

HENRYK MIKOŁAJCZAK

DRGANIA WŁASNE I WYMUSZONE PEWNEGO TYPU PŁYT
WZMOCNIONYCH ŻEBRAMI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXVI

TOM X • ZESZYT 1 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

Wstęp	63
1. Drgania własne	64
2. Drgania wymuszone	75
3. Przykłady liczbowe	81
4. Wnioski	91

Wstęp

Zagadnienie dynamicznej pracy płyty jest w literaturze technicznej dosyć rozpowszechnione zarówno w Polsce jak i zagranicą. Większość autorów rozpatruje zagadnienia drgań własnych łącznie z zagadnieniem stateczności, toteż literatura dotycząca tych zagadnień jest znacznie bogatsza niż literatura dotycząca drgań wymuszonych.

W roku 1956 wydana została dosyć obszerna monografia FILIPPOWA, [2], w której w rozdziale 11 podane są wyniki dotyczące dynamiki płyt. Cytowana literatura obejmuje jednak tylko prace publikowane do roku 1953. W pracy tej podane są metody i przykłady rozwiązywania zagadnienia płyty drgającej, wzmocnionej żebrami. W rozwiązaniach swoich FILIPPOW pomija wpływ sił tarczowych, tłumienia materiałowego oraz sztywności żeber na skręcanie. Zakłada ponadto, że żebra są symetrycznie rozmieszczone względem płaszczyzny środkowej płyty. Z polskich autorów należy przede wszystkim wymienić W. NOWACKIEGO, [4], który w kilku publikacjach podał rozwiązanie znacznie szerszego zagadnienia. W. NOWACKI uwzględnia zginanie, jednoczesne zginanie i ściskanie lub rozciąganie oraz drgania własne i wymuszone płyt wzmocnionych żebrami, zakłada, że pomiędzy płytą a żebrami nie występują siły tnące uwzględniając sztywność żeber na skręcanie. W 1959 roku ukazała się praca P. WILDEGO, [6], który podał rozwiązanie płyty z żebrami przy bardzo ogólnych założeniach. Płyta ortotropowa jest dowolnie na konturze podparta, żebra jednostronne niesymetryczne są połączone z płytą monolitycznie. Autor zajmuje się zagadnieniem statyki, stateczności drgań własnych, uzyskując rozwiązania za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych przy przyjęciu modelu kontinuum.

Praca poniższa podejmuje próbę określenia drgań płyty z żebrami z uwzględnieniem sił tarczowych, tłumienia materiałowego oraz siły wymuszonej, której punkt działania porusza się ze stałą prędkością po dowolnym żebrze. Tak ogólnie potraktowane zagadnienie prowadzi do równań różniczkowych nieliniowych, co praktycznie biorąc przekreśla szanse na uzyskanie efektywnych rozwiązań.

W celu uproszczenia i zlinearyzowania problemu przyjęto następujące założenia:

- a) równania płyty i tarczy są od siebie niezależne,
- b) wzdłuż krawędzi prostopadłych do żeber płyta jest wolnopodparta,
- c) pominięto wpływ masy tarczy na drgania w jej płaszczyźnie.

Poza tym przyjęto wszystkie założenia liniowej teorii sprężystości, odnoszące się do płyt cienkich o małych ugięciach. Do rozważań przyjęto model płyty i tarczy ortotropowej wzmocnionej żebrami równoległymi do jej krawędzi, leżącymi niesymetrycznie względem płaszczyzny środkowej płyty, uwzględniając przy tym sztywność ich na skręcanie. Tłumienie materiałowe przyjęto w postaci zespolonej, [3]. Przyjęto przy tym podobne uproszczenie jak stosuje np. E. BIELEWICZ, [1], polegające na tym, że współczynnik tłumienia materiałowego jest taki sam dla drgań giętkich jak i dla drgań skrętnych.

Rozwiązano również zagadnienie obciążenia dowolnego żebra impulsem i dowolną siłą wymuszającą. Przez wykorzystanie superpozycji można uzyskać rozwiązania w przypadku ogólniejszym jak np. równoczesne obciążenie kilku żeber lub jedno żebro obciążone kilkoma siłami.

Nie rozpatrywano natomiast bliżej zagadnienia wzajemnej zależności współczynników charakteryzujących własności sprężyste płyty i tarczy, gdyż zagadnienie to wyczerpująco analizował M. SOKOŁOWSKI, [5].

Rozwiązanie przedstawione w postaci sumy funkcji wykładniczych jest prawdziwe dla dowolnych wartości pierwiastków równania charakterystycznego, niemniej w konkretnych przypadkach wygodniej jest wprowadzić funkcje hiperboliczne lub trygonometryczne w zależności od tego, czy pierwiastki są rzeczywiste czy zespolone. W przypadku pierwiastków wielokrotnych trzeba dokonać odpowiednich przejść granicznych.

Rozwiązanie zagadnienia zarówno w rozdziale 1 jak i w 2 uzyskano przy pomocy pojedynczego szeregu Fouriera. W celu uzyskania jaśniejszego zapisu przyjęto, że płyta ma stałą grubość i stałe własności sprężyste. Nie trudno jednak uogólnić zagadnienie na płytę obszarami stałą, gdzie przez obszar rozumie się powierzchnie płyty zawarte pomiędzy dwoma sąsiednimi żebrami. Uogólnienie takie dla zagadnień stateczności podał, o czym już wspomnieliśmy, M. SOKOŁOWSKI, [5].

1. Drgania własne

Dana jest płyta prostokątna ortotropowa, posiadająca żebra usztywniające równoległe do jednego z boków. Wzdłuż krawędzi $x = 0$ i $x = 1$, płyta oparta jest przegubowo na sztywnej podporze. Pozostałe dwie krawędzie $y = 0$ i $y = b$ połączone są monolitycznie z żebrami 0 i k . Dla obliczeń płytę podzielono na części rozcinając ją wzdłuż żeber. Dla każdego pola j można napisać równanie różniczkowe płyty drgającej w postaci

$$(1.1) \quad \eta \left(B_x \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} \right) + \mu_p \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $W_j(x, y, t)$ oznacza ugięcie punktu płyty o współrzędnych x, y w chwili t , $\mu_p = \rho h$ masę przypadającą na jednostkę powierzchni płyty, ρ gęstość, h grubość płyty, B_x, B_y, H współczynniki ortotropii, $\eta = 1 + \psi i / 2\pi$, ψ współczynnik tłumienia

materiałowego oraz $\alpha_n = n\pi/l$. Równanie to łatwo można rozwiązać przez rozdzielenie zmiennych przyjmując

$$(1.2) \quad W_j = \sum f_n(y) \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)}$$

Równanie (1.2) musi być spełnione przez wszystkie poszczególne wyrazy występujące pod znakiem sumy, wystarczy więc rozpatrzyć jeden jej wyraz. W dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu pominięto znak sumy przyjmując

$$(1.2.1) \quad W_j = f(y) \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)}$$

Podstawiając (1.2.1) do (1.1) otrzymano po uproszczeniach

$$(1.3) \quad f^{IV} - 2 \frac{H}{B_y} \alpha_n^2 f'' + \left(\frac{B_x}{B_y} - \Omega^2 \right) \times \\ \times \alpha_n^4 f = 0, \quad \text{gdzie } \Omega^2 = \frac{\mu_p \omega^2}{\eta B_y \alpha_n^4}$$

Równanie charakterystyczne równania różniczkowego (1.3) ma postać:

$$r^4 - 2 \frac{H}{B_y} \alpha_n^2 r^2 + \left(\frac{B_x}{B_y} - \Omega^2 \right) \alpha_n^4 = 0,$$

a jego pierwiastki wynoszą

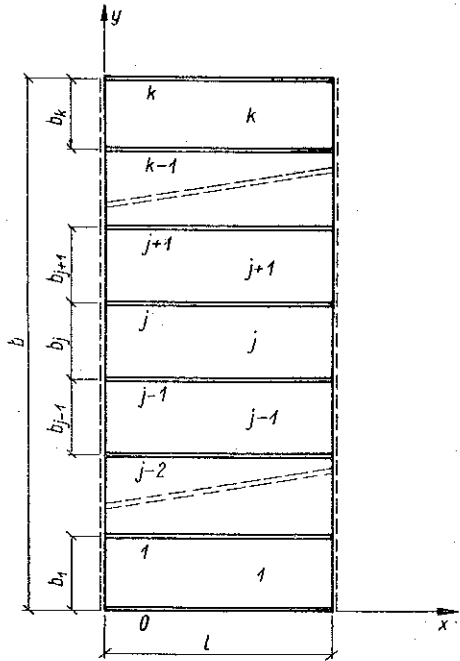
$$r_{1,3} = \pm \alpha_n \sqrt{\sqrt{\frac{H^2 - B_x B_y}{B_y^2} + \Omega^2} + \frac{H}{B_y}}, \quad r_1 = -r_3, \\ r_{2,4} = \pm \alpha_n \sqrt{\sqrt{\frac{H^2 - B_x B_y}{B_y^2} + \Omega^2} - \frac{H}{B_y}}, \quad r_2 = -r_4.$$

Rozwiązanie równania (1.1) można więc napisać w postaci

$$(1.4) \quad W_j = \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m,j} e^{r_m y}$$

Do wyznaczenia stałych A_{mj} ($m = 1, 2, 3, 4$) posłużą następujące warunki brzegowe: dla prostych

$$y = \sum_{l=1}^{j-1} b_l = \beta_{j-1}, \quad y = \sum_{l=1}^j b_l = \beta_j$$



Rys. 1

spełnione są odpowiednio warunki

$$(1.5) \quad \begin{cases} W_j = \eta Z_{j-1}, & W_j = \eta Z_j, \\ \frac{\partial W_j}{\partial y} = \eta \varphi_{j-1}, & \frac{\partial W_j}{\partial y} = \eta \varphi_j, \end{cases}$$

gdzie $Z_j = Z_j(x, t)$ oznacza ugięcie żebra j , $Z_{j-1} = Z_{j-1}(x, t)$ ugięcie żebra $j-1$, $\varphi_j = \varphi_j(x, t)$ kąt obrotu żebra j , $\varphi_{j-1} = \varphi_{j-1}(x, t)$ kąt obrotu żebra $j-1$.

W celu ujęcia wpływu sił normalnych przyjęto, że wpływy tarczowe i płytowe są od siebie niezależne. Założenie to umożliwia linearyzację zagadnienia. W dalszym ciągu pominięto wpływ masy tarczy na drgania w jej płaszczyźnie. Można więc uważać, że tarcza pracuje jako «ośrodek» sprężysty.

