

**ANTONI SAWCZUK, MAREK JANAS, JERZY ZAWIDZKI**

**Z ZAGADNIENŃ TECHNICZNEJ TEORII NOŚNOŚCI GRANICZNEJ  
PLYT O MIESZANYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXXIII**

**TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962**

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp	245
2. Pojęcia podstawowe z zakresu teorii nośności granicznej	245
3. Związki technicznej teorii nośności granicznej płyt żelbetowych	247
3.1. Warunek stanu granicznego dla płyt żelbetowych	247
3.2. Założenia teorii linii załomów	248
4. Program i metoda badań doświadczalnych	249
4.1. Charakterystyka wytrzymałościowa materiałów i wymiary modeli	249
4.2. Jednostkowe momenty łamiące	249
4.3. Metodyka badań nośności granicznej płyt	250
5. Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie	250
5.1. Analiza teoretyczna	252
5.2. Doświadczalne wartości obciążeń granicznych	254
6. Płyta prostokątna swobodnie podparta na trzech bokach	254
6.1. Mechanizm zniszczenia	254
6.2. Przypadek $\eta \leq \beta$	255
6.3. Przypadek $\beta \leq \eta \leq 1$	256
6.4. Przypadek $\eta \geq 1$	257
6.5. Zestawienie wyników analizy teoretycznej	258
6.6. Wyniki doświadczeń	259
7. Płyty prostokątne podparte w narożach i wzdłuż jednego boku	259
7.1. Zależności teoretyczne w przypadku punktowego podparcia w dwóch narożach	263
7.2. Przypadek podparcia punktowego w pobliżu naroży	264
7.3. Dane doświadczalne	266
8. Płyty prostokątne oparte wzdłuż dwóch przyległych boków z narożem podpartym punktowo	266
8.1. Analiza teoretyczna dla przypadku ogólnego	268
8.2. Izotropowa płyta kwadratowa	269
8.3. Dane doświadczalne	270
9. Płyta prostokątna o jednym brzegu swobodnym z podparciem punktowym	270
9.1. Analiza teoretyczna	272
9.2. Dane doświadczalne	273
10. Synteza wyników badań	273
10.1. Wnioski o jakościowym przebiegu zjawiska. Wpływ efektu naroża na nośność graniczną płyt	276
10.2. Charakterystyka ilościowa doświadczeń	276

## 1. Wstęp

Uzyskane rozwiązania z zakresu nośności granicznej płyt odnoszą się głównie do teorii linii załomów, pozwalającej ograniczyć od góry obciążenie łamiące. Teorię tą cechuje prostota postępowania przy wyznaczaniu obciążenia granicznego, łatwość uwzględniania anizotropii i niejednorodności struktury oraz możliwość łatwego uwzględniania skomplikowanych kształtów i warunków brzegowych płyt.

Techniczną stosowalność i przydatność tego uproszczonego podejścia dla oceny nośności granicznej płyt żelbetowych (traktowanych jako konstrukcje idealnie plastyczne) potwierdziły doświadczenia podejmowane w wielu ośrodkach. Doświadczenia te dotyczyły jednak nieskomplikowanych warunków brzegowych, nie uwzględniały w dostatecznym stopniu anizotropii plastycznej, zastępowały obciążenia równomiernie rozłożone siłami skupionymi i nie zawsze prowadzone były konsekwentnie z punktu widzenia założeń teorii nośności granicznej. Nieuwzględnienie tych czynników nie dawało dostatecznej pewności co do stosowalności teorii w bardziej złożonych przypadkach, gdy mechanizm zniszczenia płyty nie jest łatwy do przewidzenia, a przyjęcie niepoprawnej siatki linii załomów może doprowadzić do zbyt optymistycznej oceny nośności. Z tego względu rozwiązano szereg zagadnień nośności granicznej płyt o mieszanych warunkach brzegowych i kontynuując pracę [1] zrealizowano program badań, mający na celu dostarczenie informacji o mechanizmie zniszczenia równomiernie obciążonych płyt prostokątnych, poddanych różnym statycznym i geometrycznym warunkom brzegowym.

Program badań przewidywał wyznaczenie:

- 1) wielkości obciążeń łamiących i porównanie ich z wartościami otrzymywanymi analitycznie,
- 2) układu linii załomów w zależności od wskaźnika ortotropii,
- 3) układu linii załomów przy obciążeniach na części płyty,
- 4) wpływu anizotropii na wielkość obciążenia granicznego w porównaniu do płyt izotropowych.

## 2. Pojęcia podstawowe z zakresu teorii nośności granicznej

Zachowanie się konstrukcji sprężysto-plastycznej pod działaniem powoli narastających obciążeń można podzielić na dwie główne fazy, które definiuje się jako:

1. Stan bezpieczny, gdy każdemu skończonemu przyrostowi obciążenia towarzyszy odpowiedni skończony przyrost sił wewnętrznych i odkształceń.

2. Stan zniszczenia, w którym konstrukcja przy nierosnącej intensywności obciążeń zewnętrznych przekształca się w układ geometrycznie zmienny. Ten stan określa się jako stan graniczny równoznaczny z wyczerpaniem nośności konstrukcji.

Kompletne rozwiązanie problemu nośności granicznej konstrukcji sprężysto-plastycznej polega na:

1) wyznaczeniu intensywności obciążenia powodującego przekształcenie konstrukcji nośnej w mechanizm (obciążenie łamiące),

2) wyznaczeniu sił występujących w konstrukcji w chwili jej przekształcania się w mechanizm,

3) wyznaczeniu mechanizmu zniszczenia, a więc określenie kinematyki stanu granicznego konstrukcji, pozwalającego na przyrost odkształceń przy nierosnącej intensywności obciążenia.

Do rozwiązania problemu nośności granicznej niezbędne jest sformułowanie:

1) warunku granicznego naprężenia, tzn. określenia relacji między własnościami wytrzymałościowymi materiału a «niebezpiecznymi» kombinacjami sił wewnętrznych w elemencie konstrukcji (stan graniczny przekroju). Dla ciała sprężysto-plastycznego warunkiem granicznego naprężenia jest warunek plastyczności, dla ciała kruche — odpowiednie kryterium wyężenia.

2) prawa określającego ruch powstającego mechanizmu zniszczenia w miejscach, gdzie osiągnięty został stan granicznego naprężenia (prawo płynięcia dla materiałów odkształcających się plastycznie).

Pełne rozwiązanie problemu nośności granicznej, polegające na wyznaczeniu obciążenia, pola sił wewnętrznych i mechanizmu towarzyszącego stanowi równowagi granicznej konstrukcji sprężysto- lub sztywno-plastycznej jest jednak praktycznie możliwe tylko dla ograniczonej klasy konstrukcji. Z tego względu dla celów obliczeń praktycznych mają istotne znaczenie twierdzenia podstawowe teorii nośności granicznej. Pozwalają one uzyskać rozwiązania przybliżone i ocenić granice przedziału, w jakim zawierać się będzie rzeczywiste obciążenie łamiące konstrukcji idealnie plastycznej; z tego względu nazywane są twierdzeniami o granicach obciążenia, [2], [3] i [4].

*Twierdzenie 1 (o dolnej granicy obciążenia łamiącego; zasada bezpiecznych obciążeń).* Konstrukcja nie ulega zniszczeniu albo znajduje się co najmniej w stanie równowagi granicznej pod działaniem obciążenia  $P_s$ , dla którego określone pole sił wewnętrznych spełnia różniczkowe warunki równowagi wewnętrznej, statyczne warunki brzegowe i nie narusza kryterium granicznego naprężenia. Obciążenie graniczne  $P_s$  obliczone na podstawie rozpatrywania równań równowagi wewnętrznej i warunku granicznego naprężenia stanowi oszacowanie od dołu rzeczywistej wartości obciążenia łamiącego  $P_G$ , tzn.  $P_s \leq P_G$ .

W myśl tego twierdzenia każde rozwiązanie, dotyczące sprężystego zachowania się konstrukcji sprężysto-plastycznej, daje (przy nieprzekroczeniu w żadnym punkcie konstrukcji warunku granicznego naprężenia) dolną ocenę nośności.

*Twierdzenie 2 (o górnej granicy obciążenia łamiącego; zasada niebezpiecznych obciążeń).* Konstrukcja ulega zniszczeniu, jeśli istnieje taki mechanizm zniszczenia, przy realizowaniu się którego przyrost pracy  $L$  wkładany przez obciążenia zewnętrzne jest większy od przyrostu pracy  $D$  rozpraszanej wewnątrz konstrukcji podczas nieodwracalnego procesu odkształcenia. Obciążenie graniczne  $P_k$  obliczone na drodze energetycznej stanowi oszacowanie od góry rzeczywistej wartości obciążenia łamiącego, tzn.  $P_k \geq P_G$ .

Rzeczywista wartość obciążenia granicznego jest zawarta wewnątrz przedziału określonego granicami wynikającymi z przytoczonych wyżej zasad. Zachodzi więc

$$(2.1) \quad P_S \leq P_G \leq P_K.$$

Wykorzystanie zasady o niebezpiecznych obciążeniach jest efektywnym środkiem w obliczeniach z zakresu teorii stanów granicznych konstrukcji. Teoria linii załomów płyt należy do grupy metod tzw. «podejścia kinematycznego».

### 3. Związki technicznej teorii nośności granicznej płyt żelbetowych

**3.1. Warunek stanu granicznego dla płyt żelbetowych.** Dla płyt żelbetowych warunek stanu granicznego przekroju płyty jest uzależniony od ilości zbrojenia. Jeśli płyta jest równomiernie zbrojona idealnie plastyczną stalą o granicy plastyczności  $\sigma_0$  w ilości  $f_z$  cm<sup>2</sup> na jednostkę długości przekroju, to jednostkowy moment łamiący wynosi

$$(3.1) \quad M_0 = f_z \sigma_0 z,$$

gdzie  $z$  jest ramieniem sił wewnętrznych, wyznaczanym stosownie do przyjętej aktualnie teorii żelbetu. Przy różnej ilości  $f_x$  i  $f_y$  zbrojenia w dwóch prostokątnych kierunkach  $x$  i  $y$  moment graniczny zależy od kierunku osiągając wartości główne w kierunkach zbrojenia, będących osiami głównymi plastycznej ortotropii.

Główne momenty graniczne  $M_{x0}$  i  $M_{y0}$  wynoszą

$$(3.2) \quad M_{x0} = f_x \sigma_0 z_x, \quad M_{y0} = f_y \sigma_0 z_y.$$

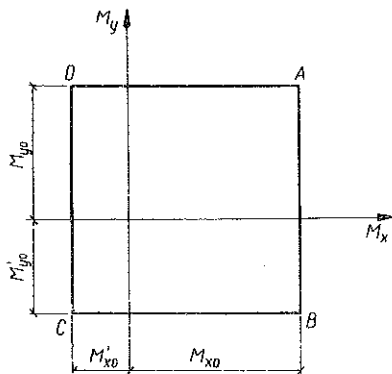
Najprostszą formą warunku stanu granicznego dla płyt jest kryterium ograniczonego współdziałania, które dla płyty zbrojonej «na momenty dodatnie» zapisuje się w postaci związków

$$(3.3) \quad \begin{cases} M_x = M_{x0}, & 0 \leq M_y \leq M_{y0}, \\ M_y = M_{y0}, & 0 \leq M_x \leq M_{x0}. \end{cases}$$

Jeśli przekrój jest zbrojony «górną» i «dolem» i jeśli jednostkowe momenty graniczne warstwy górnej oznaczyć odpowiednio przez  $M'_{x0}$  i  $M'_{y0}$ , to warunek stanu granicznego takiej warstwowo ortotropowej płyty zapisuje się następującym układem związków:

$$(3.4) \quad \begin{cases} M_x = M_{x0} & \text{lub} & M_x = -M'_{x0}, & -M'_{y0} \leq M_y \leq M_{y0}, \\ M_y = M_{y0} & \text{lub} & M_y = -M'_{y0}, & -M'_{x0} \leq M_x \leq M_{x0}. \end{cases}$$

Graficzna reprezentacja tego warunku stanu granicznego w układzie głównych ortotropii podana jest na rys. 1. Takie kryterium stanu granicznego jest przyjmowane w teorii linii załamów. Stan graniczny zostaje osiągnięty w przekroju płyty, jeśli momenty  $M_x$  i  $M_y$  spełniają związki (3.4), tzn. znajdują się na obwodzie wieloboku ABCD.



Rys. 1

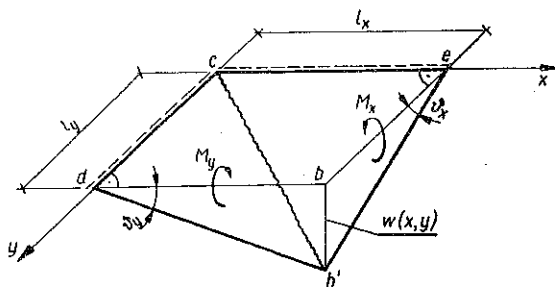
3.2. Założenia teorii linii załamów. Jedną z metod oceny «z nadmiarem» intensywności obciążenia łamiącego płyt reprezentuje teoria linii załamów. Metoda ta polega na ustawianiu równań bilansu energetycznego przy rozpatrywaniu «mechanizmów zniszczenia» (siatek linii załamów), które pozwalają na niekontrolowane odkształcenie się plastyczne płyty przy stałej (nie rosnącej) wartości obciążenia, [5], [6] i [7].

