

ZBIGNIEW WASIUTYŃSKI, ANDRZEJ BRANDT

AKTUALNY STAN WIEDZY
O KSZTAŁTOWANIU WYTRZYMAŁOŚCIOWYM KONSTRUKCJI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXV

TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	309
2. Przegląd historyczny	311
3. Kształtowanie na minimalny ciężar	316
4. Kształtowanie konstrukcji hiperstatycznych równej wytrzymałości	319
5. Kształtowanie na minimum potencjału	321
6. Inne metody kształtowania wytrzymałościowego konstrukcji	323
7. Bibliografia kształtowania wytrzymałościowego	324

1. Wstęp

Tematyka zagadnień kształtowania jest związana bezpośrednio z projektowaniem konstrukcji zarówno historycznie, jak i merytorycznie. Problemy określania kształtu konstrukcji rozwijały się z biegiem czasu wraz z projektowaniem budowli różnego rodzaju. W sensie merytorycznym kształtowanie i projektowanie konstrukcji mają wspólne podstawowe cele i tendencje. Wymienić tu można dążenie do wyznaczania formy konstrukcji, stwierdzenie o zależności pomiędzy kształtem a siłami wewnętrznymi, dążenie do zmniejszenia ciężaru i objętości konstrukcji oraz konieczność uprzedniego określenia warunków zewnętrznych i cech materiałów.

Końcowym zadaniem konstruktora jest wyznaczenie kształtu konstrukcji, a nie sił w niej działających. Konstruktor bowiem po zakończeniu swej pracy wskazuje wykonawcy kształt konstrukcji, materiał z jakiego ma być wykonana i sposób prowadzenia budowy. Wyznaczanie sił wewnętrznych jest jednym z etapów projektowania, który ma na celu udowodnienie słuszności obranego kształtu i stwierdzenie, że kształt ten jest zgodny z obowiązującymi przepisami i normami.

Podstawą projektowania i kształtowania konstrukcji jest stwierdzenie zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi i formą. Konstruktor korzysta z istnienia tej zależności w dwojaki sposób: określając kształt na podstawie znajomości układu sił wewnętrznych oraz wyznaczając siły wewnętrzne, występujące w elemencie w danym kształcie. Pierwsza czynność polega na określaniu kształtu i wymiarów konstrukcji, druga zaś obejmuje rachunkowe sprawdzenie przydatności obranego kształtu. Teoria kształtowania ma na celu wprowadzenie metod analitycznych na miejsce intuicyjnego szkicowania konstrukcji, tak aby była ona dostosowana do warunków wytrzymałościowych. Projektowanie bez teorii kształtowania polega więc na formułowaniu przypuszczeń i sprawdzaniu ich rachunkiem, gdy kształtowanie konstrukcji pozwala w sposób ścisły określić formę na podstawie danych warunków wytrzymałościowych.

Jednym z celów kształtowania jest wykonanie konstrukcji z najmniejszej ilości materiału. W projektowaniu, w którym kształt wyznaczony jest intuicyjnie, osiągnięcie tego celu sprawdzane jest rachunkowo po wykonaniu projektu przez obliczenie objętości materiałów. Natomiast przy stosowaniu teorii kształtowania postępowanie jest odmienne: posługując się warunkiem minimum objętości lub też warunkiem stałej objętości dla minimum odkształcalności, z góry zapewniamy sobie uzyskanie konstrukcji o najmniejszym zużyciu materiału. Jak wiadomo, metody te prowadzą do matematycznego wyznaczania ekstremów pewnych funkcji przy spełnieniu określonych warunków ubocznych.

Zadania o wyznaczaniu kształtu konstrukcji w oparciu o zależności pomiędzy siłami i parametrami kształtu mogą być sformułowane z wprowadzeniem większej liczby poszukiwanych parametrów lub też z wprowadzeniem mniejszej ich liczby. W pierwszym przypadku sformułowania prowadzą do rezultatów bardziej złożonych i z tego powodu nie mogą być rozwiązywane w postaci ogólnej. Stąd zakres ich zastosowań jest wąski. Odwrotnie, zagadnienia, w których występuje mniejsza liczba poszukiwanych parametrów, a więc zawierające więcej założeń przyjętych a priori, mogą być rozwiązywane bardziej szczegółowo i prowadzą do praktycznych wyników. W obu jednak przypadkach sformułowane zagadnienia zawierają tylko część parametrów, charakteryzujących kształt konstrukcji. Pozostała część uwzględniona jest na podstawie prostych rozumowań i porównywania różnych wariantów projektowych.

Powyższe uwagi pozwalają na stwierdzenie, że kształtowanie konstrukcji nie zastępuje projektowania, a jest tylko jego fragmentem. Analityczne kształtowanie konstrukcji jest udoskonaleniem i uzupełnieniem pierwszego etapu projektowania — obierania kształtu. Następny etap, którym jest sprawdzenie przydatności wytrzymałościowej i ekonomicznej, obowiązuje projektanta niezależnie od tego, jaką drogą kształt konstrukcji został wyznaczony.

Okazuje się więc, że zarówno intuicyjne rozważania projektanta, zmierzające do określenia formy konstrukcji, jak i ściśle wyznaczanie kształtu zmierzają do tego samego celu.

Zagadnienia analitycznego i intuicyjnego kształtowania należą do zagadnień wyboru. Kryterium wyboru kształtu jest zależne od założeń, jakie ma spełniać konstrukcja, wpływa przeto ono decydująco na rezultat wyboru. W kształtowaniu i w projektowaniu konstrukcji posługiwano się dawniej innymi kryteriami niż obecnie, a w przyszłości niewątpliwie dzisiejsze zasady będą zastąpione innymi. Nie ma więc bezwzględnych kryteriów kształtowania, które mogłyby zawsze obowiązywać.

Zagadnienia wyboru w działalności produkcyjnej i usługowej zaliczane są do zagadnień ekonomicznych. Stąd też niekiedy teoria kształtowania jest uważana za teorię ekonomiczną. Mniemanie to jest niesłuszne, gdyż w zagadnieniach kształtowania występują tylko niektóre parametry wpływające na wybór ekonomiczny; rozwiązania otrzymane w ten sposób nie mogą więc stanowić podstawy do tego wyboru. W kształtowaniu uwzględniona jest przecież bezpośrednio tylko ta część kosztu konstrukcji, która związana jest z objętością materiału. Pomija się natomiast większość warunków wykonawczych, wpływ czasu budowy i czasu użytkowania konstrukcji oraz nakłady i efekty pośrednie.

Zagadnienia kształtowania konstrukcji były rozmaicie formułowane, zależnie od potrzeb konstrukcyjnych, od aktualnego stanu wiedzy w zakresie mechaniki technicznej oraz często od indywidualnych tendencji badaczy. Opisane poniżej kierunki kształtowania, pomimo poważnych różnic, łączy wspólny sposób rozumowania i związek z innymi zagadnieniami projektowania konstrukcji.

Prace w zakresie kształtowania wytrzymałościowego prowadzone są w wielu ośrodkach niezależnie, a nawet, jak się wydaje, bez wzajemnej znajomości stanu i zakresu rozwiązań. Są one jeszcze tematem nielicznych publikacji, a wskutek tego samo zagadnienie i jego odrębność łatwo mogą być niezauważone. Wydaje się również, że w wielu przypadkach niedoceniana jest ważność zagadnień kształtowania wytrzymałościowego z punktu widzenia teoretycznego i praktycznego.

Praca niniejsza ma na celu naszkicowanie rozwoju teorii kształtowania wytrzymałościowego oraz przedstawienie w ogólnych zarysach współczesnych kierunków badań.

2. Przegląd historyczny

Historia kształtowania konstrukcji jest związana z rozwojem technicznym naszej cywilizacji. Formy zarówno budowli jak i wszystkich wytwarzanych przedmiotów są wynikiem procesu kształtowania, niekiedy nawet nieświadomego. Można sformułować różne kryteria określania kształtu, a więc na przykład sposób użytkowania przedmiotów, ich wygląd zewnętrzny lub wytrzymałość w ogólnym tego słowa znaczeniu. Najczęściej przy obieraniu formy przedmiotu uwzględniane są w różnym stopniu rozmaite kryteria kształtowania.

Trudno określić, od kiedy rozpoczęło się świadomie wyznaczać kształty konstrukcji z uwagi na ich wytrzymałość. Zbiega się to jednak zapewne z zastosowaniem pojęcia siły i praw mechaniki jako podstaw konstruowania budowli i innych urządzeń. Za początek tego okresu przyjęto uważać rok 1638, w którym Galileusz wydał swoje *Rozprawy i dowody matematyczne z zakresu dwóch nauk dotyczących mechaniki i ruchów miejscowych*, [1]. Od tego bowiem czasu współczesna mechanika stanowi podstawę rozwoju wszelkich konstrukcji, w szczególności ustrojów budowlanych, [2], [18], [20].

Wśród metod kształtowania wytrzymałościowego trzeba wymienić najpierw drogę prób i mimowolnych doświadczeń zarówno w sensie bezpośredniego tworzenia konstrukcji, jak i opracowywania hipotez rachunkowych. Próby te są podstawowym elementem celowego działania i stanowiły ważną drogę kształtowania konstrukcji od najdawniejszych czasów. Droga ta zresztą nie jest bynajmniej obecnie całkowicie zarzucona. Prowadzi ona jednak do zamierzonego celu w sposób na ogół przypadkowy, a czas poświęcony na wykonywanie prób bezużytecznych i nieudanych liczy się niekiedy setkami lat. Jako przykład można tu przytoczyć historię kratownic mostowych od rzymskich łuków drewnianych, połączonych z układem pomostu, do współczesnych ustrojów poprzez dziwaczne kształty kratownic Bollmana, Finka i Longa, [17].

Bardziej doskonałą metodą kształtowania konstrukcji jest wykonywanie świadomych prób w skali naturalnej lub na modelach. Próby takie wykonywał już Leonardo da VINCI, później GALILEUSZ i EULER. Obecnie metoda badania przydatności kształtu na modelach jest nadal często niezastąpiona w odniesieniu do złożonych układów, płyt, rusztów czy powłok.

