

MIECZYSLAW MROWIEC I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTA RUROCIĄGU GRUBOŚCIENNEGO

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXIV**

TOM X • ZESZYT 3 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	519
2. Rozkład naprężeń	519
3. Wyprowadzenie równań krzywych granicznych	521
4. Linie równych naprężeń zastępczych w przekroju	526

1. Wstęp

W pracy będziemy rozpatrywali rurociąg grubościenny poddany jednoczesnemu działaniu ciśnienia wewnętrznego p i momentu zginającego M .

Celem pracy jest określenie krzywej granicznej w płaszczyźnie Mp odpowiadającej nośności sprężystej przekroju rurociągu.

Przez nośność sprężystą rozumiemy tu, podobnie jak w pracach [2] i [5], zespół obciążeń, wywołujący pierwsze odkształcenia plastyczne rozpatrywanego przekroju rurociągu. Znajomość takiej krzywej granicznej posiada znaczenie praktyczne wtedy, gdy odnoszenie obliczeń do nośności granicznej (plastycznej) nie jest uzasadnione np. z uwagi na charakter obciążeń lub zastosowany materiał.

Zajmiemy się również analizą rozkładu naprężeń występujących w przekroju rurociągu.

Przyjmujemy następujące założenia:

1. Materiał rurociągu jest idealnie sprężysto-plastyczny i podlega hipotezie Hubera-Misesa-Hencky'ego.

2. Rurociąg posiada oś prostoliniową, zatem w rozpatrywanym zakresie sprężystym rozkład naprężeń od ciśnienia wewnętrznego jest kołowo-symetryczny, a od zginania liniowy.

3. Pomija się ewentualne naprężenie cieplne (co częściowo można uzasadnić stosowaniem kompensacji) oraz zależność granicy plastyczności od temperatury.

4. Pomija się wpływ siły poprzecznej zakładając czyste zginanie.

5. Pomija się wpływ lokalnego wzrostu naprężeń spowodowanego naciskami podpór rurociągu.

Praca obecna stanowi uogólnienie i pewną kontynuację pracy [2] podającej krzywe graniczne dla rurociągu cienkościennego.

2. Rozkład naprężeń

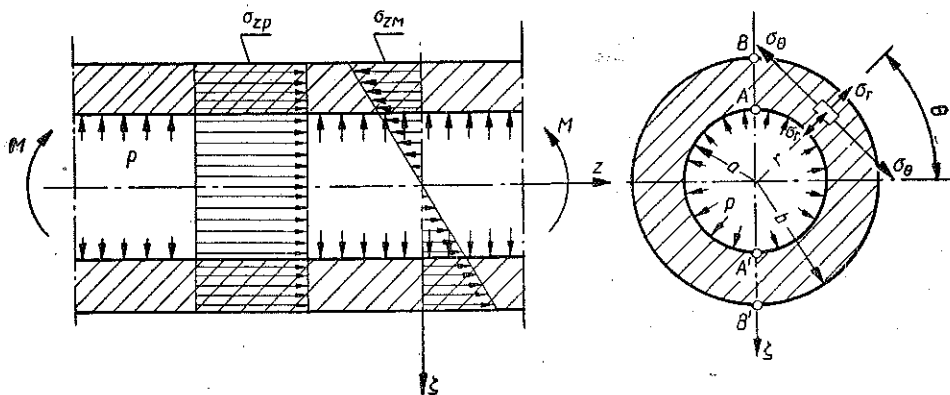
Przyjmujemy układ współrzędnych walcowych r, θ, z (rys. 1). Ciśnienie wewnętrzne p wywołuje w rurze o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b naprężenia, [3]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{a^2}{r^2} \frac{b^2 + r^2}{b^2 - a^2} p, \\ \sigma_r &= -\frac{a^2}{r^2} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} p. \end{aligned}$$

Wywołane przez ciśnienie wewnętrzne p naprężenia osiowe, które oznaczamy przez σ_{zp} , zależą od charakteru pracy rurociągu.

Rozpatrzmy trzy typowe przypadki. Jeżeli rurociąg może się swobodnie wydłużać (np. wskutek kompensacji), to mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia i $\sigma_{zp} = 0$. Jeżeli rurociąg jest zamocowany na obu końcach, to występuje płaski stan odkształcenia $\varepsilon_{zp} = 0$. W przypadku ustalonej temperatury z prawa Hooke'a otrzymamy wtedy

$$(2.2) \quad \sigma_{zp} = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{2\nu a^2}{b^2 - a^2} p.$$



Rys. 1

Jeżeli wreszcie rurociąg jest zamknięty dnami, to

$$(2.3) \quad \sigma_{zp} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p.$$

Wszystkie trzy rozpatrywane przypadki można ująć łącznie wzorem

$$(2.4) \quad \sigma_{zp} = \frac{2\psi a^2}{b^2 - a^2} p,$$

gdzie $\psi = 0$, $\psi = \nu$ lub $\psi = 1/2$ zależnie od charakteru pracy rurociągu.