Funkcja naprężeń dla tarczy ortotropowej musi spełnić równanie

$$(1.6) \quad E_1 \frac{\partial^4 F_j}{\partial x^4} + 2K \frac{\partial^4 F_j}{\partial x^2 \partial y^2} + E_2 \frac{\partial^4 F_j}{\partial y^4} = 0,$$

$$K = E_1 E_2 \left(\frac{1}{2G_0} - \frac{1}{E_3} \right), \quad \frac{\nu_x}{E_1} = \frac{\nu_y}{E_2} = \frac{1}{E_3}.$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia zastosowano podobnie jak w przypadku płyty rozdzielenie zmiennych przyjmując

$$(1.7) \quad F_j = \sum_n \Phi_n(y) \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)}$$

Założenie to prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego

$$(1.8) \quad E_2 \Phi^{IV} - 2K \alpha_n^2 \Phi'' + E_1 \alpha_n^4 \Phi = 0.$$

Jego równanie charakterystyczne ma postać

$$E_2 \varrho^4 - 2K \alpha_n^2 \varrho^2 + E_1 \alpha_n^4 \Phi = 0,$$

a pierwiastki wyrażają się wzorami

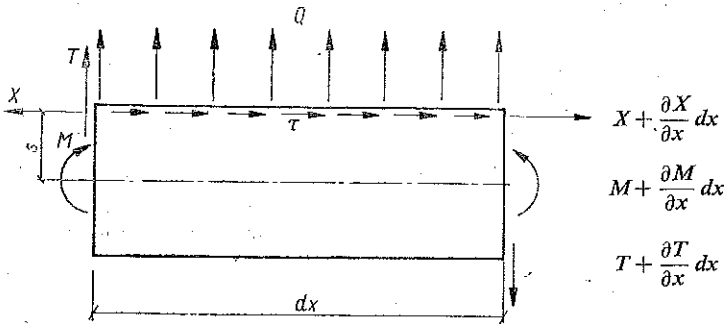
$$(1.9) \quad \begin{cases} \varrho_{1,3} = \pm \frac{\alpha_n}{\sqrt{E_2}} \sqrt{K + \sqrt{K^2 - E_1 E_2}}, & \varrho_1 = -\varrho_3, \\ \varrho_{2,4} = \pm \frac{\alpha_n}{\sqrt{E_2}} \sqrt{K - \sqrt{K^2 - E_1 E_2}}, & \varrho_2 = -\varrho_4. \end{cases}$$

Rozwiązanie można napisać w postaci:

$$(1.10) \quad F_j = \frac{1}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} e^{\varrho_m y}.$$

Zastosowano przy tym taki sam skrócony zapis jak w przypadku płyty. Składowe stanu naprężenia i odkształceń są następujące:

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{x,j} &= \frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} \varrho_m^2 e^{e_m y}, \\ \sigma_{y,j} &= \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} = -\sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} e^{e_m y}, \\ \tau_j &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} \varrho_m e^{e_m y}, \\ \varepsilon_{x,j} &= \frac{\sigma_{x,j}}{E_1} - \frac{\sigma_{y,j}}{E_3}, \quad \varepsilon_{y,j} = \frac{\sigma_{y,j}}{E_2} - \frac{\sigma_{x,j}}{E_3}, \quad \gamma_j = \frac{\tau_j}{G_0}, \\ E_1 v_1 &= -\sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} \left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{\nu_x}{\alpha_n^2} \varrho_m \right) e^{e_m y}, \\ X_j &= -\frac{h}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} \varrho_m e^{e_m y}, \end{aligned} \right.$$



Rys. 2

gdzie X_j oznacza siłę normalną tarczy w przekroju odległym o x od początku układu, v_j przemieszczenie tarczy w kierunku osi y .

Warunki brzegowe: dla tarczy. Na prostych

$$y = \sum_{l=1}^{j-1} b_l = \beta_{j-1} \quad \text{oraz} \quad y = \sum_{l=1}^j b_l = \beta_j$$

odpowiednio spełnione są warunki

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_j = v_{z,j-1}, \\ \varepsilon_{x,j} = \varepsilon_{z,j-1}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_j = v_{z,j}, \\ \varepsilon_{x,j} = \varepsilon_{z,j}. \end{array} \right.$$

Warunki brzegowe (1.5) i (1.12) przyjęte w powyższej postaci mają tylko charakter formalny, gdyż w dalszym ciągu nieokreślone są wartości funkcji $Z(x, t)$, $\varphi(x, t)$, ε_z oraz v_z . W celu określenia tych wielkości należy wykorzystać warunki równowagi elementu wyciętego z żebra, obciążonego dodatkowo oddziaływaniami pochodzącymi z płyty i z tarczy. Wykorzystując zasadę d'Alemberta otrzymuje się dla rzutu sił pionowych zależność

$$(1.13) \quad \left(-\mu_z \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} - Q \right) dx = 0.$$

Dla żebra j będziemy mieli

$$(1.14) \quad \begin{cases} M_j = -EI_{x,j} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + X_j s + X_{j+1} s, \\ \frac{\partial T_j}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_j}{\partial x^2} = -E_j I_{x,j} \frac{\partial^4 Z_j}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s + \frac{\partial^2 X_{j+1}}{\partial x^2} s, \\ Q = Q_j + Q_{j+1}; \\ -\mu_z \frac{\partial^2 Z_j}{\partial t^2} - EI_{x,j} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s + \frac{\partial^2 X_{j+1}}{\partial x^2} s - Q_j - Q_{j+1} = 0. \end{cases}$$

Po wprowadzeniu tłumienia zespolonego η i po uproszczeniu otrzymuje się

$$(1.15) \quad \eta \frac{\partial^4 Z_j}{\partial x^4} + \mu_z \frac{\partial^2 Z_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s - \frac{\partial^2 X_{j+1}}{\partial x^2} s + Q_j + Q_{j+1} = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe jednorodnie opisujące drgania pionowe żebra, obciążonego dodatkowo siłami Q , pochodzącymi z oddziaływania płyty, i siłami X , pochodzącymi z oddziaływania tarczy.

W dalszym ciągu wprowadzone zostanie równanie różniczkowe drgań skrętnych żebra przy następujących założeniach. Przyjęto, że oś obrotu znajduje się w miejscu styku żebra z tarczą. Jest to równoznaczne z pominięciem wpływu przemieszczenia v ($v = 0$). Założenie to nie powoduje większych błędów, gdyż tarcza w stosunku do sztywności żebra w kierunku poprzecznym jest praktycznie biorąc nieodkształcalna.

W celu wyprowadzenia równania dogodnie jest rozłożyć drgania około narzuconej osi obrotu na drgania skrętne około osi środkowej i na drgania poziome w kierunku osi y .

Dla przypadku a równanie drgań będzie podobne do równania (1.15):

$$(1.16) \quad EI_{y,j} \frac{\partial^4 y_j}{\partial x^4} + \mu_z \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} - h(\sigma_{y,j} - \sigma_{y,j+1}) = 0.$$

Dla przypadku b mamy

$$(1.17) \quad -GI_{s,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + I_{\mu,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - m_j + m_{j+1} - h s(\sigma_{y,j} - \sigma_{y,j+1}) = 0.$$

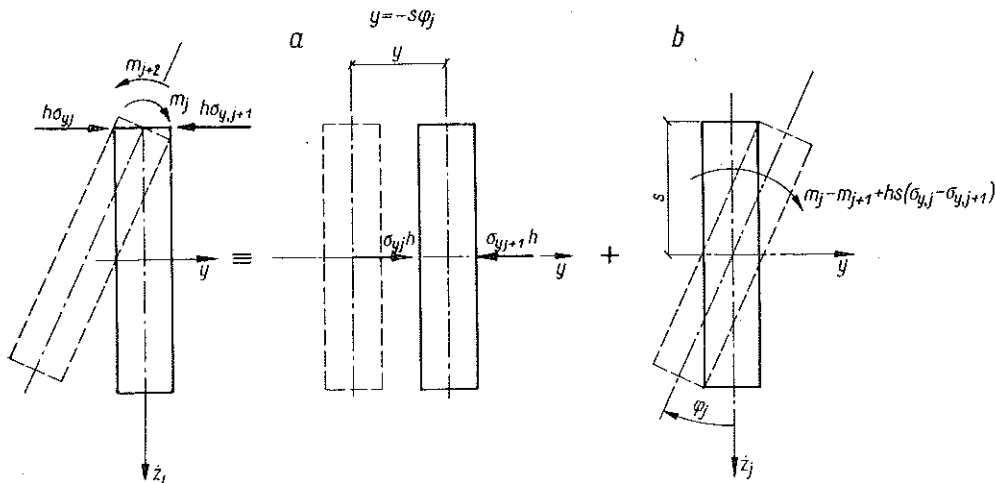
Eliminując z równań (1.16) i (1.17) wyrażenie $h(\sigma_{y,j} - \sigma_{y,j+1})$, a ponadto wykorzystując zależność $y = -s\varphi$, otrzymuje się po uporządkowaniu

$$(1.18) \quad EI_{y,j} s^2 \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial x^4} - GI_{s,j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + (I_{\mu,j} + \mu_z s^2) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} - m_j + m_{j+1} = 0.$$

Po wprowadzeniu tłumienia równanie (1.18) przyjmie postać

$$(1.19) \quad \eta \left(EI_{y,j} s^2 \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial x^4} - GI_{s,j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \right) + I_{s,\mu,j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} - m_j + m_{j+1} = 0,$$

gdzie dla skrócenia oznaczono $I_{s,\mu,j} = I_{\mu,j} + \mu_z s^2$.



Rys. 3

Wykorzystując zależności

$$W_j(x, \beta_j, t) \equiv W_j^* = \eta Z_j(x, t), \quad \frac{\partial W_j}{\partial y}(x, \beta_j, t) \equiv \frac{\partial W_j^*}{\partial y} = \eta \varphi_j(x, t),$$

można równanie drgań pionowych (1.15) i drgań skrętnych (1.19) doprowadzić do postaci:

równanie drgań pionowych

$$(1.20) \quad EI_{x,j} \frac{\partial^4 W_j^*}{\partial x^4} + \frac{\mu_z}{\eta} \frac{\partial^2 W_j^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s - \frac{\partial^2 X_{j+1}}{\partial x^2} s + Q_j + Q_{j+1} = 0;$$

równanie drgań skrętnych

$$(1.21) \quad EI_{y,j} s^2 \frac{\partial^5 W_j^*}{\partial x^4 \partial y} - GI_{s,j} \frac{\partial^3 W_j^*}{\partial x^2 \partial y} + I_{s,\mu,j} \frac{\partial^3 W_j^*}{\partial t^2 \partial y} - m_j + m_{j+1} = 0.$$

Schemat statyczny przedstawiony na rys. 1 składa się po rozcięciu z k pól i $k+1$ żebier. Do wyznaczenia stałych A_{ik} ($i = 1, 2, \dots, 8$) otrzymuje się więc $k+1$ równań typu (1.20) i $k+1$ równań typu (1.21).

Ilość niewiadomych wynosi $8k$. Dalsze równania otrzymuje się dla żeber wewnętrznych, których jest $k - 1$. Są to równania zapewniające zgodność odkształceń.