Metody analitycznego sprawdzania wytrzymałości ustroju są znacznie późniejsze i opierają się na zauważonych związkach pomiędzy kształtami, wymiarami geometrycznymi elementów i właściwościami materiałów a wytrzymałością konstrukcji. Przy rozpatrywaniu tych związków powstał szereg hipotez wytrzymałościowych, wśród których wyróżnić można trzy grupy: hipotezy o zniszczeniu materiału, hipotezy o bezpiecznych wartościach współczynników pewności oraz hipotezy o wartości ustroju. W tym ostatnim przypadku po sformułowaniu określonej zasady uzależniającej kształt od sił wewnętrznych nie sprawdza się tej hipotezy i rzeczowego zakresu jej słuszności.

Metody sprawdzania wytrzymałości są obecnie bardzo szczegółowo opracowane i szeroko rozpowszechniane. Rozwój ich jest związany z jednej strony z pogłębianiem znajomości materiałów konstrukcyjnych, z drugiej strony z rozbudową metod matematyki i mechaniki niezbędnych do analizy złożonych konstrukcji. Należą tu zarówno metoda naprężeń dopuszczalnych jak i wprowadzona od niedawna metoda nośności granicznej. Cechą wspólną tych metod jest zakładanie *a priori* kształtu konstrukcji na podstawie doświadczenia lub intuicji, a następnie sprawdzanie słuszności tego założenia. W przypadku spełnienia przez siły wewnętrzne przyjętych hipotez wytrzymałościowych bezpieczeństwo konstrukcji jest zapewnione, natomiast celowość przyjętego kształtu nie podlega w ogóle sprawdzeniu.

Metoda ustrojów równej wytrzymałości chociaż również związana jest jak i poprzednie z hipotezami wytrzymałościowymi, różni się jednak od nich schematem logicznym. Część bowiem parametrów kształtu przyjmuje się tu jako niewiadome, określane w zależności od sił wewnętrznych i przyjętych hipotez. Inne parametry, związane nie z wytrzymałością kształtowanego elementu, ale np. ze sposobem jego wytwarzania lub połączenia z sąsiednimi częściami konstrukcji, są przyjmowane *a priori* w zależności od warunków zadania. W ten sposób otrzymuje się rozwiązanie nie drogą kolejnych prób, których każdorazowa wartość obiektywna jest niemożliwa do ustalenia, lecz w wyniku dedukcji z warunku równego wyęteżenia. Oto kilka dat wskazujących na rozwój metod równej wytrzymałości:

GALILEUSZ w roku 1638 wyznaczył kształt belek zginanych równej wytrzymałości ogłaszając wyniki w postaci kilku przykładów. W belkach tych skrajne naprężenia normalne były równe we wszystkich przekrojach, [1].

F. BLONDEL i P. WURTZ (1661 r.) zastosowali metodę Galileusza wykazując jednak, że kształt paraboliczny zarysu belki o prostokątnym przekroju poprzecznym związany jest ze stałym położeniem obciążenia skupionego. Wyznaczyli oni zarys w kształcie elipsy w przypadku obciążenia ruchomego, [2].

Jakub BERNOULLI (1687 r.) w liście do LEIBNITZA rozpatrywał kształt belki równej wytrzymałości stosując rachunek różniczkowy.

Izaak NEWTON (1687 r.) ogłosił rozwiązanie zagadnienia o kształcie linii łańcuchowej jako krzywej «najmniejszej wytrzymałości».

Antoine PARENT i Alessandro MARCHETTI (w latach 1708, 1710, i 1711) rozważali zagadnienie belek równej wytrzymałości pod obciążeniami ruchomymi [4], [5] i [6].

Daniel BERNOULLI (1733 r.) przesłał EULEROWI rozwiązanie zadania o wyznaczeniu kształtu belki zginanej równej wytrzymałości uwzględniając przy tym ciężar własny belki.

Thomas YOUNG (1807 r.) zwrócił uwagę na nieprzydatność belek kształtowanych z warunku równej wytrzymałości na zginanie, wobec zerowych przekrojów na podporach. Proponował on wyznaczenie kształtu belek na odcinkach w pobliżu podpór wzdłuż stycznych do zarysu równej wytrzymałości, [10].

Jules SÉGUIN (1851 r.) konstruował belki stalowe wyznaczając kształt pasów z warunku wyrównania skrajnych naprężeń normalnych, [13].

Arthur J. MORIN (1853 r.) rozszerzył zagadnienia równej wytrzymałości na kratownice wskazując na jednakowe co do wartości bezwzględnej odkształcenia w prętach jako na zaletę kratownic w stosunku do innych konstrukcji, [15].

Barré de SAINT-VENANT (1864 r.) rozpatrywał belki równej wytrzymałości uwzględniając łącznie zginanie ze ścinaniem oraz zginanie ze skręcaniem, [18].

Karl CULMANN (1866 r.) zajmował się kratownicami o prętach równej wytrzymałości z zastrzeżeniem dostatecznej sztywności prętów ściskanych, [19].

Obszerne opracowania zagadnień kratownic i łuków równej wytrzymałości opublikował Maurice LÉVY (1873 r.). W zakresie kratownic podał on ważne twierdzenie o nieistnieniu kratownic hiperstatycznych równej wytrzymałości pod obciążeniem stałym. LÉVY uzyskał również kształty osi łuków równej wytrzymałości bezpośrednio, nie zakładając *a priori* ciężaru własnego, [20].

A. G. M. MICHELL (1904 r.) opierając się na twierdzeniu udowodnionym przez MAXWELLA wskazał na możliwość poszukiwania kształtów ramownic o minimalnym ciężarze materiału, [21].

Metoda kształtowania ustrojów równej wytrzymałości okazała się najbardziej przydatna w odniesieniu do łuków i belek, gdzie pomijając drogę kolejnych prób wyznacza się niektóre parametry kształtu. Jednak nie rozwiązuje ona zagadnienia całkowicie, np. pozwala na określenie tylko wskaźnika wytrzymałości przekroju belki zginanej, podczas gdy kształt przekroju nie może być tą drogą wyznaczony, podobnie jak układ węzłów i prętów w kratownicy równej wytrzymałości.

Współczesny rozwój metod kształtowania konstrukcji idzie w kilku niezależnych od siebie kierunkach, z których wymienić można następujące:

- 1) kształtowanie konstrukcji hiperstatycznych równej wytrzymałości,
- 2) kształtowanie z warunku najmniejszego potencjału sprężystości przy danej objętości tworzywa,
- 3) kształtowanie z warunku najmniejszego ciężaru,
- 4) inne mniej licznie reprezentowane kierunki badań, w których kształt ustroju jest przedmiotem poszukiwań.

Zestawienie ośrodków, w których zagadnienia kształtowania wytrzymałościowego są podejmowane wraz z nazwiskami pracowników publikujących współcześnie tematy z tego zakresu przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1. Ośrodki teorii kształtowania konstrukcji

Kraj	Miasto	Nazwiska pracowników naukowych
Francja	Paryż	J. R. ROBINSON, Y. GUYON,
Polska	Gliwice	S. KAUFMAN, J. MAMES, T. HOP, Z. SULIMOWSKI, W. STAROSOLSKI,
	Kraków Szczecin Warszawa	B. KOPYCIŃSKI, J. SUŁOCKI, W. OLSZAK, A. SAWCZUK, Z. MRÓZ, J. RYCHLEWSKI, Z. BRZOSKA, S. ŁUKASIEWICZ, J. KAPKOWSKI, L. TOMASZEWSKI, W. ZALEWSKI, J. DRAGUŁA, A. WŁODARZ, B. KOY, Z. WASIUTYŃSKI, A. BIERNAWSKI, A. BRANDT, W. DZIENISZEWSKI, J. GRYZCZ, S. JENDO, J. IGNACZAK J. KOSMOWSKI, W. MARKS,
Szwajcaria	Zurich	W. SCHUMANN,
Węgry	Budapeszt	P. CSONKA,
W. Brytania	Londyn	H. L. COX, H. E. SMITH, J. HEYMAN, J. FOULKES, H. G. HOPKINS, R. G. ROBERTSON, HSUAN-LOH SU, S. KRISHNAN, K. V. SHETTY,
	Newcastle upon Tyne	G. EASON,
Włochy	Rzym Triest	P. L. NERVI, O. ZANABONI, L. SOBRERO,
USA	Nowy Jork	H. H. HILTON, F. R. SHANLEY, J. DRYMAEL, G. GERARD, M. FEIGEN,
	Providence	W. PRAGER, E. T. ONAT, D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, W. FREIBERGER, L. HU, B. TEKINALP,
ZSRR	Moskwa	I. M. RABINOWICZ, A. I. WINOGRADOW, N. I. GUREWICZ, A. G. ŁOŻKIN, W. I. RUDNIEW, I. J. SZTAJERMAN, H. G. CZENCOW, K. G. PROTASOW, K. M. CHUBERJAN,
	Charków	F. I. SLUSARCZUK, A. F. SMIRNOW, W. M. WACHURKIN, W. C. BLINOW, J. A. RADCIG,

Kształtowanie konstrukcji o równej wytrzymałości, prowadzone jest przez liczną grupę badaczy rosyjskich, współpracowników I. M. RABINOWICZA. Przedmiotem prac tej grupy są głównie ramownice, belki ciągłe i łuki.

I. M. RABINOWICZ (1933 r.) opublikował podstawową pracę dotyczącą wyboru optymalnego ustroju ze zbioru konstrukcji o równej wytrzymałości, [28].

J. I. GUREWICZ (1954 r.) opublikował szereg rozwiązań dotyczących kształtowania belek hiperstatycznych zginanych i skręcanych, [68]. A. I. WINOGRADOW (1955 r.) udowodnił, że ekstremum występujące w tych zadaniach jest jedyne w prze-

dziale odpowiadającym warunkom rzeczywistym i że jest to minimum, [79], [102], [103], i in.

Prace nad kształtowaniem konstrukcji na minimum potencjału są prowadzone w Polsce przez Z. WASIUTYŃSKIEGO i jego współpracowników.

