

## MAŁE UGIĘCIA SPRĘŻYSTO—PLASTYCZNE BELEK O DOWOLNYM PRZEKROJU

JANUSZ ORKISZ i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

## 1. Wstęp

Zagadnienie sprężysto – plastycznego zginania belek łączy już kilkadziesiąt lat, jednak z powodu wielu trudności do dziś nie jest ono jeszcze rozwiązane w sposób dostatecznie ścisły, a zarazem ogólny i możliwie dostępny w praktycznym zastosowaniu. Spośród tych trudności wymienimy tu kilka najistotniejszych.

Pierwsza z nich związana jest z różnorodną zależnością pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Z doświadczeń bowiem otrzymuje się różne formy tej zależności dla różnych materiałów, a ponadto dane doświadczalne ujmuje się w różne schematy matematyczne. Najczęściej przyjmuje się model ciała idealnie sprężysto – plastycznego z równymi (PRANDTL) lub różnymi granicami plastyczności dla ściskania i rozciągania, czy wykres z liniowym pojedynczym albo wielokrotnym odcinkowo–liniowym, czy też potęgowym wzmocnieniem plastycznym, czy wreszcie szereg innych funkcji w rodzaju

$$\sigma = \frac{2Q_r}{\pi} \arctg \frac{\pi E}{2Q_r} \varepsilon, \quad \sigma = Q_r \operatorname{th} \frac{E}{Q_r} \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \frac{Q_r - c|\sigma|}{Q_r - |\sigma|}$$

(gdzie  $Q_r$  oznacza granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu,  $E$  moduł Younga), dla których wykres Prandtla jest w pewnym sensie asymptotą. W nielicznych tylko pracach, zwłaszcza opartych na metodach numerycznych (np. A. L. KOLEŚNIKOW, [17]) nie czyni się żadnych założeń odnośnie związku  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , co pozwala na wykorzystanie wykresu rzeczywistego uzyskanego na drodze doświadczalnej.

Spośród wymienionych rodzajów zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami jak dotąd tylko przy przyjęciu potęgowego wzmocnienia plastycznego sformułowano ogólne równanie małych ugięć i to jedynie w przypadku czystego zginania. Równanie to podane np. w pracach L. KACZANOWA, [12], W. W. SOKOŁOWSKIEGO, [35], i A. PHILLIPSA, [29], można zapisać w postaci

$$(1.1) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \pm \frac{[M(x)]^{1/\mu}}{(KI_{\mu+1})^{1/\mu}},$$

gdzie

$$I_{\mu+1} = \int_{2F} z^{\mu+1} dF$$

jest pewnym geometrycznym momentem całkowitej powierzchni przekroju poprzecznego belki, a wyrażenie  $(KI_{\mu+1})^{1/\mu}$  jest odpowiednikiem sztywności przy zginaniu

sprężystym. Równanie (1.1) jest dogodnie do całkowania, gdyż zależy od kształtu przekroju poprzecznego belki jedynie przez stałą  $I_{\mu+1}$ .

Następna trudność związana jest z samą formą przekroju poprzecznego belki. O ile kształt przekroju poprzecznego belki w przypadku ugięć sprężystych wpływa jedynie za pośrednictwem stałego momentu bezwładności, o tyle przy ugięciach sprężysto – plastycznych wpływ ten jest o wiele bardziej skomplikowany. Praktycznie bowiem na ogół dla każdego przekroju poprzecznego belki (z wyjątkiem np. wykresu naprężeń z wzmocnieniem potęgowym) otrzymuje się inne równanie różniczkowe linii ugięcia, tylko w nielicznych przypadkach dające się efektywnie scałkować. Dlatego poza wspomnianym poprzednio przypadkiem wzmocnienia potęgowego w literaturze spotyka się pojedyncze rozwiązania dla rozmaitych kształtów przekroju poprzecznego zginanej belki. I tak np. rozważania dotyczące najlepiej jak dotąd opracowanego przekroju prostokątnego można znaleźć w pracach W. W. SOKOŁOWSKIEGO, [35], M. ŻYCZKOWSKIEGO, [42], A. PHILLIPSA, [29], S. D. PONOMARIEWA, [31], P. G. HODGE'A Jr., [6], A. R. RZANICYNA, [32], K. JEŽEKA [11], S. D. LEJTESA, [19] i [20].

Rozwiązania dla przekrojów dwuteowych podał jeszcze w 1936 r. K. JEŽEK, [11], a dla trójkątnego A. NÁDAI, [22]. Również A. PHILLIPS, [29], rozważa ugięcia belek o różnych często spotykanych przekrojach przy rozmaitych rodzajach zależności między naprężeniami a odkształceniami.

Jednakże najczęściej nawet dla prostych i często spotykanych przekrojów uzyskuje się nader skomplikowane równania ugięć sprężysto – plastycznych. Jako przykład można podać tu choćby równanie dla belki o przekroju kołowym z materiału idealnie sprężysto – plastycznego przy założeniu czystego zginania (por. np. [18]), dla którego efektywnych rozwiązań przy danych funkcjach  $M = M(x)$  jak dotąd nie podano w literaturze.

Przy rozważaniu ugięć sprężysto – plastycznych belek w wielu przypadkach, zwłaszcza przy działaniu znacznych sił ukośnych, nie można pomijać wpływu sił podłużnych na postać linii ugięcia. E. T. ONAT i W. PRAGER, [25], wykazali słuszność powyższej uwagi dla łuków, zwłaszcza płaskich, oraz ram. Z punktu widzenia teorii skończonych ugięć ustrojów prętowych pominięcie sił podłużnych przy rozważaniu ugięć tych ustrojów jest nawet niedopuszczalne. Jednakże uwzględnienie tego wpływu powoduje znaczny wzrost trudności matematycznych. Wtedy najczęściej siły podłużne i momenty zginające stają się dodatkowo funkcjami ugięć, co w zasadniczy sposób komplikuje zagadnienie.

Z tych względów do pełnego sprecyzowania zagadnienia ugięć sprężysto – plastycznych prętów prócz znajomości samych równań różniczkowych linii ugięcia i odpowiednich warunków brzegowych konieczne jest podanie zakresu stosowności tych równań z powodu możliwości zniszczenia ustroju lub przejścia z jednej do drugiej strefy sprężysto – plastycznej. W tym celu trzeba znać wykresy krzywych granicznych w przestrzeni sił podłużnych  $N$  i momentów zginających  $M$ . Przez krzywe graniczne podobnie jak w pracy [41] rozumiemy tu zarówno krzywe określające niszczące wartości  $M$  i  $N$ , «nośność przekroju», jak i granice pomiędzy rozmaitymi strefami uplastycznienia, a więc w szczególności między strefą sprężystą, jedno-

stronnego uplastycznienia, między jednostronnym a dwustronnym uplastycznieniem (przy wykresie typu Prandtla) itd. Przy takim ujęciu krzywe graniczne będą podawać zakres stosowalności równań ugięcia dla poszczególnych stref. Zasadniczą trudność stanowi fakt, iż krzywe graniczne są zależne zarówno od kształtu przekroju poprzecznego belki, której ugięcia rozważamy, jak i od rodzaju związku pomiędzy naprężeniami a odkształceniami. Stosunkowo łatwo jest jeszcze przedstawić je za pomocą najczęściej zresztą zawitych równań parametrycznych

$$(1.2) \quad M = f_1(\lambda), \quad N = f_2(\lambda),$$

natomiast wyrugowanie parametru  $\lambda$  praktycznie możliwe jest *explicitie* tylko dla bardzo prostych przekrojów, jak np. prostokąta, trójkąta czy rury cienkościennej (M. ŻYCKOWSKI, [40], oraz A. A. GWOZDIEW, [5]).

