

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ

PRZYBLIŻONE WYZNACZANIE SIŁY KRYTYCZNEJ
Z OSZACOWANIEM BŁĘDU PRZY WYBOCZENIU PRĘTA
O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXIX

TOM X · ZESZYT 1 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Uwagi i rozważania ogólne	181
2. Rozwiązanie zagadnienia	182
3. Przykład	186
4. Zakończenie	188

1. Uwagi i rozważania ogólne

Zagadnienia stateczności sprężystej prętów o zmiennych sztywnościach zginania można już obecnie zaliczyć do tych klasycznych problemów, które ze względu na swoje duże znaczenie praktyczne zostały obszernie opracowane i szeroko opisane w literaturze.

Jak wiadomo, obliczenie sił krytycznych dla prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych wymaga wyznaczenia odpowiednich wartości własnych jednorodnych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Rozwiązania ściśle i odpowiadające im wartości własne tylko w pewnych szczególnych przypadkach takich równań różniczkowych można przedstawić (często przy zastosowaniu funkcji Bessela) za pomocą znanych funkcji. Interesujące tego rodzaju rozwiązania są między innymi podane w monografiach: F. BLEICHA, [1], A. N. DINNIKA, [2], J. NALESZKIEWICZA, [3], A. R. RŻANICYNA, [4] i w pracy F. SZELAĞOWSKIEGO, [5].

W wielu przypadkach różne znane metody umożliwiają otrzymanie rozwiązań ścisłych w postaci nieskończonych układów jednorodnych równań liniowych. Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego układu równań stanowi warunek dla obliczenia siły krytycznej. Rozwiązania takie otrzymujemy np. przy zastosowaniu metod rachunku wariacyjnego, tj. metody Ritza, Galerkina i metody Trefftza oraz za pomocą metody równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju.

Ostatnia metoda została zastosowana przez W. NOWACKIEGO w pracy [6], dotyczącej zagadnień stateczności prętów i rusztów o stałych przekrojach poprzecznych, a następnie przez autora w pracach [7] i [8], dotyczących zagadnień stateczności i drgań prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych.

Należy jednak podkreślić, że rozwiązania ściśle w postaci nieskończonych układów równań obok swoich niewątpliwych wartości posiadają również słabe strony. W konkretnych bowiem przykładach zachodzi konieczność ograniczenia się do rozwiązania zaledwie układu kilku równań (najczęściej dwóch lub trzech). Fakt ten w niektórych przypadkach (słabej zbieżności) utrudnia obliczenie parametrów krytycznych z wystarczającą praktycznie dokładnością.

Poza tym wymienione metody przy uwzględnieniu skończonej liczby równań nie pozwalają na ogół na oszacowanie błędu, gdyż ograniczają rozwiązanie ściśle tylko z jednej strony, tj. umożliwiają obliczenie wartości własnych wyłącznie z nadmiarem (np. metoda Ritza lub metoda Galerkina) albo tylko z niedomiarem (np. metoda Trefftza).

Ze względów praktycznych bardzo pożyteczne są takie rozwiązania przybliżone, które dają parametry krytyczne zarówno z nadmiarem jak i z niedomiarem, a tym samym zezwalają na oszacowanie błędu. Rozwiązania tego rodzaju można otrzymać niekiedy przy zastosowaniu jednej metody, częściej zaś przy wykorzystaniu jednocześnie dwóch metod, tj. jednej do obliczenia wartości własnej z nadmiarem, a drugiej do wyznaczenia tej wartości z niedomiarem.

Jedną z metod przybliżonych, posiadającą zdaniem autora dla wymienionych rozwiązań duże znaczenie, jest metoda śladów jądra równania całkowego. Umożliwia ona w wielu zagadnieniach, opisanych za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych (liniowych) o zmiennych współczynnikach, wyznaczanie wartości własnych z dowolną dokładnością zarówno z nadmiarem, jak i z niedomiarem. Ważną zaletę tej metody stanowi fakt, że już pierwsze przybliżenie daje najczęściej praktycznie wystarczającą dokładność. Poza tym wymieniona metoda umożliwia przy znacznie mniejszym nakładzie pracy rachunkowej obliczenie wartości własnych z niedomiarem niż wyznaczenie tych wartości z nadmiarem. Można więc w drodze zastosowania do danego zagadnienia metody śladów jądra równania całkowego i np. metody Galerkina oszacować błąd przy stosunkowo małym nakładzie pracy.