Założenia teorii linii załamów są następujące:

- 1) odkształcenia (plastyczne) koncentrują się w obszarach, w których osiągnięty jest warunek stanu granicznego;
- 2) linie załamów (linie przegubów plastycznych) tworzą układ, który przekształca konstrukcję w mechanizm, daje więc konstrukcji co najmniej jeden stopień swobody;
- 3) linie załamów łączą obszary nieodkształcone i dzielą płytę na szereg płatów, które przemieszczają się jak bryły sztywne;
- 4) ruch sztywnych płatów jest określony geometrią płyty i jej geometrycznymi warunkami brzegowymi oraz ruchem zachodzącym na liniach przegubów plastycznych;
- 5) całkowity przyrost pracy  $L$  wkładanej przez obciążenia zewnętrzne na spowodowanie ruchu mechanizmu zniszczenia zostaje zużyty w procesie odkształcania, tzn. że spełniony jest warunek:

$$(3.5) \quad L \geq D.$$

Wielkość  $D$  przyrostu energii rozpraszanej w procesie odkształceń zależy od wielkości momentów granicznych, kątów obrotu poszczególnych płatów oraz długości linii załamów. Dla fragmentu siatki załomu,



Rys. 2

przedstawionej na rys. 2, odpowiednia wielkość przyrostu energii, rozpraszanej przez siły wewnętrzne w jednostce czasu, opisuje się zależnością:

$$(3.6) \quad D = M_{x0} l_y \vartheta_y + M_{y0} l_x \vartheta_x,$$

ponieważ obrót sztywnych płałów  $cdb$  i  $cbe$  wokół linii załomu  $cb'$  może być przedstawiony jako suma obrotów składowych względem osi obrotu  $ce$  i  $cd$ .

Przyrost pracy wkładanej przez obciążenia zewnętrzne w realizację pewnego kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń określony jest za pomocą wzoru

$$(3.7) \quad L = \int_A pw(x, y) dA,$$

gdzie  $A$  oznacza obszar przyłożenia obciążenia.

Stosowanie metody linii załomów polega na wykorzystaniu związków energetycznych (3.6) i (3.7) i poszukiwaniu najmniejszej intensywności obciążenia związanego z realizacją jednego spośród klasy założonych mechanizmów zniszczenia.

#### 4. Program i metoda badań doświadczalnych

**4.1. Charakterystyka wytrzymałościowa materiałów i wymiary modeli.** Badania doświadczalne nośności granicznej płyt przeprowadzono na modelach żelbetowych o grubości  $h$  oraz wymiarach  $l_x \times l_y$  i dwukierunkowym zbrojeniu wyłącznie dołem. Grubość otuliny wynosiła 4 mm dla prętów zbrojenia  $f_x$  wzdłuż boku  $l_x$  i 7 mm dla ułożonego nad nimi zbrojenia prostokątnego  $f_y$ . Wymiary, ilość wykonanych płyt oraz ilość i rozstaw zbrojenia podaje tablica 1.

Tablica 1. Charakterystyka i ilość modeli płyt

Wymiary płyt $l_x = 100$ cm $h = 3,5$ cm	Zbrojenie $f_x = \varnothing 3$ co 4 cm $f_x = \varnothing 3$ co $c$ cm		
	$c = 1,8$	$c = 3,6$	$c = 7,2$
$l_y = 65$ cm	6 szt.	9 szt.	6 szt.
$l_y = 100$ cm	9 szt.	10 szt.	10 szt.
$l_y = 135$ cm	6 szt.	9 szt.	6 szt.

Modele wykonano przy użyciu kruszywa o uziarnieniu  $\varnothing 10$  mm. Zawartość cementu marki «250» 450 kG/m<sup>3</sup> przy stosunku  $c/w = 2,04$  i dodatku chlorku wapnia w ilości 2%. Średnia wytrzymałość 28-dniowa wynosiła:  $R_w = 220$  kG/cm<sup>2</sup>, wahając się w poszczególnych zarobach w granicach 206—239 kG/cm<sup>2</sup>.

Jako zbrojenia użyto drutu wyzarzonego  $\varnothing 3$  mm o umownej granicy plastyczności  $\sigma_0 = 2120$  kG/cm<sup>2</sup> i wytrzymałości na rozzerwanie  $R_r = 3550$  kG/cm<sup>2</sup>. Ponieważ stal charakteryzowała się krótką płaszczyzną plastyczności, doświadczalnie wyznaczony moment graniczny odpowiadał naprężeniom w stali bliskim granicy wytrzymałości  $R_r$ .

**4.2. Jednostkowe momenty łamiące.** W celu ustalenia jednostkowych momentów łamiących określonych zależnością (2.1) jednocześnie z modelami płyt wykonano bełeczki próbne o wymiarach:  $h = 3,5$  cm,  $b = 12,0$  cm oraz  $b = 14,5$  cm,  $a =$

= 80,0 cm. Zbrojenie beleczek stanowiły pręty  $\varnothing 3$  mm (2-8 szt) odpowiadające zagęszczeniu i rozłożeniem zbrojeniu płyt  $f_x$  oraz  $f_y$  dla różnych współczynników ortotropii. Badanie beleczek przeprowadzono w standartowej maszynie obciążając je siłą skupioną w połowie rozpiętości  $l = 70$  cm. Wyniki badań zawiera tablica 2.

Tablica 2. Jednostkowe momenty łamiące

Typ beleczki	Zbrojenie	Szerokość beleczki $b$ [cm]	Przekrój zbrojenia [cm <sup>2</sup> ]	Wysokość użyteczna [cm]	Ilość zbrojenia %	Ilość badanych beleczek szt.	Średni moment łamiący [kGm/m]
I	$\varnothing 3$ co 4,0 cm	12,0	0,212	2,9	0,61	14	189
II	$\varnothing 3$ co 7,2 cm	14,5	0,141	2,6	0,37	5	85
III	$\varnothing 3$ co 3,6 cm	14,5	0,283	2,6	0,75	6	155
IV	$\varnothing 3$ co 1,8 cm	14,5	0,565	2,6	1,50	6	308

4.3. Metodyka badań nośności granicznej płyt. Obciążenie płyt równomiernym ciśnieniem przeprowadzano w prasie pneumatycznej specjalnie skonstruowanej do badania nośności granicznej konstrukcji powierzchniowych (por. [8]). Ciśnienie  $p = 0 - 0,4$  at. mierzono przy pomocy manometru grawitacyjnego o najmniejszej podziałce 0,001 at, wyższe ciśnienie mierzono manometrem mechanicznym o podziałce 0,05 at. Szybkość obciążania wynikająca z wydajności sprężarki wynosiła ok. 0,05 at na minutę.

Ugięcia mierzono w kilku punktach płyty przy użyciu czujników zegarowych 1/1000.

Zapewnione było przegubowe podparcie płyt na krawędziach, z przeciwdziałaniem unoszeniu się naroży.

## 5. Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie

5.1. Analiza teoretyczna. Dla równomiernie obciążonej prostokątnej płyty kinematycznie dopuszczalny układ linii załomów podaje rys. 3. Ortotropia struktury płyty określona jest stosunkiem momentów

$$(5.1) \quad \kappa = \frac{M_{x0}}{M_{y0}} = \frac{M_{x0}}{M_0}$$

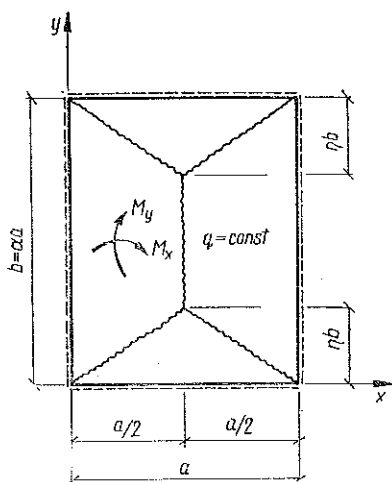
Ortotropia oraz wymiary płyty mogą być ujęte wspólnym wskaźnikiem, zdefiniowanym następująco:

$$(5.2) \quad A = \frac{b}{a} \sqrt{\kappa} = \alpha \sqrt{\kappa}$$

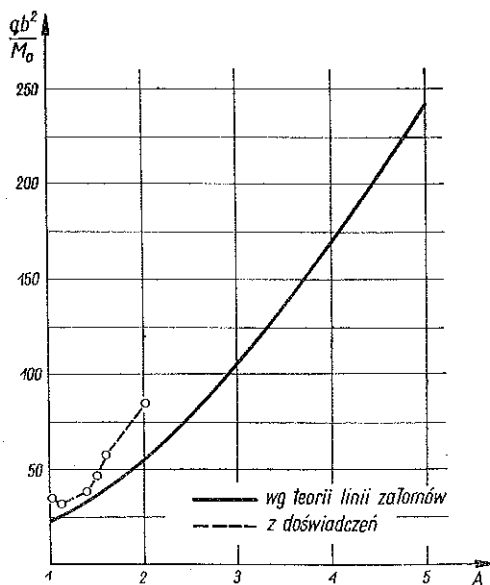
Wskutek obrania takiego mechanizmu zniszczenia, który dzieli płytę na cztery części, mechanizm ten jest w ogólnym przypadku określony przez 3 niezależne



parametry. Z uwagi na podwójną symetrię mechanizm określony jest jednoznacznie przez pojedynczy parametr  $\eta$ . Najmniejszą kinematycznie dopuszczalną wartość obciążenia związaną z jednoparametrową rodziną mechanizmów zniszczenia otrzymuje się z warunku  $dq/d\eta = 0$ .



Rys. 3



Rys. 4

Stosując zależność wiążącą pracę wykonywaną (w jednostce czasu) przez siły zewnętrzne w procesie trwałego odkształcania płyty z energią rozpraszaną przez siły wewnętrzne (w jednostce czasu), otrzymuje się dla rozpatrywanego przypadku następujący związek (por. [6], [9] i [10]):

$$(5.3) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 12 \frac{1 + 2A^2\eta}{\eta(3 - 2\eta)}.$$

Z warunku minimum obciążenia granicznego wynika, że

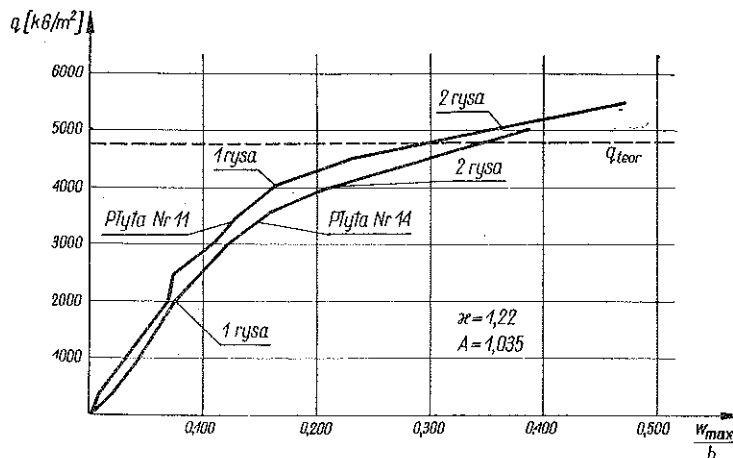
$$(5.4) \quad \eta = \frac{1}{2A^2} (\sqrt{1 + 3A^2} - 1), \quad A \geq 1,$$

co po podstawieniu do (5.3) daje

$$(5.5) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{24A^4}{(\sqrt{1 + 3A^2} - 1)^2} = \frac{6}{\eta^2}, \quad 0 < \eta \leq 1/2.$$

Na rysunku 4 przedstawiono wielkość obciążenia granicznego dla ogólnego przypadku ortotropii. W odniesieniu do dotychczasowych rozwiązań, [6], [11] i [12], wprowadzenie zależności (5.2) pozwala na syntetyczne przedstawienie wszystkich przypadków ortotropii jednym wzorem (5.5).

5.2. Doświadczalne wartości obciążeń granicznych. Obciążanie płyt trwało do chwili, gdy manometr rejestrował chwilowe ustabilizowanie się wartości ciśnienia lub jego spadek przy ciągłym tłoczeniu sprężonego powietrza do elastycznego naczynia ciśnieniowego. Ten stan uważano za stan zniszczenia konstrukcji. Odpowiadało to w przybliżeniu wielkości ugięć rzędu grubości płyty  $w_0/h \approx 1$ , tzn.  $P(w_0/h) = P(1) = P_G$ . Przez dalsze pompowanie powietrza osiągało się na ogół dalszy przyrost obciążenia, co tłumaczy się wieloma czynnikami, jak wzmocnienie stali, efekt sił membranowych itp.



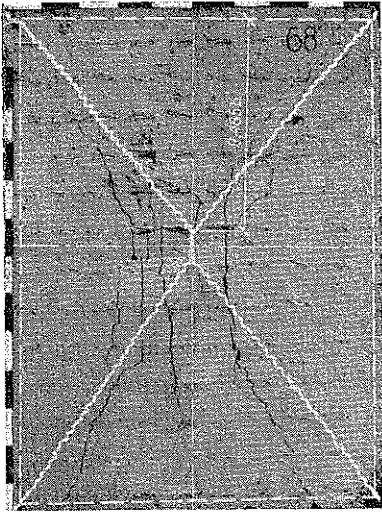
Rys. 5

Na rysunku 5 podano przebieg zależności obciążenie–największe ugięcie  $w_0$  dla dwóch spośród badanych płyt.