Dostatecznie ogólne równania krzywych granicznych podane są zazwyczaj albo numerycznie jak np. u A. L. KOLESNIKOWA, [17], (zaletą tego rozwiązania są bardzo szerokie założenia, a wadą ogromna pracochłonność), albo w postaci parametrycznej jak np. u A. PHILLIPSA, [29]. Wygodne w praktycznym użyciu i dostatecznie ogólne są równania krzywych granicznych przedstawione przez M. ŻYCKOWSKIEGO, [40], w postaci szybko zbieżnych szeregów potęgowych:

$$(1.3) \quad M = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (N + \delta)^{\mu + \nu j}.$$

Na podstawie związku (1.3) autor podaje przykładowo dla szeregu praktycznie spotykanych przekrojów, takich jak koło, rura, trójkąt, romb przybliżone wzory na krzywe graniczne w postaci

$$M = aN^4 + bN^2 + c,$$

gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są to stałe zależne od kształtu danego przekroju poprzecznego.

Inni autorzy podają najczęściej krzywe graniczne w formie graficznej poza przekrojem prostokątnym, dla którego ujęcie analityczne jest bardzo proste i jest często cytowane w literaturze. Tak np. krzywe graniczne dla przekroju dwuteowego podają F. B. SEELY i J. O. SMITH, [34], F. BARON, [1], B. C. NEAL, [23], A. A. GWOZDIEW, [5], i L. S. BEEDLE, [2]. W pracach [4] i [34] podano także odpowiednie krzywe dla teownika, a w pracach [34] i [5] dla koła. Ponadto A. A. GWOZDIEW, [5], podał wykres krzywych granicznych dla pierścienia oraz rozpatrzył przypadek zginania ukośnego. W pracy [34] uwzględniono również przekrój trapezowy; wiele ciekawych rozważań przytacza też W. SWIDA, [36].

Podano również w literaturze krzywe graniczne dla przekrojów teoretycznych dwu- i trzypunktowych (A. R. RZANICYN, [32]) oraz czteropunktowego (P. G. HODGE Jr. [6]). Tę ostatnią otrzymano w wyniku linearyzacji stosowanej krzywej dla prostokąta. Dokładną analizę krzywych granicznych dla przekrojów cztero- i pięcio- i więcej punktowych podano w pracy [27].

Następną trudność w opracowaniu ścisłych rozwiązań dla ugięć sprężysto-plastycznych belek sprawia fakt, iż ugięcia te najczęściej są duże i stąd wynika

konieczność rozpatrywania ich jako skończonych, a nie małych, co jak wiadomo jest znacznie bardziej kłopotliwe. Zagadnieniu skończonych ugięć sprężysto – plastycznych poświęcimy jednak osobną pracę i z tego względu nie będziemy go tutaj bliżej analizować.

Dalsze trudności wiążą się z wpływem sił tnących na ugięcie belki. Wpływ ten, zwłaszcza w zakresie sprężystym, na ogół nie jest wielki i stąd najczęściej pomija się go przy rozważeniu ugięć. W pewnych jednak przypadkach, jak np. duża wartość sił tnących, znaczny zasięg strefy plastycznej, może mieć większe znaczenie. Należy pamiętać, że w zakresie sprężysto – plastycznym naprężenia tnące występują ponadto w warunku plastyczności i na tej drodze ich wpływ na ugięcia może wzrosnąć. Równocześnie jednak fakt występowania naprężeń tnących w warunku plastyczności jest powodem rozmaitego traktowania przez różnych autorów wpływu sił poprzecznych na zginanie belek zależnie od przyjętej postaci tego warunku (zob. np. [21] i [32]). W literaturze jak dotąd powyższe zagadnienie jest mało opracowane, można natomiast spotkać próby skonstruowania krzywych granicznych dla jednoczesnego działania sił poprzecznych i momentów przy czystym zginaniu lub nawet powierzchni granicznych przy uwzględnieniu działania sił podłużnych. Wymienić tu przede wszystkim należy takie prace, jak A. R. RZANICYNA, [32], (przekrój prostokątny), K. KLÖPPELA i M. YAMADÁ, [15], (przekrój prostokątny i dwuteowy), M. R. HORNE'A, [9]. Są również znane przybliżone powierzchnie graniczne dla niektórych innych przekrojów.

Następną trudność w uzyskaniu rozwiązań rozważanego problemu stwarza zjawisko odciążenia. Zagadnienie wpływu tego zjawiska nie jest jak dotąd dokładnie opracowane (por. np. [21]). Spośród podanych w literaturze rozwiązań dla ugięć sprężysto – plastycznych w większości przypadków zagadnienie to pomijano zupełnie, w pozostałych natomiast można co najwyżej znaleźć uwagę, iż podane wyniki nie obejmują wpływu odciążenia. Uwzględnienie bowiem tego wpływu w znacznym stopniu komplikuje równania ugięć, gdyż jak to podaje np. A. R. RZANICYN, [32], przebieg odciążenia nie zawsze jest opisany liniową funkcją zmiennej  $z$ , tj. tak jak w zakresie sprężystym. Zależy to zarówno od zmienności działającego momentu zginającego  $M$  oraz siły podłużnej  $N$  jak i od kształtu przekroju poprzecznego belki.

Przy belkach posiadających tylko jedną oś symetrii prostopadłą do osi zginania dodatkowe trudności przy czystym zginaniu sprawia przesuw osi obojętnej wzdłuż wysokości przekroju, natomiast w przypadku przekrojów nie posiadających żadnej osi symetrii — obrót osi obojętnej w trakcie obciążenia. Dodatkowe kłopoty powstają przy rozważeniu belek ciągłych, o czym mogłyby świadczyć prace A. YLINENA, [38], oraz zbiorowa G. KNUDSENA, C. H. YANGA, B. C. JOHNSTONA i L. S. BEEDLE'A, [16].

Wszystkie te i inne nie wymienione tu trudności spowodowały, że jak do tej pory brak dostatecznie ścisłej i wystarczająco praktycznie użytecznej jednolitej teorii zginania belek sprężysto – plastycznych. Stąd często zachodzi konieczność uciekania się do metod przybliżonych lub doświadczalnych. Spośród tych pierwszych warto m.in. wymienić wspomniane poprzednio prace [16] i [17], a także N. W. WALISZWILEGO, [37].

Celem niniejszej pracy jest właśnie przedstawienie pewnej możliwie prostej w użyciu a zarazem odpowiednio dokładnej oraz dostatecznie ogólnej metody przybliżonego obliczania małych ugięć sprężysto-plastycznych belek o dowolnym przekroju posiadającym przynajmniej jedną oś symetrii.