Metoda śladów jądra równania całkowego, opisana wyczerpująco w wielu monografiach, dotyczących równań całkowych (np. [9], [10] i [11]) nie została jeszcze w zagadnieniach technicznych spopularyzowana w takim stopniu, w jakim na to zasługuje i w jakim są już rozpowszechnione metody energetyczne, ortogonalizacyjne i iteracyjne.

W pracy tej przedstawiono za pomocą metody śladów jądra równania całkowego rozwiązanie zagadnienia wybożenia pręta swobodnie podpartego o dowolnie zmiennej sztywności zginania. Poza tym podano konkretny przykład liczbowy, w którym dla pewnego praktycznego przypadku zmienności momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta wyznaczono siłę krytyczną z niedomiarem i z nadmiarem, otrzymując w ten sposób oszacowanie błędu. Wielkość siły krytycznej z niedomiarem obliczono na podstawie ogólnego rozwiązania otrzymanego w oparciu o metodę śladów jądra równania całkowego, natomiast wielkość siły krytycznej z nadmiarem wyznaczono za pomocą metody Galerkina. Dla różnych stosunków momentów bezwładności w punkcie podparcia i w środku rozpiętości pręta obliczono na podstawie wyprowadzonych wzorów i zestawiono w tablicy współczynniki, ułatwiające praktyczne wyznaczanie siły krytycznej.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Rozważmy pręt sprężysty o zmiennym momencie bezwładności $I(x)$ przekroju poprzecznego, swobodnie podparty na końcach i ściskany osiowo stałą siłą P (rys. 1).

Znane równanie różniczkowe odkształconej pod wpływem wybożenia osi takiego pręta ma postać

$$(2.1) \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{Py(x)}{EI(x)} = 0.$$

Warunki brzegowe zagadnienia są następujące:

$$(2.2) \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

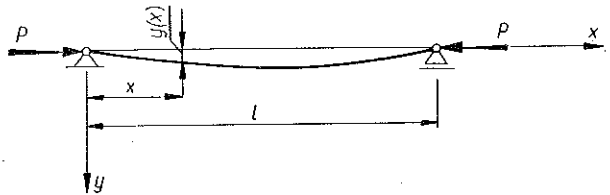
Przyjmując oznaczenia:

$$(2.3) \quad I(x) = \frac{I_0}{r(x)},$$

$$(2.4) \quad \lambda = \frac{P}{EI_0},$$

gdzie I_0 oznacza dowolny porównawczy moment bezwładności przekroju poprzecznego (np. w punkcie podparcia pręta), przepisujemy równanie (2.1) w postaci

$$(2.5) \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \lambda r(x)y(x) = 0.$$



Rys. 1

Zagadnienie obliczenia siły krytycznej sprowadza się do wyznaczenia najmniejszej wartości własnej $\lambda = \lambda_1$, dla której równanie (2.5) posiada rozwiązanie niezerowe, spełniające warunki brzegowe (2.2).

Równanie różniczkowe (2.5) można zastąpić następującym jednorodnym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju:

$$(2.6) \quad y(x) = \lambda \int_0^l \bar{y}(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi,$$

gdzie $\bar{y}(x, \xi)$ jest funkcją Greena, która w rozważanym przypadku stanowi rozwiązanie równania różniczkowego

$$(2.7) \quad \frac{d^2}{dx^2} [\bar{y}(x, \xi)] = \delta(x - \xi),$$

w którym $\delta(x - \xi)$ oznacza funkcję Diraca.