Ugięcie lewej krawędzi pola j musi być równe ugięciu prawej krawędzi płyty pola $j+1$ i analogicznie kąt obrotu lewej krawędzi płyty pola j musi być równy kątowi obrotu prawej krawędzi płyty pola $j+1$. Daje to $2(k - 1)$ równań typu

$$(1.22) \quad W_j^{*l} = W_{j+1}^{*p},$$

$$(1.23) \quad \frac{\partial W_j^{*l}}{\partial y} = \frac{\partial W_{j+1}^{*p}}{\partial y}.$$

Podstawiając do równań (1.20), (1.21), (1.22) i (1.23)

$$W_j^* = \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m,j} e^{r_m \beta_j},$$

$$W_{j+1}^* = \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m,j+1} e^{r_m \beta_j},$$

$$X_j = -\frac{h}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} Q_m e^{r_m \beta_j},$$

$$X_{j+1} = -\frac{h}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j+1} Q_m e^{r_m \beta_j},$$

$$Q_1 = B_y \left[\frac{\partial^3 W_j^*}{\partial y^3} + \left(\frac{4C_1}{B_y} + \nu_x \right) \frac{\partial^3 W_j^*}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

$$Q_{j+1} = B_y \left[\frac{\partial^3 W_{j+1}^*}{\partial y^3} + \left(\frac{4C_1}{B_y} + \nu_x \right) \frac{\partial^3 W_{j+1}^*}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

$$m_j = B_y \left(\frac{\partial^2 W_j^*}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W_j^*}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{j+1} = B_y \left(\frac{\partial^2 W_{j+1}^*}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W_{j+1}^*}{\partial x^2} \right),$$

gdzie $C_1 = G_0 h^3 / 12$, a F oznacza pole powierzchni przekroju żebra, otrzymuje się po uporządkowaniu:

równanie drgań pionowych

$$(1.24) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m,j} \left[EI_{x,j} \alpha_n^4 - \frac{1}{h} F B_y \alpha_n^4 \Omega^2 + B_y (r_m^3 - \alpha_n^2 C r_m) \right] e^{r_m \beta_j} +$$

$$+ h s \alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m+4, j} \varrho_m e^{r_m \beta_j} - \sum_{m=1}^4 A_{m, j+1} B_y (r_m^3 - \alpha_n^2 C r_m) e^{r_m \beta_j} +$$

$$+ h s \alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m+4, j+1} \varrho_m e^{r_m \beta_j} = 0,$$

gdzie $C = 4C_1/B_y + \nu_x$;

równanie drgań skrętnych

$$(1.25) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m, j} \left[(EI_{y, j} s^2 \alpha_n^4 + GI_{a, j} \alpha_n^2) r_m - B_y (r_m^2 - \alpha_n^2 \nu_x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h} I_{1, j} B_y \alpha_n^4 \Omega^2 r_m \right] e^{r_m \beta_j} + \sum_{m=1}^4 A_{m, j+1} B_y (r_m^2 - \alpha_n^2 \nu_x) e^{r_m \beta_j} = 0;$$

równanie zgodności ugięć pionowych

$$(1.26) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m, j} e^{r_m \beta_j} - \sum_{m=1}^4 A_{m, j+1} e^{r_m \beta_j} = 0$$

oraz równanie zgodności obrotów

$$(1.27) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m, j} r_m e^{r_m \beta_j} - \sum_{m=1}^4 A_{m, j+1} r_m e^{r_m \beta_j} = 0.$$

Warunki brzegowe dla żeber skrajnych będą tylko typu (1.20) i (1.21), przy tym zależności te są prostsze ze względu na to, że tylko jedna płyta styka się z każdym żebrzem.

Dla krawędzi $y = 0$ otrzymujemy:

równanie drgań pionowych

$$(1.28) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m, 1} \left[EI_{x, 0} \alpha_n^4 - \frac{1}{h} F B_y \alpha_n^4 \Omega^2 + B_y (r_m^3 - \alpha_n^2 C r_m) \right] +$$

$$+ h s \alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m+4, 1} \varrho_m = 0$$

oraz równanie drgań skrętnych

$$(1.29) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m, 1} \left[(EI_{y, 1} s^2 \alpha_n^4 + GI_{a, 1} \alpha_n^2) r_m - B_y (r_m^2 - \alpha_n^2 \nu_x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h} I_{1, 1} B_y \alpha_n^4 \Omega^2 r_m \right] = 0.$$

Dla krawędzi $y = b$ otrzymuje się natomiast:

równanie drgań pionowych

$$(1.30) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m,k} \left[EI_{x,k} \alpha_n^4 - \frac{1}{h} FB_y \alpha_n^4 \Omega^2 + B_y (r_m^3 - C \alpha_n^2 r_m) \right] e^{r_m b} + \\ - h s \alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m+4,k} \varrho_m e^{e_m b} = 0$$

oraz równanie drgań skrętnych

$$(1.31) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m,k} \left[(EI_{y,k} s^2 \alpha_n^4 + GI_{a,k} \alpha_n^2) r_m - B_y (r_m - \alpha_n^2 v_x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{h} I_{1,k} B_y \alpha_n^2 \Omega^2 r_m \right] e^{r_m b} = 0.$$

Do wyznaczenia brakujących $4k$ równań posłużą niewykorzystane jeszcze warunki (1.12). Z uwagi na poczynione uproszczenie w przyjęciu osi obrotu warunki (1.12)₁ i (1.12)₃ będą miały następującą postać:

dla $v_j^1 = 0$

$$(1.32) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m+1,j} \left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{v_x}{\alpha_n^2} \varrho_m \right) e^{e_m \beta_j} = 0$$

oraz dla

$$(1.33) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j+1} \left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{v_x}{\alpha_n^2} \varrho_m \right) e^{e_m \beta_j} = 0.$$

Warunki (1.12)₂ i (1.12)₄ wymagają nieco szerszego omówienia.

Wyrażenie na $\varepsilon_{x,j}$ dla tarczy jest proste i ma postać

$$(1.34) \quad \varepsilon_{x,j} = \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} \left(\frac{\varrho_m^2}{E_1 \alpha_n^2} + \frac{1}{E_3} \right) e^{e_m \beta_j}.$$

Wydłużenie żebra $\varepsilon_{z,j}$ składa się z dwóch części. Z wydłużenia pochodzącego z ugięcia belki mamy

$$(1.35) \quad \varepsilon_{z,j}^1 = -s \frac{\partial^2 W_j^*}{\partial x^2}$$

oraz z wydłużenia pochodzącego od sił normalnych znajdziemy

$$(1.36) \quad \varepsilon_{z,j}^2 = \sin \alpha_n x e^{i(\omega t + \kappa)} \sum_{m=1}^4 (A_{m+4,j} - A_{m+4,j+1}) \frac{h \varrho_m}{FE \alpha_n^2} e^{e_m \beta_j}.$$

Wydłużenie całkowite wyniesie

$$(1.37) \quad \varepsilon_{x,j} = \varepsilon_{z,j}^1 + \varepsilon_{z,j}^2, \quad \varepsilon_{x,j+1} = \varepsilon_{z,j+1}^1 + \varepsilon_{z,j+1}^2.$$

Po podstawieniu do równania (1.37) funkcji (1.34)-(1.36) oraz po uporządkowaniu i uproszczeniu otrzymuje się dla miejsca styku tarczy j z żebrzem j następującą zależność

$$(1.38) \quad s\alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m,j} e^{r_m \beta_j} + \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} \left(-\frac{h\varrho_m}{FE\alpha_n^2} + \frac{\varrho_m^2}{E_1 \alpha_n^2} + \frac{1}{E_3} \right) e^{\varrho_m \beta_j} - \\ - \frac{h}{FE\alpha_n^2} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j+1} \varrho_m e^{\varrho_m \beta_j} = 0,$$

a dla miejsca styku tarczy $j+1$ z żebrzem j

$$(1.39) \quad s\alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m,j} e^{r_m \beta_j} - \frac{h}{EF\alpha_n^2} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j} e^{\varrho_m \beta_j} + \\ + \sum_{m=1}^4 A_{m+4,j+1} \left(-\frac{h\varrho_m}{EF\alpha_n^2} + \frac{\varrho_m^2}{E_1 \alpha_n^2} + \frac{1}{E_3} \right) e^{\varrho_m \beta_j} = 0.$$

Dla krawędzi skrajnych otrzymuje się analogicznie:

dla $y = 0$

$$(1.40) \quad s\alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m,1} + \sum_{m=1}^4 A_{m+4,1} \left(-\frac{h\varrho_m}{EF\alpha_n^2} + \frac{\varrho_m^2}{E_1 \alpha_n^2} + \frac{1}{E_3} \right) = 0,$$

$$(1.41) \quad \sum_{m=1}^4 A_{m+4,1} \left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{\nu_x}{\alpha_n^2} \varrho_m \right) = 0;$$

dla $y = b$

$$(1.42) \quad s\alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 A_{m,k} e^{r_m b} - \frac{h}{FE\alpha_n^2} \sum_{m=1}^4 A_{m+4,k} \varrho_m e^{\varrho_m b} = 0,$$

$$\sum_{m=1}^4 A_{m+4,k} \left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{\nu_x}{\alpha_n^2} \varrho_m \right) e^{\varrho_m b} = 0.$$

Podane powyżej warunki brzegowe opisują schemat statyczny, którego skrajne podpory stanowią żebra; można jednak przy użyciu tej metody spełnić dowolne inne z góry dane warunki brzegowe. Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań nietrywialnych układu równań jednorodnych liniowych jest znikanie wyznacznika układu. W ten sposób otrzymuje się dodatkowe równanie na wyznaczenie częstości drgań własnych.

Ponieważ

$$\Omega^2 = \frac{\mu_p \omega^2}{\eta B_y \alpha_n^2},$$

przeto

$$\omega^2 = \Omega^2 \frac{B_y \alpha_n^4}{\mu_p} \eta = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\psi}{2\pi} i \right),$$

gdzie

$$(1.43) \quad \omega_0^2 = \Omega^2 \frac{B_y \alpha_n^4}{\mu_p}, \quad \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\psi}{4\pi} i \right).$$

Ze względu na to, że ψ jest w praktycznie interesujących przypadkach liczbą bardzo małą (np. dla betonu $\psi = 0,27$, dla stali $\psi = 0,015$). Pierwiastek obliczono w sposób następujący: po rozwinięciu wyrażenia $\left(1 + \frac{\psi}{2\pi} i \right)^{1/2}$ w szereg dwumienny, ograniczono się do dwóch pierwszych wyrazów.

Wskutek wprowadzenia współczynnika tłumienia w postaci zespolonej ω otrzymamy również w postaci zespolonej. Przy zanikaniu wyznacznika głównego układ równań posiada rozwiązania nie zerowe. Dotychczasowy sposób dwuwskaznikowego oznaczenia niewiadomych jest niewygodny przy rozwiązywaniu układów ogólnych.