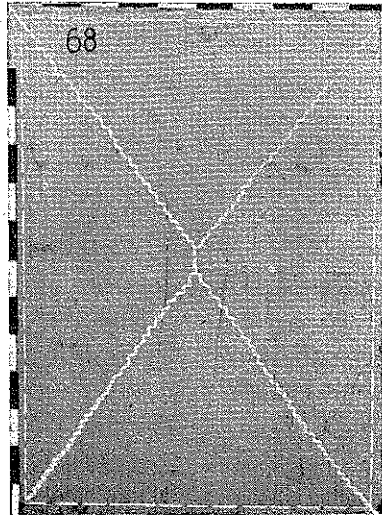
Dla badanej serii płyt swobodnie podpartych na całym obwodzie zestawienie danych teoretycznych i doświadczalnych podaje tablica 3.

Tablica 3. Zestawienie obciążeń granicznych dla płyt swobodnie podpartych

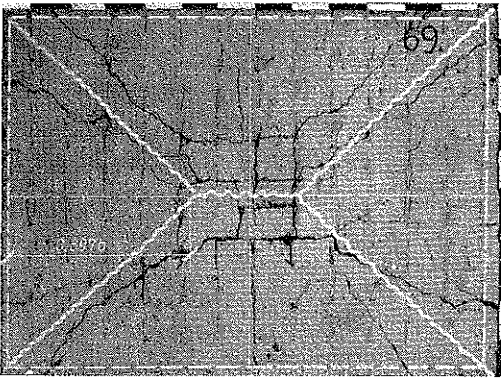
Nr płyty	Rozpiętości obliczeniowe płyt [cm]		Ilość zbrojenia %		$M_{y0} = M_0$ [kGm/m]	$\nu = \frac{M_{x0}}{M_{y0}}$	$A = \frac{b}{a} \sqrt{\nu}$	Obciążenie graniczne [kG/m²]	
	a	b	$f_x$	$f_y$				Teoret.	Dośw.
11	96	90	0,61	0,75	155	1,22	1,035	4760	6800
14	96	90	0,61	0,75	155	1,22	1,035	4760	6800
68	96	130	0,61	1,50	308	0,614	1,061	4640	5800
25	96	90	0,61	0,37	85	2,22	1,397	3650	4000
69	96	130	0,61	0,75	155	1,22	1,495	3490	4300
23	90	96	0,61	0,37	85	2,22	1,590	3810	5400
62	96	130	0,61	0,37	85	2,22	2,020	2770	4200



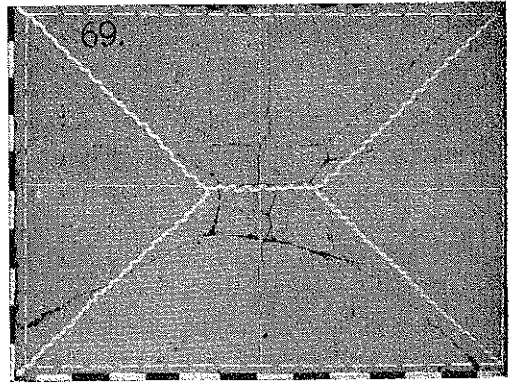
Rys. 6a



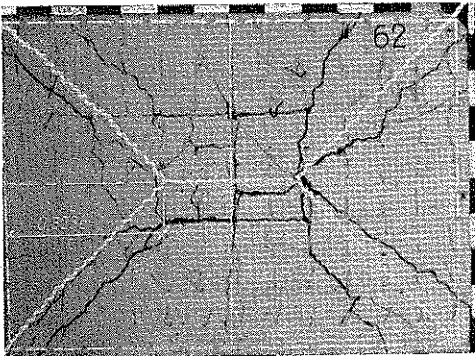
Rys. 6b



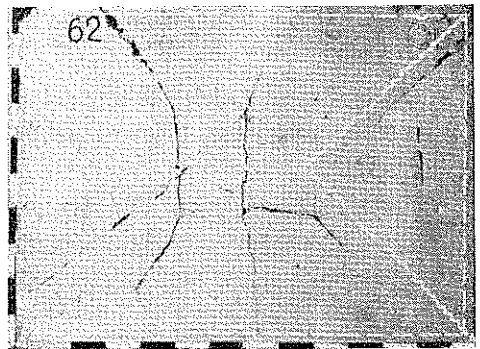
Rys. 7a



Rys. 7b



Rys. 8a



Rys. 8b

Stosunek sumy obciążeń granicznych uzyskanych z doświadczeń do sumy obciążeń granicznych, uzyskanych na podstawie teorii linii załamów dla jednoparametrowej siatki zniszczenia, wynosi dla badanych płyt swobodnie podpartych

$$k = \frac{\sum q_{\text{dośw.}}}{\sum q_{\text{teoret.}}} = 1,338.$$

Otrzymane w wyniku doświadczeń obrazy siatek linii załamów podane są na rysunkach 6-8. Naniesione na fotografię teoretyczne siatki zniszczenia pozwalają porównać zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych. Zależność parametrów siatki zniszczenia od współczynnika ortotropii jest widoczna: z doświadczeń otrzymuje się przy tych samych wymiarach płyt, a różnej ortotropii wyraźne różnice w wielkości tych parametrów. Rozwidlenie siatek w narożach spowodowane jest brakiem zbrojenia górnego w narożach płyt.

W trakcie doświadczeń wystąpiły w niektórych płytach rysy idące przez całą grubość płyty, a więc świadczące o powstałych siłach membranowych (rys. 7 i 8). Ze wzrostem  $\kappa$  wpływ ten jest bardziej widoczny.

## 6. Płyta prostokątna swobodnie podparta na trzech bokach

6.1. Mechanizm zniszczenia (siatka linii załamów) zależy zarówno od sposobu obciążenia płyty jak i od jej wewnętrznej budowy. Aby prześledzić wpływ obciążenia częściowego płyty na parametry układu linii załamów rozpatrzmy ortotropową płytę podpartą i obciążoną jak na rys. 9. Z uwagi na symetrię siatki zniszczenia jest w tym przypadku jednoparametrowa.

W zależności od wzajemnego położenia scharakteryzowanego przez parametr  $\eta$  punktu zbiegu linii załomu wychodzących z naroży oraz zasięgu obciążenia określonego przez parametr  $\beta$ , a także w zależności od stosunku boków płyty  $a$  możliwe są trzy najprostsze przypadki mechanizmu zniszczenia, spełniającego kinematyczne równania warunków brzegowych:

$$(6.1) \quad w(x, 0) = 0, \quad w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0.$$

Rozpatrzmy kolejno te trzy przypadki dobierając z warunku minimum obciążenia granicznego ten, który aktualnie jest stosowny dla określonego zasięgu równomiernego obciążenia.

6.2. Przypadek  $\eta \leq \beta$ . Dla przypadku  $\eta \leq \beta$  punkt zbiegu «dodatnich» linii załomu w polu płyty znajduje się w zasięgu obciążenia. Pole przyrostów przemieszczeń zapisano dla połowy płyty (por. rys. 9) określone jest równaniami:

$$(6.2) \quad w = w_0 \frac{a/2 - x}{a/2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad \eta a(a - 2x) \leq y \leq b$$

oraz

$$(6.3) \quad w = w_0 \frac{y}{\eta b}, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq y \leq \eta a (a - 2x).$$

Na podstawie zależności (3.7) praca wkładana przez obciążenie zewnętrzne wynosi

$$(6.4) \quad L = qa^2 a \frac{1}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \eta \right) w_0.$$

Energia rozpraszana przez siły wewnętrzne na odkształceniach plastycznych skoncentrowanych wzdłuż linii przegubów wynosi w rozpatrywanym przypadku

$$(6.5) \quad D = M_{x0} l_y \vartheta_y + M_{y0} l_x l_x \vartheta_x = \\ = \frac{M_0}{a} \frac{4A^2 \eta + 1}{\eta} w_0,$$

gdzie  $\vartheta_y$  i  $\vartheta_x$  oznaczają nieciągłości pochodnych pola przyrostów przemieszczeń (kąty obrotu w liniowych przegubach; por. rys. 2) przy przejściu przez linię przegubów plastycznych.

Na podstawie równania (3.5) otrzymuje się następujący związek między górną granicą obciążenia łamiącego, a parametrem  $\eta$  i zasięgiem obciążenia  $\beta$ :

$$(6.6) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 6 \frac{4A^2 \eta + 1}{3\beta \eta - \eta^2}.$$

Warunek minimum obciążenia dla założonego mechanizmu zniszczenia prowadzi do zależności:

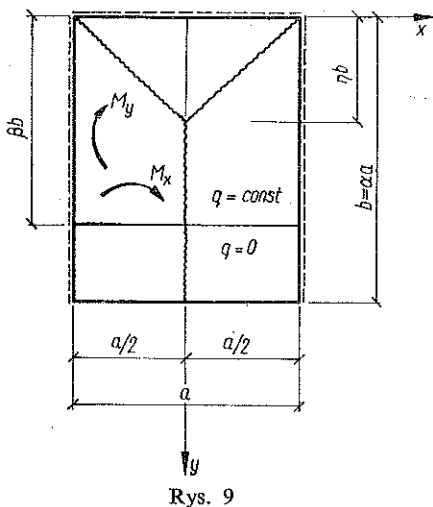
$$(6.7) \quad \eta_1 = \frac{\sqrt{1 + 12A^2 \beta} - 1}{4A^2}, \quad \eta \leq \beta,$$

co po wstawieniu do (6.6) daje:

$$(6.8) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{96A^4}{(\sqrt{1 + 12A^2 \beta} - 1)^2} = \frac{6}{\eta_1^2}, \quad A \geq \frac{1}{4\beta}.$$

**6.3. Przypadek  $\beta \leq \eta \leq 1$ .** W tym przypadku punkt przecięcia się linii załomów, wychodzących z naroży płyty, znajduje się poza zasięgiem obciążenia zewnętrznego, ale jeszcze w zasięgu płyty. Przyrost pracy sił zewnętrznych wynosi

$$(6.9) \quad L = qa^2 a \beta^2 \frac{3\eta - \beta}{6\eta^2} w_0.$$



Przy wykorzystaniu zależności (6.5) i (6.9) oraz warunku ekstremum otrzymuje się następującą wartość obciążenia łamiącegogo:

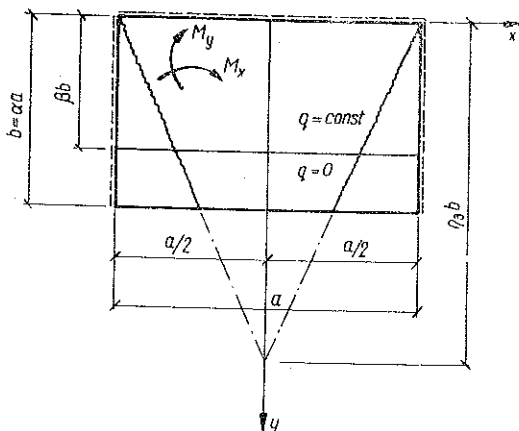
$$(6.10) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{6}{\beta^2} \frac{4A^2\eta^2 + \eta}{3\eta - \beta}$$

oraz parametru mechanizmu zniszczenia

$$(6.11) \quad \eta_2 = \frac{\beta}{3} + \frac{\sqrt{4A^4\beta^2 + 3A^2\beta}}{6A^2}, \quad \frac{\beta}{4(3-2\beta)} \leq A^2 \leq \frac{1}{4\beta}$$

Podstawienie (6.11) do (6.10) pozwala przedstawić obciążenie graniczne w następującej postaci:

$$(6.12) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{2(2A^2\beta + \sqrt{4A^4\beta^2 + 3A^2\beta})^2}{3A^2\beta} = 24 \frac{A^2}{\beta^3} \eta_2^2, \quad \beta \leq \eta \leq 1$$



Rys. 10

6.4. Przypadek  $\eta \geq 1$ . Schemat zniszczenia pokazany na rys. 10 spełnia kinematyczne warunki brzegowe (6.1).

Odpowiednie równanie pola przyrostów przemieszczeń dla połowy płyty  $x > 0$  określone jest związkami

$$(6.13) \quad w = w_0 \frac{a/2 - x}{a/2},$$

$$\frac{1}{2} \left( a - \frac{y}{\eta a} \right) \leq x \leq \frac{a}{2},$$

$$\eta a(a - 2x) \leq y \leq b$$

oraz

$$(6.14) \quad w = w_0 \frac{y}{\eta b}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \left( a - \frac{y}{\eta a} \right), \quad 0 \leq y \begin{cases} \leq \eta a(a - 2x) \\ \leq b, \end{cases}$$

gdzie  $w_0$  oznacza przyrost przemieszczenia punktu wyznaczonego przecięciem się linii załomu poza swobodnym brzegiem płyty.