Z. WASIUTYŃSKI (1939 r.) opublikował podstawowe twierdzenia, poprzedzone obszernym przeglądem historycznym, oraz przykłady zastosowania do wyznaczania kształtu belek stalowych, [39]. Z. WASIUTYŃSKI (1950 r.) opublikował dwie prace o przekształceniu kratownicy przez wprowadzenie nowych prętów i węzłów, [44], [45]. Ten sam autor (w r. 1951) ogłosił pracę o kształtowaniu słupów podając metodę wyznaczania przekrojów poprzecznych słupów równej wytrzymałości, [47].

Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT i J. KOSMOWSKI (w 1957 r.) opublikowali rozwiązanie zadania o wyznaczeniu położenia węzła łączącego trzy pręty z warunku minimum potencjału kratownicy, [97]. Zadanie to zostało później w roku 1960 rozwiązane ponownie przy zastosowaniu geometrii przez A. BIERNAWSKIEGO i B. GROCHOWSKIEGO, [138].

Z. WASIUTYŃSKI i A. BRANDT opublikowali pierwsze próby kształtowania belek z betonu sprężonego na minimum potencjału, [96], [105] i [106].

A. BRANDT i J. IGNACZAK (1958 r.) ogłosili kilka dalszych rozwiązań w zakresie kształtowania belek sprężonych, [107].

J. KOSMOWSKI (1960 r.) opracował zagadnienie wyznaczania układu prętów w czterowęzłowym polu kratownicy, [131]. J. GRYCZ podał sposób przekształcenia pola kratownicy przez wymianę prętów, [132].

Z. WASIUTYŃSKI przedstawił rozwiązania zadania o kształtowaniu belek stalowych dwuteowych i skrzynkowych oraz opublikował obszerny opis krytyczny metod poszukiwania kształtów konstrukcji budowlanych, [129], [130] i [145].

A. BRANDT opublikował kilka zadań o kształtowaniu belek sprężonych na minimum potencjału, [137], [140].

Kształtowanie na najmniejszy ciężar oparte jest na teorii plastyczności. Określone parametry kształtu są wyznaczone z warunku, aby przy danym obciążeniu nastąpiło zniszczenie konstrukcji przez równoczesne uplastycznienie materiału we wszystkich punktach. Jest to przeto inaczej sformułowane kształtowanie na równą wytrzymałość.

Prace w tym kierunku prowadzone są głównie w Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej przez W. PRAGERA i jego współpracowników w Brown University.

J. FOULKES (1953 r.) opublikował pracę o kształtowaniu ramownic na minimum ciężaru materiału w stanie granicznym, [58]. Pracę o podobnej tematyce opublikował w tymże roku Jacques HEYMAN, [48] i [59]. W następnej pracy z r. 1954 o kształtowaniu ramownic J. FOULKES sformułował warunki, jakie musi spełniać rozkład momentów zginających w chwili zniszczenia i podał ogólną metodę kształtowania ramownic, [61].

E. T. ONAT i W. PRAGER (1955 r.) ogłosili pracę o kształtowaniu łupin cylindrycznych z uwagi na najmniejsze zużycie materiału, [75]. H. G. HOPKINS i W. PRAGER

zajmowali się kształtowaniem płyt kołowych w podobnych założeniach i określili zmienność grubości w skrajnych przypadkach, [76]. W. PRAGER podał analogicznie rozwiązania dla płyt niekołowych, [77].

W. FREIBERGER i B. TEKINALP (1956 r.) opublikowali następne rozwiązania dotyczące płyt pełnych i sandwichowych kształtowanych na minimum ciężaru, [88]. D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD określili ogólne cechy kształtowania konstrukcji w zakresie plastycznym, [90].

W roku 1960 Zenon Mróz opublikował w Polsce i w Stanach Zjednoczonych kilka prac o kształtowaniu płyt w założeniach przyjętych przez grupę W. PRAGERA, [110], [116] i [141].

Poza tymi licznie reprezentowanymi kierunkami badań wspomnieć należy o następujących pracach traktujących o kształtowaniu wytrzymałościowym: S. KAUFMAN w r. 1920 opracował zagadnienie wykreślnego wyznaczania kształtu belek kratowych, [23]. B. KOPYCIŃSKI (1953 i 1957 r.) zajmował się ekonomicznym kształtowaniem przekroju belki sprężonej, [60] i [94]. Y. GUYON (1954 r.) podał pewne wskazówki o kształtowaniu i zastosowaniu belek równej wytrzymałości, [62]. J. R. ROBINSON (1954 r.) umieścił w książce o betonie sprężonym rozważania o wyznaczaniu kształtów belek sprężonych z uwagi na ekonomię materiałów, [127]. S. KAUFMAN i T. HOP (1954, 1956 i 1959 r.) ogłosili szereg rozwiązań dotyczących kształtowania przekroju poprzecznego belek sprężonych, [65], [73], [91], [95] i [117]. J. MAMES (1957 r.) opublikował metodę projektowania i dobierania niektórych parametrów kształtu belek ciągłych z betonu sprężonego, [99]. Wreszcie w latach 1958 i 1960 H. H. HILTON rozpatrywał zagadnienie optymalnego kształtu w świetle teorii prawdopodobieństwa, [114] i [144].

3. Kształtowanie na minimalny ciężar

Poszukiwania kształtów konstrukcji z warunku minimum ciężaru «minimum weight design» prowadzone są przez W. PRAGERA i jego współpracowników.

Przedmiotem badań są ustroje hiperstatyczne następujących rodzajów: ramownice płaskie, [58] i [61]; łupiny cylindryczne, [142]; płyty pełne o różnych kształtach i sposobach podparcia na obwodzie, [100] i [125], płyty sandwichowe, [100], [125] i [146]; belki ciągłe, [98].

Celem prac jest wyznaczenie poszczególnych parametrów kształtu, którymi są przekroje poprzeczne prętów ramownicy lub belki ciągłej, stałe na długości każdego pręta; zmienna grubość łupiny, zmienna grubość płyty pełnej oraz zmienna grubość warstw zewnętrznych w płycie sandwichowej.

Obciążenie zewnętrzne przyjmowane jest w postaci sił skupionych lub rozłożonych w sposób ciągły. Obciążenia te przyłożone są w stałych punktach oraz niemal we wszystkich przypadkach są stałe co do wielkości w czasie.

Parametry kształtu wyznaczone są z warunku minimalnej objętości materiału konstrukcji rozpatrując jej zniszczenia przez uplastycznienie pod danym obciążeniem.

W przypadku ramownic i belek zniszczenie następuje przez powstanie takiej ilości przegubów plastycznych, która powoduje geometryczną zmienność wszystkich części ustroju. W przypadku łupin lub płyt warunek zniszczenia przez uplastycznienie związany jest z powstaniem przegubów plastycznych w ilości odpowiadającej poszukiwanym parametrom kształtu, co przy elementach o ciągłej zmienności, np. grubości, prowadzi do warunku równoczesnego uplastycznienia całej objętości konstrukcji.

W pracach tych przyjęto, że materiał jest jednorodny, sprężysty i idealnie plastyczny; założenie o minimum objętości odpowiada minimum ciężaru. Wpływ sił stycznych na kształt jest pominięty podobnie jak zagadnienie stateczności prętów i inne uboczne względy konstrukcyjne. Prace te nie dotyczą zasadniczo konstrukcji betonowych ze względu na przyjęte założenia.

Zainteresowanie zagadnieniem kształtowania w odróżnieniu od analizy wytrzymałościowej i statycznej wyjaśnia i tłumaczy kilka zdań w pracy [98] oraz [90]:

«Although design rather than analysis is the real problem in machines and structures, far more research effort is spent on analysis. The reason is primarily the specific nature of the problem posed and the greater possibility of obtaining an unambiguous solution. Many forward steps have been taken toward the highly desired goal of direct design of structures as contrasted with usual procedure of an informed guess followed by analysis. The complexity of elastic analysis is so great, that it is not surprising to find design so strongly based on empiricism and arbitrary rule despite great effort to develop scientific procedures».

Ocena metod projektowania powszechnie stosowanych obecnie znajduje się również w pracy [98]:

«The assumption of perfect plasticity opens the possibility of direct design in the strict sense as opposed to preliminary guess and repeated analysis with the end point not necessarily the best that can be achieved».

Powyższe sformułowania są zupełnie zbieżne z określeniem metody kształtowania na minimum potencjału a stanowią podstawy również innych kierunków kształtowania, przy czym zbieżność ta jest zjawiskiem wtórnym w stosunku do niezależnego opracowania.

Określenie celów kształtowania oraz związku z praktyką opisane jest w wielu pracach uczonych amerykańskich, [76], [90] i in. i można je streścić następująco :

Kształt elementu jest wynikiem kompromisu pomiędzy kosztem materiału a kosztem robocizny. Kształt odpowiadający minimum objętości, nawet jeśli nie jest bezpośrednio przydatny praktycznie, to jednak stanowić może kryterium oceny innych rozwiązań oraz zawiera ważne wskazówki o kształcie konstruowanego elementu. Wyznaczenie kształtu prowadzone jest niezależnie od trudności i kosztów związanych z wykonawstwem.

Również wiele aspektów praktycznych i konstrukcyjnych trzeba pominąć. Niektóre jednak podstawowe cechy kształtu elementu wynikające z praktycznego zastosowania mogą być uwzględnione poprzez dobór *a priori* niektórych paramet-

rów kształtu. Można tu wymienić niezmienny układ prętów ramownic i stały przekrój na długości pręta poszczególnych pręseł belek ciągłych i ramownic. Kształtowane konstrukcje rozpatrywane są w stanie zniszczenia przez uplastycznienie i optymalny kształt wyznaczony jest w tym stanie. Takie sformułowanie określa zakres zastosowań wyprowadzonych zależności do zagadnień, w których materiał posiada cechy plastyczne oraz wykorzystywany jest w pobliżu granicy sprężystości, [112].

Sprawę tę wyjaśnia W. PRAGER w pracy [128]:

«Dans la détermination des dimensions nécessaires des éléments d'une construction, l'ingénieur se base en général sur la théorie de l'élasticité. Cependant, une construction faite de matériaux ductiles peut supporter des charges nettement supérieures à celles qui produisent les premières déformations non élastiques. La détermination de la sollicitation d'une telle construction doit donc être basée sur la théorie de la plasticité».