Dla warunków brzegowych (2.2) funkcja Greena $\bar{y}(x, \xi)$ wyraża się (por. np. [12], str. 527) wzorem następującym:

$$(2.8) \quad \bar{y}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{l}(l - \xi), & \text{jeśli } 0 \leq x \leq \xi \leq l, \\ \frac{\xi}{l}(l - x), & \text{jeśli } 0 \leq \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

W wielu przypadkach wyznaczenie funkcji Greena nastęrcza trudności, które zależą od budowy operatora różniczkowego, występującego po lewej stronie znaku

równości w równaniu (2.7) i od rodzaju warunków brzegowych. Sposoby wyznaczania tych funkcji są obszernie opisane w literaturze (por. np. [9], [10] i [12]). Dla pewnych często spotykanych typów równań różniczkowych i warunków brzegowych zestawiono funkcje Greena w tablicach (por. np. [13]).

Równanie (2.6) można dzięki podstawieniu

$$(2.9) \quad z(x) = y(x) \sqrt{r(x)},$$

(które można zastosować, gdyż $r(x) > 0$) napisać w postaci następującego równania całkowego o jądrze symetrycznym:

$$(2.10) \quad z(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi) z(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$(2.11) \quad K(x, \xi) = \bar{y}(x, \xi) \sqrt{r(x)r(\xi)}.$$

Oczywiste jest, że wartości własne są identyczne dla równania (2.6) i (2.10).

W oparciu o funkcję Greena (2.8) zapisujemy jądro (2.11) w postaci:

$$(2.12) \quad K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{l} (l - \xi) \sqrt{r(x)r(\xi)}, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq \xi \leq l, \\ \frac{\xi}{l} (l - x) \sqrt{r(x)r(\xi)}, & \text{jeśli } 0 \leq \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

Następnie obliczamy drugi ślad A_2 jądra $K(x, \xi)$ ze wzoru (por. np. [9], str. 112) następującego:

$$(2.13) \quad A_2 = \int_0^l \int_0^l [K(x, \xi)]^2 d\xi dx$$

lub na skutek symetrii jądra $K(x, \xi)$ za pomocą jednego z dwóch (wygodniejszych od poprzedniego) wzorów

$$(2.14) \quad A_2 = 2 \int_0^l \left\{ \int_0^\xi [K(x, \xi)]^2 dx \right\} d\xi,$$

$$(2.15) \quad A_2 = 2 \int_0^l \left\{ \int_0^x [K(x, \xi)]^2 d\xi \right\} dx.$$

Na podstawie obliczonej wartości śladu A_2 wyznaczamy pierwsze przybliżenie wartości własnej λ_1 z niedomiarem ze wzoru

$$(2.16) \quad \lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}.$$

Znając wartość λ_1 można obliczyć wielkość siły krytycznej P_{kr} z niedomiarem ze związku (2.4).

Znacznie dłuższego rachunku wymaga w konkretnym przykładzie wyznaczenie za pomocą opisanej metody pierwszego przybliżenia wartości λ_1 z nadmiarem. Stosujemy wtedy wzór

$$(2.17) \quad \lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}},$$

w którym A_4 oznacza czwarty ślad jądra $K(x, \xi)$. Obliczenie wartości A_4 jest na ogół żmudne.

W podobny sposób wyznaczamy następne przybliżenia wartości λ_1 . Ogólnie m -te przybliżenie wartości λ_1 obliczamy (por. np. [9], str. 110 i [11], str. 326) ze wzorów:

$$(2.18) \quad \lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[2m]{A_{2m}}} \quad \text{z niedomiarem,}$$

$$(2.19) \quad \lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}} \quad \text{z nadmiarem,}$$

gdzie ślad $2m$ -ty:

$$(2.20) \quad A_{2m} = \int_0^l \int_0^l [K_m(x, \xi)]^2 d\xi dx$$

lub na skutek symetrii jądra $K_m(x, \xi)$ może być obliczony ze wzorów

$$(2.21) \quad A_{2m} = 2 \int_0^l \left\{ \int_0^\xi [K_m(x, \xi)]^2 dx \right\} d\xi,$$

$$(2.22) \quad A_{2m} = 2 \int_0^l \left\{ \int_0^x [K_m(x, \xi)]^2 d\xi \right\} dx.$$