Wprowadzając bezwymiarową zmienną (promień)

$$(2.5) \quad \rho = r/b$$

oraz oznaczając

$$(2.6) \quad \beta = a/b,$$

określmy rozkład naprężeń nieco prostszymi wzorami

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\beta^2 (1 + \varrho^2)}{\varrho^2 (1 - \beta^2)} p, \\ \sigma_r &= - \frac{\beta^2 (1 - \varrho^2)}{\varrho^2 (1 - \beta^2)} p, \\ \sigma_{z\varphi} &= \frac{2\psi\beta^2}{1 - \beta^2} p. \end{aligned}$$

Naprężenia pochodzące od zginania oznaczamy przez σ_{zM} . Przyjmując, że moment σ_z o zwrocie pokazanym na rys. 1 jest dodatni, mamy

$$(2.8) \quad \sigma_{zM} = \frac{M}{J} \zeta = - \frac{M}{J} \varrho b \sin \theta,$$

gdzie J jest momentem bezwładności przekroju, ζ zmienną pokazaną na rys. 1. Naprężenie σ_z wyniesie więc ostatecznie

$$(2.9) \quad \sigma_z = \frac{2\psi\beta^2}{1 - \beta^2} p - \frac{Mb}{J} \varrho \sin \theta.$$

3. Wyprowadzenie równań krzywych granicznych

W przypadku jednoczesnego działania kilku obciążeń najbardziej pogładowe przedstawienie zakresu pracy i prawdopodobieństwa osiągnięcia stanu niebezpiecznego daje powierzchnia lub krzywa graniczna. Jej znajomość umożliwia np. obliczenie wyężenia przy dowolnym, znanym prawdopodobieństwie zmian poszczególnych obciążeń, [4] i [6].

W rozpatrywanym przypadku równaniem wyjściowym, określającym krzywą graniczną będzie

$$(3.1) \quad \sup \sigma_0^2(r, \theta) = Q_r^2,$$

gdzie symbol \sup oznacza kres górny funkcji σ_0 w obszarze pierścienia $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (por. G. M. FICHTENHOLC, [1], s. 208), natomiast Q_r jest granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu. Naprężenia zastępcze (zredukowane) określimy w oparciu o hipotezę energii odkształcenia postaciowego za pomocą wzoru

$$(3.2) \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]},$$

a po podstawieniu (2.7) i (2.9):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_0^2(r, \theta) &= \left[\frac{2\beta^2}{\varrho^2 (1 - \beta^2)} p \right]^2 + \left[\frac{\beta^2 (1 + \varrho^2)}{\varrho^2 (1 - \beta^2)} p - \frac{2\psi\beta^2}{1 - \beta^2} p + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Mb}{J} \varrho \sin \theta \right]^2 + \left[\frac{\beta^2 (1 - \varrho^2)}{\varrho^2 (1 - \beta^2)} p + \frac{2\psi\beta^2}{1 - \beta^2} p - \frac{Mb}{J} \varrho \sin \theta \right]^2. \end{aligned}$$

Najpierw zbadamy zachowanie się tej funkcji ze względu na zmienną θ . Pochodna względem θ wynosi

$$(3.4) \quad \frac{\partial (2\sigma_0^2)}{\partial \theta} = \frac{4Mb\varrho}{J} \cos \theta \left[\frac{\beta^2 (1-2\psi)}{1-\beta^2} p + \frac{Mb}{J} \varrho \sin \theta \right].$$

Z uwagi na symetrię wystarczy rozpatrzyć przedział $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Jeżeli drugi wyraz w nawiasie jest dostatecznie mały wobec pierwszego, to pochodna ma w całym rozpatrywanym obszarze ten sam znak, mianowicie znak iloczynu Mp . W przeciwnym razie przy większym wpływie zginania pochodna jest równa zero dla

$$(3.5) \quad \theta = \theta^* = - \arcsin \frac{\beta^2 (1-2\psi) J p}{(1-\beta^2) Mb\varrho}$$

oraz jest ujemna dla $\theta < \theta^*$, a dodatnia dla $\theta > \theta^*$. Oznacza to, iż w punkcie $\theta = \theta^*$ [a raczej wzdłuż linii $\theta = \theta^*$ (ϱ)] występuje minimum wyężenia materiału. Kres górny może być osiągnięty zatem jedynie w punktach (wzdłuż linii) $\theta = \pi/2$ lub $\theta = -\pi/2$, gdzie pochodna jest też równa zero. By porównać bezpośrednio oba te przypadki obliczymy różnicę

$$(3.6) \quad 2\sigma_0^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2\sigma_0^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{8\beta^2 (1-2\psi) b\varrho}{(1-\beta^2) J} Mp.$$