Wprowadzono więc nowy sposób oznaczenia niewiadomych jednym wskaźnikiem bieżącym n , który zmienia się w granicach od 1 do $8k$. Przy tym u. prawie- niu można stosując umowę sumacyjną zapisać układ równań w prostej postaci:

$$(1.44) \quad a_{in} A_n = 0, \quad i, n = 1, 2, \dots, 8k.$$

Rozwiązanie tego układu będzie miało postać:

$$A_j = B \Delta_j, \quad \text{gdzie} \quad B = \frac{\bar{B}}{\Delta_n} = \text{const},$$

przy czym symbolami Δ oraz Δ_j oznaczyliśmy utworzone w wiadomy sposób wyznaczniki współczynników układu liniowego.

Po rozwiązaniu układu równań funkcję W_j można napisać w postaci

$$(1.45) \quad W_j = B (\Delta_{s+1} e^{r_1 y} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 y} + \Delta_{s+3} e^{r_2 y} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 y}) \times \\ \times \sin \alpha_n x e^{i \left[\omega_0 \left(1 + \frac{\psi}{4\pi} i \right) t + \kappa \right]} = B (\Delta_{s+1} e^{r_1 y} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 y} + \Delta_{s+3} e^{r_2 y} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 y}) \times \\ \times \sin \alpha_n x e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} [\cos (\omega_0 t + \kappa) + i \sin (\omega_0 t + \kappa)].$$

Rozwiązaniem zagadnienia jest zarówno część rzeczywista funkcji W_j , jak i jej część urojona:

$$\text{Re} [W_j] = B (\Delta_{s+1} e^{r_1 y} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 y} + \Delta_{s+3} e^{r_2 y} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 y}) \times \\ \times e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} \sin \alpha_n x \cos (\omega_0 t + \kappa),$$

$$\operatorname{Im} [W_j] = B (\Delta_{s+1} e^{r_1 y} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 y} + \Delta_{s+3} e^{r_2 y} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 y}) \times \\ \times e^{-\frac{\nu}{4\pi} \omega_0 t} \sin \alpha_n x \sin (\omega_0 t + \kappa).$$

Funkcja $\operatorname{Re} [W_j]$ i $\operatorname{Im} [W_j]$ zawierają jeszcze dwie dowolne stałe, B i κ , które należy wyznaczyć z warunków początkowych zagadnienia określających początkowe położenie równowagi i początkową prędkość.

2. Drgania wymuszone

Jako siłę wymuszającą przyjęto siłę pulsującą, której położenie zmienia się na pewnym żebrze, np. j -tym. Prędkość punktu działania siły jest stała i wynosi v , a częstość pulsowania p . Siłę taką można przedstawić za pomocą szeregu Fouriera następująco:

$$(2.1) \quad P = \frac{2P_0}{l} e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \sin v_n t \sin \alpha_n x,$$

gdzie $v_n = \alpha_n v$.

Ze względów praktycznych dogodnie będzie wyrażenie (2.1) przekształcić do postaci

$$(2.2) \quad P = \frac{P_0}{l} \sum [\sin(p+v_n)t - i \cos(p+v_n)t + \sin(p-v_n)t - i \cos(p-v_n)t] \times \\ \times \sin \alpha_n x.$$

W myśl założenia punkt działania siły porusza się tylko po żebrze. Płyta na skutek tego jest obciążona tylko na brzegu, a więc jej równanie pozostanie nadal jednorodnie:

$$(2.3) \quad \eta \left(B_x \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} \right) + \mu_p \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} = 0.$$

Zasadniczej zmianie ulegnie tylko równanie (1.15), tj. równanie drgań pionowych żebra. Na skutek działania siły wymuszonej przestaje ono być jednorodne, gdyż prawa jego strona przedstawia funkcję określającą siłę wymuszoną.

Przyjmuje ono postać

$$(2.4) \quad \eta EI_{x,j} \frac{\partial^4 Z_j}{\partial x^4} + \mu_z \frac{\partial^2 Z_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s - \frac{\partial^2 X_{j+2}}{\partial x^2} s + Q_j + Q_{j+1} =$$

$$= \frac{P_0}{l} \sum [\sin(p+v_n)t - i \cos(p+v_n)t + \sin(p-v_n)t - i \cos(p-v_n)t] \sin \alpha_n x.$$

Pozostałe równania, tzn. równania drgań poziomych (1.16) i równania drgań skrętnych (1.17), nie ulegną zmianie. Siła wymuszająca jako pionowa nie wpływa na wychylenie poziome, a przechodząc przez oś obrotu nie wpływa również na drgania

skrętnic. W celu uzyskania większej przejrzystości w toku dalszych rozważań funkcję występującą z prawej strony równania (2.4) przedstawiono jako sumę dwóch składników i rozpatrzono wpływ każdego z nich osobno. Postępowanie takie jest dopuszczalne ze względu na to, że rozpatrywane zagadnienie jest liniowe i ma tu zastosowanie zasada superpozycji:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta EI_{x,j} \frac{\partial^4 Z_j}{\partial x^4} + \mu_z \frac{\partial^2 Z_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s - \frac{\partial^2 X_{j+1}}{\partial x^2} s + Q_j + Q_{j+1} &= \\ &= \frac{P_0}{l} \sum [\sin(p+v_n)t - i \cos(p+v_n)t] \sin \alpha_n x, \\ \eta EI_{x,j} \frac{\partial^4 Z_j}{\partial x^4} + \mu_z \frac{\partial^2 Z_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} s - \frac{\partial^2 X_{j+1}}{\partial x^2} s + Q_1 + Q_{j+1} &= \\ &= \frac{P_0}{l} \sum [\sin(p-v_n)t - i \cos(p-v_n)t] \sin \alpha_n x. \end{aligned} \right.$$

Oto równanie drgań skrętnych:

$$(2.6) \quad \eta \left(EI_{y,j} s^2 \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial x^4} - GI_{a,j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \right) + I_{1\mu j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} - m_j + m_{j+1} = 0.$$

Rozwiązanie równania (2.3) przyjęto w postaci

$$(2.7) \quad \bar{W}_j = \bar{f}(y) \sin \alpha_n x [\sin(p+v_n)t - i \cos(p+v_n)t].$$

Zastosowano przy tym te same uproszczenia w zapisie co w rozdziale poprzednim. Jak z przyjętego rozwiązania (2.7) wynika, pod uwagę wzięto tylko jedną część siły wymuszającej. Przez podstawienie zależności (2.7) do równania (2.3) otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne, jednorodne

$$(2.8) \quad \bar{f}^{IV} - 2 \frac{H}{B_y} \alpha_n^2 \bar{f}'' + \left(\frac{B_x}{B_y} - \bar{\Omega}^2 \right) \alpha_n^4 \bar{f} = 0,$$

gdzie

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{\mu_p(p+v_n)^2}{\eta B_y \alpha_n^4}.$$

Równanie (2.8) zbudowane jest analogicznie do równania (1.3). Różnią się one tylko wartością Ω , która w przypadku (1.3) jest liczbą rzeczywistą, a w przypadku (2.8) liczbą zespoloną. Różnica ta powstała stąd, że częstość drgań własnych ω jest liczbą zespoloną, a częstość drgań wymuszonych p jak i wyrażenie v_n są zawsze liczbami rzeczywistymi. Rozwiązanie równania (2.8) ma zupełnie podobną postać do rozwiązania równania (1.3), tj.

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_j = \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m,j} e^{\bar{r}_m y} \sin \alpha_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t], \\ \bar{r}_1 = \alpha_n \sqrt{\sqrt{\frac{H^2 - B_x B_y}{B_y^2} + \bar{\Omega}^2} + \frac{H}{B_y}}, \quad \bar{r}_3 = -\bar{r}_1, \\ \bar{r}_2 = \alpha_n i \sqrt{\sqrt{\frac{H^2 - B_x B_y}{B_y^2} + \bar{\Omega}^2} - \frac{H}{B_y}}, \quad \bar{r}_4 = -\bar{r}_2. \end{array} \right.$$

Wszystkie symbole oznaczone kreską poziomą odnoszą się do przypadku, gdy uwzględnia się tylko pierwszą część siły wymuszającej. W dalszym ciągu przyjęto wszystkie warunki brzegowe podane w rozdziale poprzednim, tzn. (1.5) i (1.12).

Wykorzystanie warunków (1.5) prowadzi do równań

$$(2.10) \quad EI_{x,j} \frac{\partial^4 \bar{W}_j^*}{\partial x^4} + \frac{\mu_z}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{W}_j^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{X}_j}{\partial x^2} s - \frac{\partial^2 \bar{X}_{j+1}}{\partial x^2} s + \bar{Q}_j + \bar{Q}_{j+1} =$$

$$= \frac{P_0}{l} \sin \alpha_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t],$$

$$(2.11) \quad EI_{y,j} s^2 \frac{\partial^5 \bar{W}_j^*}{\partial x^4 \partial y} - GI_{a,j} \frac{\partial^3 \bar{W}_j^*}{\partial x^2 \partial y} + \frac{I_{1mj}}{\eta} \frac{\partial^3 \bar{W}_j^*}{\partial t^2 \partial y} - \bar{m}_j + \bar{m}_{j+1} = 0.$$

W celu spełnienia układu równań (2.10) i (2.11) przyjęto funkcję naprężeń w postaci

$$(2.12) \quad \bar{F}_j = \frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m+4,j} e^{\bar{e}_m y} \sin \alpha_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t].$$

Podstawiając odpowiednio na miejsce \bar{W}^* , \bar{X}_j , \bar{X}_{j+1} w funkcje

$$W_j^* = \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m,j} e^{\bar{r}_m \beta_j} \sin \alpha_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t],$$

$$\bar{X}_j = -h \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m+4,j} \bar{Q}_m e^{\bar{e}_m \beta_j} \sin \alpha_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t],$$

$$\bar{X}_{j+1} = -h \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m+4,j+1} \bar{Q}_m e^{\bar{e}_m \beta_j} \sin \alpha_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t]$$

otrzymuje się po uproszczeniu równanie

$$(2.13) \quad \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m,j} \left[EI_{x,j} \alpha_n^4 - \frac{1}{h} FB_y \alpha_n^4 \bar{\Omega}^2 + B_y (\bar{r}_m^3 - C \alpha_n^2 \bar{r}_m) \right] e^{\bar{r}_m \beta_j} +$$

$$+ h s \alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m+4,j} \bar{Q}_m e^{\bar{e}_m \beta_j} - \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m,j+1} B_y (\bar{r}_m^3 - C \alpha_n^2 \bar{r}_m) e^{\bar{r}_m \beta_j} +$$

$$+ h s \alpha_n^2 \sum_{m=1}^4 \bar{A}_{m+4,j+1} \bar{Q}_m e^{\bar{e}_m \beta_j} = \frac{P_0}{l}.$$

Jak widać, otrzymane równanie różni się od równania (1.24) tym, że nie jest jednorodne (po prawej stronie występuje liczba P_0/l). Dalsze równania nie zostały wypisane, można je otrzymać przez formalne wstawienie liczby zespolonej $\bar{\Omega}$ na miejsce liczby rzeczywistej Ω .