Podobne uzasadnienie przyjęcia stanów plastycznych jako podstawy kształtowania podają D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD, [90] i [98]: «The material will be idealized as perfectly plastic so that the results have the same physical validity as conventional limit analysis».

«In addition to providing more realistic answers for ductile materials, the great advantage of limit analysis over elastic analysis is its relative simplicity».

W roku 1958 założenia dotyczące materiału zostały rozszerzone na materiały niejednorodne w pracach [110], [111] i [112].

Określenie plastycznego zakresu pracy materiału związane jest bezpośrednio z konstrukcjami mechanicznymi wykonywanymi z metali oraz z metalowymi ustrojami budowlanymi, do których odnosi się opisana metoda kształtowania.

Podstawowe rozwiązania i twierdzenia opublikowane dotychczas można zestawić w sposób następujący:

1. Rozwiązanie zagadnienia o wyznaczeniu przekrojów poprzecznych pręseł ramownic i belek ciągłych.
2. W przypadku niemożności uzyskania jednoznacznego rozwiązania wskazano na istnienie obszaru ograniczonego, zawierającego rozwiązanie minimalne.
3. Rozwiązano zagadnienie zmienności grubości łupin cylindrycznych.
4. Wyznaczono zmienną grubość płyt o różnym kształcie i różnym sposobie podparcia.
5. Wskazano istnienie minimum względnego w przypadku płyt pełnych i minimum absolutnego w przypadku płyt sandwiczowych.
6. Stwierdzono, że szybkość dysypacji energii odniesionej do jednostki objętości przy uplastycznieniu jest stała w całym ustroju o minimalnym kształcie.
7. Otrzymano rozwiązania w zakresie kształtowania konstrukcji z materiałów niejednorodnych.

4. Kształtowanie konstrukcji hiperstatycznych równej wytrzymałości

Prace w tym kierunku były rozpoczęte przez I. M. RABINOWICZA, a następnie kontynuowane przez grupę jego współpracowników, wśród których wymienić można: A. I. WINOGRADOWA, [41], [50], [66], [67], i [79]; J. I. GUREWICZA, [68]; F. I. ŚLUSARCZUKA, [54] i [55]; J. A. RADCIĞA, [53] i innych, [34], [40], [42], [43], [49], [51], [72], [78], [80], [92], [93], [104].

Przedmiotem badań są konstrukcje hiperstatyczne, których pręty poddane są zginaniu, zginaniu ze ściskaniem lub rozciąganiem oraz skręcaniu. Przeważnie są to ustroje budowlane, a niekiedy tylko części mechanizmów.

Przyjęto do rozważań materiał jednorodny i sprężysty. Równa wytrzymałość związana jest z wyrównaniem skrajnych naprężeń w przekroju poprzecznym odpowiadających naprężeniom dozwolonym. Wartości tych naprężeń mogą być różne w poszczególnych elementach ustroju, a także np. mogą różnić się znakiem. W większości opracowanych zadań przyjmowane są skrajne naprężenia jednakowe co do bezwzględnych wartości w całej konstrukcji.

Siły wewnętrzne wyznaczane są za pomocą wzorów technicznej teorii zginania. Pominęto całkowicie zagadnienie stateczności oraz wpływ innych drugorzędnych zagadnień konstrukcyjnych na kształt elementów podobnie jak wpływ sił stycznych.

Ciążar własny traktowany jest jako obciążenie zewnętrzne. Obciążenie użytkowe w postaci sił skupionych lub równomiernie rozłożonych może być ustawiane w dowolny sposób, aby otrzymywać skrajne wartości sił we wszystkich przekrojach.

Celem kształtowania jest wyznaczenie ustrojów o minimalnym ciężarze własnym, który traktowany jest jako ważny czynnik ekonomicznego projektowania, podobnie jak to wyjaśniono w p. 3.

Rozróżnić należy dwa rodzaje stawianych zagadnień: zadania o kształtowaniu przekrojów poprzecznych elementów oraz zadania ogólniejsze, w których również przedmiotem kształtowania jest geometryczny układ osi elementów. Większość opublikowanych rozwiązań dotyczy pierwszego z wymienionych przypadków. Zadanie ogólniejsze znalazło rozwiązanie jedynie w odniesieniu do łuków i sklepień. Przy kształtowaniu przekrojów poprzecznych zasadniczy ich charakter jest określony uprzednio, np. przekrój dwuteowy, skrzynkowy lub prostokątny, pewne parametry kształtu jak wysokość lub pole przekroju wyznaczane są analitycznie, zaś pozostałe szczegółowe wymiary mogą być dobrane z warunków konstrukcyjnych.

Kształtowanie odbywa się przez wypisanie warunków, przy których pierwsza wariacja objętości względem odwrotności sztywności przyjmuje wartości zerowe. Jako zmienne w tych warunkach występują współrzędne punktów zmiany znaku momentów zginających i sił normalnych. Po wyznaczeniu położenia punktów zerowych mogą one być traktowane jako fikcyjne przeguby. Otrzymałą w ten sposób konstrukcję izostatyczną łatwo jest zwymiarować, tak aby we wszystkich przekrojach występowały określone naprężenia.

W przypadku jednego układu obciążeń położenie punktów zerowych jest stałe i pomimo uważania ich za przeguby, obroty sąsiadujących części równe są zeru,

tak że ciągłość konstrukcji zostaje zachowana. Jeżeli trzeba rozpatrzeć szereg różnych układów obciążeń, to odpowiadają im rozmaite położenia punktów zerowych. W tym przypadku rozwiązanie w postaci ustrojów minimalnych istnieje przy uwzględnieniu zmienności reakcji zewnętrznych, które mogą wywierać na konstrukcję siły dowolne w pewnych granicach. Za pomocą punktów zerowych ustroje hiperstatyczne zastąpione są w rozważaniach przez ustroje izostatyczne.

Przedmiotem opisanego procesu kształtowania nie jest jeden określony ustrój, a cały układ konstrukcji podobnych. Wspólnymi cechami ustrojów tworzących układ są naprężenia równej wytrzymałości, [28], jednakowy układ osi elementów oraz to samo obciążenie. Ustroje te różnią się pomiędzy sobą rodzajem podpór, układem rzeczywistym przegubów oraz przekrojami poprzecznymi elementów. Do układu wchodzi zarówno ustroje hiperstatyczne jak i izostatyczne.

Kształtowanie polega zatem na wybraniu ze zbioru ustrojów równej wytrzymałości takiej konstrukcji, która odpowiada warunkowi minimum materiału.

Poważnym osiągnięciem metody przewidzianych z góry naprężeń jest ujęcie w sposób ścisły w rachunku wpływu zmienności obciążeń. Zagadnienie to nie zostało w swoim czasie opracowane przez M. LÉVY'EGO, który zajmował się również kształtowaniem konstrukcji hiperstatycznych. Znane twierdzenie M. LÉVY'EGO znalazło więc tu swoje uogólnienie i rozszerzenie mimo pozornej sprzeczności, tkwiącej w samym procesie kształtowania konstrukcji hiperstatycznych, sprzecznym z tym twierdzeniem. Należy bowiem zwrócić uwagę, że przy kształtowaniu konstrukcji hiperstatycznych I. M. RABINOWICZ posiłkuje się schematami ustrojów izostatycznych przez wykorzystanie punktów zerowych wielkości sił oraz wprowadzenie wstępnych sił podporowych. Ta ostatnia metoda znana praktycznie dawno w budowie mostów łukowych i kamiennych pozwala na rozwiązanie szeregu nowych problemów teorii kształtowania konstrukcji. Powstawać tu może jedynie pytanie, czy droga poprzez rozpatrywanie konstrukcji hiperstatycznych jest najprostsza.

Niektóre ważniejsze twierdzenia opracowane przez współpracowników I. M. RABINOWICZA zestawiamy poniżej:

1. Twierdzenie o ciągłości sił podporowych wewnątrz zbioru składającego się z konstrukcji o jednakowym układzie osi geometrycznych.
2. Kryterium na minimum ciężaru decyduje o wariacyjnym charakterze zagadnienia i prowadzi do równań, w których niewiadomymi są współrzędne punktów zerowych wykresów sił i momentów.
3. Poszukiwanie ustrojów minimalnych prowadzi do rozwiązań równej wytrzymałości.
4. Poszukiwanie ustrojów minimalnych prowadzi do traktowania ustrojów hiperstatycznych jako izostatycznych za pomocą punktów zerowych i sił wstępnych, wywieranych przez podpory.
5. Uzyskanie ustrojów minimalnych pod działaniem różnych układów obciążeń jest możliwe tylko przy założeniu odpowiednich sił podporowych.

5. Kształtowanie na minimum potencjału

Przedmiotem kształtowania są obecnie następujące elementy konstrukcyjne: kratownice płaskie i przestrzenne, [44], [45], [97], [115], [131], [132] i [138], słupy, [47], łuki, [87] i [126], belki stalowe i żelazobetonowe, [33] i [129], belki z betonu sprężonego, [96], [106], [107], [124], [137], [143] i inne. Ostatnio rozpoczęto prace dotyczące płyt i powłok.

Celem kształtowania jest wyznaczenie takich ustrojów, w których pod danymi siłami zewnętrznymi występowałyby uporządkowane w żądany sposób stany odkształcenia lub naprężenia. Ustroje kształtowane mogą być wykonane z jednego tworzywa lub z kilku materiałów współpracujących w określony sposób. Uporządkowanie stanów odkształcenia i naprężenia ograniczone jest przez warunki związane z wykonaniem i użytkowaniem konstrukcji.

Metoda kształtowania na minimum potencjału opiera się na następujących założeniach:

- 1) odkształcenia są sprężyste,
- 2) dane są siły zewnętrzne,
- 3) kształt jest całkowicie niez znany,
- 4) kształt zależy od warunków użytkowania.

Założenie o sprężystości odkształceń jest uzasadnione tym, że po wystąpieniu odkształceń niesprężystych zmienia się układ sił wewnętrznych. Skoro więc kształtowanie ma polegać na dostosowaniu kształtu do żadanego układu sił wewnętrznych lub odkształceń, to w konstrukcji nie mogą występować odkształcenia niesprężyste. Odstępując od hipotez wytrzymałościowych i ograniczając zakres rozważań do tych stanów odkształceń, które mogą występować trwale w konstrukcji, zyskać można na znacznie większej przejrzystości sformułowań i uwolnić się od ubocznych czynników, które wpływają na uplastycznienie materiałów.