Ideą przewodnią tej metody jest podanie równań ugięcia o postaci niezależnej od kształtu przekroju poprzecznego belki. Cel ten osiąga się przez znalezienie pewnego przekroju zastępczego, który dobiera się tak, aby w konkretnych przypadkach mógł posiadać odpowiednie właściwości możliwie bliskie (podobny rozkład i wartości normalnych naprężeń sprężysto-plastycznych) przekrojowi rozważanej belki, a z drugiej strony aby był odpowiednio dogodny w rachunkach. Takim przekrojem mógłby być np. prostokąt dobierany pod względem proporcji i wielkości jego boków zależnie od tego, jaki przekrój ma aproksymować, dla prostokąta bowiem są znane rozwiązania ścisłe. Jednakże znacznie lepsze do tego celu zarówno ze względu na większą ilość swobodnych parametrów doboru jak i późniejszy prostszy charakter równań, okazują się przekroje składające się z  $n$  półek o powierzchniach skupionych; w dalszym ciągu pracy będziemy je nazywali przekrojami wielopunktowymi. Stanowią one uogólnienie przekrojów dwupunktowych (teoretyczny dwuteownik) zwanych nieraz sandwiczowymi. W pracach [26] i [28] przedstawiono sposób doboru takich przekrojów zastępczych posiadający możliwie dużą liczbę cech optymalności. Zasadniczym postulatem tego sposobu było zrównanie momentów geometrycznych  $S^{(k)}$  rzędu od 0 do  $k$  dla półówek (przy dwuosiowej symetrii) przekroju danego i zastępczego. Dla  $k = 0, 1, 2$  związki te oznaczają równą nośność sprężystą i graniczną przy czystym zginaniu (w przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego) oraz równe pole powierzchni dla obu przekrojów. W pracy [28] podano również w wielu przypadkach analizę dokładności takiego przybliżenia, które zależnie od liczby mas skupionych w przekroju zastępczym może być dowolnie dokładne. Konstrukcję krzywych granicznych w płaszczyźnie  $M, N$  wraz z analizą ich dokładności podano dla takich przekrojów w pracy [27]. Niniejsza praca podaje wprowadzenie ogólnych równań ugięcia dla przekrojów wielopunktowych wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi, sprecyzowanie zakresu stosowalności tych równań ze względu na odciążenie oraz efektywne rozwiązanie ich przy rozmaitych sposobach obciążenia zewnętrznego w oparciu o uproszczenia wynikające z założenia małych ugięć. Dla ilustracji zamieszczono kilka przykładów liczbowych.

Jak wynika ze szczegółowych rozważań, proponowana metoda obliczania ugięć sprężysto-plastycznych belek za pomocą wielopunktowych przekrojów zastępczych prowadzi do linearyzacji różniczkowych równań ugięcia (por. [3.8]). Dość podobny sposób, również oparty na linearyzacji, proponuje N. W. WALISZWILI, [37]. Jednakże wprowadza on tę linearyzację czysto formalnie, wprost na wykresie kąt ugięcia belki – moment zginający  $\{M = M(\varphi)\}$ , a stosowanie metody wymaga zarówno znajomości ścisłego wykresu  $M = M(\varphi)$  jak i ograniczenia się do przypadku czystego zginania i to jedynie przy małych ugięciach sprężysto-plastycznych. Tak więc zarówno ze względu na odpowiednią interpretację fizyczną (wielopunktowe przekroje zastępcze) jak i zakres stosowalności (uwzględnienie wpływu

sił podłużnych, możliwość obliczenia również skończonych ugięć sprężysto – plastycznych) proponowana „metoda jest znacznie ogólniejsza.

Sama myśl rozważania wielopunktowych przekrojów zastępczych jest znana w literaturze. Dla przykładu można by wymienić zastosowanie ich przy rozważaniu zagadnienia pełzania. I tak N. I. HOFF, [8], oraz M. ŻYCKOWSKI, [39], wykorzystują teoretyczny dwuteownik o równych, a J. A. HULT, [10], o nierównych półkach, do rozpatrywania problemu wyboczenia pełzającego; P. P. BIJLAARD, [3], stosuje przekrój wielowarstwowy do rozwiązania zagadnienia pełzania tarczy przy niejednorodnym obciążeniu zewnętrznym; P. G. HODGE i A. SAWCZUK, [7], i inni zastępują zwykle powłoki przez dwuwarstwowe sandwichowe; A. R. RZANICYN, [33], rozważa przekroje dwu – i trzypunktowe przy zagadnieniach stateczności prętów. Jak wspomniano poprzednio podano nawet w literaturze (por. prace [6] i [32]) krzywe graniczne na płaszczyźnie  $M, N$  dla prostych przekrojów wielopunktowych.

Jednakże do tej pory prawdopodobnie nie stosowano zastępczych przekrojów do obliczania ugięć belek w zakresie sprężysto – plastycznym, co stanowi przedmiot obecnej pracy.

## 2. Założenia ogólne

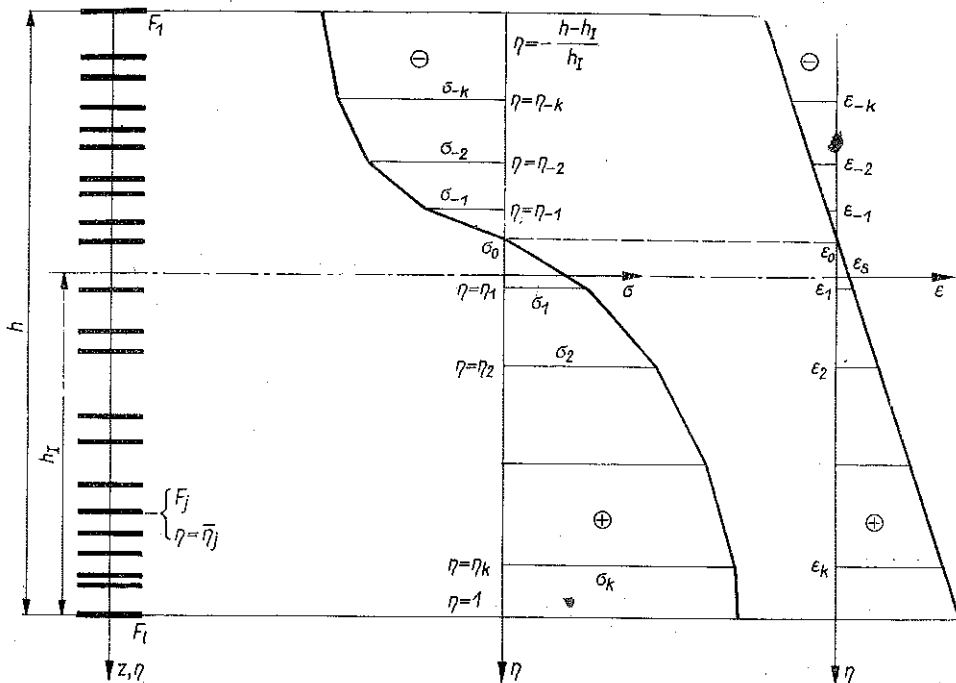
W pracy przyjęto następujące założenia:

- a) oparto się na hipotezie płaskich przekrojów Bernoulliego,
- b) tworzywem belki jest materiał idealnie sprężysto – plastyczny lub materiał ze wzmocnieniem liniowym pojedynczym lub wielokrotnym,
- c) przekrój belki posiada przynajmniej jedną oś symetrii,
- d) stan naprężenia w belce jest jednoosiowy,
- e) zewnętrzne obciążenia działają w płaszczyźnie symetrii przekroju poprzecznego belki,
- f) w zakresie sprężysto – plastycznym nie zachodzi odciążenie,
- g) pomija się wpływ sił poprzecznych na zginanie belki,
- h) pomija się wpływ rozciągliwości osi belki,
- i) przyjmuje się zastępczy przekrój wielopunktowy belki w postaci  $l$  «mas skupionych» rozmieszczonych wzdłuż leżącej w płaszczyźnie zginania osi symetrii przekroju poprzecznego belki.

W dalszym ciągu założenia te dla wygody rachunkowej będą nieraz nieco zawężane, co każdorazowo zostanie podkreślone w tekście. Ogólne zasady doboru wielopunktowych przekrojów zastępczych oraz szczegółowe wzory dla przekrojów cztero-, pięcio- i sześciopunktowych wraz z ich dyskusją i przykładami podano w pracach [26] i [28]. Obecnie wyprowadzimy ogólne równania ugięcia dla przekrojów «wielopunktowych».