Zmieniając numerację niewiadomych podobnie jak to uczyniono w rozdziale poprzednim można układ równań dla drgań wymuszonych zapisać krótko

$$(2.14) \quad \bar{a}_{in} \bar{A}_n = \frac{P_0}{l} \delta_{ij},$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera.

Rozwiązanie tego układu ma postać

$$(2.15) \quad \bar{A}_m = \frac{\bar{\Delta}_m}{\bar{\Delta}},$$

gdzie symbole $\bar{\Delta}$ i $\bar{\Delta}_m$ oznaczają wyznaczniki zbudowane w znany sposób ze współczynników układu (2.14).

Po podstawieniu wartości A_m (2.15) do (2.9) otrzymuje się rozwiązanie

$$(2.16) \quad \bar{W}_j = \frac{1}{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}_{s+1} e^{\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+2} e^{-\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+3} e^{\bar{r}_2 y} + \bar{\Delta}_{s+4} e^{-\bar{r}_2 y}) \times \\ \times \sin a_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t].$$

Wielkości $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}_m$, \bar{r}_1 i \bar{r}_2 są wielkościami zespolonymi. Rozwiązanie zagadnienia będzie analogiczne do rozpatrywanego w przypadku drgań własnych. Pozostała jeszcze do rozpatrzenia sprawa wpływu drugiej części siły wymuszającej. Wstawiając do równania (2.10) na miejsce

$$\frac{P_0}{l} \sin a_n x [\sin (p+v_n) t - i \cos (p+v_n) t]$$

wyrażenie

$$\frac{P_0}{l} \sin a_n x [\sin (p-v_n) t - i \cos (p-v_n) t]$$

i wstawiając wszędzie zamiast $\bar{\Omega}^2$ wyrażenie

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{\mu_p (p-v_n)^2}{\eta B_y a_n^4}$$

otrzyma się nowy układ równań

$$\bar{a}_{it} \bar{A}_t = \frac{P_0}{l} \delta_{ij}, \quad i, t = 1, 2, \dots, n.$$

Rozwiązaniem jego będą liczby

$$(2.17) \quad A_i = \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}}.$$

Poszukiwana całka szczególna \bar{W}_j wyrazi się wzorem

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{W}_j &= \frac{1}{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}_{s+1} e^{\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+2} e^{-\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+3} e^{\bar{r}_2 y} + \bar{\Delta}_{s+4} e^{-\bar{r}_2 y}) \times \\ &\quad \times \sin \alpha_n x [\sin (p - v_n) t - i \cos (p - v_n) t], \\ \bar{r}_1 &= \alpha_n \sqrt{\sqrt{\frac{H^2 - B_x B_y}{B_y^2} + \bar{\Omega}^2} + \frac{H}{B_y}}, & \bar{r}_3 &= -\bar{r}_1, \\ \bar{r}_2 &= \alpha_n i \sqrt{\sqrt{\frac{H^2 - B_x B_y}{B_y^2} + \bar{\Omega}^2} + \frac{H}{B_y}}, & \bar{r}_4 &= -\bar{r}_2. \end{aligned} \right.$$

Rozwiązaniem naszego zagadnienia będzie suma

$$(2.19) \quad W_j^0 = W_j + \bar{W}_j + \bar{W}_j.$$

Stąd na podstawie wzorów (1.44) i (2.9) znajdziemy

$$(2.20) \quad W_j^0 = B(\Delta_{s+1} e^{r_1 y} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 y} + \Delta_{s+3} e^{r_2 y} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 y}) \times \\ \times \sin \alpha_n x e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} \sin (\omega_0 t + \kappa) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}_{s+1} e^{\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+2} e^{-\bar{r}_1 y} + \right. \\ \left. + \bar{\Delta}_{s+3} e^{\bar{r}_2 y} + \bar{\Delta}_{s+4} e^{-\bar{r}_2 y}) \sin \alpha_n x [\sin (p + v_n) t - i \cos (p + v_n) t] \right\} + \\ + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}_{s+1} e^{\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+2} e^{-\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+3} e^{\bar{r}_2 y} + \bar{\Delta}_{s+4} e^{-\bar{r}_2 y}) \times \right. \\ \left. \times \sin \alpha_n x [\sin (p - v_n) t - i \cos (p - v_n) t] \right\}.$$

Rozwiązaniem będzie także część urojona funkcji W_j^0 , tj.

$$(2.21) \quad W_j^0 = B(\Delta_{s+1} e^{r_1 y} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 y} + \Delta_{s+3} e^{r_2 y} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 y}) \times \\ \times \sin \alpha_n x e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} \cos (\omega_0 t + \kappa) + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}_{s+1} e^{\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+2} e^{-\bar{r}_1 y} + \right. \\ \left. + \bar{\Delta}_{s+3} e^{\bar{r}_2 y} + \bar{\Delta}_{s+4} e^{-\bar{r}_2 y}) \sin \alpha_n x [\sin (p + v_n) t - i \cos (p + v_n) t] \right\} + \\ + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}_{s+1} e^{\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+2} e^{-\bar{r}_1 y} + \bar{\Delta}_{s+3} e^{\bar{r}_2 y} + \bar{\Delta}_{s+4} e^{-\bar{r}_2 y}) \times \right. \\ \left. \times \sin \alpha_n x [\sin (p - v_n) t - i \cos (p - v_n) t] \right\}.$$

Zajmiemy się z kolei zagadnieniem rezonansu.

Podstawiając w równaniu (2.19) lub (2.20)

$$\Omega^2 = \bar{\Omega}^2 \quad \text{lub} \quad \Omega^2 = -\bar{\Omega}^2$$

otrzymujemy

$$\Delta = \bar{\Delta} = 0 \quad \text{lub} \quad \Delta = \bar{\Delta} = 0.$$

Ponieważ wyrażenia $\bar{\Delta}$ jak i $\bar{\Delta}$ znajdują się w mianowniku, oznaczałoby to, że przy liczniku różnym od zera amplituda W_j^0 rośnie nieograniczenie. Równanie (2.21) po wstawieniu odpowiednich wartości na Ω , $\bar{\Omega}$ i $\bar{\bar{\Omega}}$ przybiera postać

$$\omega^2 = (p+v_n)^2 \quad \text{lub} \quad \omega^2 = (p-v_n)^2$$

lub szczegółowiej

$$(2.22) \quad \left(1 + \frac{\psi}{2\pi} i\right) \omega_0^2 = (p+v_n)^2 \quad \text{lub} \quad \left(1 + \frac{\psi}{2\pi} i\right) \omega_0^2 = (p-v_n)^2.$$

Równania powyższe nie mogą być spełnione, gdy $\psi \neq 0$. Łatwo można natomiast spełnić równania

$$(2.23) \quad \omega_0^2 = (p+v_n)^2 \quad \text{lub} \quad \omega_0^2 = (p-v_n)^2.$$

Jeśli jeden warunek (2.23) jest spełniony, to $\bar{\Delta}$ bądź $\bar{\bar{\Delta}}$ będzie liczbą bardzo małą, zależną tylko od małego parametru ψ (i różną od zera). Trudno przewidzieć w ogólnym przypadku, czy spełnienie jednego warunku (2.23) będzie przypadkiem najniekorzystniejszym z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. Przyjmijmy, że $\max W_j^0$ będzie osiągnięte dla wartości ω_0 . Z dużym prawdopodobieństwem należy się spodziewać, że przedział wartości ω_0

$$(2.24) \quad 0,9 (p-v_n)^2 \leq \omega_0^2 \leq 1,1 (p+v_n)^2$$

będzie dla konstrukcji przedziałem niebezpiecznym. Z drugiej jednak strony punkt działania siły wymuszającej P jest ruchomy, czas jej działania w przypadkach praktycznie możliwych jest dosyć krótki, a tym samym zmniejsza się niebezpieczeństwo nadmiernego wzrostu amplitudy. Ponieważ rozpatrywana konstrukcja składa się z elementów o różnych sztywnościach i różnym rozłożeniu mas, obliczenia należy przeprowadzić przynajmniej w dwóch przekrojach równoległych do osi y , tj. dla żeber bezpośrednio obciążonego siłą wymuszającą oraz dla środka płyty sąsiadującej z tym żebrzem. Jeżeli obciążone będzie nie jedno żebro lecz równocześnie kilka żeber, to zagadnienie można rozwiązać przez dodanie odpowiednich wielkości obliczonych dla każdej z sił osobno.

Wyznaczenie drgań od impulsu sprowadza się do zagadnienia drgań swobodnych przy odpowiednich warunkach początkowych. Dla $t=0$ mają one postać

$$(2.25) \quad W_j^* \left(x, \frac{b}{2}, 0\right) = 0, \quad \frac{\partial W_j^*}{\partial t} = \frac{P dt}{\mu z} \delta(x - \bar{x}),$$

gdzie $P dt$ oznacza impuls pionowy, $\delta(x - \bar{x})$ funkcję Diraca, \bar{x} punkt działania impulsu.

Zgodnie ze wzorem (1.44)

$$(2.26) \quad \begin{cases} W_j^* = B_j \sin \alpha_n x e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \kappa), \\ \frac{\partial W_j^*}{\partial t} = -B_j \omega_0 \sin \alpha_n x e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} \left[\frac{\psi}{4\pi} \cos(\omega_0 t + \kappa) + \sin(\omega_0 t + \kappa) \right], \\ B_j = B (\Delta_{s+1} e^{r_1 \beta_j} + \Delta_{s+2} e^{-r_1 \beta_j} + \Delta_{s+3} e^{r_2 \beta_j} + \Delta_{s+4} e^{-r_2 \beta_j}). \end{cases}$$

Po uwzględnieniu w (2.26) związków (2.25) otrzymuje się układ równań, z których można wyznaczyć stałe B i κ :

$$(2.27) \quad \begin{aligned} B_j \cos \kappa &= 0, \\ -B_j \omega_0 \left(\frac{\psi}{4\pi} \cos \kappa + \sin \kappa \right) &= \frac{2P dt}{l\mu_z} \sin \alpha_n \bar{x}. \end{aligned}$$

Stąd

$$(2.28) \quad \kappa = \frac{\pi}{2}, \quad B_j = -\frac{P dt}{l\mu_z \omega_0} \sin \alpha_n \bar{x}.$$

Równanie drgań wywołanych impulsem ma więc postać

$$(2.29) \quad W_j = \frac{2P dt}{l\mu_z \omega_0} \sin \alpha_n x \sin \alpha_n \bar{x} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 t} \sin \omega_0 t.$$