Znak tej różnicy jest więc znakiem iloczynu Mp . W przypadku równych znaków momentu gnącego i ciśnienia wewnętrznego poszukiwany kres górny może być osiągnięty na linii $\theta = \pi/2$, a w przypadku różnych znaków na linii $\theta = -\pi/2$. Fizykalne uzasadnienie tego wniosku jest proste, bowiem wzdłuż tych linii naprężenia od zginania i ciśnienia wewnętrznego posiadają różne znaki, co jest przypadkiem wytrzymałościowo mniej korzystnym.

Szczegółowo zajmiemy się jedynie analizą przypadku równych znaków M i p . Podstawiając $\sin \theta = 1$ do równania (3.3), dzieląc je przez 2 i porządkując, otrzymujemy

$$(3.7) \quad \sigma_0^2(\varrho) = \frac{\varrho^2 b^2}{J^2} M^2 + \frac{2\beta^2 (1-2\psi) \varrho b}{(1-\beta^2) J} Mp + \frac{(\varrho^4 - 4\varrho^4 \psi + 4\varrho^4 \psi^2 + 3) \beta^4}{(1-\beta^2)^2 \varrho^4} p^2.$$

Wprowadzimy najpierw, podobnie jak w pracy [2], bezwymiarowy moment gnący

$$(3.8) \quad m = \frac{b}{JQ_r} M$$

oraz bezwymiarowe ciśnienie wewnętrzne

$$(3.9) \quad q = \frac{\sqrt{3+\beta^4}}{(1-\beta^2) Q_r} p.$$

Współczynniki proporcjonalności dobrane są tak, by zachodziły równości $m = 1$ przy pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych przy czystym zginaniu oraz $q = 1$ przy działaniu tylko ciśnienia wewnętrznego w przypadku płaskiego stanu naprężenia ($\psi = 0$). Zamiast (3.7) będziemy teraz badać funkcję

$$(3.10) \quad S^2(\varrho) = \frac{\sigma_0^2(\varrho)}{Q_0^2} = \varrho^2 m^2 + \frac{2\beta^2(1-2\psi)\varrho}{\sqrt{3+\beta^4}}mq + \\ + \frac{(\varrho^4 - 4\varrho^4\psi + 4\varrho^4\psi^2 + 3)\beta^4}{(3+\beta^4)\varrho^4}q^2.$$

Przyrównanie do jedności kresu górnego tej funkcji w przedziale $\beta \leq \varrho \leq 1$ określi poszukiwaną krzywą graniczną.

Wykażemy teraz, że wewnątrz przedziału $\beta < \varrho < 1$ nie może wystąpić lokalne maksimum funkcji $S^2(\varrho)$. Mamy mianowicie

$$(3.11) \quad \frac{d^2(S^2)}{d\varrho^2} = 2m^2 + \frac{60\beta^4}{(3+\beta^4)\varrho^6}q^2 > 0,$$

co wyklucza możliwość istnienia maksimum. Wobec tego kres górny funkcji (3.10) może być osiągnięty tylko w punkcie $\varrho = \beta$ (punkt *A* na rys. 1) lub w punkcie $\varrho = 1$ (punkt *B* na rys. 1).

Ze względów fizycznych jest oczywiste, że przy przeważającym wpływie ciśnienia wewnętrznego punktem niebezpiecznym jest punkt *A*, a przy przeważającym wpływie zginania punkt *B*. Wobec tego krzywa graniczna będzie składać się z części elipsy odpowiadającej punktowi *A*, mianowicie

$$(3.12) \quad \beta^2 m^2 + \frac{2\beta^2(1-2\psi)}{\sqrt{3+\beta^4}}mq + \frac{3+(1-2\psi)^2\beta^4}{3+\beta^4}q^2 = 1$$

oraz części elipsy, odpowiadającej punktowi *B*, o równaniu

$$(3.13) \quad m^2 + \frac{2\beta^2(1-2\psi)}{\sqrt{3+\beta^4}}mq + \frac{4\beta^4(1-\psi+\psi^2)}{3+\beta^4}q^2 = 1.$$