### 3. Postać ogólna równania różniczkowego linii ugięcia belki o wielopunktowym przekroju poprzecznym

Wyprowadzimy obecnie ogólne równanie różniczkowe linii ugięcia belki o przekroju wielopunktowym. Wykażemy, że przy przyjętych założeniach zachodzi zawsze liniowy związek pomiędzy krzywizną a momentem zginającym i siłą podłużną.



Rys. 1

Rozważmy w tym celu wielopunktowy przekrój (rys. 1) belki zginanej sprężysto – plastycznie. Załóżmy, że belka wykonana jest z materiału o charakterystyce przedstawionej na rys. 2. Niech  $z$  oznacza współrzędną wzdłuż wysokości przekroju (rys. 1). Wprowadźmy bezwymiarową zmienną

$$(3.1) \quad \eta = \frac{z}{h_I},$$

gdzie  $h_I$  jest odległością osi ciężkości od górnych włókien skrajnych przekroju. Wówczas zgodnie z rys. 1 odkształcenie wyniesie

$$(3.2) \quad \varepsilon = \varepsilon_s + \kappa h_I \eta.$$

We wzorze tym  $\varepsilon_s$  oznacza odkształcenie włókna osi belki, a

$$(3.3) \quad \kappa = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{h} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{h} \varphi'$$

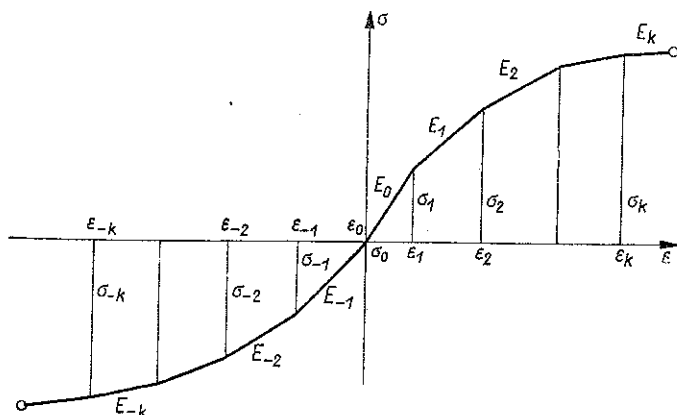
jest krzywizną belki;  $\varphi$  oznacza kąt ugięcia,  $s$  długość łuku belki,  $t = s/h$ , przy czym  $h$  jest wysokością całego przekroju.

Stosownie do rys. 2 naprężenia normalne

$$(3.4) \quad \sigma = \sigma_k + E_k (\varepsilon - \varepsilon_k) \quad \text{dla} \quad \varepsilon_k \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{k+1}$$

przy czym  $k = k_-, k_- + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k_+ - 1$ .

Symbolami  $k_+$  i  $-k_-$  oznaczono ilość odcinków schematycznego wykresu  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (rys. 2) odpowiednio po prawej i lewej stronie punktu przyjętego za «zerowy» (np. dla rys. 2 po stronie rozciągania i ściskania). Punkt «zerowy» najwygodniej



Rys. 2

przyjąć jest w początku układu, jeśli moduły Younga w strefie sprężystej dla ściskania i rozciągania są różne (por. rys. 2). Gdyby jednak moduły te były równe, to za punkt zerowy przyjmować będziemy granicę proporcjonalności przy ściskaniu.

Uwzględniając związek (3.2) otrzymamy

$$(3.5) \quad \sigma = \sigma_k + E_k (\varepsilon_s - \varepsilon_k + \chi h_1 \eta) \quad \text{przy} \quad \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_s}{\chi h_1} \leq \eta \leq \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_s}{\chi h_1}.$$

Dla przekroju wielopunktowego (rys. 1) moment gnący i siła podłużna wyniosą:

$$(3.6) \quad M = h_I \sum_{j=1}^l \sigma_j F_j \bar{\eta}_j, \quad N = \sum_{j=1}^l \sigma_j F_j,$$

gdzie  $\sigma_j$ ,  $F_j$  i  $\bar{\eta}_j$  oznaczają kolejno naprężenia normalne, pole powierzchni odpowiadającej  $j$ -tej «masie skupionej»;  $l$  jest liczbą «mas skupionych» w przekroju. Korzystając ze związków (3.5) mamy

$$(3.7) \quad M = h_I \sum_{k=k_-}^{k_+ - 1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1} - 1} [\sigma_k + E_k (\varepsilon_s - \varepsilon_k + \chi h_1 \bar{\eta}_j)] F_j \bar{\eta}_j,$$

$$N = \sum_{k=k_-}^{k_+ - 1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1} - 1} [\sigma_k + E_k (\varepsilon_s - \varepsilon_k + \chi h_1 \bar{\eta}_j)] F_j,$$

przy  $j = 1, 2, \dots, l$ . Przez  $l_k$  i  $l_{k+1} - 1$  oznaczono tu numery kolejnej pierwszej i ostatniej «masy skupionej», którym przy danym rozkładzie naprężeń normalnych



odpowiadać będzie  $k$ -ty odcinek na rys. 2. Oczywiście zgodnie z rys. 1 i związkami (3.4)  $l_{k-} = 1, l_{k+} - 1 = l$ .

Rozwiązując układ (3.7) względem  $\kappa$  i  $\varepsilon_s$  oraz uwzględniając (3.3) otrzymujemy równanie różniczkowe linii ugięcia belki:

$$(3.8) \quad \kappa = \frac{1}{(A_0 A_2 - A_1^2) h_1^2} [A_0 M - A_1 h_1 N + (A_1 B_0 - A_0 B_1) h_1],$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} A_0 &= \sum_{k=k_-}^{k_+-1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1}-1} E_k F_j, & B_0 &= \sum_{k=k_-}^{k_+-1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1}-1} (\sigma_k - E_k \varepsilon_k) F_j, \\ A_1 &= \sum_{k=k_-}^{k_+-1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1}-1} E_k F_j \bar{\eta}_j, & B_1 &= \sum_{k=k_-}^{k_+-1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1}-1} (\sigma_k - E_k \varepsilon_k) F_j \bar{\eta}_j, \\ A_2 &= \sum_{k=k_-}^{k_+-1} \sum_{j=l_k}^{l_{k+1}-1} E_k F_j \bar{\eta}_j^2, \end{aligned}$$

Równanie (3.8) posiada zasadnicze znaczenie dla zastosowania zastępczych przekrojów wielopunktowych ze względu na uzyskaną liniową zależność krzywizny  $\kappa$  od momentu gnącego  $M$  i siły podłużnej  $N$ . Odnosi się ona oczywiście tylko do tego zakresu, w którym wszystkie masy skupione leżą na ustalonych odcinkach (rys. 1) wykresu naprężeń (wszystkie  $l_k$  są ustalone); geometrycznie równanie (3.8) oznacza aproksymację rzeczywistej funkcji  $\kappa = \kappa(N, M)$  przez łączące się wycinki płaszczyzn w układzie  $N, M, \kappa$ . Zakres stosowalności poszczególnych równań typu (3.8) należy ustalić przez wyprowadzenie równań odpowiednich krzywych granicznych w układzie  $N, M$ ; dla ciała idealnie sprężysto - plastycznego krzywe te podano w pracy [27] (przekroje cztero- i pięciopunktowe).