Korzystając z powyższego równania można drogą całkowania otrzymać rozwiązanie dla dowolnej siły $P(t)$ zaczepionej w punkcie $x = \bar{x}$:

$$(2.30) \quad W_{jp} = \frac{2}{l\mu_z \omega_0} \left\{ \int_0^t P(\tau) e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 (t-\tau)} \sin [\omega_0 (t-\tau)] d\tau \right\} \sin \alpha_n \bar{x} \sin \alpha_n x.$$

Jeżeli punkt działania siły $P(t)$ porusza się ze stałą prędkością v , to należy zamiast \bar{x} podstawić do wzoru (2.30) $\bar{x} = vt$. Wzór przyjmie postać

$$(2.31) \quad W_{jp} = \frac{2}{l\mu_z \omega_0} \left\{ \int_0^t P(\tau) e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_0 (\tau-t)} \sin [\omega_0 (t-\tau)] \sin [\alpha_n v (t-\tau)] d\tau \right\} \sin \alpha_n x.$$

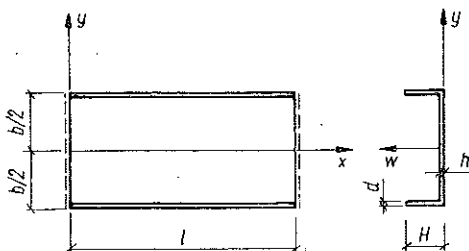
3. Przykłady liczbowe

Przykład 1. Rozpatrzono drgania własne i wymuszone płyty prostokątnej połączonej z dwoma żebrami dla obciążenia ruchomego stanowiącego dwie identyczne siły przyłożone w punktach poruszających się z jednakową prędkością wzdłuż żeber. W układzie powstają drgania symetryczne. Dla rozwiązania postawionego zagadnienia przyjęto układ przedstawiony na rys. 4.

Po przyjęciu w równaniu (1.3) $B_x = B_y = H = D$ otrzymamy następujące pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_n \sqrt{\Omega + 1}, & r_2 &= a_n i \sqrt{\Omega - 1}, \\ r_3 &= -a_n \sqrt{\Omega + 1}, & r_4 &= -a_n i \sqrt{\Omega - 1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie można przedstawić w postaci



Rys. 4

$$W = (A_1 \operatorname{ch} r_1 y + A_2 \cos r_2 y + A_3 \operatorname{sh} r_1 y + A_4 \sin r_2 y) \sin a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}$$

Ta postać rozwiązania jest szczególnie dogodna, gdyż pozwala na odrzucenie funkcji antysymetrycznych. Dla dalszych obliczeń wystarczy rozpatrzyć jedynie wyrażenie

$$(3.1) \quad W = (A_1 \operatorname{ch} r_1 y + A_2 \cos r_2 y) \sin a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}$$

Ze względu na symetrię układu i symetrię obciążenia funkcja naprężeń przyjmie postać następującą:

$$(3.2) \quad F = \frac{1}{a_n^2} (A_5 \operatorname{ch} a_n y + A_6 a_n y \operatorname{sh} a_n y) \sin a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}$$

Stąd mamy

$$(3.3) \quad \begin{cases} \sigma_x = [(A_5 + 2A_6) \operatorname{ch} a_n y + A_6 a_n y \operatorname{sh} a_n y] \sin a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}, \\ \sigma_y = -(A_5 \operatorname{ch} a_n y + A_6 a_n y \operatorname{sh} a_n y) \sin a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}, \\ \tau_{xy} = -(A_5 + A_6) \operatorname{sh} a_n y + A_6 a_n y \operatorname{ch} a_n y \cos a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}, \\ X = -h [(A_5 + A_6) \operatorname{sh} a_n y + A_6 a_n y \operatorname{ch} a_n y] \frac{\sin a_n x}{a_n} e^{i(\omega t + \kappa)}, \\ E v = - \left[A_5 \frac{1}{a_n} \operatorname{sh} a_n y + A_6 \left(y \operatorname{ch} a_n y - \frac{1}{a_n} \operatorname{sh} a_n y \right) \right] \sin a_n x e^{i(\omega t + \kappa)}. \end{cases}$$

Do wyznaczenia czterech stałych A_1 , A_2 , A_5 i A_6 otrzymuje się układ równań:

$$(3.4) \quad \begin{cases} EI_x \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^4} + \frac{\mu_z}{\eta} \frac{\partial^2 W^*}{\partial t^2} - s \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - D \left[\frac{\partial^3 W^*}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 W^*}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0, \\ EI_y s^2 \frac{\partial^5 W^*}{\partial x^4 \partial y} - GI_a \frac{\partial^3 W^*}{\partial x^2 \partial y} + \frac{I_{1\mu}}{\eta} \frac{\partial^3 W^*}{\partial t^2 \partial y} + D \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} = 0, \\ Es \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^2} + \frac{X}{A} - \sigma_x = 0, \quad v = 0. \end{cases}$$

Tablica 1

EA_1	EA_2	A_5	A_6
$\left(I_x - \frac{dH}{12} \Omega^2 \right) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega+1} - \frac{I_3 \sqrt{\Omega+1} (\Omega-1)}{12 \alpha_n} \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega+1}$	$\left(I_x - \frac{dH}{12} \Omega^2 \right) \cos \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega-1} - \frac{I_3 \sqrt{\Omega-1} (\Omega+1)}{12 \alpha_n} \sin \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega-1}$	$-\frac{I_3 \alpha_{nb}}{\alpha_n^3} \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2}$	$-\frac{I_3 \alpha_{nb}}{\alpha_n^3} \left(\operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} + \frac{\alpha_{nb}}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} \right) = 0$
$\left(I_y s^2 + \frac{1}{2 \alpha_n^2} I_s - \frac{I_1 I_2}{12} \Omega^2 \right) \alpha_n \sqrt{\Omega+1} \times \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega+1} + \frac{I_3 (\Omega+1)}{12 \alpha_n^2} \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega+1}$	$-\left[\left(I_y s^2 + \frac{1}{2 \alpha_n^2} I_s - \frac{I_1 I_2}{12} \Omega^2 \right) \alpha_n \sqrt{\Omega-1} \sin \frac{\alpha_{nb}}{2} \times \sqrt{\Omega-1} + \frac{I_3 (\Omega-1)}{12 \alpha_n^2} \cos \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega-1} \right]$	0	0
$s \alpha_n^2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega-1}$	$s \alpha_n^2 \cos \frac{\alpha_{nb}}{2} \sqrt{\Omega-1}$	$\frac{h}{dH \alpha_n} \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2}$	$\frac{h}{dH \alpha_n} \left(\operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} + \frac{\alpha_{nb}}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} \right) + 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} + \frac{\alpha_{nb}}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} = 0$
0	0	$\frac{\alpha_{nb}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2}}$	$\frac{\alpha_{nb}}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nb}}{2} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nb}}{2} = 0$

[83]

Uwaga: Równanie pierwsze i drugie uproszczono przez $\alpha_n^4 \cdot 10^{-3}$

Po wstawieniu zależności (3.3) do układu równań różniczkowych (3.4) otrzymuje się układ równań liniowych jednorodnych. Po uporządkowaniu i uproszczeniu układ powyższy został przedstawiony w tablicy 1.

Po przyjęciu danych geometrycznych schematu statycznego przedstawionego na rys. 4: $b = 2 \cdot 10^{-1} l$, $d = 1,6 \cdot 10^{-2} l$, $H = 6 \cdot 10^{-2} l$, $h = 4 \cdot 10^{-3} l$ oraz po uproszczeniu równań (3.4) otrzymuje się do obliczenia drgań własnych Ω wyznacznik, który ma postać Δ (3.4.1). Ze względu na jego skomplikowaną budowę nie można ogólnie określić miejsc zerowych. Metodą prób znaleziono najmniejszą własność Ω spełniającą odpowiednie równanie; wynosi ona $\Omega \approx 15,15$.

Przez pominięcie wpływu sił normalnych uzyskuje się znacznie prostszy wyznacznik, gdyż tylko drugiego rzędu. Zaznaczono go w tabeli linią kreskowaną. Dla tego przypadku $\Omega \approx 12,51$.

Porównując otrzymane wyniki można wnioskować, że wpływ sił tarczowych jest w pewnych przypadkach bardzo znaczny i nie może być pomijany. W dalszym ciągu rozpatrzono przypadek, kiedy żebro jest bardzo sztywne. Przyjęto przypadek graniczny, tj. zamiast równania drugiego wzięto równanie otrzymane z warunku $\partial W^*/\partial y = 0$, co prowadzi do równania

$$A_1 \sqrt{\Omega+1} \operatorname{sh} \frac{a_n b}{2} \sqrt{\Omega+1} - A_2 \sqrt{\Omega-1} \sin \frac{a_n b}{2} \sqrt{\Omega-1} = 0;$$

inne równania natomiast pozostały bez zmian. Dla tego przypadku wynosi $\Omega \approx 15,21$.

Z kolei przyjęto, że płyta jest na żebrze podparta przegubowo. Równanie drugie zastąpiono równaniem otrzymanym z warunku $\partial^2 W^*/\partial y^2 = 0$. Otrzymano w ten sposób równanie

$$A_1 (\Omega+1) \operatorname{ch} \frac{a_n b}{2} \sqrt{\Omega-1} - A_2 (\Omega-1) \cos \frac{a_n b}{2} \sqrt{\Omega-1} = 0.$$

Odpowiadające temu przypadkowi $\Omega \approx 14,15$. Wszystkie wyżej wymienione przypadki rozpatrzono także przy pominięciu wpływów tarczowych. W dalszym ciągu dla porównania wyników obliczono drgania pionowe i poziomo skrętne, traktując całą konstrukcję jako pręt cienkościenny. Uzyskane wyniki zestawiono w tablicy 2.

Ponadto w celu uzyskania fizycznej interpretacji wielkości Ω obliczono drgania własne płyty o krawędziach swobodnych traktując ją jako pręt wolnopodparty. Uzyskano wyniki $\Omega = 1$. Ponieważ Ω jest wielkością bezwymiarową, można przeto uważać, że poszczególne jej wartości wskazują, ile razy drgania rozpatrywanego ustroju są większe od drgań płyty w tych samych wymiarach i swobodnych krawędziach.

W drugim przykładzie przyjęto do obliczeń płytę kwadratową ($l = b$). Inne wymiary zostały zachowane. Przy tych wymiarach żebra są bardzo sztywne, wskutek

tego porównanie przeprowadzono z płytą zamocowaną i wolnopodpartą. W tym przypadku wpływ sił tarczowych jest minimalny i może być zupełnie pominięty. Wyniki podano w tablicy 3.