Napiżemy oba te równania krótko w postaci

$$(3.14) \quad A_1 m^2 + A_2 q^2 + Bmq = 1.$$

Łatwo się przekonać, że są to elipsy, obliczając wartość wyróżnika odpowiedniej formy kwadratowej. Równanie ich możemy sprowadzić do postaci normalnej przez dokonanie odpowiedniego obrotu, na przykład

$$(3.15) \quad m = \bar{m} \cos \varphi - \bar{q} \sin \varphi, \\ q = \bar{m} \sin \varphi + \bar{q} \cos \varphi.$$

Przyrównując do zera współczynnik przy iloczynie $m\varphi$ określimy kąt obrotu φ za pomocą wzoru

$$(3.16) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A_1 - A_2}$$

Zatem w przypadku punktu A

$$(3.17) \quad \operatorname{tg} 2\varphi_A = \frac{2\beta^3 (1 - 2\psi) \sqrt{3 + \beta^4}}{3 - 3\beta^2 + (1 - 2\psi)^2 \beta^4 - \beta^6},$$

a w przypadku punktu B

$$(3.18) \quad \operatorname{tg} 2\varphi_B = \frac{2\beta^2 (1 - 2\psi) \sqrt{3 + \beta^4}}{3 - (3 - 4\psi + 4\psi^2) \beta^4}$$

Długość półosi można określić za pomocą wzoru

$$(3.19) \quad a, b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_1 + A_2 \pm \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + B^2}}}$$

Ostatecznych wyników podstawienia dla punktów A i B nie będziemy przytaczali.

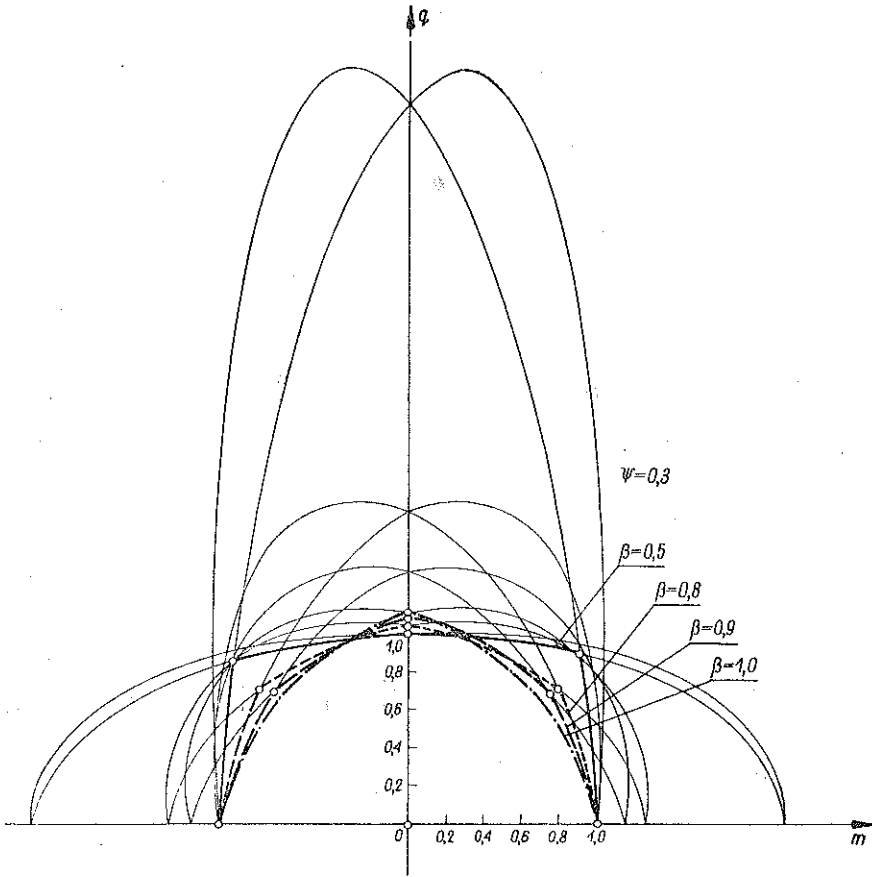
Wyniki obliczeń numerycznych zestawiono w tabelicy 1. Podaje ona wartość kątów obrotu i długości dla $\psi = 0$, $\psi = 0,3$ i $\psi = 0,5$ (co odpowiada trzem typowym warunkom pracy rurociągu) oraz $\beta = 0,5$, $\beta = 0,8$ i $\beta = 0,9$. Wyniki uzyskane dla tej ostatniej wartości β różnią się nieznacznie od przypadku rurociągu idealnie