Siły zewnętrzne są dane w postaci określonych obciążeń, które ma przenosić kształtowana konstrukcja. Ciężar własny zależy od kształtu i może być uwzględniony w zagadnieniach kształtowania w sposób ścisły.

Istnieją kształty niezależne od kryteriów kształtowania. W ogólnym przypadku niesłuszne jest przyjmowanie, że konstrukcja ma mieć z góry określony jakikolwiek kształt, np., że ma być słupem, belką lub powłoką, gdyż wszystkie kształty, które mamy wyznaczyć, powinny wynikać z warunków kształtowania. Jedyne ograniczenia zmienności kształtu związane są z warunkami użytkowania konstrukcji. W wielu przypadkach jednak można już na podstawie wstępnych rozważań określić niektóre podstawowe parametry kształtu konstrukcji.

Kryterium kształtowania stanowi warunek wyrównania całkowitego potencjału jednostkowego bądź potencjału jednostkowego odkształceń postaciowych, w obu przypadkach przy stałej objętości tworzywa. Kryterium to jest równoważne warunkowi minimum całkowitej energii odkształceń sprężystych lub też minimum energii odkształceń postaciowych, przy zachowaniu danej objętości tworzywa. Wyrów-

nywanie dotyczy wszystkich punktów konstrukcji, w których jest to możliwe ze względu na warunki ograniczające kształt, [84] i [85].

Jeżeli przyjąć za miarę sztywności konstrukcji odwrotność energii odkształceń sprężystych, to sformułowane kryterium jest równoważne z kształtowaniem na największą sztywność.

Kształtowanie na minimum potencjału jest uogólnieniem kształtowania na równą wytrzymałość, gdyż pozwala na uwzględnienie bardziej złożonych stanów naprężeń. Poza tym umożliwia wyznaczenie optymalnych kształtów tam, gdzie metoda równej wytrzymałości nie doprowadza do jednoznacznego rozwiązania, np. nie daje możliwości wyboru kratownicy o najmniejszej objętości materiału spośród wszystkich kratownic równej wytrzymałości. Kształtowanie na minimum potencjału przy stałej objętości materiału wskazuje w sposób jednoznaczny na optymalną kratownicę.

Dowód jednoznaczności rozwiązań przeprowadzony został w ogólnym przypadku bez uwzględnienia ciężaru własnego, a także w poszczególnych przypadkach kratownic płaskich i przestrzennych, [33] i [145].

Stwierdzono, że niezależnie od sposobu formułowania warunków kształtowania kształty konstrukcji posiadają pewne stałe cechy, zwane niezmiennikami kształtowania. Spośród takich cech wymienić można prostą oś słupa, dwie płaszczyzny główne jego osi bezwładności oraz płaszczyznę symetrii belki zginanej.

Zagadnienia kształtowania różnią się od zagadnień wyznaczania stanów naprężenia i odkształcenia. Te ostatnie mają za zadanie tylko poznanie tych stanów; należą one do zagadnień fizykalnych, poznawczych. W przeciwstawieniu do nich zagadnienia kształtowania mają na celu wyznaczenie kształtu, są zagadnieniami wyboru, a nie zagadnieniami fizykalnymi. Wspólną cechą obu tych rodzajów zagadnień jest posługiwanie się tymi samymi pojęciami, zależnościami i metodami należącymi do mechaniki technicznej.

Kształtowanie konstrukcji nie zastępuje sprawdzenia jej wytrzymałości i odkształceń, ale poprzedza to sprawdzenie. Zagadnienia kształtowania mają przeto charakter odwrotny do zagadnień analizy rozkładu naprężeń czy odkształceń. Poza tym przy kształtowaniu uwzględnione są tylko podstawowe stany obciążenia, zaś sprawdzenie bezpieczeństwa obejmować musi wszystkie możliwe obciążenia zewnętrzne.

Zagadnienia kształtowania na minimum potencjału są problemami mechaniki technicznej pomimo ich podobieństwa do zagadnień ekonomicznych, w których poszukiwane są rozwiązania wymagające najmniejszych nakładów. W kształtowaniu konstrukcji występuje bowiem tylko część zmiennych decydujących o jej kosztach, inne pozycje nie są brane pod uwagę, np. koszt robocizny, transportu i robót stowarzyszonych. Wybór kształtu konstrukcji ma wpływ na jej efektywność ekonomiczną, ale nie wystarcza do dokonania wyboru ekonomicznego. Tym niemniej warto stwierdzić, że konstrukcja wadliwa o nieuporządkowanym układzie sił wewnętrznych posiada mniejszą wartość gospodarczą.

Podstawowe stwierdzenia i osiągnięcia metody kształtowania na minimum potencjału są następujące:

- 1) udowodnienie zbieżności poprzednio opisanych kryteriów kształtowania,
- 2) wskazanie na możliwość sprowadzenia kształtowania ustrojów hiperstatycznych do ustrojów izostatycznych,
- 3) wskazanie na możliwość sprowadzenia kształtowania na obciążenie ruchome do kształtowania na obciążenie stałe,
- 4) sformułowanie i częściowe rozwiązanie zagadnienia kształtowania belek zginanych z różnych tworzyw, słupów i łuków,
- 5) opracowanie szeregu rozwiązań z zakresu kształtowania kratownic płaskich i przestrzennych przez analizę rozmieszczenia węzłów i prętów.
- 6) opracowanie kryteriów i rozwiązań szczególnych w zakresie kształtowania elementów sprężonych.

6. Inne metody kształtowania wytrzymałościowego konstrukcji

Poza opisanymi poprzednio, licznie reprezentowanymi kierunkami badań, istnieje wiele prac traktujących odmiennie zagadnienie wyznaczania kształtu.

Wśród publikacji polskich wymienić należy przede wszystkim rozwiązania otrzymane przez St. KAUFMANA i jego współpracowników, [23], [65], [91], [95], [99], [117] i inne. Tematem tych prac jest, poza wyznaczeniem kształtu, również praktyczne zaprojektowanie rozpatrywanych konstrukcji, przy czym w większości przypadków są to konstrukcje wstępnie sprężone. Podstawową cechą jest tu pominięcie, poza pracą [23], kryteriów minimum objętości występujących bezpośrednio, chociaż pod różnymi postaciami w poprzednio opisywanych metodach kształtowania. Celem kształtowania jest najczęściej wyznaczenie wielkości i trasy siły sprężającej oraz określenie niebezpiecznego przekroju poprzecznego i występujących tam skrajnych naprężeń normalnych. Przedmiotem kształtowania są belki hiperstatyczne wieloprzęsłowe. Poważnym osiągnięciem jest opracowanie metody analizy belki ciągłej przy danych naprężeniach, obciążeniach i układzie podpór. Wskazano na znaczenie granicznej wartości ciężaru własnego w projektowaniu belek sprężonych i stwierdzono, że belka ciągła sprężona nie daje korzyści w zużyciu materiałów w porównaniu z belką izostatyczną przy jednakowych naprężeniach dozwolonych. Przekrój poprzeczny belek w tych rozważaniach jest stały wzdłuż rozpiętości i był określony z warunków wytrzymałościowych i konstrukcyjnych. Otrzymane rozwiązania posiadają przydatność praktyczną przez rozpatrzenie szczegółowe rozmaitych stanów obciążenia, charakterystycznych dla konstrukcji sprężonych, i opracowanie kryteriów ekonomicznego projektowania.

Podobny nieco charakter mają prace B. KOPYCIŃSKIEGO, [64] i [94]. Tematem rozważań jest również opracowanie sposobu wymiarowania belek sprężonych przy danej rozpiętości i obciążeniu użytkowym. Rozwiązanie otrzymano przez badanie wielkości momentów zginających przenoszonych przez przekrój sprężony jako funkcji położenia środka ciężkości przekroju, a następnie przez dobieranie prze-

kroju optymalnego po uwzględnieniu warunków konstrukcyjnych. B. KOPYCIŃSKI wyznaczył zużycie materiałów również jako funkcje położenia środka ciężkości oraz naprężeń dozwolonych wprowadzając pojęcie kryterium ekonomicznego zużycia stali i betonu.

Wiele publikacji w czasopismach angielskich, np. [56], [64], [86], [118], [120], [140] i [148], obejmuje różne rozwiązania zagadnienia kształtowania konstrukcji przy zastosowaniu warunków konstrukcyjnych odnośnie rozmieszczenia materiału w przekroju poprzecznych lub też dobierając *a priori* sposób odkształcenia elementów konstrukcyjnych. Prace te nie są oparte na ścisłych kryteriach określających kształt optymalny.

Dwie prace H. H. HILTONA, [114] i [144] oraz praca HSUAN-LOH Su, [119], (USA) traktują zagadnienie kształtowania z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa. Cechy wytrzymałościowe materiału i konstrukcji, a także wielkości obciążeń podlegają prawom statystycznym. Znając lub zakładając rozkład tych wielkości, kształt elementów konstrukcyjnych może być wyznaczony z warunków związanych z minimum objętości przy założonej pewności całej konstrukcji. Tematem tych prac są kratownice płaskie i przestrzenne o wielkiej ilości elementów składowych oraz ustroje rusztowe. Otrzymane dotychczas rozwiązania oparte są na założeniu rozkładu Gaussa i dotyczą konstrukcji o prostych stanach naprężenia.

Opisane prace oraz inne rozwiązania o mniejszym nieco znaczeniu dla całości obrazu o zagadnieniach kształtowania posiadają wspólną podstawową cechę: w odróżnieniu od przyjętych powszechnie metod analizowania i wymiarowania konstrukcji kształt jest przedmiotem poszukiwań. Pomimo odmiennych kryteriów i metod kształtowania wspólny jest tok rozumowania, który polega na traktowaniu sił zewnętrznych i wewnętrznych jako wiadomych, a parametrów kształtu jako niewiadomych zadania.