We wzorach powyższych $K_m(x, \xi)$ oznacza m -te jądro iterowane i określone jest wzorem rekurencyjnym

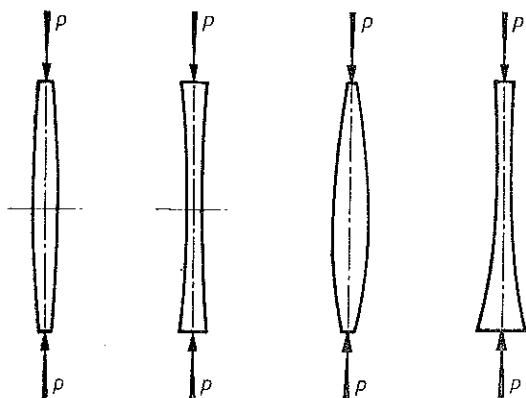
$$(2.23) \quad K_m(x, \xi) = \int_0^l K(x, \eta) K_{m-1}(\eta, \xi) d\eta = \\ = \int_0^l \dots \int_0^l K(x, \eta_1) K(\eta_1, \eta_2) \dots K(\eta_{m-1}, \xi) d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_{m-1}.$$

W konkretnych przykładach może często sprawiać trudność obliczenie całek, które w wielu przypadkach funkcji $r(x)$ nie wyrażają się za pomocą funkcji ele

mentarnych. Wygodnie jest w takich przypadkach rozwinąć funkcję $r(x)$ w szereg potęgowy bądź przyjąć inną funkcję zastępczą, np.

$$(2.24) \quad r(x) = bx^n + cx + d,$$

aproxymującą dany zmienny moment bezwładności dzięki odpowiednio dobranym parametrom b , c , d i n . Łatwo zauważyć, że funkcja (2.24) może być z korzyścią



Rys. 2

stosowana zarówno przy prętach wypukłych, jak i wklęsłych oraz przy symetrycznej i niesymetrycznej zmienności momentu bezwładności względem środka pręta (rys. 2). Parametry b , c , d i n można obliczyć na podstawie danych momentów bezwładności przekrojów poprzecznych w punktach podparcia pręta i danego ekstremalnego momentu bezwładności w pewnym przekroju poprzecznym pręta oraz z warunku położenia tego ostatniego przekroju na długości pręta.

3. Przykład

Obliczmy siłę krytyczną w przypadku, gdy funkcja $r(x)$ ma postać:

$$(3.1) \quad r(x) = sx^2 - slx + 1,$$

gdzie

$$(3.2) \quad s = \frac{4}{l^2}(1 - k), \quad k = \frac{I_0}{I_s},$$

przy czym w rozważanym przykładzie I_0 oznacza moment bezwładności przekroju poprzecznego w punkcie podparcia pręta, zaś I_s oznacza moment bezwładności w środku długości pręta.

Łatwo zauważyć, że w zależności od przyjętego stosunku k funkcja (3.1) umożliwia nadanie rozważanemu prętowi kształtu wypukłego lub wklęsłego o symetrycznej zmienności przekroju poprzecznego względem środka długości pręta.

Na podstawie wzoru (2.12) i (2.15) (w którym $\xi \leq x$) obliczamy ślad A_2 jądra $K(x, \xi)$:

$$(3.3) \quad A_2 = \frac{2}{l^2} \int_0^l \left[(l-x)^2 (sx^2 - slx + 1) \int_0^x \xi^2 (s\xi^2 - sl\xi + 1) d\xi \right] dx = \\ = \frac{l^4}{25200} (13s^2 l^4 - 120sl^2 + 280) = \frac{l^4}{3150} (26k^2 + 8k + 1).$$

Pierwsze przybliżenie najmniejszej wartości własnej z niedomiarem znajdujemy ze wzoru (2.16):

$$(3.4) \quad \lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{3150}{26k^2 + 8k + 1}}.$$

Następnie w oparciu o związek (2.4) otrzymujemy wzór do przybliżonego wyznaczenia z niedomiarem wielkości siły krytycznej

$$(3.5) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \gamma_1,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \gamma_1 = \frac{15}{\pi^2} \sqrt{\frac{14}{26k^2 + 8k + 1}}.$$

Przy $k = 1$, tj. w przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym, znajdujemy

$$(3.7) \quad P_{kr} \approx \frac{9,487 EI_0}{l^2}.$$

Wzór (3.7) daje wartość siły krytycznej z niedomiarem, różniącą się mniej niż o 4% od wartości ścisłej.