Drgania wymuszone. W dalszym ciągu dla rozpatrywanego poprzednio przypadku (płyta o stosunku boków 1:5) obliczono drgania wymuszone. Ponieważ obliczono tylko drgania symetryczne, to przyjęto, że siła wymuszająca składa się

Tablica 2. (Por. tablica 4) $b:l = 1:5$

		Sposób podparcia	Ω	%
	1	Przekrój cienkościenny a) drgania poziomo skrętne b) drgania pionowe	70 16,27	7
Z uwzględnieniem sił tarczowych	2	Żebra nie podatne na skręcanie $W^* \neq 0$, $\frac{\partial W^*}{\partial y} = 0$	15,21	0,5
	3	Przekrój odkształcalny $W^* \neq 0$, $\frac{\partial W^*}{\partial y} \neq 0$	15,15	0,0
	4	Żebra wiotkie na skręcanie $W^* \neq 0$, $\frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} = 0$	14,55	-4
Z pominięciem sił tarczowych	5	Żebra nie podatne na skręcanie $W^* \neq 0$, $\frac{\partial W^*}{\partial y} = 0$	12,65	-16
	6	Przekrój odkształcalny $W^* \neq 0$, $\frac{\partial W^*}{\partial y} \neq 0$	12,51	-17,5
	7	Żebra wiotkie na skręcanie $W^* \neq 0$, $\frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} = 0$	12,35	-19
	8	Płyta a krawędziach swobodnych	1	

z dwóch symetrycznych sił, których punkty zaczepienia poruszają się równocześnie po obydwu żebrach. Częstota jej dobrano tak, aby zachodził rezonans ($p = \omega_0$). Prędkość poruszania się punktów przyłożenia sił jest zasadniczo niezależna od częstoty pulsowania, w większości jednak zachodzących przypadków obydwa parametry są ściśle związane.

W rozpatrywanym poniżej przykładzie przyjęto, że siła wymuszająca pochodzi od niewyważonych mas kół toczących się po żebrach. Otrzymano stąd zależność pomiędzy p i v , $p = v/R$, gdzie R jest promieniem koła. Drgania wymuszone rozpatrzono z pominięciem wpływu sił tarczowych.

Dane liczbowe:

$$p = \omega_0 = 76,86050 \frac{1}{\text{sek}}, \quad l = 7,50 \text{ m},$$

$$p + v_n = 92,95733 \frac{1}{\text{sek}}, \quad R = 1,0 \text{ m},$$

$$p - v_n = 60,76351 \frac{1}{\text{sek}}, \quad v = 138 \frac{\text{km}}{\text{godz}},$$

$$\psi = 0,27, \quad P_0 = 2,0 \text{ t}, \quad E = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch punktów: jednego o współrzędnych $(l/2, 0)$, tj. dla środka płyty, i drugiego o współrzędnych $(l/2, b/2)$, tj. dla środka żebra. Ugięcie rozpatrywanego punktu naniesiono na wykresie pod siłą uzyskując w ten sposób linię wpływową ugięcia. W obliczeniach ograniczono się do pierwszego wyrazu szeregu Fouriera.

Tablica 3. Drgania własne ułożone według wartości Ω malejących ($b : l = 1 : 1$)

	Sposób podparcia	Ω
1	Płyta zamocowana na dwóch sztywnych podporach $W^* = 0, \quad \frac{\partial W^*}{\partial y} = 0$	2,95
2	Płyta oparta na żebrach niepodatnych na skręcanie $\frac{\partial W^*}{\partial y} = 0, \quad W^* \neq 0$	2,87
3*	Płyta oparta na żebrach odkształcalnych $W^* \neq 0, \quad \frac{\partial W^*}{\partial y} \neq 0$	2,76
4	Płyta wolnopodparta na sztywnych podporach $W^* \neq 0, \quad \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} = 0$	2,00
5	Płyta oparta na żebrach wiotkich na skręcanie $W^* \neq 0, \quad \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} = 0$	1,99
6	Płyta o krawędziach swobodnych	1,00

W^* oznacza ugięcie krawędzi płyty.

* Dla $2,755 < \Omega < 2,756$ wyznacznik zmienia znak zarówno z uwzględnieniem sił tarczowych jak i z ich pominięciem.

Przypadek pierwszy. Obliczymy pierwszy składnik rozwiązania:

$$y = 0, \quad \bar{\Omega}^2 = 228,47060 - 9,51761 i.$$

Układ równań

$$288 \left(1 - \frac{\bar{\Omega}^2}{152}\right) \bar{A}_1 + 288 \left(1 - \frac{\bar{\Omega}^2}{152}\right) \bar{A}_2 = \frac{200}{3},$$

$$0,172 (\bar{\Omega} + 1) \bar{A}_1 - 0,172 (\bar{\Omega} - 1) \bar{A}_2 = 0,$$

posiada rozwiązanie

$$\bar{A}_1 = -0,82606 - 2,25499 i,$$

$$\bar{A}_2 = -0,93592 - 2,57696 i,$$

skąd znajdziemy

$$\bar{W}(\frac{1}{2}l, 0, t) = (-1,76198 - 4,83195 i) [\sin(p + v_n)t - i \cos(p + v_n)t].$$

Jako rozwiązanie przyjęto część rzeczywistą:

$$(3.5) \quad \operatorname{Re} \bar{W}(\frac{1}{2}l, 0, t) = -1,76198 \sin(p + v_n)t - 4,83195 \cos(p + v_n)t.$$

Drugi składnik rozwiązania otrzymano przez przyjęcie

$$\bar{\Omega}^2 = 97,62249 - 4,19439 i.$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymano

$$\bar{A}_1 = 0,18354 - 0,00609 i,$$

$$\bar{A}_2 = 0,22490 - 0,00737 i$$

oraz

$$(3.6) \quad \operatorname{Re} \bar{W}(\frac{1}{2}l, 0, t) = 0,40844 \sin(p - v_n)t - 0,01348 \cos(p - v_n)t.$$

Rozwiązaniem problemu będzie suma dwóch funkcji:

$$(3.7) \quad W = B \cos(\omega_0 t + \kappa) e^{-1,652t} - 5,14318 \sin[(p + v_n)t + 1,221] - \\ - 0,40866 \cos[(p - v_n)t + 1,538].$$

W celu wyznaczenia stałych B i κ nałożono na funkcję W warunki:

$$(3.8) \quad W(\frac{1}{2}l, 0, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial W(\frac{1}{2}l, 0, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0.$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymano $B = 5,20969$ oraz $\kappa = -0,376$. Ostateczne więc rozwiązanie przyjmie postać

$$(3.9) \quad W(\frac{1}{2}l, 0, t) = 5,20969 e^{-1,652t} \cos(76,86050t - 0,376) - \\ - 5,14318 \sin(92,95733t + 1,221) - 0,40866 \cos(60,76351t + 1,538).$$

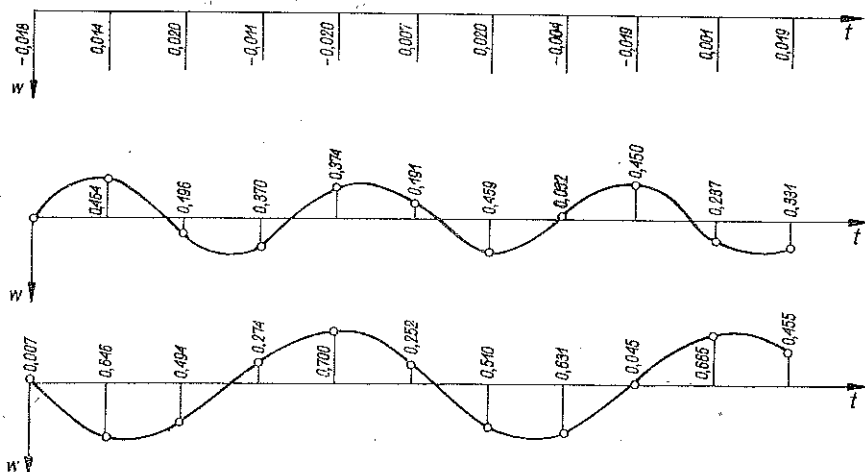
Wartość funkcji W obliczono w jedenastu punktach

$$W_k = W\left(\frac{1}{2}l, 0, \frac{kt_1}{10}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 10,$$

gdzie $t_1 = l/v$ oznacza czas potrzebny na to, aby punkt przyłożenia siły poruszający się z prędkością v przebył drogę l . Obliczenia umieszczono w tablicach oraz sporządzono odpowiedni wykres (tabl. 4, oraz rys. 5 i 6).

Tablica 4

	$K\Delta t$	$0,02502 e^{-1,652 t}$	$0,02502 e^{-1,652 t} \times \sin(w_0 t - 0,847)$	$-0,47256 \sin[(p + V_n) t - 0,0548]$	$0,70046 \sin[(p - V_n) t - 0,010]$	W
0	0	0,02502	-0,01876	0,02568	-0,00692	0
1	0,0195	0,02423	0,01468	-0,46433	0,64607	0,19642
2	0,0390	0,02347	0,01963	0,19649	0,49385	0,70987
3	0,0585	0,02273	-0,01103	0,37003	-0,27441	0,08459
4	0,0780	0,02199	-0,01994	-0,37420	-0,70036	-1,09450
5	0,0975	0,02130	0,00754	-0,19103	-0,25244	-0,43593
6	0,1170	0,02063	0,01977	0,45927	0,51020	0,98924
7	0,1365	0,01998	-0,00434	-0,03232	0,63076	0,59410
8	0,1560	0,01933	-0,01912	-0,45008	-0,04487	-0,51407
9	0,1755	0,01872	0,00138	0,23782	-0,66457	-0,41537
10	0,1950	0,01813	0,01879	0,33152	-0,45515	0,10484



Rys. 5

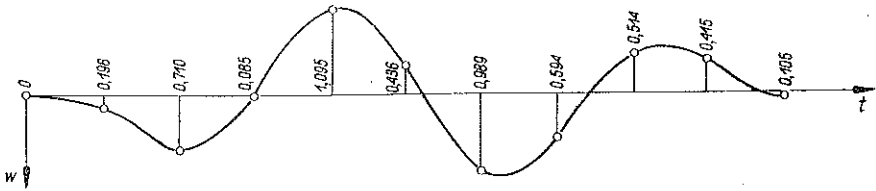
Przypadek drugi. Mamy

$$y = b/2, \quad \Omega^2 = 228,47060 - 0,51761 i$$

oraz układ równań

$$\begin{aligned} & [(-4,44237 + 12,18263 i) \operatorname{ch}(1,26115 - 0,02542 i) - \\ & - 1,698 (4,01483 - 0,08090 i) (14,11524 - 0,64951 i) \operatorname{sh}(1,26115 - 0,02542 i)] \bar{A}_1 + \\ & + [(-4,44237 + 12,18263 i) \cos(1,18030 - 0,02716 i) - 1,698 (3,75703 - 0,08644 i) \times \\ & \times (16,11524 - 0,64951 i) \sin(1,18030 - 0,02716 i)] \bar{A}_2 = \frac{200}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(3,14471 + 0,01347 i) (4,01438 - 0,08090 i) \operatorname{sh}(1,26115 - 0,02542 i) + \\ & + 0,172 (16,11524 - 0,64951 i) \operatorname{ch}(1,26115 - 0,02542 i)] \bar{A}_1 - \\ & - [(3,14471 + 0,01347 i) (3,75703 - 0,08644 i) \sin(1,18030 - 0,02716 i) + \\ & + 0,172 (14,11524 - 0,64951 i) \cos(1,18030 - 0,02716 i)] \bar{A}_2 = 0. \end{aligned}$$