Wzdłuż prostych  $y = \eta a(a \pm 2x)$  skoki w pochodnych pola przyrostów przemieszczeń (tzn. składowe kątów obrotu poszczególnych sztywnych płatów) wynoszą

$$(6.15) \quad \vartheta_y = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right| = \frac{2}{a} w_0, \quad \vartheta_x = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right| = \frac{1}{\eta b} w_0.$$

Odpowiednie równania przyrostów energii wewnętrznej i zewnętrznej w tym przypadku prowadzą do zależności

$$(6.16) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 6 \frac{4A^2\eta^2 + 1}{\beta^2(3\eta - \beta)},$$

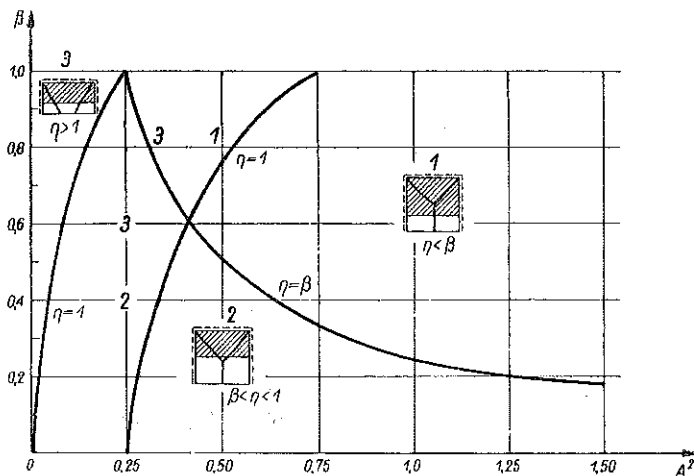
gdzie

$$(6.17) \quad \eta_3 = \frac{\beta}{3} + \frac{\sqrt{4A^4\beta^2 + 9A^2}}{6A^2}, \quad A^2 \leq \frac{3}{4(3 - 2\beta)},$$

co po wprowadzeniu do równania (6.18) daje obciążenie graniczne:

$$(6.18) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{8(2A^2\beta + \sqrt{4A^4\beta^2 + 9A^2})}{3\beta^2} = 16 \frac{A^2}{\beta^2} \eta_3, \quad \eta_3 \geq 1.$$

Zakres stosowalności poszczególnych mechanizmów zniszczenia w zależności od zasięgu obciążenia ilustruje rys. 11.



Rys. 11

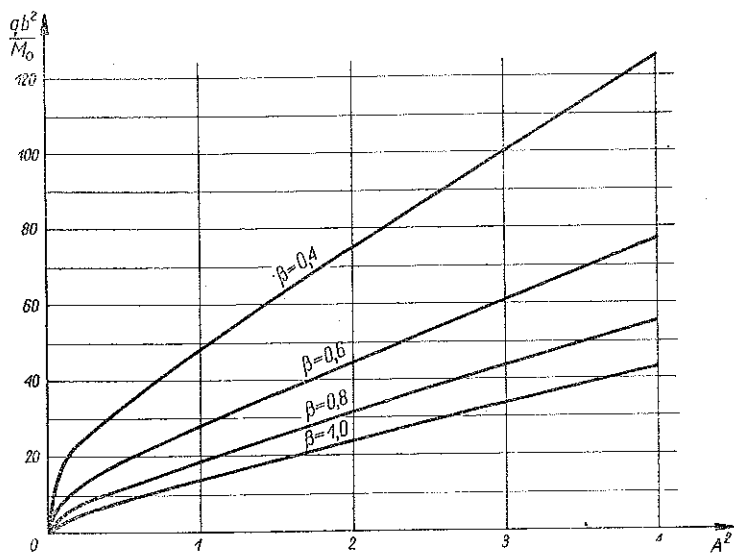
**6.5. Zestawienie wyników analizy teoretycznej.** Wartości obciążenia granicznego obliczonego na podstawie wzorów (6.8), (6.12) i (6.18) podane są w tablicy 4. Dla tych wartości parametru  $A^2$ , dla których możliwe są dwa mechanizmy zniszczenia, w tablicy zostały podane niższe wartości obciążenia.

Dla technicznie ważniejszych przypadków  $0,4 \leq \beta \leq 1$  i  $0 \leq A^2 \leq 4$  wielkości obciążenia granicznego przedstawiono w postaci graficznej na rys. 12. Z krzywych tych widać, że dla  $A^2 > 1$  zależność jest prawie liniowa. Dla celów praktycznych obliczeń można się posługiwać następującym wzorem przybliżonym:

$$(6.19) \quad \frac{qb^2}{M_0} = mA^2 + n, \quad 1 \leq A^2.$$

Tablica 4. Obciążenie graniczne płyty prostokątnej podpartej wzdłuż trzech boków

$A^2$	$\frac{qb^2}{M_0}$				
	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0,6$	$\beta = 0,8$	$\beta = 1,0$
0,05	46,08	11,86	4,99	3,148	2,072
0,10	60,63	17,20	7,97	4,675	3,095
0,25	83,38	25,55	13,23	8,135	5,55
1,0	134,7	48,41	27,64	18,87	14,14
2,0	193,7	75,46	44,91	31,45	24,0
4,0	301,9	125,8	77,40	55,16	42,67
6,0	403,8	173,7	108,3	78,03	60,66
10,0	600,0	266,7	168,7	122,6	96,0
25,0	1293,7	600,0	387,0	284,5	224,5



Rys. 12

Tablica 5. Współczynniki uproszczonego wzoru na obciążenie graniczne płyty podpartej wzdłuż trzech boków

$\beta$	$m$	$n$
0,4	22,98	25,43
0,6	14,97	12,67
1,0	8,763	5,377

Wartości współczynników  $m$  i  $n$  w zależności od zasięgu obciążenia  $\beta$  podano w tablicy 5.

W zakresie  $1 < A^2 < 25$  wzór (6.19) daje wartości obciążenia granicznego nieco mniejsze niż wzór (6.8), a więc przybliżenie jest po stronie «bezpiecznej».



6.6. Wyniki doświadczeń. Poddano obciążeniom 22 płyty według rozpatrywanego schematu. Aby zorientować się w możliwych rozrzutach wyników dla poszczególnych typów ortotropii wykonano 3 serie badań po 3 identyczne płyty oraz 5 serii po 2 identyczne płyty. Ponadto 3 przypadki płyt zbadano po jednym egzemplarzu, aby zorientować się w charakterze siatki linii przegubów plastycznych.

Zestawienie wyników badań podaje tablica 6, przy czym dla płyt nr 70-72  $\beta=0,721$ . W pozostałych przypadkach  $\beta = 1,0$ .

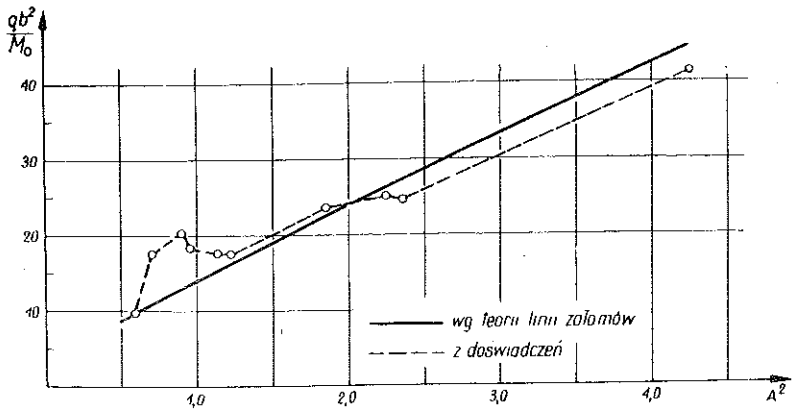
Tablica 6. Zestawienie obciążeń granicznych dla płyt podpartych wzdłuż trzech boków

Nr płyty	Rozpiętości obliczeniowe płyt [cm]		Plość zbrojenia %		$M_{y0} = M_0$ [kGm/m]	$\alpha = \frac{M_{x0}}{M_{y0}}$	$A^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha$	Obciążenie graniczne [kG/m <sup>2</sup> ]	
	a	b	$f_x$	$f_y$				Teoret.	Dośw.
15									
16	96	96	0,61	1,50	308	0,614	0,614	3480	3300
17									3400
									3200
24	90	96	0,37	0,61	189	0,63	0,717	2300	3550
10	90	96	0,75	0,61	189	0,82	0,933	2760	4100
50									4000
51	96	63	0,61	0,37	85	2,22	0,956	2920	3800
63									3200
64	96	133	0,61	1,50	308	0,614	1,177	2800	2850
2									2500
3	96	96	0,61	0,75	155	1,22	1,22)	2750	3200
28	90	96	1,50	0,61	189	1,63	1,855	4640	4700
12									2650
13	96	96	0,61	0,37	85	2,22	2,220	2400	1500
18									2850
54									2150
55	96	133	0,61	0,75	155	1,22	2,340	2390	2150
59									2100
60	96	133	0,61	0,37	85	2,22	4,250	2160	1875
70									6500
71	96	133	0,61	0,75	155	1,22	2,340	3530	4800
72									4600

Odpowiednie porównanie wyników doświadczalnych z krzywą teoretyczną pokazane jest dla różnych parametrów  $A^2$  na rys. 13. Przedstawione wyniki odnoszą się do  $\beta = 1,0$ , tzn. do obciążenia na całą powierzchnię płyty.

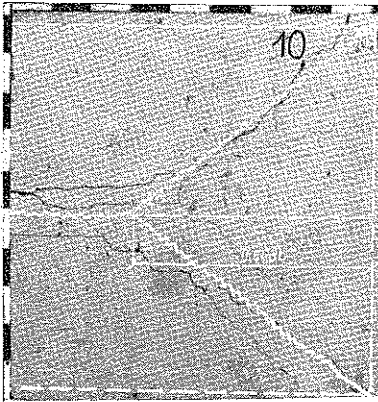
Całkowity wskaźnik charakteryzujący stosunek obciążeń granicznych otrzymanych z doświadczeń do obciążeń wyznaczonych na podstawie teorii linii załomów wynosi

$$K = \frac{\sum q_{dośw.}}{\sum q_{teoret.}} = 1,127.$$

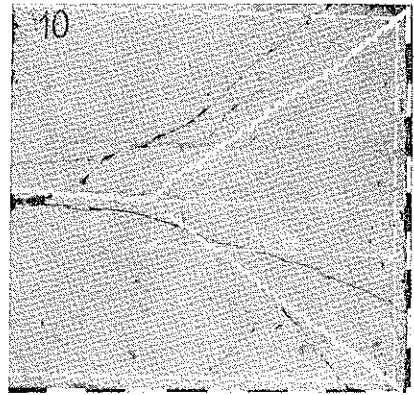


Rys. 13

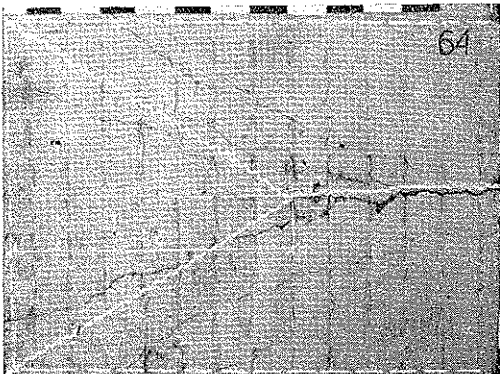
Na rysunkach 14-18 przedstawiono fotografie z doświadczeń wraz ze wskazaniem odpowiednich mechanizmów zniszczenia przewidywanych teoretycznie.



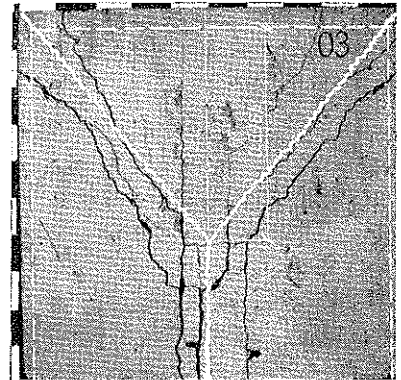
Rys. 14a



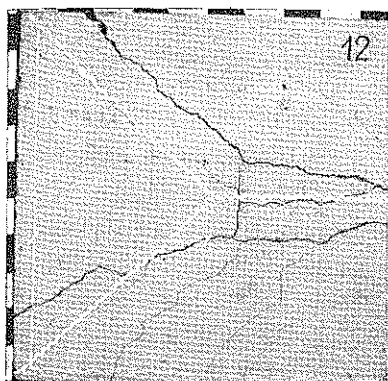
Rys. 14b



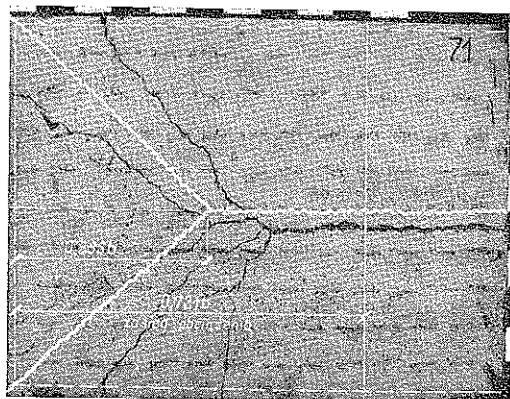
Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18

## 7. Płyty prostokątne podparte w narożach i wzdłuż jednego boku

7.1. Zależności teoretyczne w przypadku punktowego podparcia w dwóch narożach. Jeden z kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia prostokątnej płyty podpartej punktowo w narożach i obciążonej równomiernie na całej powierzchni przedstawia rys. 19.