Następnie w celu oszacowania błędu wyprowadzono za pomocą metody Galerkina wzór do obliczania w rozważanym przypadku siły krytycznej z nadmiarem.

Mając na uwadze fakt, że przy wyznaczaniu wartości własnych metoda ortogonalizacyjna daje na ogół rozwiązania szybko zbieżne, przyjęto równanie osi odkształconej pręta w postaci jednoparametrowej następującej funkcji, spełniającej warunki brzegowe (2.2):

$$(3.8) \quad y(x) = y_1 \sin \alpha_1 x,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}.$$

Podstawiając funkcję (3.8) do równania różniczkowego (2.1) zapisujemy warunek ortogonalizacji Galerkina następująco:

$$(3.9) \quad \int_0^l [y_1 \alpha_1^2 \sin \alpha_1 x - \lambda y_1 (sx^2 - slx + 1) \alpha_1 \sin \alpha_1 x] \sin \alpha_1 x dx = 0.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(3.10) \quad \lambda_1 \approx \frac{6\pi^4}{(6\pi^2 - 3sl^2 - sl^2\pi^2)l^2}.$$

Następnie: w oparciu o związek (2.4) i (3.2) otrzymujemy wzór na siłę krytyczną z nadmiarem

$$(3.11) \quad P_{kr} \approx \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \gamma_2,$$

gdzie

$$(3.12) \quad \gamma_2 = \frac{3\pi^2}{\pi^2 (2k+1) + 6(k-1)}$$

W szczególnym przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym, tj. przy $k=1$, wzór (3.12) daje wartość $\gamma_2 = 1$, pokrywającą się ze znanym rozwiązaniem ścisłym.

Wartości współczynników γ_1 i γ_2 oraz średnie wartości γ_{sr} tych współczynników dla różnych stosunków k zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

	$k = 0,25$	$k = 0,50$	$k = 1,00$	$k = 2,00$	$k = 4,00$
γ_1	2,6442	1,6769	0,9612	0,5170	0,2684
γ_2	2,8734	1,7688	1,0000	0,5350	0,2772
γ_{sr}	2,7588	1,7228	0,9806	0,5260	0,2728

Jak widać, wartości współczynników γ_{sr} dają praktycznie wystarczającą dokładność, gdyż największa różnica między współczynnikami γ_{sr} i γ_1 występująca dla $k = 0,25$ stanowi około 4,0%.

Na podstawie wartości współczynnika γ_1 i γ_2 dla $k = 1,00$ można przypuszczać, że wartości współczynników γ_1 zostały obliczone z mniejszą dokładnością niż wartości współczynników γ_2 . W razie potrzeby otrzymania wyników dokładniejszych należy wyznaczyć za pomocą metody śladów jądra równania całkowego oraz metody Galerkina następne przybliżenia wartości własnej λ_1 z niedmiarem i z nadmiarem.

4. Zakończenie

Przedstawione w tej pracy rozwiązanie może mieć duże zastosowanie praktyczne, ponieważ umożliwia z wystarczającą dokładnością oraz z oszacowaniem błędu wyznaczenie sił krytycznych w prętach o różnej zmienności momentu bezwładności przekroju poprzecznego.

W wielu konkretnych przypadkach praktycznych jedyną trudność może stanowić ścisłe obliczenie całek, które jednak można wyznaczyć w sposób przybliżony bądź to na drodze numerycznego całkowania, bądź też — jak już nadmieniono uprzednio — przez wprowadzenie pewnej funkcji zastępczej, aproksymującej w sposób możliwie dokładny funkcję, opisującą zmienność danego momentu bezwładności.