Tablica 1. Stałe dla ciała idealnie sprężysto - plastycznego

$k$	-1	0	1
$E_k$	0	$E$	0
$\sigma_k$	$-Q_r$	$-Q_r$	$Q_r$
$\varepsilon_k$	$-\infty$	$-\frac{Q_r}{E}$	$\frac{Q_r}{E}$
$l_k$	1	$l_0$	$l_1$
$l_{k+1}-1$	$l_0-1$	$l_1-1$	$l$

W przypadku ciała idealnie sprężysto - plastycznego przyjmiemy mianowicie za punkt zerowy granicę proporcjonalności (plastyczności) przy ściskaniu równą  $-Q_c = -Q_r$ ; mamy wówczas  $k_- = -1, k_+ = 2$  oraz pozostałe wielkości odpowiednio jak w tablicy 1.

Przy tych założeniach równanie linii ugięcia zachowa swą postać ogólną (3.8), natomiast związki (3.9) przyjmą formę

$$(3.10) \quad \begin{aligned} A_0 &= E \sum_{j=l_0}^{l_1-1} F_j, & B_0 &= Q_r \left( \sum_{j=l_1}^l F_j - \sum_{j=1}^{l_0-1} F_j \right), \\ A_1 &= E \sum_{j=l_0}^{l_1-1} F_j \bar{\eta}_j, & B_1 &= Q_r \left( \sum_{j=l_1}^l F_j \bar{\eta}_j - \sum_{j=1}^{l_0-1} F_j \bar{\eta}_j \right), \\ A_2 &= E \sum_{j=l_0}^{l_1-1} F_j \bar{\eta}_j^2. \end{aligned}$$

Wprowadzając bezwymiarowy moment gnący  $m$  i bezwymiarową siłę podłużną  $n$  tak, by  $m = 1$  i  $n = 1$  odpowiadało początkowi odkształceń plastycznych kolejno przy czystym zginaniu i czystym rozciąganiu, mamy

$$(3.11) \quad m = \frac{M}{WQ_r}, \quad n = \frac{N}{(F_I + F_{II})Q_r}.$$

Tu  $W$  oznacza sprężysty wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu,  $F_I$  i  $F_{II}$  pola powierzchni przekroju poprzecznego po obu stronach osi ciężkości,  $Q_r$  granicę plastyczności przy rozciąganiu. Widać stąd, iż równanie (3.8) można ogólnie napisać w wygodnej do dalszych obliczeń postaci

$$(3.12) \quad \kappa h = -\varphi' = \alpha m + \beta n + \gamma,$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  są to stałe zależne od materiału belki, liczby  $l$  mas skupionych w całym przekroju i sposobu rozkładu sprężysto-plastycznych naprężeń normalnych.

W szczególnym przypadku dla czystego zginania (ciało idealnie sprężysto-plastyczne) i podwójnej symetrii przekroju równanie (3.8) przyjmuje nader prostą, ale ważną praktycznie postać

$$(3.13) \quad -\varphi' = 2a^2 \frac{\frac{W}{h} m - \sum_{j=l_1}^l F_j \bar{\eta}_j}{\sum_{j=\frac{l}{2}+1}^{l_1-1} F_j \bar{\eta}_j^2},$$

gdzie  $a^2 = Q_r/E$ ; dla  $l$  nieparzystego w mianowniku sumowanie przebiega od  $l/2 + 1/2$  do  $l_1 - 1$ .

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.14) \quad a_s = 2a^2, \quad l_1 - 1 = q, \quad a_l^q = a_s \frac{W}{h \sum_{j=\frac{l}{2}+1}^q F_j \bar{\eta}_j^2}, \quad \beta_l^q = a_s \frac{\sum_{j=q+1}^l F_j \bar{\eta}_j}{\sum_{j=\frac{l}{2}+1}^q F_j \bar{\eta}_j^2}$$

otrzymujemy

$$(3.15) \quad -\varphi' = \alpha_l^q m - \beta_l^q.$$

Widać stąd, iż w przypadku czystego zginania sprężysto-plastycznego belki, dzięki zastosowaniu jednopunktowego przekroju zastępczego, funkcja  $\varphi' = f(m)$  przedstawiająca równanie ugięcia belki o przekroju danym zostanie zlinearyzowana przez szereg prostych o równaniach (3.15). Proste te można dobrze zinterpretować na płaszczyźnie  $m, \varphi'$ . W tym celu napiszemy równanie (3.15) w postaci

$$(3.16) \quad -[\varphi' - \beta_l^q] = \alpha_s m \frac{1}{\alpha_s/\alpha_l^q}.$$

Można uważać, iż jest to równanie sprężystego ugięcia pręta o krzywiznie pierwotnej  $\varphi'_0 = \beta_l^q$  i o zmniejszonej sztywności  $(\alpha_s/\alpha_l^q)$  – krotnie w porównaniu do rzeczywistej.

W przypadku ciała idealnie sprężysto-plastycznego przy wielu rozwiązaniach — np. przy wyznaczeniu wartości współczynników  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  równania (3.12) — zamiast wyrażenia (3.5) wygodniej jest posługiwać się wzorami uzależniającymi naprężenia normalne nie od  $\varkappa$  i  $\varepsilon_s$ , ale od innych zmiennych. I tak np. (por. [27]) przy jednostronnym uplastycznieniu  $\sigma = Q_r + A(\eta - \eta_{II})$ , a przy dwustronnym

$$\sigma = \frac{2\eta - \eta_{II} - \eta_{II}}{\eta_{II} - \eta_{II}} Q_r,$$

gdzie

$$(3.17) \quad A = Eh_1 \varkappa, \quad \eta_{II} = \frac{Q_r - E\varepsilon_s}{Eh_1 \varkappa}, \quad \eta = -\frac{Q_r + E\varepsilon_s}{Eh_1 \varkappa},$$

przy czym  $\eta_I$  i  $\eta_{II}$  oznaczają odpowiednio położenie rozciąganych i ściskanych włókien w przekroju poprzecznym belki zginanej, w których wystąpią pierwsze odkształcenia plastyczne. Wówczas równanie różniczkowe ugięcia (3.12) można zapisać:

przy jednostronnym uplastycznieniu

$$(3.18) \quad -\varphi' = \frac{A}{E} \frac{h}{h_1},$$

przy dwustronnym uplastycznieniu

$$-\varphi' = \frac{2a^2}{\eta_{II} - \eta_{II}} \frac{h}{h_1},$$

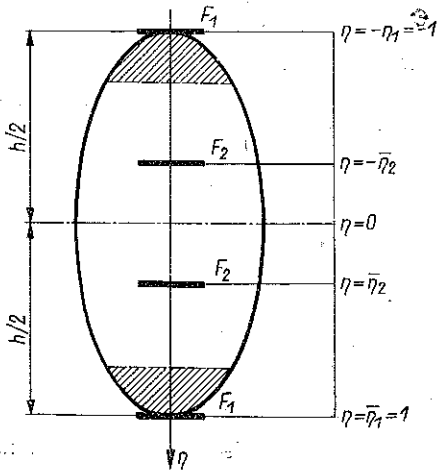
dla przekrojów o podwójnej symetrii  $h/h_1 = 2$ . Oczywiście  $A, \eta_I$  i  $\eta_{II}$  są funkcjami  $n$  i  $m$ .

#### 4. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki idealnie sprężysto-plastycznej przy czteropunktowym przekroju zastępczym

Wyprowadzone w poprzednim punkcie równanie (3.8) lub też (3.12) dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego stanowi ogólną podstawę przedstawionej poniżej metody przybliżonego obliczania ugięć belek o dowolnych przekrojach. Po

sformułowaniu tych równań problem zginania w pierwszym rzędzie będzie polegać na określeniu wartości występujących w nich współczynników (np.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), a następnie na rozwiązaniu ich w zależności od postaci wyrażeń na moment gnący i siłę podłużną jako funkcji obciążeń zewnętrznych. Jednocześnie jednak trzeba każdorazowo ustalić zakres stosowalności tych równań w oparciu o stosowne krzywe graniczne (por. [27]) i przy wykluczeniu zjawiska odciążenia.