Tablica 1. Kąty obrotu φ oraz długości półosi elips, tworzących krzywe graniczne

β	ψ	punkt A			punkt B		
		φ	a	b	φ	a	b
0,5	0	$-5^\circ 25'$	0,996	2,03	$8^\circ 40'$	0,989	4,08
	0,3	$-2^\circ 15'$	1,008	2,01	$3^\circ 30'$	0,998	4,04
	0,5	0	1,020	2,00	0	1,000	4,04
0,8	0	$-29^\circ 15'$	0,934	1,425	$26^\circ 25'$	0,925	1,841
	0,3	$-21^\circ 35'$	1,032	1,292	$12^\circ 10'$	0,985	1,722
	0,5	0	1,063	1,252	0	1,000	1,685
0,9	0	$-37'$	0,889	1,392	$35^\circ 48'$	0,875	1,542
	0,3	$-38^\circ 55'$	1,011	1,262	$19^\circ 1'$	0,973	1,38
	0,5	0	1,102	1,122	0	1,000	1,36

ciężkościennego ($\beta = 1$), zbadanego w pracy [1]. Rurociągi o stosunku promieni β zawartym w przedziale $0,9 < \beta < 1$ można więc uważać za ciężkościennie, jak to się czyni zresztą zazwyczaj. Można łatwo wykazać, że w przypadku różnych znaków ciśnienia wewnętrznego p i momentu zginającego M krzywe graniczne będą łukami elips, stanowiących lustrzane odbicie dotychczas badanych elips

względem osi m lub osi q . Istotnie, zamiast $\sin \theta = 1$ należy podstawić $\sin \theta = -1$, a ponieważ funkcja ta występuje przy momencie zginającym i tylko przy momencie zginającym, więc otrzymujemy w wyniku równania (3.12) i (3.13) ze zmiennym znakiem przy iloczynie mq . Całkowita krzywa graniczna będzie więc składać się z łuków czterech elips, będzie mianowicie ośmiokątem krzywoliniowym (rys. 2 i 3).



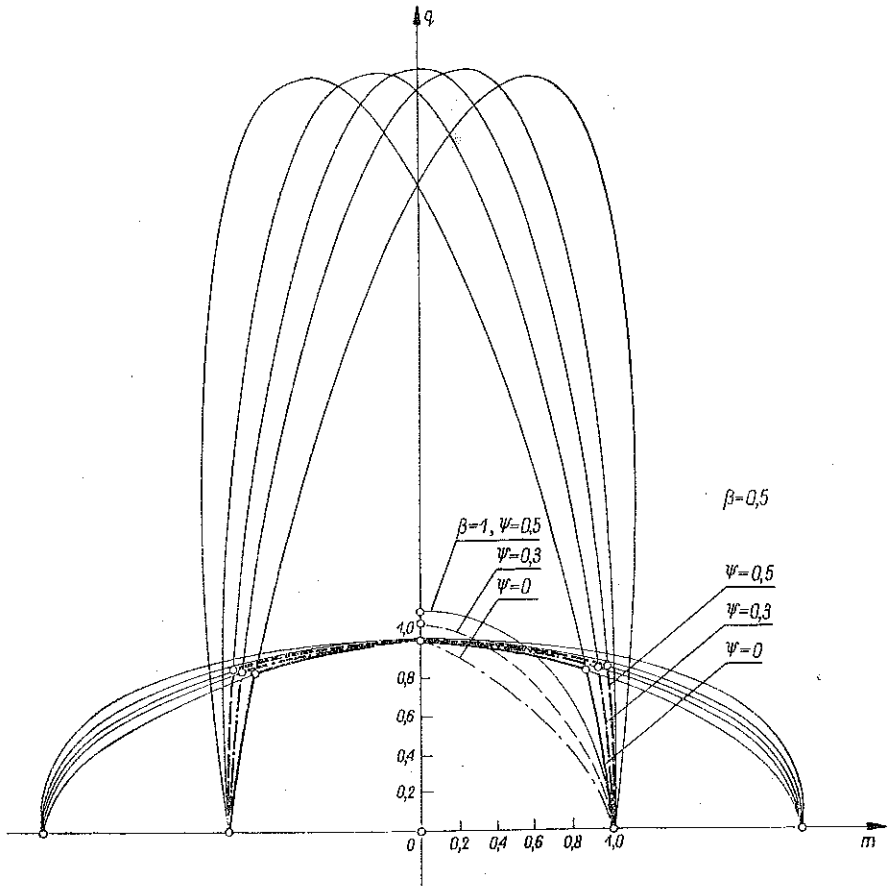
Rys. 2

Rysunek 2 przedstawia wpływ zmiany parametru β (stosunek promienia wewnętrznego do zewnętrznego rury) przy ustalonym $\psi = 0,3$, a rys. 3 wpływ zmiany parametru ψ (przy ustalonym $\beta = 0,5$) na kształt krzywych granicznych.