Przedstawione w tej pracy zastosowanie metody śladów jądra równania całkowego w połączeniu z metodą ortogonalizacyjną Galerkina może być oczywiście wykorzystane przy wyznaczaniu wartości własnych z nadmiarem i z niedmiarem w wielu innych, bardziej skomplikowanych zagadnieniach stateczności i dynamiki ustrojów prętowych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Ф. Блейх, *Устойчивость металлических конструкций*, Москва 1959.
- [2] А. Н. Динник, *Продольный изгиб. Кручение*, Москва 1955.
- [3] J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Warszawa 1953.
- [4] А. Р. Ржаницын, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Москва 1955.
- [5] F. SZELAĞOWSKI, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie bezwładności*, do-
datek do nr 45 Przegl. Techn., Warszawa 1927.
- [6] W. NOWACKI, *Z zagadnień stateczności prętów prostych i rusztów płaskich*, Arch. Inżyn.
Ładow., 4, 2 (1956).
- [7] Z. MAZURKIEWICZ, *Buckling and Vibration of a Non-Homogeneous Simply Supported Bar
with Regard to Its own Weight*, Bull. Acad. Polon. Sér., Sci. Techn. nr 11-12, 1960.
- [8] Z. MAZURKIEWICZ, *Wyboczenie pręta o zmiennym przekroju poprzecznym*, Arch. Inżyn.
Ładow., 4, 6 (1960).
- [9] С. Г. Михлин, *Интегральные уравнения и их приложения*, Москва-Ленинград 1949.
- [10] W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, Leipzig 1955.
- [11] С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, Москва 1957.
- [12] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 4, Москва-Ленинград 1954.
- [13] H. MARGENAU i G. M. MURPHY, *Matematyka w fizyce i chemii*, Warszawa 1956.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ С ОЦЕНКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе с помощью следов ядра интегрального уравнения приводится решение задачи продольного изгиба прямого, свободно опертого стержня, обладающего произвольно переменной жесткостью изгиба. Кроме того дается конкретный числовой пример, в котором для известного практического случая изменчивости момента инерции поперечного сечения стержня, определяется критическая сила с недостатчей и с излишком, получая таким образом оценку погрешности. Величина критической силы с недостатчей определяется на основании общего решения полученного на основании метода следов ядра интегрального уравнения, тогда как величина критической силы с излишком — определяется методом Галеркина. Одновременно, обращается внимание на практические выгоды, вытекающие из применения в одной задаче обоих упомянутых методов.

Однако метод следов ядра интегрального уравнения, при определении критических параметров с избытком является, с математической точки зрения, более трудоемким, чем энергетические и ортогонализационные методы, которые однако не легко дают возможность определить эти параметры с недостатчей.

Для различных соотношений моментов инерции в точке опирания и середине пролета рассматриваемый стержень, на основании выведенных формул, определяются коэффициенты, облегчающие практическое определение критической силы. Эти коэффициенты сопоставлены в таблицах.

Summary

APPROXIMATE DETERMINATION OF THE CRITICAL FORCE AND ERROR ANALYSIS FOR THE BUCKLING PROBLEM OF A BAR WITH VARIABLE CROSS-SECTION

In the present paper, the trace of the kernel of an integral equation is used to obtain the solution of the buckling problem of a simply supported bar with variable rigidity. A numerical example is given in which, for a certain practical case of variable rigidity, the critical force is approximated from above and from below, thus obtaining an appraisal of the error. The lower value of the critical force is obtained by means of the general solution by the trace method, and the upper value — by means of the Galerkin method. The practical advantage of using both methods simultaneously is shown. The trace method, which enables the obtainment of an approximation from above, requires usually more labour than energy and orthogonalization methods, which, however, give only an approximation from below.

For various ratios of the moments of inertia at the support and the middle point, coefficients enabling practical determination of the critical force are computed and tabulated, using the equations derived.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 czerwca 1961 r.