Dla określenia współczynników równań ugięcia trzeba na wstępie podać, jakimi przekrojami wielopunktowymi należy aproksymować przekroje dane, czyli sprecyzować tzw. zasady doboru wielopunktowych przekrojów zastępczych. Zagadnieniu temu jest poświęcona praca [26]. Rozważa się tam jednak jedynie belki wykonane z materiału idealnie sprężysto – plastycznego i o przekrojach posiadających dwie osie symetrii. Ograniczenia te (podyktowane chęcią uniknięcia wielu często żmudnych rachunków) jedynie pozornie zawężają stosowalność proponowanej przez nas metody. Nie wpływają bowiem na jakościową, a jedynie na ilościową stronę zagadnienia (wartości odpowiednich współczynników równań ugięcia). Przy tym, jak wynika ze szczegółowych rozważań, sformułowane w pracy [26] zasady doboru łatwo dają się uogólnić na przypadek odpowiadający pierwotnym założeniom niniejszej pracy.



Rys. 3

Biorąc powyższe pod uwagę w dalszym ciągu bez uszczerbku ogólności zagadnienia ograniczymy się do rozważania belek idealnie sprężysto – plastycznych o dwóch osiach symetrii przekroju poprzecznego aproksymowanego przez czteropunktowy przekrój zastępczy, który, jak to wynika z analizy przeprowadzonej

w pracy [26], okazuje się praktycznie najkorzystniejszy. I tak weźmy dla przykładu przekrój jak na rys. 3. Na podstawie [26] mamy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F_1 &= 4 \frac{IF - S^2}{h^2 F - 4Sh + 4I}, & \bar{\eta}_1 &= 1, \\ F_2 &= \frac{(Fh - 2S)^2}{h^2 F - 4Sh + 4I}, & \bar{\eta}_2 &= \frac{2Sh - 2I}{hFh - 2S}, \end{aligned}$$

gdzie znaczenie symboli  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\eta_1$  i  $\eta_2$  jest podane na rys. 3;  $F$ ,  $S$  i  $I$  oznaczają odpowiednio pole powierzchni, moment statyczny i moment bezwładności połowy przekroju, przy czym momenty liczone są względem osi ciężkości całego przekroju.

Wobec symetrii przekroju wprowadzenie oznaczeń  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $\eta_3$  i  $\eta_4$  nie jest potrzebne; dogodne tu oznaczenia  $F_1$  i  $F_2$  odbiegają trochę od stosowanej poprzednio numeracji o charakterze ogólnym.

Jak wynika z rozważań przeprowadzonych w pracy [27] dla czteropunktowego przekroju zastępczego równania (3.12) można zapisać w postaci (w zakresie sprężystym, przy jednostronnym uplastycznieniu, przy dwustronnym uplastycznieniu):

$$(4.2) \quad -\varphi' = \alpha m, \quad -\varphi' = \alpha m + \beta n - \beta, \quad -\varphi' = \alpha m - \beta,$$

gdzie wartości współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  zestawiono w tablicy 2, przy czym

$$(4.3) \quad \frac{F_1}{2F} = \nu_1, \quad \frac{F_2}{2F} = \nu_2, \quad \frac{4I}{Fh^2} = \mu.$$

Tablica 2. Zestawienie współczynników  $\alpha$  i  $\beta$

Zakres		$\alpha$	$\beta$
sprężysty	⊙	$2a^2$	0
j jednostronne uplastycznienie	①	$\frac{2(1-\nu_2)\mu}{\nu_2(\bar{\eta}_2^2+\mu)} a^2$	$\frac{2\nu_1}{\nu_2(\bar{\eta}_2^2+\mu)} a^2$
j jednostronne uplastycznienie	②	$\frac{4\mu}{\mu-4(\nu_2\bar{\eta}_2+\nu_1)^2} a^2$	$\frac{8(\nu_2\bar{\eta}_2+\nu_1)}{\mu-4(\nu_2\bar{\eta}_2+\nu_1)^2} a^2$
dwustronne uplastycznienie	③	$\frac{\mu}{\nu_2\bar{\eta}_2^2} a^2$	$\frac{2\nu_1}{\nu_2\bar{\eta}_2^2} a^2$

Zestawione w tablicy 2 wartości współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  zostały obliczone dla dodatnich  $m$  i  $n$  (pierwsza ćwiartka płaszczyzny  $m, n$ ). W innych ćwiartkach, jak to wynika ze szczegółowego rozważenia równań (3.9), niektóre współczynniki zmieniają znak, tak że ogólnie można napisać

$$(4.2.1) \quad -\varphi' = \alpha m + \beta \operatorname{sign}(mn) n - \beta \operatorname{sign} m, \quad -\varphi' = \alpha m - \beta \operatorname{sign} m$$

odpowiednio dla jedno- i dwustronnego uplastycznienia.

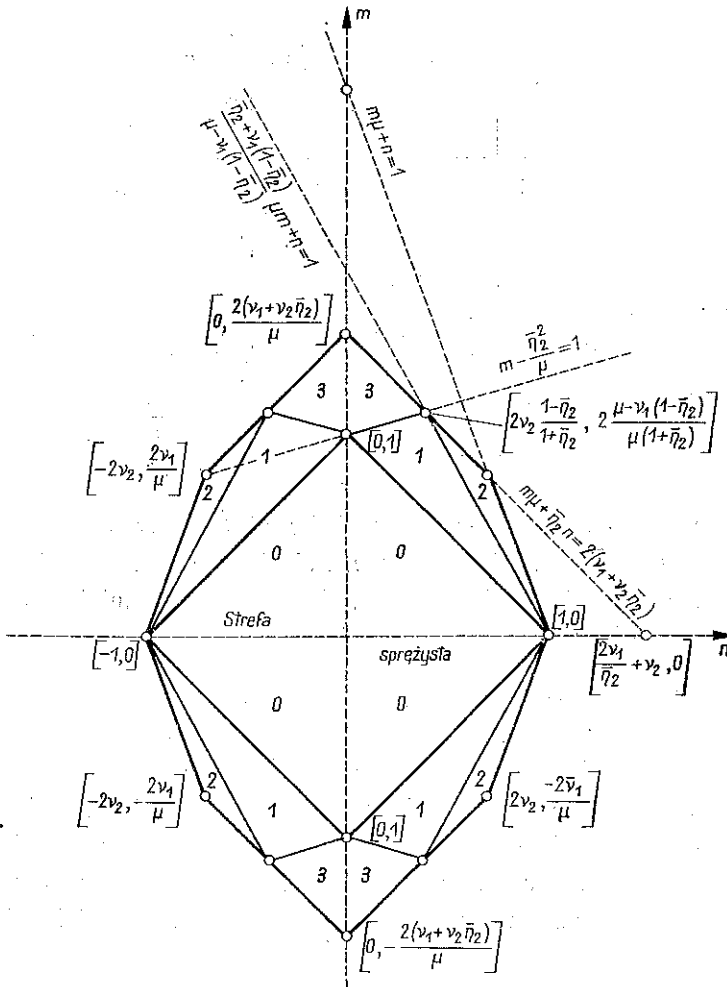
W pracy [27] wyprowadzono również podane tu na rys. 4 równania krzywych granicznych dla przekroju czteropunktowego oraz związki ograniczające stosowność równań (4.2) ze względu na odciążenie. W ogólnym przypadku, tj. przy dowolnych obciążeniach zewnętrznych, związki te dają się napisać jako nierówności różniczkowe:

$$(4.4) \quad \sum_i \left( \frac{\partial n}{\partial P_i} + \frac{1}{a} \frac{\partial m}{\partial P_i} \right) dP_i + \sum_i \left( \frac{\partial n}{\partial q_i} + \frac{1}{a} \frac{\partial m}{\partial q_i} \right) dq_i + \\ + \sum_i \left( \frac{\partial n}{\partial M_i} + \frac{1}{a} \frac{\partial m}{\partial M_i} \right) dM_i \geq 0,$$

gdzie  $a$  oznacza pewną stałą zależną od zakresu sprężysto – plastycznego (por. [27]), a  $P_i$ ,  $q_i$  i  $M_i$  zewnętrzną  $i$ -tą siłą skupioną, obciążenie ciągłe i moment skupiony. Przy obciążeniu prostym (proporcjonalnym) związek (4.4) przyjmuje postać

$$(4.5) \quad \frac{dn}{d\lambda} + \frac{1}{a} \frac{dm}{d\lambda} \geq 0,$$

gdzie  $\lambda$  jest zależnym od czasu i wspólnym dla wszystkich obciążeń współczynnikiem wzrostu.