Współrzędne wierzchołków ośmiokąta można określić ściśle, rozwiązując układ równań (3.12) i (3.13). Rugując z tego układu jedną z niewiadomych otrzymujemy mianowicie równanie dwukwadratowe ze względu na drugą. Ostateczne wzory mają jednak postać złożoną i nie będziemy ich przytaczali.

4. Linie równych naprężeń zastępczych w przekroju

Oprócz krzywych granicznych w płaszczyźnie obciążeń bardzo dobrze charakteryzują pracę elementu linie równych naprężeń zastępczych, zwane czasami liniami równego wyężenia. Stanowią one ponadto podstawę analizy sprężysto-plastycznego zakresu pracy elementu wyznaczając ściśle lub w pewnym przybliżeniu granicę między strefą sprężystą a plastyczną.



Rys. 3

W rozpatrywanym przez nas przypadku otrzymamy równanie linii równych naprężeń zastępczych przez przyrównanie wyrażenia (3.3) do pewnej stałej, a ściśle biorąc parametru, odpowiadającego poszczególnym liniom. Oznaczamy ten parametr przez $2a^2 Q^2$, symbol a będzie wtedy określał, jakiemu ułmkowi granicy plastyczności Q_r odpowiada dana linia równych naprężeń zastępczych. Dzielać

tak otrzymane równanie przez $2Q^2$ i wprowadzając bezwymiarowe obciążenia (3.8) i (3.9) uzyskujemy

$$(4.1) \quad \varrho^2 m^2 \sin^2 \theta + \frac{2\beta^2 (1-2\psi) \varrho}{\sqrt{3+\beta^4}} m q \sin \theta + \frac{[(1-2\psi)^2 \varrho^4 + 3] \beta^4}{(3+\beta^4) \varrho^4} q^2 - \alpha^2 = 0.$$

Przy ustalonej wartości parametru α równanie to określa linię równych naprężeń zastępczych, mianowicie posiada postać $F(\varrho, \theta) = 0$. Efektywne naszkicowanie tej linii jest ułatwione w przypadku rozwikłania równania (4.1) ze względu na jedną ze zmiennych. Ze względu na zmienną ϱ jest to dość skomplikowane równanie szóstego stopnia, natomiast bez trudu daje się rozwiązać ze względu na $\sin \theta$. Dzieląc je przez $\varrho^2 m^2$ i wprowadzając oznaczenia

$$(4.2) \quad S_1 = \frac{(1-2\psi)\beta^2 q}{m \sqrt{3+\beta^4}} \varrho^{-1},$$

$$S_2 = \frac{3\beta^4 q^2}{(3+\beta^4) m^2} \varrho^{-6} + \left[\frac{(1-2\psi)^2 \beta^4 q^2}{(3+\beta^4) m^2} - \frac{\alpha^2}{m^2} \right] \varrho^{-2},$$

gdzie S_1 i S_2 są funkcjami ϱ (zależnymi również od stosunku promieni rury β , charakteru pracy rury ψ , obciążeń m i q i parametru linii α), otrzymujemy równanie

$$(4.3) \quad \sin^2 \theta + 2S_1 \sin \theta + S_2 = 0$$

o pierwiastkach

$$(4.4) \quad \sin \theta_{1,2} = -S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - S_2}.$$

Wielkości kątów θ_1 i θ_2 w zależności od parametru α i ϱ zestawiono w tabelicy 2.

Poddamy teraz analizie linie równych naprężeń zastępczych σ_0 określone równaniem (4.3). Różniczkując to równanie względem θ i ϱ otrzymujemy

$$(4.5) \quad 2 \cos \theta (\sin \theta + S_1) d\theta + (2S_1' \sin \theta + S_2') d\varrho = 0,$$

przy czym przecinkami u góry oznaczono różniczkowanie względem ϱ . Warunkami ekstremum badanych linii ze względu na zmienne ϱ i θ będą więc kolejno

$$(4.6) \quad \sin \theta + S_1 = 0, \quad 2S_1' \sin \theta + S_2' = 0.$$

Ekstremalny promień ϱ zostaje więc osiągnięty wzdłuż linii

$$(4.7) \quad \theta = \theta^* = -\arcsin S_1 = -\arcsin \frac{(1-2\psi)\beta^2 q}{m \varrho \sqrt{3+\beta^4}}.$$

Jest to oczywiście wzór (3.5) przepisany w postaci bezwymiarowej.