Bibliografia kształtowania wytrzymałościowego

- [1] GALILEO GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due scienze attenenti alla meccanica et inoivimenti locali*, 1638.
- [2] F. BLONDEL, *Epistola ad P. Wurtius in qua famosa Galilei propositio discutitur circa naturam lineae qua trabes secari debeant ut suit aequalis ubique resistentiae et in qua lineam illam non quidem parabolicam ut ipse Galiloeus arbitratus est, sed ellipticam esse demonstratur*, Data Parisiis 1661.
- [3] A. MARCHETTI, *De resistentia solidorum*, 1669.
- [4] A. PARENT, *Des résistances des poutres... et des poutres de plus grande résistance, independamment de tout système physique*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1708.
- [5] A. PARENT, *Des points de la rupture des figures. D'en déduire celles qui sont par-tout d'une résistance égale...*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1710.
- [6] A. MARCHETTI, *Lettera nella quale si ribattono l'inguiste accuse dati dal P.D.G.G.*, 1711.
- [7] J. L. LAGRANGE, *Sur la figure des colonnes*, Miscellanea Taurinesia, 1770-1773.
- [8] J. L. LAGRANGE, *Sur la force des Ressorts pliés*, Mémoires de L'Académie de Berlin, 1771.
- [9] P. S. GIRARD, *Traité analitique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance*, 1798.
- [10] T. YOUNG, *Cours of Lectures on Natural Philosophy*, 1807.

- [11] J. T. R. ROBINSON, *Mechanical Philosophy*, 1822.
- [12] J. T. R. ROBINSON, *Description of Col. Long's Bridges, together with a series of directions to bridge builders*, Philadelphia 1841.
- [13] J. SÉGUIN, *Annales des Ponts et Chaussées*, 2 p., 1851, 372.
- [14] P. W. SCHWEDLER, *Zeitschrift für Bauwesen 1851-1859*, *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1859-1880.
- [15] A. J. MORIN, *Résistance des Matériaux*, 1853.
- [16] F. A. PAULI, *Grosshesseloher Brücke über die Isar*, 1853.
- [17] A. FINK, *Allgemeine Betrachtungen über die Biegefestigkeit und Biegungswiderstand zur Erzielung eines einheitlichen Standpunktes für die Beurtheilung verschiedener Brücken-Systeme*, *Zeitschr. Österr. Ing. Vereins*, 1860.
- [18] B. de St. VENANT, *Notes et appendices, au résumé des leçons sur l'application de la mécanique de Navier*, 1864.
- [19] K. CULMANN, *Die graphische Statik*, 1866.
- [20] M. LÉVY, *La statique graphique et ses applications aux constructions*, 1873.
- [21] A. G. M. MICHELL, *The Limit of Economy of Material in Frame Structures*, *Phil. Mag. sér. 6*, 8 (1904), 589-597.
- [22] С. И. БЕЛЗЕЦКИЙ, *Упругая линейная арка равного сопротивления*, СПБ, 1904.
- [23] S. KAUFMAN, *O wykreślonym wyznaczeniu kształtu specjalnych belek kratowych*, *Rozprawa doktorska*, Lwów 1920.
- [24] S. MILLER, *Sprawozdanie z posiedzeń Koła Inżynierów przy Politechnice Warszawskiej*, 1919.
- [25] И. Я. ШТАЕРМАН, *Брус равного сопротивления при изгибе*, *Вести. КПИ*, 1928.
- [26] В. С. БЛИНОВ, *К вопросу о рациональном очертании сводов*, *Сборник Ленинградского Института Инженеров Путей Сообщения*, 1929.
- [27] В. И. РУДНЕВ, *О рациональной форме сплошной упругой арки в связи с современными методами возведения*, *Труды МИИТ*, 1930.
- [28] И. М. РАБИНОВИЧ, *К теории статически неопределимых ферм. Законы распределения усилий, метод заданных напряжений, начальные усилия в статически неопределимых фермах*, *Центральный Научно-Исследовательский Институт Транспортного Строительства*, 1933.
- [29] W. SWIDA, *Über die form eines Pfeilers gleicher Festigkeit bei gleichzeitiger Druck- und Biegebeanspruchung*, *Zeitschr. Angew. Math. Mech.*, 1934.
- [30] K. LUDWIG, *Über Träger mit Eigengewicht und gleichem Widerstand gegen Biegung*, *Zeitschr. Angew. Math. Mech.*, 1938.
- [31] Н. Р. ЧЕЩОВ, *Стойки наименьшего веса*, *Труды ЦЛГИ*, 1936.
- [32] O. ZANABONI, *Atti Accademiae dei Lincei*, 25, (1937) 117-121, 535-601.
- [33] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, *Akademia Nauk Technicznych*, Warszawa 1939.
- [34] Д. С. СИКОРСКИЙ, *О тяжелых брусках равного сопротивления на изгиб*, *Вестник Инженеров и Техников*, 1941.
- [35] J. DRYMAEL, *The Design of Trusses and Its Influence on Weight and Stiffness*, *J. Royal Aero. Soc.*, 46 (1942) 297-308.
- [36] H. L. COX, H. E. SMITH, *Structures of Minimum Weight*, *Aero. Research Com. Reports and Memoranda No 1925*, 1943.
- [37] Д. А. РАДЦИГ, *Об определении наименьшего объема статически неопределимых ферм*, *Труды Казанского Авиационного Института*, 1946.
- [38] И. М. РАБИНОВИЧ, *Расчет неразрезных балок на жестких и упругих опорах методом заданных моментов и напряжений*, *Исследования по теории сооружений*, 1946.
- [39] К. Г. ПРОТАСОВ, *Расчет статически неопределимых мостовых ферм с учетом пластических деформаций*, *Трансжелдориздат*. 1947.

- [40] В. М. Вахуркин, *Наивыгоднейшая форма двутавровых балок*, Бюллетень строительной Техники, 1949.
- [41] А. И. Виноградов, *Исследование вопросов конструирования перекрытий по заданным напряжениям*; М. И. И. Т., 1949.
- [42] К. М. Хуверьян, *Метод напряжений*, сб. Исследования по теории сооружений, вып. IV, 1949.
- [43] А. Р. Ржаницын, *К вопросу о теоретическом весе стержневых конструкций*, сб. Исследования по теории сооружений, вып. IV, 1949.
- [44] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych węzłów*, Księga Jubil. dla uczczenia zasług naukowych prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.
- [45] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych prętów*, Inżyn. Budown., 11 1950.
- [46] А. Ф. Смирнов, *Стержни и арки наименьшего веса при продольном изгибе*, Труды МИИТ, 1950.
- [47] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu przekrojów słupów*, Arch. Mech. Stos., 3-4, 3 (1951).
- [48] J. HEYMAN, *Plastic Design of Beams and Plane Frames for Minimum Material Consumption*, Quart. Appl. Math., 8 (1951), 373.
- [49] К. М. Хуверьян, *Расчет крестовых ферм на неподвижную нагрузку по методу напряжений*, Сб. Исследования по теории сооружений, 1951.
- [50] А. И. Виноградов, *Некоторые инварианты статически неопределимой системы и их применение к рациональному расчету*, Труды Харьковского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1951.
- [51] В. М. Вехуркин, *Форма двутавровых балок в условиях наименьшей стоимости*, Вестник Инженеров и Техников, 1951.
- [52] А. Н. Филин, *Вопросы рационального проектирования мостовых арок*, Труды Хабаровского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1951.
- [53] Д. А. Радциг, *Расчет статически неопределимых ферм по методу наименьшего объема*, Труды Казанского Авиационного Института, 1951.
- [54] Ф. И. Слюсарчук, *О проектировании равнопрочных статически неопределимых ферм*, 1952.
- [55] Ф. М. Слюсарчук, *О регулярном расчете статически неопределимых ферм методом заданных напряжений*, Труды Новосибирского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1952.
- [56] F. R. SHANLEY, *Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures*, Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York 1952.
- [57] В. А. Киселев, *Рациональные формы арок и подвесных систем*, 1953.
- [58] J. FOULKES, *Minimum Weight Design and the Theory of Plastic Collapse*, Quart. Appl. Math. 4, 10 (1953).
- [59] J. HEYMAN, *Plastic Design of Plane Frames for Minimum Weight*, Struct. Engin., 5, 31 (1953).
- [60] В. КОПЫЦІНСКИ, *Ukształtowanie przekroju poprzecznego belki strunobetonowej z ekonomicznego punktu widzenia*, Inżyn. Budown., 11 (1953).
- [61] J. FOULKES, *The Minimum Weight Design of Structural Frames*, Proc. Royal Soc. London, ser. A, 223 (1954).
- [62] Y. GUYON, *Béton précontraint*, Eyrolles, Paris 1954.
- [63] Z. BRZOSKA, *Płyty kołowe o równomiernej wytrzymałości pod obciążeniem osiowo symetrycznym*, Arch. Budowy Maszyn, 3, 1954.
- [64] R. G. ROBERTSON, *Prestressed Concrete Beams: the Economical Shape of Section*, Proc. Inst. Civil Engin., cz. III, nr 1, 1954.
- [65] S. KAUFMAN, *Określenie kształtu sprężonej belki ciągłej o prostoliniowej trasie kabla*, Inżyn. Budown., 4, 1954.