Rys. 4

W ten sposób równanie (4.2) oraz tablica 1 i rys. 4 wystarczają do ułożenia przybliżonych równań różniczkowych sprężysto – plastycznych ugięć belek o dowolnym

przekroju. Dla przykładu podano poniżej wartości współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  dla przekroju prostokątnego i kołowego (tablica 3).

Tablica 3. Zestawienie współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  dla przekroju prostokątnego i kołowego

Zakres	$\alpha$		$\beta$	
	■	●	■	●
①	$2a^2$	$2a^2$	0	0
②	$3,5a^2$	$3,2340a^2$	$1,5a^2$	$1,2340a^2$
③	$16a^2$	$14,3113a^2$	$24a^2$	$24,2956a^2$
④	$8a^2$	$6,5939a^2$	$6a^2$	$4,5939a^2$

### 5. Sformułowanie ogólnych wzorów na momenty zginające i siły podłużne przy pewnych typach obciążenia zewnętrznego

Jakkolwiek obecna praca poświęcona jest w zasadzie małym ugięciom belek, to jednak podamy naprzód ogólne wzory na momenty gnące i siły podłużne dla dowolnych ugięć. Podejście takie ułatwi późniejsze porównanie analizy ugięć skończonych i małych.

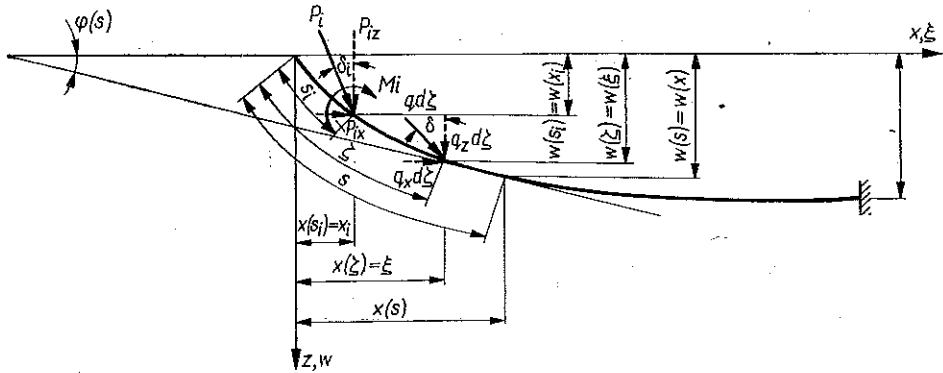
Zauważmy na wstępie, iż wyprowadzone powyżej równanie (3.12) posiada liniowy charakter, ale tylko w układzie  $m, n, \varphi'$ . Ponieważ jednak bezwymiarowy moment gnący  $m$  i bezwymiarowa siła podłużna  $n$  mogą w różny sposób zależeć od obciążeń zewnętrznych, otrzymujemy tu cały szereg typów różniczkowych równań ugięcia w układzie  $t, \varphi$ .

Ogólna postać wzorów na  $m$  i  $n$  jest również w znacznej mierze zależna od sposobu zachowania się obciążeń zewnętrznych po ugięciu belki. I tak np. przy obciążeniu ciężarem własnym przyjmujemy, iż siły przesuwają się wzdłuż prostej działania nie zmieniając swego kierunku, przy obciążeniu wiatrem uważamy, że siły działają normalnie do powierzchni ciała, obciążenie śniegiem natomiast zachowuje stałą wartość sił liczonych na rzut poziomy konstrukcji.

W fizyce rozważa się też i inne sposoby działania sił np. w polu centralnym; stąd też przystępując do sformułowania ogólnych formuł na momenty zginające i siły podłużne należałoby rozpatrzyć szereg takich jak przytoczone wyżej lub podobnych przypadków możliwego zachowania się sił. Tu ograniczymy się do rozważenia dwóch przypadków występujących najczęściej w zastosowaniach; przypadki różnić się będą pomiędzy sobą zresztą tylko przy obciążeniach ciągłych. Pierwszy z nich odpowiada działaniu sił w polu grawitacyjnym (ciężar własny), a więc związanych z jednostką długości łuku belki (dla obciążeń ciągłych) i zachowujących swój pierwotny kierunek działania.

W drugim natomiast przypadku siły nie zmieniają swego pierwotnego kierunku działania w przestrzeni, są jednak liczone (przy obciążeniach ciągłych) na jednostkę długości rzutu poziomego belki. Rozważymy oba przypadki łącznie traktując ogólnie  $q = q[\xi, \varphi(\xi)]$ , gdzie  $\xi$  jest mierzona wzdłuż łuku zmienną całkowania,

Przy przyjętych na rys. 5 oznaczeniach w pierwszym przypadku  $q$  nie zależy w sposób jawny od  $\varphi$  i stąd



Rys. 5

$$(5.1) \quad q = q(\zeta),$$

natomiast w drugim

$$(5.2) \quad q = \frac{\bar{q} [\xi(\zeta)] \cos [\varphi(\zeta) - \delta]}{\cos \delta},$$

przy czym  $q(\zeta)$  jest liczone na jednostkę długości łuku, a  $\bar{q} [\xi(\zeta)]$  na jednostkę długości osi  $x$ .

Przyjmijmy ponadto, iż na belkę (rys. 5) działają też siły skupione  $P_i$  skierowane pod kątem  $\delta_i$  do pionu oraz momenty skupione  $M_i$ . Zgodnie z rys. 5 możemy więc napisać:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} q_x(\zeta, \varphi) &= q(\zeta, \varphi) \sin \delta, \\ q_z(\zeta, \varphi) &= q(\zeta, \varphi) \cos \delta, \\ P_{ix} &= P_i \sin \delta_i, \\ P_{iz} &= P_i \cos \delta_i. \end{aligned}$$

Przy takich założeniach bezwymiarowy moment gnący i bezwymiarową siłę podłużną  $n$  można przedstawić w postaci:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} m &= \frac{1}{WQ_r} \left( \int_0^s q(\zeta, \varphi) \{ -[x(s) - x(\zeta)] \cos \delta + [w(s) - w(\zeta)] \sin \delta \} d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \{ -[x(s) - x(s_i)] \cos \delta_i + [w(s) - w(s_i)] \sin \delta_i \} + \sum_{i=1}^{k_2} M_i \right), \\ n &= -\frac{1}{2FQ_r} \left\{ \left[ \int_0^s q(\zeta, \varphi) \cos \delta d\zeta + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \cos \delta_i \right] \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_0^s q(\zeta, \varphi) \sin \delta d\zeta + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \sin \delta_i \right] \cos \varphi \right\}, \end{aligned}$$

gdzie  $k_1$  i  $k_2$  oznaczają kolejno ilość sił i momentów skupionych, działających po lewej stronie rozpatrywanego przekroju.