Tablica 2. Wielkości kątów θ_1 i θ_2 w zależności od α i q
obliczone według (4.4) dla $\beta = 0,5$, $\psi = 0,3$, $q = 0,82$, $m = 0,93$

$\alpha \backslash q$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,3 θ_1					8° 0'	10° 35'
0,3 θ_2					-14° 30'	-16° 35'
0,4 θ_1				15° 10'	18° 25'	17° 45'
0,4 θ_2				-22° 45'	-25° 30'	-25° 10'
0,5 θ_1			17° 40'	27° 0'	27° 20'	26° 10'
0,5 θ_2			-26° 40'	-35° 30'	-34° 55'	-33° 45'
0,6 θ_1		6° 25'	34° 15'	38° 30'	36° 30'	34° 10'
0,6 θ_2		-16° 15'	-45° 0'	-48° 25'	-45° 0'	-41° 10'
0,7 θ_1		41° 30'	50° 15'	51° 0'	46° 30'	42° 10'
0,7 θ_2		-56° 10'	-65° 55'	-64° 40'	-57° 0'	-50° 40'
0,8 θ_1		68° 30'	73° 20'	67° 30'	58° 40'	51° 30'
0,8 θ_2		—	—	—	-75° 0'	-63° 50'
0,9 θ_1	46° 55'				76° 55'	63° 40'
0,9 θ_2	-68° 40'				—	-85° 50'
1,0 θ_1	90°					90°
1,0 θ_2	—					—

Drugie równanie (4.6) nie określa w sposób równie prosty linii, wzdłuż której występuje ekstremalny kąt θ , bowiem w wyrażeniu S_2' występuje parametr α , który należy wyrugować. Mamy mianowicie

$$(4.8) \quad -\frac{2(1-2\psi)\beta^2 q}{m\sqrt{3+\beta^4}} e^{-2} \sin \theta - \frac{18\beta^4 q^2}{(3+\beta^4)m^2} e^{-6} - \frac{2(1-2\psi)\beta^4 q^2}{(3+\beta^4)m^2} e^{-3} + \frac{2\alpha^2}{m^2} e^{-3} = 0,$$

a po podstawieniu α^2 z równań (4.1) otrzymujemy następujące równanie, określające poszukiwaną linię ekstremalnych kątów θ :

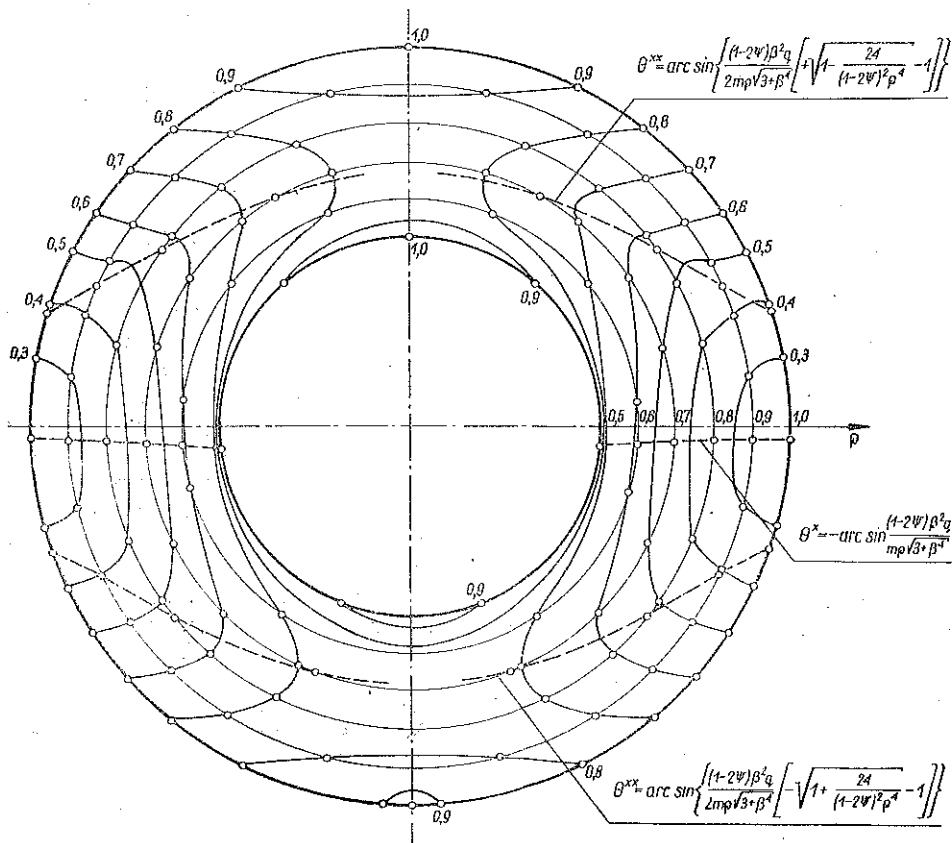
$$(4.9) \quad \sin^2 \theta + \frac{(1-2\psi)\beta^2 q}{m q \sqrt{3+\beta^4}} \sin \theta - \frac{6\beta^4 q^2}{(3+\beta^4)m^2 q^6} = 0.$$

