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, zgodnie z (6.1), oraz współczynników Fouriera f_m, g_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, wyznaczonych przez (6.4.1).

7. Po przeprowadzeniu operacji wskazanych w punktach 1-6 znajdujemy ostateczne rozwiązanie zagadnienia w postaci wzoru (6.5).

8. Błona jednorodna

Dla zilustrowania przeprowadzonych rozważań teoretycznych przynajmniej jednym prostym przykładem, rozważmy przypadek błony jednorodnej $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_n$ o gęstości powierzchniowej σ , poddanej równomiernemu rozciąganiu siłami o wielkości S .

Mamy wtedy

$$c_k = c = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}, \quad \lambda_k = \lambda = \frac{\omega}{c}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad A_k = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

zaś ze wzorów (2.3.1) otrzymujemy

$$a_k(\omega) = \beta_k(\omega) = \frac{2}{\pi \lambda \rho_k}, \quad a_k(\omega) = b_k(\omega) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

Stąd oraz z (3.1) i (3.2) mamy

$$M_k(\omega) = \frac{2}{\pi \lambda \rho_k} \begin{vmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{vmatrix}, \quad Q_k(\omega) = \frac{2^k}{\pi^k \lambda^k \rho^{(k)}} \begin{vmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Wykorzystując podane zależności otrzymujemy równanie charakterystyczne (3.5) w postaci

$$(8.1) \quad J_0(\lambda \rho_0) Y_0(\lambda \rho_n) - J_0(\lambda \rho_n) Y_0(\lambda \rho_0) = 0.$$

Z dodatnich pierwiastków ω_m , $m = 1, 2, 3, \dots$ tego równania znajdujemy (por. (4.1) i (4.2.1))

$$\lambda_{km} = \lambda_m = \frac{\omega_m}{c}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \lambda_m^{(k)} = \lambda_m^k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Znając λ_{km} otrzymujemy z (4.2.1) układ funkcji własnych

$$S_{km}(\varrho) = \frac{2^{k-1}}{\pi^{k-1} \varrho^{(k-1)} \lambda_m^{k-1}} [Y_0(\lambda_m \varrho_0) J_0(\lambda_m \varrho) - J_0(\lambda_m \varrho_0) Y_0(\lambda_m \varrho)],$$

$$1 \leq k \leq n, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

a ze wzorów (6.1) i (6.4.1) mamy

$$N_m = \frac{\pi^2}{4c^2} \int_{\varrho_0}^{\varrho_n} \varrho [Y_0(\lambda_m \varrho_0) J_0(\lambda_m \varrho) - J_0(\lambda_m \varrho_0) Y_0(\lambda_m \varrho)]^2 d\varrho =$$

$$= \frac{J_0^2(\lambda_m \varrho_0) - J_0^2(\lambda_m \varrho_n)}{2c^2 \lambda_m^2 J_0^2(\lambda_m \varrho_0)}$$

$$\frac{f_m}{g_m} = \frac{\pi^2}{4c^2} \int_{\varrho_0}^{\varrho_n} \varrho [Y_0(\lambda_m \varrho_0) J_0(\lambda_m \varrho) - J_0(\lambda_m \varrho_0) Y_0(\lambda_m \varrho)] \frac{f(\varrho)}{g(\varrho)} d\varrho.$$

Podstawiając otrzymane wyniki do rozwiązania (6.5) znajdujemy rozwiązanie ogólne zagadnienia sformułowanego związkami (1.1)-(1.4)

$$(8.2) \quad u(\varrho, t) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 J_0^2(\lambda_m \varrho_0) U(\lambda_m \varrho)}{J_0^2(\lambda_m \varrho_0) - J_0^2(\lambda_m \varrho_n)} \int_{\varrho_0}^{\varrho_n} \varrho U(\lambda_m \varrho) \left[f(\varrho) \cos \lambda_m ct + \right.$$

$$\left. + \frac{g(\varrho)}{c \lambda_m} \sin \lambda_m ct \right] d\varrho, \quad \varrho_0 \leq \varrho \leq \varrho_n, \quad t \geq 0.$$

Tutaj λ_m oznaczają dodatnie pierwiastki równania charakterystycznego (8.1), zaś przez $U(\lambda_m \varrho)$ oznaczono

$$(8.2.1) \quad U(\lambda_m \varrho) = Y_0(\lambda_m \varrho_0) J_0(\lambda_m \varrho) - J_0(\lambda_m \varrho_0) Y_0(\lambda_m \varrho).$$

Literatura cytowana w tekście

[1] V. Vodička, Fourier's Classical Problem in the Case of Stratiform Bodies, Arch. Mech. Stos. 1, 12 (1960).

[2] V. Vodička, Steady Temperature in a Composite Elliptic Cylinder, J. Phys. Soc. Japan 16 (1961), 1630.

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МЕМБРАНЫ

Мембрана в форме кругового кольца $\varrho_0 \leq \varrho \leq \varrho_n$ состоит из n однородных частей $\varrho_{k-1} \leq \varrho \leq \varrho_k$, $1 \leq k \leq n$ плотность поверхности которых равняется σ_k , $1 \leq k \leq n$.

Следует найти собственные колебания, если начальное состояние определяется данными функциями $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ и мембрана растягивается равномерными усилиями S .

Решение получено классическим методом характеристических функций, который представляет интересную точку зрения на этого рода вопрос, и отличается формальными достоинствами. Общие результаты применялись к специальному случаю однородной мембраны.

Summary

FREE VIBRATIONS OF NON-HOMOGENEOUS MEMBRANES

An annular membrane $\varrho_0 < \varrho < \varrho_n$ is assumed to be composed of n homogeneous parts $\varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k$, $1 < k < n$ with surface densities σ_k , $1 < k < n$. The problem is to determine the natural vibration if the initial state is determined by given functions $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ and the membrane is subject to a uniform tension S .

The solution is obtained by means of the classical method of characteristic functions, which gives an interesting view of these problems and has formal advantages. The general results are applied to the special case of a homogeneous membrane.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1962 r.