Rys. 6

Rozwiązanie jego daje

$$(3.10) \quad \begin{cases} \bar{A}_1 = -0,17218 - 0,03343 i, \\ \bar{A}_2 = -0,37732 - 0,05630 i, \end{cases} \\ \operatorname{Re} \bar{W} = -0,47186 \sin(p+v_n)t + 0,02568 \cos(p+v_n)t = 0,47256 \cos \times \\ \times (92,95733 t + 1,516).$$

Po przeprowadzeniu analogicznych rachunków dla wartości $p - v_n$ otrzymano

$$(3.11) \quad \operatorname{Re} \bar{W} = 0,70046 \sin(60,76351 t - 0,010).$$

Po dodaniu obu składników funkcja W przyjmie postać

$$(3.12) \quad W = B e^{-1,652t} \cos(\omega_0 t + \kappa) - 0,47256 \sin[(p+v_n)t - 0,0548] + \\ + 0,70046 \sin[(p-v_n)t - 0,010].$$

Stałe B i κ przy warunkach początkowych

$$W(\frac{1}{2}l, \frac{1}{2}b, 0) = 0, \quad \left[\frac{W\partial}{\partial t} (\frac{1}{2}l, \frac{1}{2}b, t) \right]_{t=0} = 0$$

wynoszą $B = 0,02502$ oraz $\kappa = 0,723$, stąd ostatecznie

$$(3.13) \quad W = 0,02502 e^{-1,652t} \sin(76,860t - 0,847) - 0,47256 \sin(92,957t - 0,0548) + \\ + 0,70046 \sin(60,76351t - 0,010).$$

Wyniki podobnie jak w przypadku poprzednim podano w tablicach i na wykresie (tablica 5 oraz rys. 7 i 8).

Tablica 5

	$K\Delta t$	$5,20969 e^{-1,652t}$	$5,20969 e^{-1,652t} \times \cos(w_0 t - 0,376)$	$-5,14318 \sin[(p + Y_n)t + 1,224]$	$-0,40866 \cos[(p - Y_n)t + 1,538]$	W
0	0	5,20969	4,84574	-4,83171	-0,01340	0,00063
1	0,0195	5,04564	2,18466	-0,55742	0,37338	2,00062
2	0,0390	4,88669	-4,23930	5,09735	0,29440	1,15245
3	0,0585	4,73279	-2,64251	-1,88770	-0,15181	-4,68202
4	0,0780	4,57916	3,60572	-4,19185	-0,40866	-0,99479
5	0,0975	4,43496	2,97728	3,89575	-0,15612	6,71691
6	0,1170	4,29529	-2,96852	2,32554	0,29116	-0,35182
7	0,1365	4,16004	-3,19193	-5,01126	0,37524	-7,82795
8	0,1560	4,02501	2,33410	0,07314	-0,00883	2,39841
9	0,1755	3,89820	3,32980	4,97479	-0,38186	7,92273
10	0,1950	3,77546	-1,72338	-2,45592	-0,27855	-4,45785

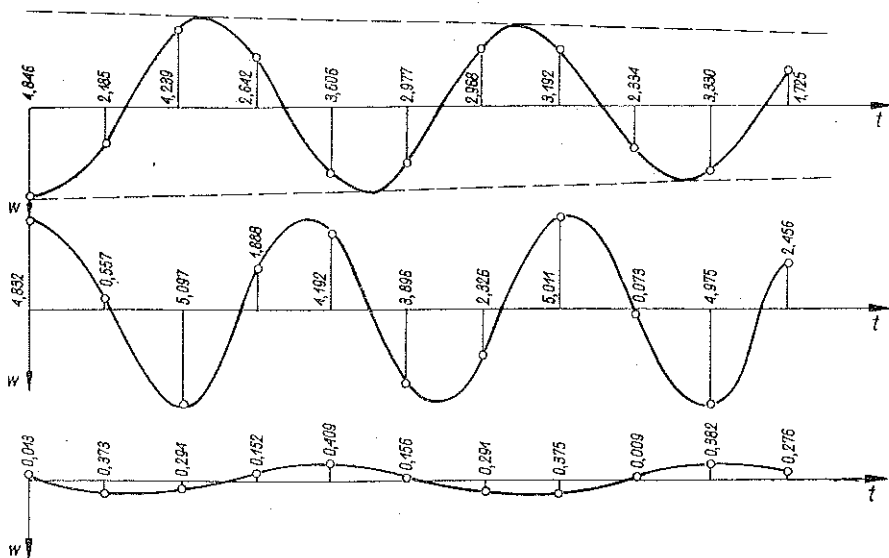
4. Wnioski

Na podstawie analizy wyników można wyciągnąć pewne wnioski o charakterze pracy rozpatrywanego układu.

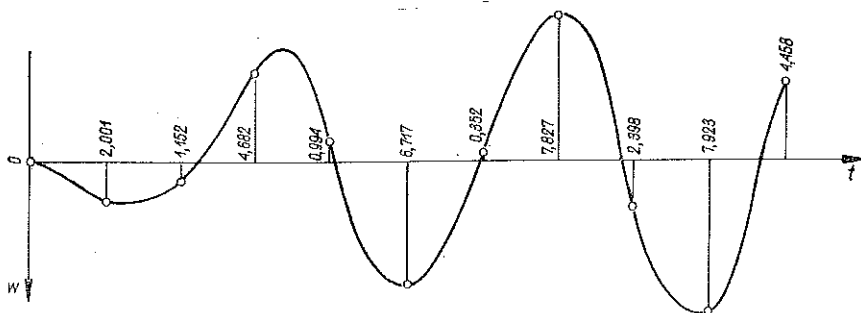
1. Drgania płyty o stosunku boków 1:5 lub większym, opartej na żebrach, można z dobrym przybliżeniem obliczyć traktując całość jako pręt o przekroju ceowym. W rozpatrywanym przykładzie uzyskano drgania o 7% wyższe od wyniku ściślejszego, otrzymanego na podstawie niniejszej pracy.

2. Nie można w celu uproszczenia rachunków pomijać wpływu sił tarczowych, gdyż błąd popełniany jest znaczny i wynosi w tym przypadku 17%.

3. Płyty kwadratowe lub o zbliżonym do jedności stosunku boków, oparte na żebrach, można rozwiązywać z pominięciem sił tarczowych. Otrzymany błąd nie przekroczył 1%.



Rys. 7



Rys. 8

4. Dobre przybliżenie uzyskano traktując płytę jako zamocowaną na sztywnych podporach. Popędzany błąd wynosi 7%.

5. Dla płyt o stosunku boków 1:2, 1:3, 1:4, stosowanie wyżej wymienionych metod przybliżonych jest niecelowe, gdyż popełniony błąd może być bardzo duży.

6. Amplituda drgań wymuszonych ma różne wartości w przekroju poprzecznym. W rozpatrywanym przykładzie maksymalne wychylenie środka płyty jest kilka razy większe od wychylenia środka żebra.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. BIELEWICZ, *Drgania przestrzenne mostów jednoprzęsłowych*, Rozpr. Inżyn., 4, 6 (1958).
- [2] Филипов, *Колебания упругих систем*, Киев 1956.
- [3] B. G. KORONOW, *Dynamik von Baukonstruktionen*, VEB Verlag, Berlin 1953.
- [4] W. NOWACKI, *Zagadnienia statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. Stos., 4, 6 (1954).
- [5] M. SOKOŁOWSKI, *The Stability of an Orthotropic Infinitely Long Plate with Ribs*, Arch. Mech. Stos., 4, 7 (1956).
- [6] P. WILDE, *Płyta ortotropowa z cienkościennymi żebrami niesymetrycznymi*, Rozpr. Inżyn., 3, 7 (1959).
- [7] Я. В. АНАНБЕВ, *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем*, Москва 1946.
- [8] J. N. Mc. DUFF, J. R. CURRERI, *Drgania w technice*, PWT Warszawa 1960.
- [9] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1954.
- [10] V. KOLOUSEK, *Schwingungen der Brücken aus Stahl und Stahlbeton*, Abhandlungen, B, 7, Zurich 1956.
- [11] J. NALESZKIEWICZ, *Z dynamiki belki mostowej*, Arch. Mech. Stos., 4, 5 (1953).
- [12] J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN Warszawa 1953.
- [13] W. NOWACKI, *Zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania, stateczności i drgań pasma płytowego i płyty prostokątnej*, Księga Jubileuszowa W. Wierzbickiego, Warszawa 1959 PWN.
- [14] S. D. PONOMARIEW, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, Warszawa 1957.
- [15] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PWN Warszawa 1957.
- [16] S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, New York 1956.
- [17] Б. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
- [18] S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, Warszawa 1957.

Резюме

СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРОГО РОДА ПЛАСТИНОК ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ

Дается решение для ортотропной пластинки, опертой свободно вдоль двух параллельных краев, подкрепленной ребрами перпендикулярными к этим ребрам. Решается задача свободных и вынужденных колебаний. Вынуждающую силу принимается как сосредоточенную силу без массы и пульсирующую с частотой p , причем точка приложения силы движется с постоянной скоростью по произвольному ребре. Кроме того учитывается влияние переменных во времени мембранных сил, пренебрегая влиянием массовых сил, действующих в плоскости. Принимаются односторонние ребра, монолитически соединенные с пластинкой, учитывая их жесткость на кручение. Принимается во внимание также влияние демпфирования материала, принятого в комплексной форме. Для получения решения используется метод одинарных рядов Фурье.

В заключение даются два числовых примера, анализируя при этом влияние различных упрощающих предположений. Результаты сопоставляются в таблицах или диаграммах.

Summary

NATURAL AND FORCED VIBRATION OF RIBBED PLATES OF A CERTAIN TYPE

The solution concerns orthotropic plates simply supported along two parallel edges with ribs normal to these edges. The problem of natural and forced vibration is solved. The excitation is assumed to be concentrated with no mass, pulsating with the frequency p , the attachment point moving with constant velocity along a rib. Time dependent forces in the plane of the plate are taken into consideration. The mass forces in this plane are rejected. The ribs are assumed to be one-sided, constituting a monolithic system with the plate. The torsional rigidity of the plate is accounted for as well as the material damping which is assumed in the complex form. The method of simple Fourier series is used.

In conclusion, two numerical examples are given, the influence of various simplifications being analysed.

The results are represented in the form of tables and graphs.

POLITECHNIKA GDANSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 marca 1961 r.