- [66] А. И. Виноградов, *Некоторые вопросы расчета стержневых систем с заданными напряжениями*, Исследования по теории сооружений, 6, 1954.
- [67] А. И. Виноградов, *О статической неопределимости стержневых систем наименьшего объема*, Исследования по теории сооружений, 6, 1954.
- [68] Я. И. Гуревич, *К вопросу о рациональном законе изменения сечений стержневых статически неопределенных систем*, Труды Хабаровского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1954.
- [69] К. И. Рабинович, *Курс строительной механики стержневых систем*, ч. II, изд. 2-е, 1954.
- [70] А. С. Григорьев, *О пластинах равного сопротивления изгибу. Тезисы докладов на совещании по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики*, изд. АН СССР, 1954.
- [71] Э. Н. Клявин, *Подбор рациональных очертаний каменных арок*, Государственный Университет, Рига, 1954.
- [72] Н. А. Серов, *Методы расчета статически неопределимых ферм с обеспечением минимального веса*, 1954.
- [73] Т. НОР, *Wpływ własności geometrycznych i mechanicznych przekroju na ekonomię ustrojów sprężonych*, Praca kandydacka, Gliwice, 1955.
- [74] J. MAMES, *Obliczanie odgięć w belce z betonu kablowego*, Inżyn. Budown., 5, 1955.
- [75] E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limits of Economy of Material in Shells*, Ingen., nr 10, 11-3-1955.
- [76] H. G. HOPKINS, W. PRAGER, *Limits of Economy of Material in Plates*, J. Appl. Mech., nr 55-APM-2.
- [77] W. PRAGER, *Minimum Weight Design of Plates*, Ingen., nr 48, 2-12-1955.
- [78] А. В. Александров, *Другое доказательство одной теоремы метода заданных напряжений*, Труды Новосибирского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1955.
- [79] А. И. Виноградов, *Вопросы расчета сооружений наименьшего веса*, Труды Харьковского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1955.
- [80] В. А. Киселев, *К вопросу о теоретической форме бруса равного сопротивления при изгибе с учетом собственного его веса*, Сборник трудов Московского Автомобильно-дорожного Института, 1955.
- [81] А. Г. Ложкин, *Исследование рациональности формы стальных профилей*, 1955.
- [82] Ф. И. Слюсарчук, *Исследования объема статически неопределимых ферм несущих однократную нагрузку*, Труды Новосибирского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1955.
- [83] Ф. И. Слюсарчук, *К вопросу о существовании равнопрочных решений статически неопределимых ферм*, Труды Новосибирского Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, 1955.
- [84] Z. WASIUTYŃSKI, *Podstawowe wiadomości o kształtowaniu wytrzymałościowym*, Arch. Inżyn. Łądown. 1, 1956.
- [85] Z. WASIUTYŃSKI, *O drogach i metodach kształtowania wytrzymałościowego*, Podstawowe Problemy Techniki Współczesnej, PWN Warszawa 1956.
- [86] G. GERARD, *Minimum Weight Analysis of Compression Structures*, Interscience Publishers, New York 1956.
- [87] Z. WASIUTYŃSKI, *Wyznaczenie właściwego stosunku wzniesienia do rozpiętości łuku w złożonych ustrojach łukowych*, Inżyn. Budown., 2, 1956.
- [88] W. FREIBERGER, B. TEKINALP, *Minimum Weight Design of Circular Plates*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 4 (1956).
- [89] W. FREIBERGER, *Minimum Weight Design of Cylindrical Shells*, J. Appl. Mech., 4, 23 (1956).

- [90] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for Minimum Weight*, IX Kongr. Mech. Stos., Bruksela 1956.
- [91] S. KAUFMAN, *O racjonalnym projektowaniu sprężonych przekrojów zginanych*, Inżyn. Budown., 4, 1956.
- [92] A. В. Израелит, *О гарантии положительных решений при расчете статически неопределенных балок и рам методом заданных усилий*, Труды Всесоюзного Заочного Лесотехнического Института, 1956.
- [93] A. В. Израелит, *Расчет статически неопределимых тонкостенных конструкций методом заданных усилий и напряжений*, Труды Всесоюзного Заочного Лесотехнического Института, 1956.
- [94] В. КОРЫЦИŃSKI, *Ekonomiczne kształtowanie przekroju belki sprężonej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Budown. Ładowe, 1, 1957.
- [95] S. KAUFMAN, *Projektowanie sprężonych przekrojów zginanych na zasadzie pełnego wykorzystania mimośrodów*, Inżyn. Budown., 2, 1957.
- [96] A. BRANDT, Z. WASIUTYŃSKI, *Kształtowanie wytrzymałościowe płyt z betonu sprężonego*, Inżyn. Budown., 2, 1957.
- [97] A. BRANDT, Z. WASIUTYŃSKI, J. KOSMOWSKI, *О kształtowaniu kratownic na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty*, Rozpr. Inżyn., 2, 1957.
- [98] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on Minimum Weight Design*, Quart. Appl. Math., 3, 15 (1957).
- [99] J. MAMES, *Sprężona belka ciągła — analiza i projektowanie*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 1957.
- [100] E. T. ONAT, W. SCHUMANN, R. T. SHIELD, *Design of Circular Plates for Minimum Weight*, Jour. Appl. Math. Phys., 6, 7 (1957).
- [101] W. FREIBERGER, *On the Minimum Weight Design Problem for Cylindrical Sandwich Shells*, J. Aero. Sci., 24 (847-848), (1957), 847-848.
- [102] А. И. Виноградов, *О некоторых свойствах систем с заданным очертанием осей*, Исследования по теории сооружений, 1957.
- [103] А. И. Виноградов, *О расчете систем в виде замкнутого контура с заданными напряжениями*, Исследования по теории сооружений, 1957.
- [104] Ю. И. Кузнецов, *Стержень равного сопротивления продольнопоперечному изгибу*, Информационные материалы Института Строительной Механики АН УССР, 1957.
- [105] Z. WASIUTYŃSKI, *О мостах плитовых*, Min. Gosp. Kom., 1958 (skrypt).
- [106] A. BRANDT, *Kształtowanie belek sprężonych*, Inżyn. Budown., 1, 1958.
- [107] A. BRANDT, J. IGNACZAK, *Kształtowanie wytrzymałościowe belki wspornikowej*, Rozpr. Inżyn., 1, 6, 1958.
- [108] W. STAROSOLSKI, *Projektowanie sprężonych przekrojów zginanych z uwzględnieniem wszystkich programowych stanów obciążenia belki*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 1958.
- [109] Z. ZIELIŃSKI, *Problems Relative to the Design and Use of Economical Prestressed Concrete Beams*, III Congress FIP Ser. III, nr 17, Berlin 1958, 6.
- [110] Z. MRÓZ, *On the Design of Non-Homogeneous Technically Orthotropic Plates*, Sympozjum IUTAM, Warszawa 1958.
- [111] D. C. DRUCKER, *On minimum Weight Design and Strength of Non-Homogeneous Plastic Bodies*, Sympozjum IUTAM, Warszawa 1958.
- [112] W. PRAGER, *On a Problem of Optimal Design*, Sympozjum IUTAM, Warszawa 1958.
- [113] J. HEYMAN, *Minimum Weight of Frames under Shakedown Loading*, J. Engin. Mech. Division, październik 1958, Proc. ASCE.
- [114] H. H. HILTON, *Minimum Weight Analysis for Combined Loads Based on Probability of Failure*, Hughes Aircraft Company Report S.F. 1.3-16, 1958.
- [115] Z. WASIUTYŃSKI, *О преобразовании kratownic через замену прętów*, Inżyn. Budown., 1958.

- [116] Z. MRÓZ, *Nośność graniczna i kształtowanie wytrzymałościowe płyt pierścieniowych*, Rozpr. Inżyn., 4, 6 (1958).
- [117] S. KAUFMAN, T. HOP, *Studium nad racjonalnym kształtowaniem przekroju poprzecznego belki sprężonej*, Arch. Inżyn. Łądown., 1, 5 (1959), 81-127.
- [118] J. HEYMAN, *Inverse Design of Beams and Grillages*, Proc. Inst. Civ. Engin., 13 (1959).
- [119] HSUAN-LOH SU, *Statistical Approach to Structural Design*, Proc. Inst. Civil Engineers, vol. 13, lipiec 1959.
- [120] S. KRISHNAN, K. V. SHETTY, *On the Optimum Design of an I-section Beams*, J. Aero-Space Sci., 26 (1959).
- [121] W. STAROSOLSKI, *Sprężona belka ciągła o zmiennym momencie bezwładności. Dobór siły*, Arch. Inżyn. Łądown., 3, 1959.
- [122] W. STAROSOLSKI, *Projektowanie sprężonych belek ciągłych o zmiennym momencie bezwładności z uwzględnieniem zmienności siły sprężającej*, Arch. Inżyn. Łądown., 4, 1959.
- [123] W. STAROSOLSKI, *Odginanie kabli w belce sprężonej z uwzględnieniem wszystkich programowych stanów obciążenia*, Inżyn. Budown., 10, 1959.
- [124] J. IGNACZAK, *O rozpiętościach belek wspornikowych ukształtowanych z warunku wyrównania naprężeń*, Rozpr. Inżyn., 2, 7 (1959).
- [125] W. PRAGER, R. T. SHIELD, *Minimum Weight Design of Circular Plates Under Arbitrary Loading*, J. Appl. Math. Phys., 4, 10 (1959).
- [126] Z. WASIUTYŃSKI, *Mosty łukowe*, PWN Warszawa 1959.
- [127] J. R. ROBINSON, *Cours de béton précontraint*, Dunod, Paryż 1959.
- [128] W. PRAGER, *Dimensionnement plastique et économie des matériaux*, Bull. Centre d'Etudes de Recherches et d'Essais Scientifiques du Génie Civil, 10, Liege 1959.
- [129] Z. WASIUTYŃSKI, *Kształtowanie belek stalowych o przekrojach dwuteowych lub skrzynkowych*, Księga Jubileuszowa W. Wierzbickiego, Warszawa 1950.
- [130] Z. WASIUTYŃSKI, *O zastosowaniu nauk ścisłych do wyznaczania kształtów w budownictwie*, Nauka Polska, 1 (29), 1960.
- [131] J. KOSMOWSKI, *Wyznaczanie układu prętów w czterowzłowym polu kratownicy z warunku minimum potencjału*, Rozpr. Inżyn., 1, 1960.
- [132] J. GRYZ, *O przekształceniach ustroju czterowzłowego przez wymianę prętów*, Rozpr. Inżyn., 1, 1960.
- [133] J. KAPKOWSKI, *Wprowadzenie siły skupionej w tarczę z uwzględnieniem warunku równomiernej wytrzymałości*, Arch. Budowy Maszyn, 1, 1960.
- [134] S. ŁUKASIEWICZ, *Płyty kołowe o równomiernej wytrzymałości obciążone osiowo symetrycznie*, Arch. Budowy Maszyn, 1, 1960.
- [135] W. STAROSOLSKI, *Ogólny przypadek przekroju sprężonego. Analiza a dobór siły*, Arch. Inżyn. Łądown., 3, 1960.
- [136] W. STAROSOLSKI, *Projektowanie przekrojów sprężonych obciążonych mimośrodowo*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, 3, 1960.
- [137] A. BRANDT, *Kształtowanie belek sprężonych przez wyrównywanie skrajnych naprężeń*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
- [138] A. BIERNAWSKI, B. GROCHOWSKI, *O kształtowaniu kratownic na minimum potencjału*, Rozpr. Inżyn., 4, 1960.
- [139] G. EASON, *The Minimum Weight Design of Circular Sandwich Plates*, ZAMP, 11 —(1960).
- [140] R. G. ROBERTSON, *The Two-Span Haunched Continuous Beam in Prestressed Concrete*, Proc. Inst. Civil Engin., 15 (1960).
- [141] Z. MRÓZ, *On a Problem of Minimum Weight Design*, Brown University, 1960.
- [142] R. T. SHIELD, *Plate Design for Minimum Weight*, Quart. Appl. Math., 2, 18 (1960).
- [143] A. BRANDT, *Détermination de la forme des poutres précontraintes par l'égalisation des contraintes*, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol., 5, 8 (1960).