Jeśli przez  $w_0$  oznaczyć przyrost przemieszczeń krawędzi  $y = b$  [dla  $|x| \leq a(1 - 2\xi)/2$ ], to równanie pola przyrostów przemieszczeń określają w tym przypadku następujące zależności (zapisane dla połowy płyty):

$$(7.1) \quad w = w_0 \frac{y}{b}, \quad 0 \leq x \leq 0,5a, \quad 0 \leq y \leq \frac{\eta}{\xi}(0,5b - ax) + b(1 - \eta) \leq b$$

oraz

$$(7.2) \quad \begin{cases} w = w_0 \left( -\frac{1}{\xi a} x - \frac{1 - \eta}{\eta b} y + \frac{\eta + 2\xi}{2\eta\xi} - 1 \right), \\ \frac{\xi}{\eta a} (b - y) + \frac{b}{a} (0,5 - \xi) \leq x \leq 0,5a, \\ \frac{\eta}{\xi} (0,5b - ax) + b(1 - \eta) \leq y \leq b. \end{cases}$$

Mechanizm zniszczenia jest jednoznacznie określony przez dwa parametry. Łatwo się przekonać, że odpowiednie obroty na liniach przegubów plastycznych mają następujące składowe:

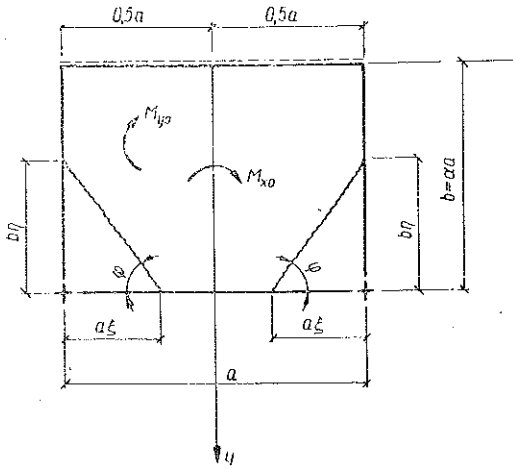
$$(7.3) \quad \vartheta_x = w_0 \left[ \frac{1 - \eta}{b(1 - \eta)} + \frac{1 - \eta}{b\eta} \right], \quad \vartheta_y = \frac{w_0}{a\xi}.$$

Wyznaczając przyrosty pracy sił wewnętrznych i obciążeń zewnętrznych oraz biorąc pod uwagę, że  $l_x = a\xi$ ,  $l_y = b\eta$  otrzymujemy obciążenie graniczne

$$(7.4) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 12 \frac{\xi^2 + A^2\eta^2}{3\xi\eta - 2\xi^2\eta^2}.$$

Szukając minimum  $q$  w założeniu niezależności  $\xi$  i  $\eta$  otrzymuje się następujący układ równań:

$$(7.5) \quad 3\xi^2\eta + 4A^2\eta^4\xi - 3A^2\eta^3 = 0, \quad 3A^2\eta^2\xi + 4\xi^4\eta - 3\xi^3 = 0$$



Rys. 19

Łatwo zauważyć, że dla pierwiastków tego równania spełniona jest zależność

$$(7.6) \quad \xi = A\eta = \eta a \sqrt{\kappa}.$$

Wprowadzając powyższą wartość do równania (7.4), otrzymuje się następujący związek:

$$(7.7) \quad \frac{qb^2}{24 M_0} = \frac{A}{3 - 2A\eta^2},$$

z którego wynika, że minimum obciążenia granicznego zachodzi, jeśli

$$(7.8) \quad \eta = 0, \quad \xi = 0,$$

a więc jeśli istnieje tylko trywialne rozwiązanie układu równań (7.5). Obciążenie graniczne ma jednak wartość skończoną. Przejście do granicy zależności (7.7) daje przy  $\eta \rightarrow 0$  obciążenie graniczne

$$(7.9) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 8A = 8a \sqrt{\kappa} \leq 8, \quad A \leq 1.$$

Związek (7.6) określa kąt nachylenia linii załomu w zależności od współczynnika ortotropii płyty dla naroża podpartego punktowo (por. rys. 19). Kąt ten wynosi

$$(7.10) \quad \varphi = \arctg \frac{1}{\sqrt{\kappa}}.$$

Zależność ta będzie w przyszłości wykorzystywana dla innych przypadków płyt podpartych punktowo w narożach. Przy porównywaniu siatek linii załomów otrzymywanych teoretycznie oraz z doświadczeń określać się będzie wielkość  $\varphi$  (por. też [5] i [13]).

Innym kinematycznie dopuszczalnym mechanizmem zniszczenia płyty podpartej w sposób przedstawiony na rys. 19 jest mechanizm typu «belkowego». W tym przypadku linia przegubów jest równoległa do osi obrotów dwóch płytów,

na jakie dzieli się płyta. Osie obrotów pokrywają się z linią podparcia przegubowego i równoległą do niej linią łączącą podpory punktowe. Dla tego mechanizmu zniszczenia obciążenie łamiące określone jest za pomocą wzoru

$$(7.11) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 8, \quad A \geq 1.$$

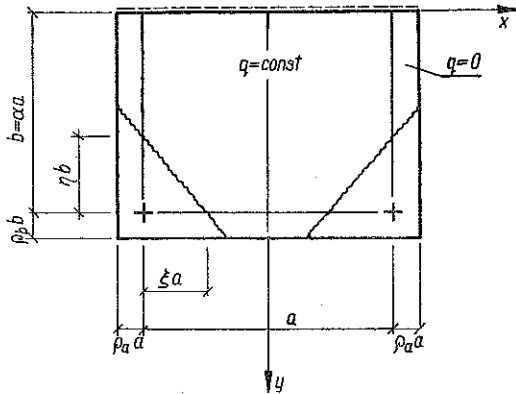
**7.2. Przypadek podparcia punktowego w pobliżu naroży.** Jeżeli podpora punktowa nie jest umieszczona w teoretycznym punkcie przecięcia się krawędzi płyty (por. rys. 20), to zależność (7.8) nie jest spełniona.

Ograniczmy się do przypadku, gdy  $\varrho_a \ll 1$  i  $\varrho_b \ll 1$  oraz założmy, że  $q = \text{const}$  jedynie w obszarze  $-a/2 \leq x \leq a/2$ ,  $0 \leq y \leq b$ , oraz że w pozostałym obszarze  $q = 0$ . Po przyjęciu związku (7.6) pomiędzy parametrami  $\xi$  i  $\eta$  sprowadzającego problem do jednoparametrowego otrzymamy obciążenie graniczne:

$$(7.12) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 24A^2 \frac{\xi + (A\varrho_b + \varrho_a)}{3A\xi - 2\xi^3} \leq \leq 8(1 + 2\varrho_a).$$

Warunek minimum obciążenia prowadzi do równania

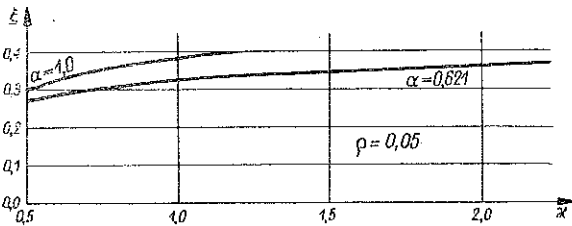
$$(7.13) \quad 4\xi^3 + 6(A\varrho_b + \varrho_a)\xi^2 - - 3A(A\varrho_b + \varrho_a) = 0,$$



Rys. 20

które spełnia  $\xi = 0$  tylko w przypadku, gdy  $\varrho_a = \varrho_b = 0$ . Ponieważ w przypadkach badanych płyt zachowywano warunek  $\varrho_a = a \varrho_b = a\varrho$ , to z równania (7.13) otrzymuje się następującą zależność wiążącą odległość podparcia  $\varrho$  i parametr siatki linii zniszczenia  $\xi$ :

$$(7.14) \quad \xi^3 + \frac{3}{2}(1 + \sqrt{\kappa})\varrho\xi^2 - \frac{3}{4}\alpha\sqrt{\kappa}(1 + \sqrt{\kappa})\varrho = 0.$$



Rys. 21

Równanie to posiada jeden pierwiastek rzeczywisty w przypadku, gdy

$$(7.15) \quad \varrho_b = \varrho \leq \frac{\sqrt{3\kappa}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{\kappa})}.$$

Dla realizowanych w doświadczeniach  $0,45 \leq \kappa \leq 2,22$

oraz  $\varrho = 0,05$  nierówność (7.15) jest spełniona. Na rys. 21 przedstawiona jest zależność między parametrem  $\xi$ , a wskaźnikiem ortotropii dla przypadku  $\varrho = 0,05$ .

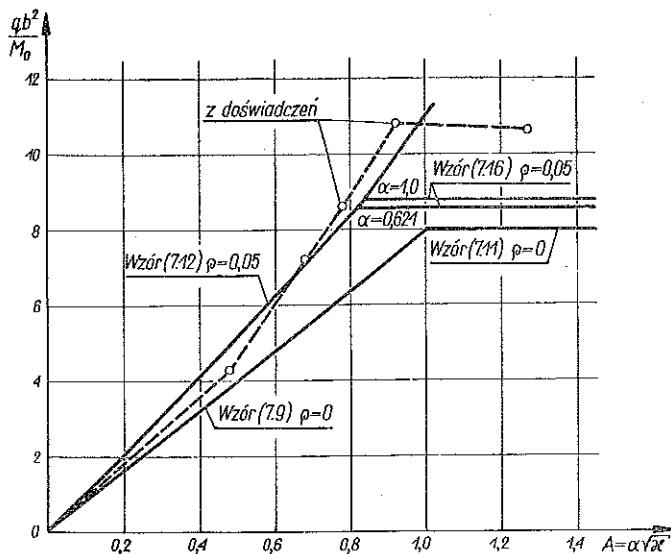
Gdy realizuje się mechanizm «belkowy» to

$$(7.16) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 8(1+2\varrho_a).$$

Wzór ten stanowi rozszerzenie zależności (7.11).

7.3. Dane doświadczalne. Prawie wszystkie badane płyty charakteryzowały się wartością  $A < 1$ , a więc przewidywane złamanie konstrukcji następować powinno (i następowało) według schematu przedstawionego na rys. 20.

Wartości obciążeń granicznych podano w tablicy 7, a na rys. 22 przedstawiono porównanie danych doświadczalnych z teoretycznymi, obliczonymi ze wzorów (7.9) i (7.17), a również z (7.12) i (7.16).



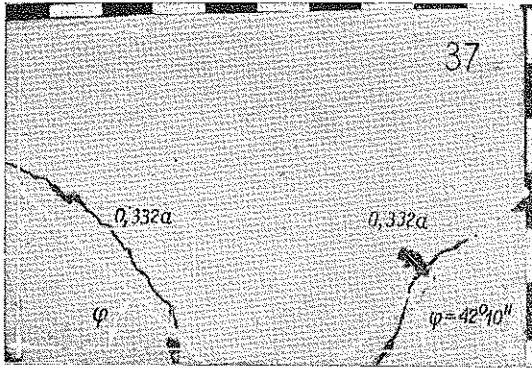
Rys. 22

Ogólny wskaźnik charakteryzujący stosunek obciążeń wyznaczonych doświadczalnie do obciążeń teoretycznych obliczonych w założeniu  $\varrho = 0$  i  $\varrho = 0,05$  wynosi odpowiednio:

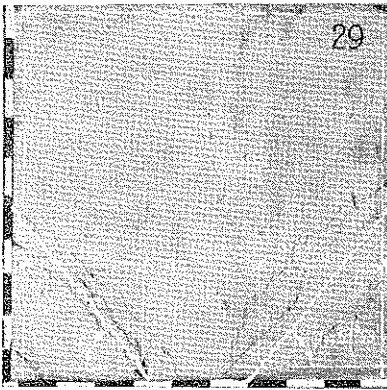
$$(7.17) \quad K_1 = \frac{\sum q_{dośw.}}{\sum q_{teoret.}} = 1,242 \quad \text{oraz} \quad K_2 = 0,971.$$

Otrzymane doświadczalnie układy linii załomów dla poszczególnych serii płyt wykazywały zadowalającą powtarzalność. Rysunki 23-26 przedstawiają fotografie otrzymywanych linii załomów z zaznaczonymi parametrami siatki linii przegubów.