Równanie to daje się łatwo rozwiązać ze względu na $\sin \theta$ i ostatecznie

$$(4.10) \quad \theta = \theta^{**} = \arcsin \left\{ \frac{(1-2\psi)\beta^2 q}{2m q \sqrt{3+\beta^4}} \left[\pm \sqrt{1 + \frac{24}{(1-2\psi)^2 q^4} - 1} \right] \right\}.$$

W przypadku szczególnym $\psi = 1/2$ (rurociąg zamknięty dnami) symbol nieoznaczony (4.10) przechodzi w

$$(4.11) \quad \theta^{**} = \pm \arcsin \frac{\beta^2 q \sqrt{6}}{m \rho^3 \sqrt{3 + \beta^4}}$$



Rys. 4

Znajomość pomocniczych linii (4.7) i (4.10) ułatwia znacznie naszkicowanie poszukiwanych linii równych naprężeń zastępczych. Rysunek 4 podaje przykład linii równych naprężeń zastępczych dla

$$\beta = 0,5, \quad \psi = 0,3, \quad q = 0,82, \quad m = 0,93;$$

te ostatnie wartości odpowiadają równym naprężeniom zastępczym w punktach *A* i *B*, czyli wierzchołkowi krzywej granicznej. Na rysunku tym liniami przerywanymi zaznaczono pomocnicze krzywe ekstremów (4.7) i (4.10).

Литература цитована в текście

- [1] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. I, Москва-Ленинград 1949.
- [2] M. MROWIEC, *Analiza nośności sprężystej rurociągu cienkościennego*, Czasop. Techn., 10, 66 (1961).
- [3] L. SILBERRING, *Obliczenia wytrzymałościowe rurociągów*, P.W.T. Warszawa 1959.
- [4] M. ŻYCZKOWSKI, *Wyteżenie materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inżyn., 4, 8 (1960), 725-761.
- [5] M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wyteżenia*, Rozpr. Inżyn., 4, 9 (1961).
- [6] M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie wyteżenia materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inżyn., 2, 10, (1962).

Резюме

УПРУГАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА

Определяются предельные кривые в плоскости: изгибающий момент — внутреннее давление, соответствующее упругой несущей способности толстостенного трубопровода (появление первых пластических деформаций в случае идеально-упруго-пластического материала). Рассматривается три типичных случая работы трубопровода, отвечающие плоскому напряженному состоянию, плоскому деформированному состоянию и закрытому днищам цилиндра. Они представлены совместно, введением коэффициента ψ , причем приведенным выше случаям соответствует последовательно $\psi = 0$, $\psi = \nu$ и $\psi = 0,5$.

Основываясь на гипотезе прочности Губера-Мизеса-Генки определяется верхний предел эквивалентного напряжения σ_0 ; доказывается, что этот предел может появиться только лишь на внутренних радиусах, а не на посредственном радиусе. Предельные кривые состоят из дуг эллипса. На рис. 2 указывается зависимость предельных кривых от толщины трубопровода, а на рис. 3 — от характера работы (коэффициента ψ). На рис. 4 дается пример распределения линий одинаковых эквивалентных напряжений σ_0 в сечении трубопровода.

Summary

THE ELASTIC LOAD CARRYING CAPACITY OF A THICK-WALLED PIPE-LINE

The aim of this paper is to determine the limit curves in the plane of which the coordinates are the bending moment and the internal pressure, for the elastic load carrying capacity of a thick-walled pipe-line (the appearance of first plastic strains in a perfect elastic-plastic material). Three typical cases are considered: those of plane stress, plane strain and the case of a cylinder closed by bottoms. These cases are treated collectively by introducing the coefficient ψ the respective values of which are $\psi = 0$, $\psi = \nu$ and $\psi = 0.5$.

On the basis of the Huber-Mises-Hencky strain theory the upper bound of the equivalent stress σ_0 is found. It is shown that it can be reached at the inner or the outer radius only, not the middle radius. The limit curves are composed of ellipse arches. Figure 2 shows the relation between the limit curves and the wall thickness and Fig. 3 — the dependency of these curves on the character of the work (coefficient ψ). Figure 4 represents an example of the pattern of the lines of equal equivalent stresses σ_0 in a cross-section of the pipe.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1961 r.