- [144] H. H. HILTON, M. FEIGEN, *Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability*, J. Aero-Space Sci., 9, 27 (1960).
- [145] Z. WASIUTYŃSKI, *On the Congruency of the Forming According to the Minimum Potential Energy with that According to the Equal Strength*, Bull. Acad. Pol. Sci., 6, 8 (1960).
- [146] R. T. SHIELD, *On the Optimum Design of Shells*, J. Appl. Mech., 1960.
- [147] J. KAPKOWSKI, S. ŁUKASIEWICZ, *Wpływ temperatury na równomierną wytrzymałość krążków wirujących*, Arch. Budowy Maszyn, 2, 1961.
- [148] S. KRISHNAN, K. V. SHETTY, *A Method of Minimum Weight Design for Thin-Walled Beams*, Struct. Engin., 1961.
- [149] DUSZAN PONIŻ, *Problemy kształtowania konstrukcji budowlanych*, Biul. Tech. BSPTBP, 1961.
- [150] Wenczesław PONIŻ, *Kształtowanie zbiornika o kształcie kropli*, praca niepublikowana, 1961.
- [151] Z. WASIUTYŃSKI, *Zadania o wyznaczeniu kształtu belki betonowej równej wytrzymałości sprężonej dowolnie gęsto dowolnie cienkimi strunami*, VII Konf. PZITB i PAN, w Krynicy 1961.
- [152] A. BRANDT, *Przegląd historyczny zagadnień kształtowania wytrzymałościowego*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [153] A. BRANDT, *Porównanie podstaw i zakresu kształtowania na minimalny ciężar — Minimum Weight Design z kształtowaniem na minimum potencjału*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [154] A. BRANDT, *Kształtowanie belek sprężonych*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [155] A. BIERNAWSKI, *Zastosowanie rachunku punktowego do zagadnienia kształtowania kratownicy*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [156] A. BIERNAWSKI, *Twierdzenie o potencjale kratownicy przestrzennej o czterech węzłach obciążonych*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [157] J. KOSMOWSKI, A. BIERNAWSKI, *Kratownice minimalne o dwóch i trzech polach*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [158] W. DZIENISZEWSKI, *Wpływ sił normalnych w łącznikach, w lukach i w belkach na układ oraz wielkość sił wewnętrznych w ustrojach Langer'a i Maillarta*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [159] W. DZIENISZEWSKI, *Wyznaczanie właściwej zmienności momentów bezwładności belek w ustrojach Maillarta*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [160] J. GRYZCZ, *Podstawowe zależności i kolejność rozwiązania zadania o wyznaczeniu kształtu belek betonowych sprężonych dowolnie gęsto dowolnie cienkimi strunami w założeniu wyrównanych naprężeń głównych*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [161] J. GRYZCZ, *O wyznaczeniu układów prętów tworzących kratownice izostaticzne ekstremalne przy danym układzie węzłów i przy niezmiennym obciążeniu*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [162] J. KOSMOWSKI, *O kształtowaniu belki stalowej wspornikowej o stałej wysokości i stałej szerokości pótek*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [163] J. KOSMOWSKI, *Wyznaczanie układu prętów w czterowęzłowym polu kratownicy z warunku minimum potencjału i sprawdziany praktyczne poprawności układu prętów w kratownicach płaskich*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [164] J. KOSMOWSKI, *Wyznaczenie optymalnego położenia punktów zerowych momentów zginających w belkach wieloprzęstowych kształtowanych z warunku wyrównania skrajnych wartości potencjału jednostkowego odkształceń postaciowych*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [165] Z. SULIMOWSKI, *Analiza wolnopodpartej belki sprężonej siłą zmienną*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.
- [166] W. STAROSOLSKI, *Kształtowanie sprężonych belek ciągłych*, VII Konf. PZITB i PAN w Krynicy 1961.

СОВРЕМЕННЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ ПО ВОПРОСАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМ
КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ПРОЧНОСТИ

Темой работы является анализ и обзор различных направлений, касающихся определения формы конструкции со специальным учетом современных работ.

Во введении, авторы обращают внимание на большое значение вопросов, связанных с определением формы конструкции и на то, что эти работы проводятся во многих научных центрах.

В разделе 2 приводится хронологическое сопоставление более важных публикаций, начиная с диссертации Галилея, с 1638 г. и кончая современными работами. Это сопоставление пополнено описанием развития исторических направлений и их характеристикой. Отдельно приводятся фамилии исследователей, занимающихся в настоящее время вопросами определения формы конструкции, в польских и зарубежных научных центрах.

В разделе 3 рассматривается проектирование на минимум веса. Работы по этому вопросу проводятся В. Прагером и его сотрудниками. Форма конструкции определяется на основании критерия минимума объема материала в момент разрушения конструкции вследствие перехода материала в пластическое состояние. В этих работах принимается однородный, упругий и идеально пластический материал; работы касаются, главным образом, металлических конструкций.

В разделе 4 дается описание и анализируется вопрос статически неопределимых конструкций на основании условий равного сопротивления, решаемый И. М. Рабиновичем и многочисленной группой его сотрудников. Равное сопротивление реализуется путем выравнивания крайних напряжений в поперечных сечениях — с заданными напряжениями.

Рассуждения касаются множества конструкций с одинаковыми геометрическими системами элементов и с различными краевыми условиями. Определение формы конструкций состоит в подборе такой конструкции из множества, которая соответствует условию минимального употребления материалов.

В разделе 5 обсуждается проектирование на минимум потенциала упругих деформаций, при сохранении постоянного объема материала, являющегося темой работ З. Васютыньского и его сотрудников. Цель проектирования на минимум потенциала состоит в определении таких систем, в которых деформированные и нагруженные состояния были бы упорядочены желаемым образом. Критерием такого проектирования является выравнивание единичного потенциала, сходимое с проектированием на минимум полного потенциала, в обоих случаях при сохранении постоянного объема материала. Если, в качестве меры жесткости конструкции принять обратность энергии упругих деформаций, то сформулированный критерий равнозначен с проектированием на наибольшую жесткость. Эти рассуждения не выходят за предел упругой работы материала, а полученные решения касаются, главным образом, строительных конструкций.

В разделе 6 дается описание нескольких методов определения форм конструкций. Первый из них разработан С. Кауфманом и его сотрудниками и, касается определения формы предварительно напряженных конструкций. Также и Б. Копыцинский занимается в своих работах, вопросом соответствующих форм предварительно напряженных балок. В работах Х. Х. Хильтона заключаются решения, касающиеся определения форм конструкций с точки зрения теории вероятностей. Рассматриваются прочностные свойства материала и конструкции, а также нагрузка, как величина, подчиняющаяся законам статистики.

Библиографическое сопоставление публикаций, которые авторы использовали для разработки обзора вопросов определения формы конструкции, охватывает 166 работ и приводится в конце настоящей статьи.

Summary

THE PRESENT STATE OF KNOWLEDGE IN THE FIELD OF DESIGN OF STRUCTURES

The paper contains an analysis of various trends in the domain of design of structures, special stress being laid on contemporary works.

In the introduction, the authors point out the importance of design problems and the lack of coordination between various scientific centres.

The second chapter is devoted to a historical survey of more important publications since GALILEO's work published in 1638 until the recent times. This survey is supplemented by a description of the development of particular historical trends and their features. A list of contemporary scientists working on design problems in Poland and abroad is added.

The third chapter is devoted to the minimum weight design. In this field the work is continued by W. PRAGER and his group. The form of the structure is determined on the basis of the criterion of minimum material volume at the plastic collapse of the structure. It is assumed that the material is homogeneous, elastic and perfectly plastic. These works apply chiefly to metal structures.

In the fourth chapter the design of statically indeterminate structures on the basis of uniform strength conditions is described and analysed.

This problem is the object of the work of J. M. Rabinowitch and a large group of his co-workers. The uniform strength condition is realized by making the extremum stress in cross-sections equal to the admissible ones. The object of considerations are sets of structures of the same geometric configuration of elements and various support conditions. The design consists in selecting from a set of structures the one satisfying the condition of minimum material consumption.

The fifth chapter concerns the minimum elastic potential design for a constant material volume. This is the object of the work of Z. WASIUTYŃSKI and his co-workers. The aim is to determine such a structure that the state of stress or strain is ordered to obey a prescribed law. The design criterion is that of uniform unit potential in the entire structure, which is equivalent to that of minimum of potential of elastic deformation for constant material volume. Assuming for the measure of rigidity of the structure the inverse elastic energy, the criterion thus formulated, is equivalent to that of maximum rigidity design. These considerations do not exceed the elastic range of the material. The results apply chiefly to the civil engineering problems.

The sixth chapter is devoted to some other design methods. The first of them is being developed by S. KAUFMAN and his co-workers and concerns the determination of the form of prestressed structures. Also B. KOPYCIŃSKI is concerned with the problem of design of prestressed beams. The works of H. H. HILTON contain solutions of design problems from the viewpoint of the theory of probability, the strength properties of the material and the structure and also the load being treated as quantities obeying statistical laws.

The list of publications used for the preparation of this survey of design problems contains 166 items and is given at the end of the paper.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1961 r.