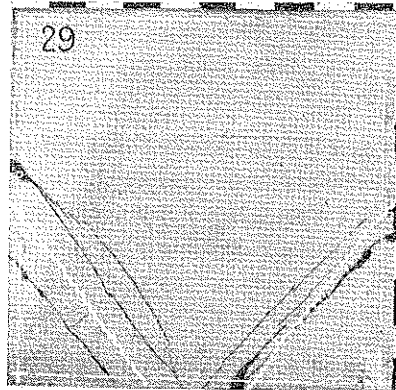
Zniszczenie omawianego typu płyt następowało gwałtownie. Niekiedy w sąsiedztwie naroża podpartego punktowo pojawiały się dwie równoległe linie przegubów



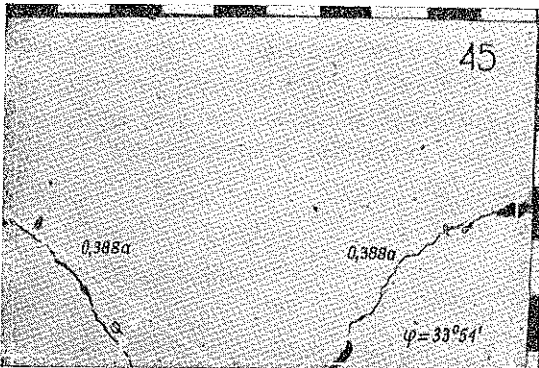
Rys. 23



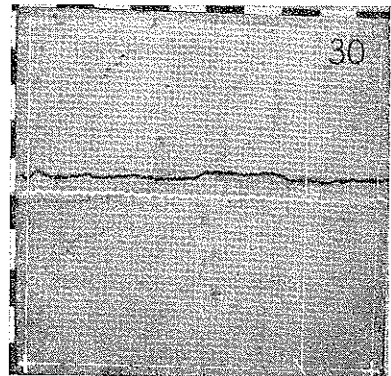
Rys. 24a



Rys. 24b



Rys. 25



Rys. 26

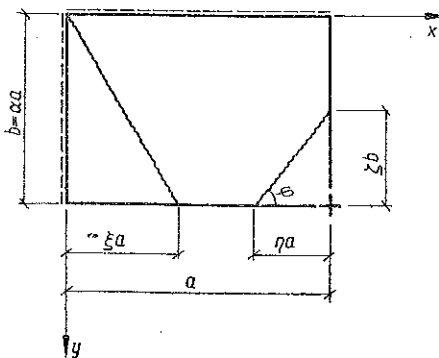
Tablica 7. Zestawienie obciążeń granicznych dla płyt podpartych w narożach i wzdłuż jednego boku

Nr płyty	Rozpiętości obliczeniowe płyt [cm]		Ilość zbrojenia %		$M_{y0}=M_0$ [kGm/m]	$\alpha = \frac{M_{x0}}{M_{y0}}$	$A = \frac{b}{a} \sqrt{\alpha}$	Obciążenie graniczne [kG/m <sup>2</sup> ]		
	a	b	$f_x$	$f_y$				Teoretyczne		Dośw.
								$\rho = 0$	$\rho = 0,05$	
40										3200
46	95	59	0,61	1,50	308	0,614	0,486	3440	4410	4200
47										4100
48										3600
37										3000
38	95	59	0,61	0,75	155	1,22	0,686	2490	3200	3800
39										3200
44										3100
29	95	95	0,61	1,50	308	0,614	0,784	2135	2810	2930
45										2400
49	95	59	0,61	0,37	85	2,22	0,925	1810	2420	2900
30	95	95	1,50	0,61	189	1,63	1,277	1675	1840	2250

(por. rys. 24) z tendencją tworzenia się zakrzywionych linii pęknięć (co tłumaczy się odkształceniami sprężystymi w fazie poprzedzającej zniszczenie). W przypadku  $A > 1$  (płyta nr 30) zniszczenie nastąpiło zgodnie ze schematem belkowym, a więc zgodnie z wynikami analizy.

8. Płyty prostokątne oparte wzdłuż dwóch przyległych boków z narożem podpartym punktowo

8.1. Analiza teoretyczna dla przypadku ogólnego. Ortotropową płytę prostokątną podpartą w sposób przedstawiony na rys. 27, układ linii załomów dzieli



Rys. 27

na trzy płyty. Układ ten jest niesymetryczny względem przekątnych płyty i określony przez trzy parametry  $\xi, \eta, \zeta$ , z których dwa tylko mogą być niezależne.

Jeśli wzdłuż linii  $y = b$  na odcinku  $\xi a \leq x \leq (1 - \eta) a$  przyrost przemieszczeń oznaczyć przez  $w_0$ , to przy obciążeniu równomiernym  $q$  otrzymujemy

$$(8.1) \quad L = \frac{qa^2 \alpha}{6} (3 - \xi - \eta \zeta) w_0$$

oraz

$$(8.2) \quad D = \frac{M_0}{\alpha} \frac{A^2(\eta \zeta + \xi \zeta^2) + \xi^2 \eta \zeta + \xi \eta^2}{\xi \eta \zeta} w_0.$$



Uwzględniając (na podstawie poprzedniego rozdziału) związek między parametrami  $\eta$  i  $\xi$  w pobliżu naroża podpartego punktowo  $\eta = \zeta A$  otrzymujemy następujące wyrażenie określające wielkość obciążenia granicznego:

$$(8.3) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 6 \frac{A^3 + 2A^2\xi + A\xi^2}{3A\xi - A\xi^2 - \xi\eta^2}$$

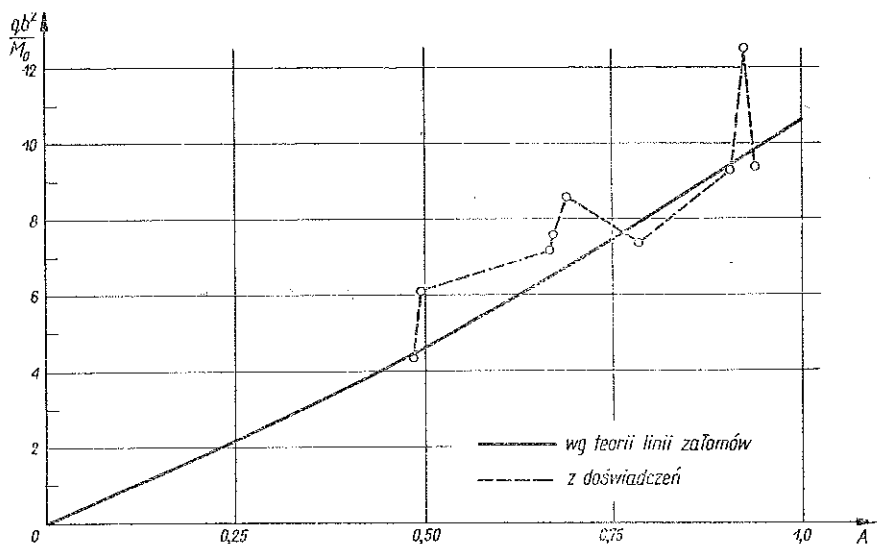
Warunek  $dq/d\eta = 0$  prowadzi do następującego równania:

$$(8.4) \quad (A^2 + 2A\xi + \xi^2) \xi\eta = 0.$$

Ponieważ  $\xi \neq -A$  oraz  $\xi \neq 0$ , przeto

$$(8.5) \quad \eta = 0.$$

Oznacza to, że tak jak w rozdziale poprzednim w miejscu podparcia punktowego linia przegubów zbliża się do punktu podparcia spełniając warunek (8.4). Należy jednak zwrócić uwagę, że energia wewnętrzna rozpraszana w tym liniowym przegubie posiada skończoną wartość  $Dp = 2M_0 \sqrt{\kappa} w_0$ .



Rys. 28

Wykorzystując (8.5) we wzorze (8.3) minimum obciążenia granicznego otrzymujemy

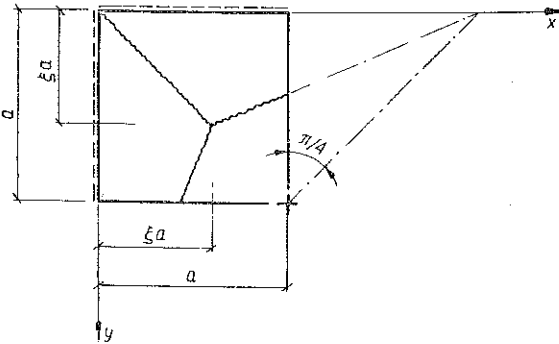
$$(8.6) \quad \xi = \frac{3A}{3+2A}, \quad A \leq 1.$$

Wielkość obciążenia granicznego określona jest zależnością

$$(8.7) \quad \frac{qb^2}{M_0} = 8A \left(1 + \frac{A}{3}\right), \quad A \leq 1.$$

Dla szczególnego przypadku  $A = 1$  otrzymujemy  $\xi = 0,6$ . Na rysunku 28 przedstawiono zależność obciążenia granicznego od wymiarów i anizotropii płyty.

8.2. Izotropowa płyta kwadratowa. W szczególnym przypadku izotropowej płyty kwadratowej należy rozpatrzyć mechanizm zniszczenia, który jest symetryczny względem przekątnej  $y = ax$ .



Rys. 29

Układ linii przegubów plastycznych jest w pełni określony jednym parametrem. Odpowiednie zależności geometryczne przedstawione są na rys. 29. Obciążenie graniczne wynosi

$$(8.8) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{32}{3}, \quad \xi = 3/4,$$

jest więc identyczne z obciążeniem dla przypadku  $\xi = 0,6$  ze wzoru (8.7).

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że dla  $A = 1$  dwa różne, kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia prowadzą do identycznych wartości obciążenia granicznego. W konsekwencji każda liniowa kombinacja tych rozpatrzonych mechanizmów może się zrealizować dla  $A \approx 1$ . Wynika stąd, że w wyniku badań doświadczalnych nie można będzie w tych przypadkach przeprowadzić porównania zgodności założonych i realizujących się siatek linii załamów. Wielkość obciążenia granicznego oszacowana metodą kinematyczną jest jednoznacznie określona dla tych wielu możliwych mechanizmów.

8.3. Dane doświadczalne. Wskutek podparcia płyty w punkcie, nie pokrywającym się z wyznaczonym teoretycznie jako przecięcie swobodnych boków płyty, otrzymywano odłamywania się naroża w pewnej odległości od punktu podparcia.

Zestawienie danych doświadczalnych podaje tablica 8 a porównanie graficzne z wynikami teoretycznymi rys. 28. Średni stosunek obciążenia, wyznaczonego z doświadczeń, do obliczonego dla wszystkich płyt typu omawianego wynosi

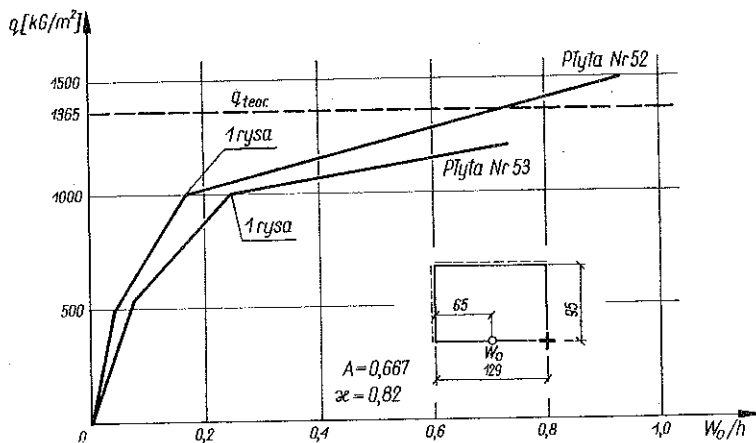
$$(8.9) \quad K = \frac{\sum q_{dosw.}}{\sum q_{teoret.}} = 1,075.$$

Charakter zależności ugięcia od obciążenia przedstawiony jest na rys. 30 dla dwóch płyt charakteryzujących się  $\nu = 0,82$  oraz  $A = 0,667$ .

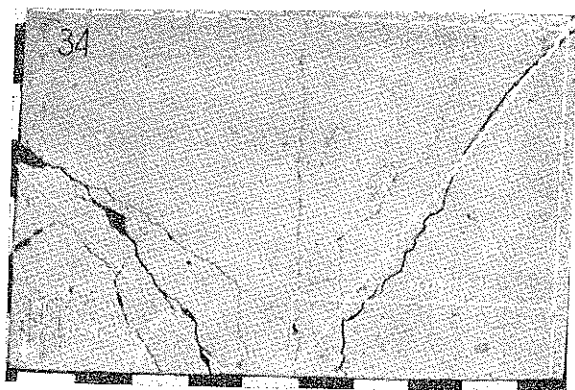
Zniszczenie płyt omawianej tu grupy następowało gwałtownie. Charakterystyczne układy linii załamów przedstawione są na rys. 31-33. W pobliżu naroża podpartego zaznaczono jedynie kąt nachylenia linii załamów wyznaczony z zależności  $\eta = \zeta A$ .

Tablica 8. Zestawienie obciążeń granicznych dla płyt podpartych wzdłuż dwóch przyległych boków z narożem podpartym punktowo

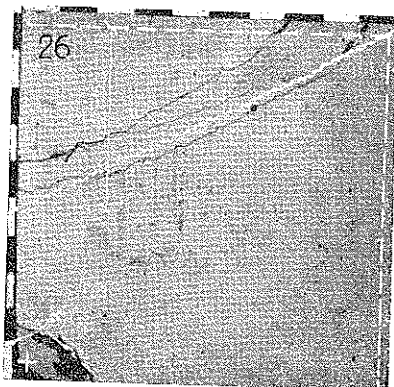
Nr płyty	Rozpiętości obliczeniowe płyt [cm]		Ilość zbrojenia %		$M_{y0} = M_0$ [kGm/m]	$\alpha = \frac{M_{x0}}{M_{y0}}$	$A = \frac{b}{a} \sqrt{\alpha}$	Obciążenie graniczne [kG/m <sup>2</sup> ]	
	a	b	$f_x$	$f_y$				Teoret.	Dośw.
35 41	95	59	0,61	1,50	308	0,614	0,487	4010	3800 3900
57 58	129	95	0,37	0,61	189	0,45	0,494	960	1350 1200
52 53	129	95	0,75	0,61	189	0,82	0,667	1365	1550 1450
20 21 22	95	95	0,37	0,61	189	0,45	0,670	1370	1550 1570 1600
34 36	95	59	0,61	0,75	155	1,22	0,686	3000	4000 3600
19 26 27	95	95	0,61	1,50	308	0,614	0,784	2700	2650 2350 2500
7 8 9	95	95	0,75	0,61	189	0,82	0,905	1975	1800 2200 1880
42 43	95	59	0,61	0,37	85	2,22	0,925	2360	3500 2600
65 66	129	95	1,50	0,61	189	1,63	0,940	2070	2460 1480



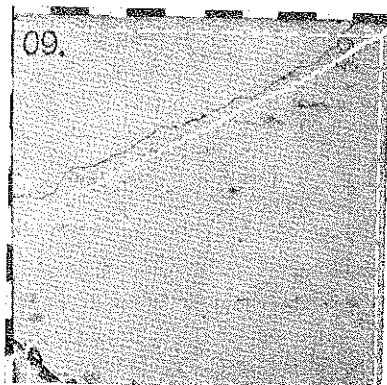
Rys. 30



Rys. 31



Rys. 32



Rys. 33

### 9. Płyta prostokątna o jednym brzegu swobodnym z podparciem punktowym

9.1. Analiza teoretyczna. Do zniszczenia płyty, jak to pokazano na rys. 34, może być konieczne utworzenie się linii załomu związanej z «ujemnym» momentem.

Na odcinku  $(1 - \zeta)b \leq y \leq b$  dla  $x = 0$  występuje załom «ujemny». Ponieważ płyta jest zbrojona tylko dołem, linii «ujemnego» przegubu nie towarzyszy rozpraszanie energii, gdyż odpowiedni moment graniczny na zginanie momentami  $M_x < 0$  jest równy zero. Z tego względu w pobliżu podparcia punkowego płyta zachowywać się będzie jak w przypadku swobodnego naroża i tylko dwa spośród parametrów  $\xi, \eta, \zeta$  są niezależne. Na podstawie zależności (7.6) zachodzi związek

$$(9.1) \quad \xi = \zeta A.$$

Stąd obrany mechanizm zniszczenia jest teraz jednoznacznie określony parametrami  $\xi$  i  $\eta$ .

Jeśli na odcinku  $\eta b \leq y \leq (1 - \zeta)b$  przyrost przemieszczeń  $w = w_0$ , to

$$(9.2) \quad L = \frac{qa^2 a}{6A} (3A - A\eta - 2\xi^2) w_0$$

oraz

$$(9.3) \quad D = \frac{M_0}{\alpha\eta} [1 + 4A(A+1) - 4A\xi\eta] \cdot w_0.$$

Minimum obciążenia łamiącego otrzymuje się dla takich wartości parametrów  $\xi$  i  $\eta$ , które spełniają poniższy układ równań:

$$(9.4) \quad A^2\eta^2 - 3A^2\eta - 2A\xi^2\eta + 4A(1+A)\xi\eta + \xi = 0,$$

$$(9.5) \quad 4A^2(1+A)\eta^2 - 4A^2\xi\eta^2 + 2A\eta + 2\xi^2 - 3A = 0,$$

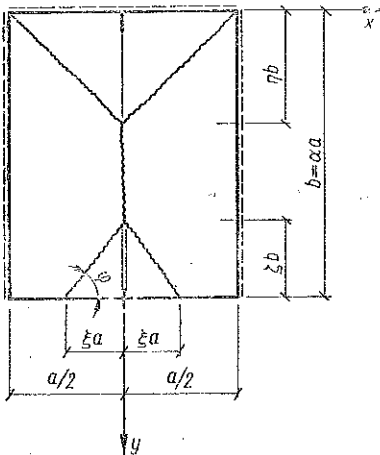
redukujący się do następującej postaci:

$$(9.6) \quad \eta A = \sqrt{\xi},$$

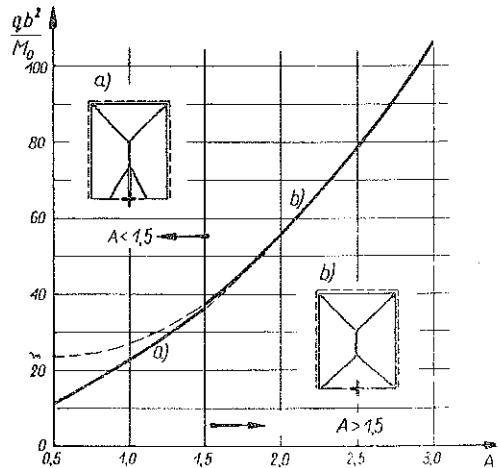
$$(9.7) \quad 2\xi^2 - 4(1+A)\xi + 3A = 2\sqrt{\xi},$$

skąd parametry siatki linii załomów mogą być wyznaczone numerycznie. Intensywność obciążenia łamiącego jest równa:

$$(9.8) \quad \frac{qb^2}{M_0} = \frac{6}{\eta^2} = \frac{6A^2}{\xi}, \quad 0,5 \leq A \leq 2,914.$$



Rys. 34



Rys. 35

Otrzymane rozwiązanie stosuje się do pewnego przedziału wielkości parametru  $A$ . Warunkiem ograniczającym  $A$  z dołu jest związek  $\eta + \xi = 1$ , który po uwzględnieniu (9.1) przyjmuje postać

$$(9.9) \quad \sqrt{\xi}(1 + \sqrt{\xi}) = A.$$

Łącznie z równaniem (9.7) pozwala to wyznaczyć dolną wartość parametru  $A$ , dla której mechanizm zniszczenia przedstawiony na rys. 34 jest kinematycznie dopuszczalny. Obliczenia prowadzą do wartości

$$(9.10) \quad A_{min} = 0,5, \quad \xi_{min} = 0,134, \quad \eta = 0,732.$$

W analogiczny sposób z warunku  $\xi = 0,5$  otrzymuje się górną granicę przedziału stosowalności wzoru (9.8):

$$(9.11) \quad A_{max} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 2,914, \quad \eta = 0,243, \quad \zeta = 0,293.$$

Wielkość obciążenia granicznego i parametry siatki zniszczenia podane są w tabelicy 9.

Tablica 9. Parametry siatki zniszczenia i obciążenia graniczne dla płyty prostokątnej z podporą punktową na brzegu

$A$	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\frac{q}{M_0} b^2$
1	2	3	4	5
$A_{min} = 0,5$	0,134	0,732	0,268	11,2
0,580	0,158	0,684	0,272	12,8
0,661	0,178	0,635	0,269	14,9
0,932	0,249	0,535	0,267	24,0
1,0	0,264	0,513	0,264	22,8
1,5	0,356	0,398	0,237	37,9
2,0	0,421	0,325	0,210	56,8
$A_{max} = 2,914$	0,500	0,243	0,172	102,0

Okazuje się jednak, że począwszy od wartości  $A \geq 1,5$  otrzymywana z (9.8) intensywność obciążenia granicznego jest prawie identyczna (z różnicą nie przekraczającą 0,8%) z wartością otrzymywaną na podstawie równania (5.5) dla prostokątnej płyty swobodnie podpartej wzdłuż czterech boków.

Rysunek 35 przedstawia zmianę obciążenia granicznego w zależności od wymiarów i ortotropii płyty. W obszarze  $0,5 \leq A \leq 1,5$  obciążenie wyznaczono ze wzoru (9.8), natomiast dla  $A > 1,5$  z równania (5.5) jak dla płyty swobodnie podpartej wzdłuż obwodu.

9.2. Dane doświadczalne. Według rozpatrywanego schematu podparcia płyt poddano badaniom trzy modele o różnych współczynnikach ortotropii. W dwóch przypadkach intensywność obciążenia granicznego wyznaczona doświadczalnie była wyższa niż obliczeniowa. Wszystkie badane przypadki odnosiły się do  $A < 1,5$ . W jednym przypadku zniszczenie nastąpiło przez «przebicie» płyty w miejscu podparcia punkowego, przy czym obciążenie, przy którym to nastąpiło, było niższe od obliczonego teoretycznie. Odpowiednie zestawienie danych odnoszących się do obciążenia łamiącego podaje tablica 10.

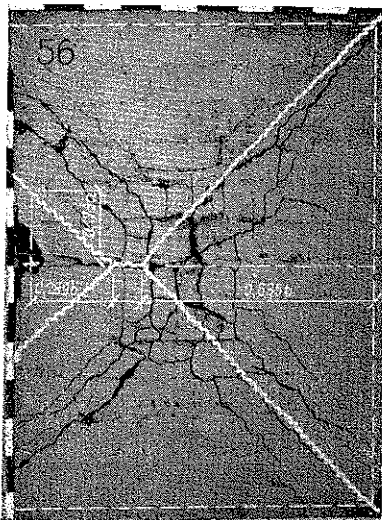
Tablica 10. Zestawienie obciążeń granicznych dla płyt o jednym brzegu swobodnym z podparciem punktowym

Nr płyty	Rozpiętości obliczeniowe płyt [cm]		Ilość zbrojenia %		$M_{y0} = M_0$ [kGm/m]	$\kappa = \frac{M_{x0}}{M_{y0}}$	$A = \frac{b}{a} \sqrt{\kappa}$	Obciążenie graniczne [kG/m <sup>2</sup> ]	
	a	b	$f_x$	$f_y$				Teoret.	Dośw.
61	130	95	0,37	0,61	189	0,45	0,5	2350	3750
56	130	95	0,75	0,61	189	0,82	0,661	3120	4700
67	130	95	0,50	0,61	189	1,63	0,932	4400	4000

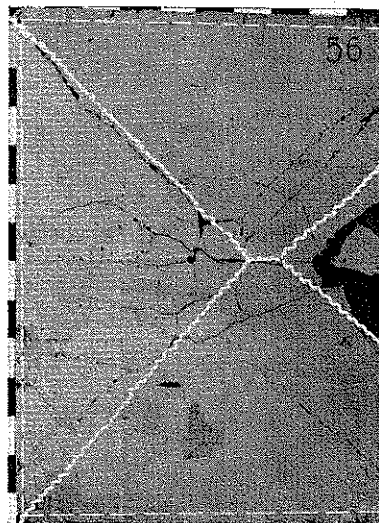
Średni stosunek doświadczalnych obciążeń łamiących do teoretycznych górnych granic obciążenia granicznego w badanym przypadku podparcia płyty wynosi

$$(9.12) \quad K = \frac{\sum q_{dośw.}}{\sum q_{teoret.}} = 1,274.$$

Otrzymywany doświadczalnie układ linii załomów pokazany jest na rys. 36.



Rys. 36a



Rys. 36b

## 10. Synteza wyników badań

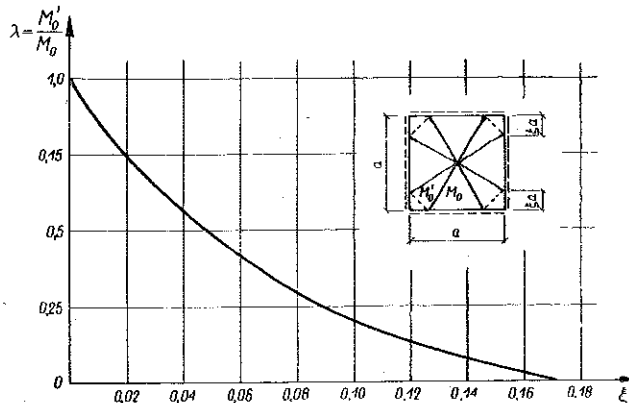
**10.1. Wnioski o jakościowym przebiegu zjawiska. Wpływ «efektu naroża» na nośność graniczną płyt.** Z przedstawionych rezultatów doświadczeń wynika, że otrzymane parametry układów linii załomów dość dobrze odpowiadają postulowanym najprostszym spośród kinematycznie dopuszczalnych schematów zniszczenia. W pobliżu swobodnie podpartych naroży obserwuje się jednak rozdwojenie linii załomu.

Tworzenie się rozwidlonych układów linii załomów jest spowodowane realizującym się w stanie granicznym polem sił wewnętrznych (por. [11]). Można jednak cechy «efektu naroża» prześledzić metodami kinematycznymi. Okazuje się, że zasięg rozwidlenia w pobliżu naroża dla płyty na całej długości boku przegubowo połączonej z podporą zależy od ilości zbrojenia w górnej warstwie w pobliżu naroża, tzn. od granicznego momentu ujemnego  $M'_0 = \lambda M_0$ . Jeśli zbrojenia górnego nie ma w ogóle, zasięg rozwidlenia jest największy. «Efekt naroża» zmniejsza nośność graniczną płyty, wpływ ten sięga jednak zaledwie kilku procent (Por. [5], [15] i [16]).

Dla płyt izotropowych wpływ «efektu naroża» rozpatrywany jest w [15]. Porównanie obciążenia łamiącego  $q_0$  dla mechanizmu pokazanego na rys. 3 oraz obciążenia  $q$  związanego układem linii załomów z rozwidleniem w narożu wykazuje [15], że ten drugi przypadek daje niższe wartości obciążeń, jeśli

$$(10.1) \quad \lambda_{gr.} = \frac{M'_0}{M_0} \leq \frac{a^2 + 2b^2 - a\sqrt{a^2 + 3b^2}}{b\sqrt{a^2 + 3b^2} - a}$$

W przeciwnym przypadku zniszczenie nastąpi bez «efektu naroża» i o nośności płyty decyduje schemat zniszczenia jaki rozpatrywano w p. 5. Jak widać  $1 \leq \lambda \leq 2/\sqrt{3}$  dla  $1 \leq b/a \leq \infty$ . Dla izotropowej płyty kwadratowej wynika, że  $\lambda = 1$  zapewnia zrealizowanie się mechanizmu zniszczenia bez rozwidlenia w narożu.



Rys. 37

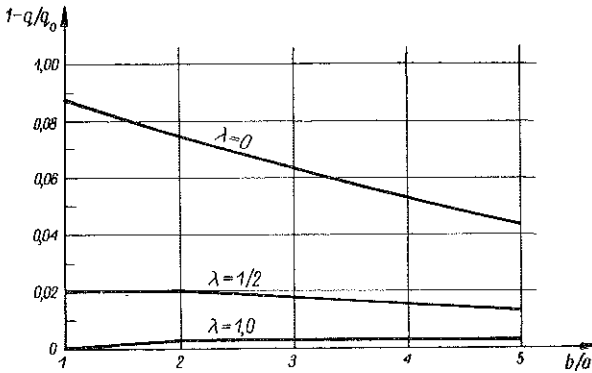
Ponieważ płyty badane charakteryzowały się wielkością  $\lambda = 0$ , «efekt naroża» powinien się pojawić. Zasięg tego efektu dla płyty kwadratowej pokazany jest na rys. 37.

Zmniejszenie obciążenia granicznego wskutek utworzenia się mechanizmu zniszczenia jak na rys. 37 jest największe dla płyty kwadratowej i maleje z wydłużeniem się płyty. Ilustruje to rys. 38 dla różnych intensywności zbrojenia górnego w pobliżu naroża (tzn. dla różnych  $\lambda = M'_0/M_0$ ).

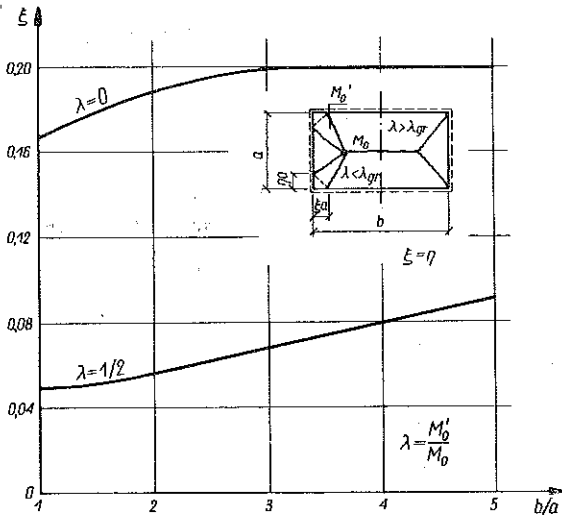


Na rysunku 39 pokazano wykres zasięgu «efektu naroża» dla płyt prostokątnych izotropowych.

Dla płyt anizotropowych zbrojonych jednakowymi siatkami zbrojenia w warstwie górnej i dolnej zamiast warunku  $\eta = \xi$  stosownie do (7.9) można przyjąć, że  $\eta/\xi = \sqrt{\kappa}$  i wówczas zasięg «efektu naroża» może być wyznaczony bezpośrednio z rys. 39.



Rys. 38



Rys. 39

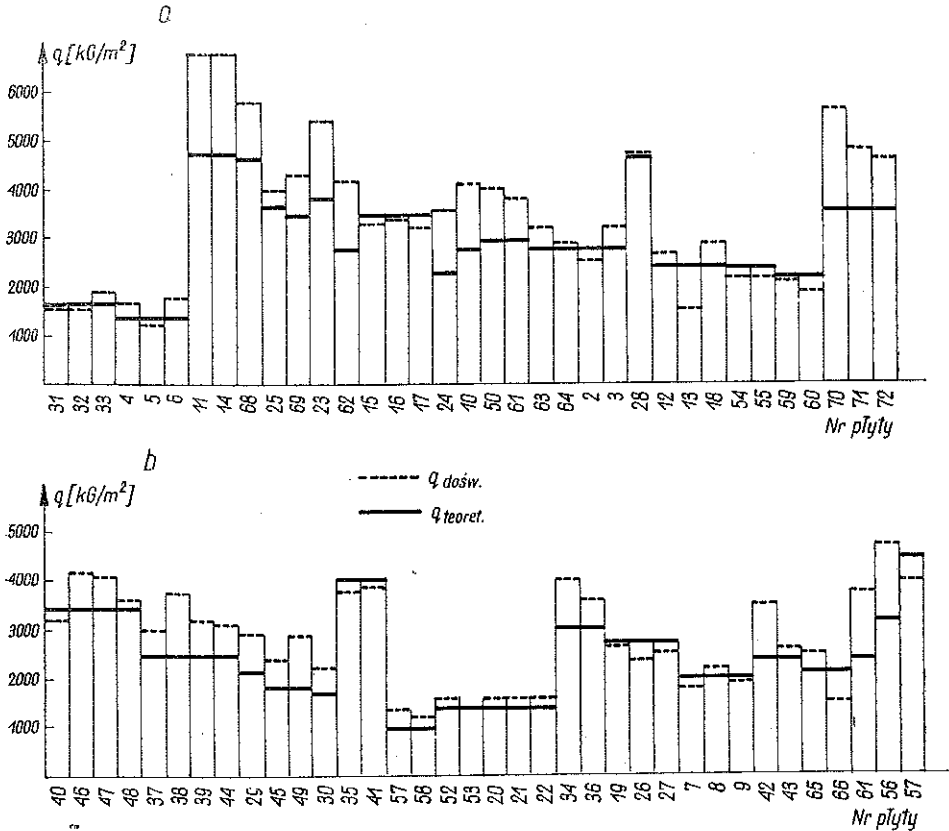
Z przytoczonych fotografii widać, że obserwowany zasięg strefy «naroża» odpowiada dobrze górnej krzywej z rys. 39 (tzn.  $\xi \approx \eta/\sqrt{\kappa} \approx 0,2 b$ ).

Zmniejszenie obciążenia granicznego wynosi co najwyżej 8%. Z uwagi na ten rząd wielkości różnic w obciążeniach łamiących szczegółowych obliczeń ilościowych

«wpływu naroża» na wielkość obciążenia dla badanych płyt ortotropowych nie przeprowadzono. Wpływ zbrojenia górnego w narożu płyty jest bardziej istotny naukład linii załomów niż na wielkość obciążenia granicznego.

10.2. Charakterystyka ilościowa doświadczeń. Uwzględniając wyniki dotyczące efektu naroża i przyjmując, że dla  $\lambda = 0$  zmniejszenie obciążenia granicznego jest mniejsze od 8%, odpowiedni wskaźnik wyników doświadczalnych do teoretycznych wyniesie

$$(10.2) \quad 1,17 \leq \frac{q_{\text{doświad.}}}{q_{\text{teoret.}}} \leq 1,27.$$



Rys. 40

Na rysunku 40 przedstawiono zestawienie wielkości obciążenia granicznego dla wszystkich badanych płyt bez względu na warunki brzegowe. Na rysunku tym oznaczone są również teoretycznie otrzymane obciążenia obliczone na podstawie zależności podanych w p. 5-9.

Z rysunku 40 oraz zależności (10.2) wynika, że teoria linii załomów daje bezpieczne wartości obciążeń w stosunku do wartości otrzymywanych z doświadczenia.

Znaczne (20 do 30%) różnice na korzyść bezpieczeństwa nie mogą być wytłumaczone na gruncie teorii nośności granicznej płyt o małych ugięciach. Konieczne jest uwzględnienie nieliniowości geometrycznej związków pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami powierzchni środkowej płyty, a więc w konsekwencji sił membranowych pojawiających się, gdy ugięcia płyty nie spełniają warunku technicznej teorii płyt  $w_{max}/h \leq \approx 1/5$ .

Zapas bezpieczeństwa w stosunku do danych teoretycznych, określony zależnością (10.2), nie może być wytłumaczony wzmocnieniem stali, gdyż wielkości momentów granicznych wyznaczone doświadczalnie odpowiadały naprężeniom w stali poza obszarem wzmocnienia (stal o wydłużalności przy zerwaniu  $a_{10} = 20,6\%$ ). Z tego względu zbadanie zależności obciążenia od ugięć przy uwzględnieniu sił membranowych jest niezbędne.

Jak wynika z omówionych badań, kinematyczne podejście zastosowane do problemów nośności granicznej płyt żelbetowych pozwala na bezpieczną ocenę obciążenia niszczącego (por. też [17] i [18]).

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozpr. Inżyn., 3 (1955).
- [2] A. A. ГВОЗДЕВ, *Метод предельного равновесия*, Стройиздат. Москва 1949.
- [3] W. PRAGER, *General Theory of Limit Design*, Proc. 8-th Congr. Appl. Mech., Istantbul 1952.
- [4] P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill New York 1959.
- [5] K. W. JOHANSEN, *Brudlinienteorier*, Gjerup, Copenhagen 1943.
- [6] D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna prostokątnych płyt obciążonych w sposób ciągły*, Zesz. Nauk. P.W., Budownictwo 6, (1956).
- [7] W. OLSZAK, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Budownictwo Przemysłowe 7-8, 1953.
- [8] M. KWIECIŃSKI, *Weryfikacja doświadczalna teorii nośności granicznej układów płytowo-żebrowych*, Rozpr. Inżyn., 1, 9 (1961).
- [9] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет конструкции с учетом пластических свойств материалов*, Стройиздат, Москва 1954.
- [10] A. SAWCZUK, *O możliwościach praktycznego korzystania z rozwiązań teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Inżyn. Łądow., 1-2 (1956).
- [11] A. SAWCZUK, *Grenztragfähigkeit der Platten*, Bauplanung-Bautechnik, 7-8, (1957).
- [12] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Théorie de la capacité portante des constructions non-homogènes et orthotropes (Analyse et synthèse)*, Ann. Inst. Tech. Bat. Trav. Publ., 149, Mai 1960.
- [13] W. OLSZAK, *Zagadnienia ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos., 3, 5 (1953).
- [14] E. H. MANSFIELD, *Studies in Collapse Analysis of Rigid-Plastic Plates with a Square Yield Diagram*, Proc. Roy. Soc. (London), Vol. A241, 1957, 311-338.
- [15] A. SAWCZUK, A. STEPIEŃ, *Z zagadnień stanów granicznych płyt*, Kat. Wytrzym. Mat. P.W., Warszawa 1956.
- [16] Z. SOBOTKA, *Unosnost vetknutých desek*, Stavebnicky Časopis, SAV., 2 (1961).
- [17] K. W. JOHANSEN, *Pladeformler*, Polyteknisk Forening, 2 udgave, Copenhagen 1949.
- [18] A. SAWCZUK, TH. JAEGER, *Grenztragfähigkeitstheorie der Platten*, Berlin 1962.

## Резюме

### ВОПРОСЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИНОК С РАЗРЫВНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе приводятся результаты исследований несущей способности железобетонных плит. Испытания проводились имея ввиду проверку решений теорий линии излома, полученные для случаев плиты с разрывными краевыми условиями. Исследования охватывали определение а) разрушающих нагрузок и сравнение их со значениями, полученными аналитически, б) систему линий излома в зависимости от коэффициента ортотропии (для заданных краевых условий), в) влияния пластической анизотропии на величину предельной нагрузки: Для нескольких из исследованных типов пластинок получено также новые теоретические решения.

Исследования проводились на моделях толщиной 3,5 см и размерами 100×65, 100×100 и 100×135 см при равномерно распределенной нагрузке. Рассматривается пять типов краевых условий. Для 71 исследованных плит констатируется, что отношение предельных нагрузок, определенных экспериментально и соответствующих значений, определенных согласно теории линии излома, заключается в интервале  $1,17 \leq q_{\text{экс}}/q_{\text{теор}} \leq 1,27$ . Отсюда следует, что кинематический подход в анализе предельного состояния ведет к безопасным значениям нагрузок по сравнению со значениями, полученными экспериментальным путем. Это заключение имеет существенное значение для применений теории несущей способности к практике проектирования.

## Summary

### SOME PROBLEMS OF THE LIMIT ANALYSIS OF PLATES WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Some test results are described concerning the limit load of R.C. plates. The purpose of the tests was to verify the solutions of the yield line theory for plates with mixed boundary conditions. The tests included the determination of a) the collapse load (compared with theoretical results), b) the collapse made in function of the orthotropy ratio (for prescribed boundary conditions), c) the influence of the plastic anisotropy on the collapse load. For some of the plate types tested new theoretical solutions have also been obtained.

The models were 100×65, 100×100 and 100×135 cm plates 3,5 cm thick and were uniformly loaded by pressure. The investigations concerned five support conditions. For the 71 plates tested it has been found that the ratios of the values of the theoretical limit loads to those obtained by means of the yield line theory are contained within the limits  $1,17 \leq q_{\text{exp.}}/q_{\text{teor.}} \leq 1,27$ . It follows that the kinematic approach in the limit analysis leads to safe loads as compared with the experimental ones. This conclusion is essential for the application of the yield line theory to practical problems.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 września 1961 r.*