W naszych rozważaniach (rys. 5) posługujemy się dwoma układami współrzędnych: kartezjańskim  $x, w$  oraz układem  $s, \varphi$ . Związki transformacyjne pomiędzy tymi układami mają postać różniczkową:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d\xi}{d\zeta} = \cos \varphi, \quad \frac{dw}{ds} = \sin \varphi$$

(5.5) lub całkową

$$x = \int_0^s \cos \varphi \, d\zeta, \quad w = \int_0^s \sin \varphi \, d\zeta.$$

Jeśli na belce zginanej ugięcie przedstawione jest przez szereg równań słusznych odpowiednio dla kolejnych odcinków tej belki, to np. dla  $k$ -tego przedziału wygodnie jest wzory (5.5) zapisać w postaci

$$x_k = x_{k0} + \int_{s_{k0}}^s \cos \varphi_k \, d\zeta, \tag{5.5.1}$$

$$w_k = w_{k0} + \int_{s_{k0}}^s \sin \varphi_k \, d\zeta,$$

gdzie

$$x_{k0} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{s_{j0}}^{s_{j+1,0}} \cos \varphi_j \, d\zeta, \quad w_{k0} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{s_{j0}}^{s_{j+1,0}} \sin \varphi_j \, d\zeta$$

przy  $s_{10} = 0$ .

Korzystając z (5.5) wzór (5.4) można zapisać w postaci nieco dogodniejszej do obliczeń

$$\begin{aligned} m = & \frac{1}{WQ_r} \left( \int_0^x \frac{q}{\cos \varphi} \{ -(x - \xi) \cos \delta + [v(x) - w(\xi)] \sin \delta \} d\xi + \right. \\ (5.6) \quad & \left. + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \{ -(x - x_i) \cos \delta_i + [w(x) - w(x_i)] \sin \delta_i \} + \sum_{i=1}^{k_2} M_i \right), \\ n = & -\frac{1}{2FQ_r} \left\{ \left[ \int_0^x \frac{q}{\cos \varphi} \cos \delta d\xi + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \cos \delta_i \right] \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \left[ \int_0^x \frac{q}{\cos \varphi} \sin \delta d\xi + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \sin \delta_i \right] \cos \varphi \right\}. \end{aligned}$$

gdzie wobec (5.5)

$$q = q \{ \zeta [\xi, \varphi(\xi)] \}.$$

Ze wzorów tych w szczególnym przypadku przy  $\delta = 0$  otrzymamy dla  $q(\zeta) = \text{const}$  przypadek obciążenia ciężarem własnym, a przy  $\bar{q}(\xi) = \text{const}$  obciążenie śniegiem.

Wyrażenia (5.6) stanowią wraz z równaniami (3.12) (dla czteropunktowego przekroju będą to równania (4.2), rys. 4 i tablica 2) ściśle postawienie problemu sprę-

żysto – plastycznego zginania belek o zastępczych przekrojach wielopunktowych przy przyjętych typach obciążenia zewnętrznego. Z postaci tych wzorów wynika, iż w ogólnym przypadku wspomniany problem sprowadza się do rozwiązania odpowiednich równań różniczkowo – całkowych różnych typów. W pewnych przypadkach dają się one rozwiązać ściśle (tj. na tle teorii ugięć skończonych), w innych tylko przy pewnych założeniach upraszczających (np. na gruncie małych ugięć) lub też w sposób zupełnie przybliżony.

## 6. Małe ugięcia sprężysto–plastyczne belek o czteropunktowym przekroju zastępczym

**6.1. Założenia upraszczające.** Postawiony powyżej w sposób ogólny problem zginania belek w zakresie sprężysto–plastycznym w wielu przypadkach znacznie się upraszcza, jeśli założyć, iż ugięcia są bardzo małe w porównaniu z wymiarem długości belki. Wówczas można uważać, że

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &\approx \varphi, & \sin(\varphi - \delta) &\approx \varphi \cos \delta - \sin \delta, \\ \cos \varphi &\approx 1, & \cos(\varphi - \delta) &\approx \cos \delta + \varphi \sin \delta \end{aligned}$$

oraz na podstawie (5.5) i (5.5.1) i przy przyjęciu  $t = s/h$

$$x \approx s = ht,$$

$$(6.2) \quad w \approx \int_0^s \varphi d\zeta = h \int_0^t \varphi d\xi; \quad \text{dla } k\text{-tego przedziału}$$

$$w_k = w_{k0} + h \int_{t_{k0}}^t \varphi_k d\xi, \quad \text{gdzie} \quad w_{k0} = h \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j0}}^{t_{j+1,0}} \varphi_j d\xi, \quad \text{a } t_{10} = 0.$$

Przy powyższych założeniach upraszczających rozważymy obecnie te przypadki obciążenia zewnętrznego, dla których problem ugięć sprężysto – plastycznych da się efektywnie rozwiązać, tj. takie, przy których możemy znaleźć całki odpowiednich równań różniczkowo – całkowych.

**6.2. Dowolne obciążenie prostopadłe do osi belki nieodkształconej i momenty skupione.** Przy takim założeniu  $\delta = 0$  i na podstawie (6.1) i (6.2) ze wzorów (5.6) zarówno dla (5.1) jak i (5.2) otrzymujemy jednakowo

$$(6.3) \quad \begin{aligned} m &= \frac{1}{WQ_r} \left[ -h^2 \int_0^t q(\xi) (t - \xi) d\xi - h \sum_{i=1}^{k_1} P_i (t - t_i) + \sum_{i=1}^{k_0} M_i \right] = f_1(t), \\ n &= -\frac{\varphi}{2FQ_r} \left[ h \int_0^t q(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \right] = \varphi f_2(t), \end{aligned}$$

gdzie  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  są znanymi funkcjami obciążeń zewnętrznych. Wówczas równania przyjmą postać odpowiednio przy jednostronnym uplastycznieniu, przy dwustronnym uplastycznieniu, oraz w zakresie sprężystym:

$$\begin{aligned}
 & -\varphi' = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \varphi - \beta, \\
 (6.4) \quad & -\varphi' = \alpha f_1(t) - \beta, \\
 & -\varphi' = \alpha f_1(t).
 \end{aligned}$$

W równaniu tym podobnie jak i wszystkich następnym przyjęto znaki współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  odpowiadające dodatnim  $m$  i  $n$ . Gdyby założenie to nie było spełnione, należy dobrać znaki według (4.2.1). Przyjmijemy

$$(6.5) \quad \beta f_2(t) = a(t), \quad -\beta + \alpha f_1(t) = b(t), \quad \alpha f_1(t) = b(t).$$

Założenie (6.5)<sub>2</sub> odnosi się do zakresu sprężysto-plastycznego, a założenie (6.5)<sub>3</sub> do zakresu sprężystego. Przy tych założeniach otrzymamy równania różniczkowe zwyczajne dla  $\varphi$ :

$$(6.6.1) \quad \varphi' + a(t) \varphi + b(t) = 0 \quad (\text{I})$$

oraz

$$(6.6.2) \quad \varphi' + b(t) = 0. \quad (\text{II})$$

W dalszym ciągu przez I będziemy oznaczać związki odnoszące się do jednostronnego uplastycznienia (zakres ① i ②, rys. 4), a przez II związki dotyczące dwustronnego uplastycznienia i zakresu sprężystego (③ i ④). Rozwiązaniami równań (6.6) są funkcje

$$(6.7) \quad \varphi = \left[ C - \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt \right] e^{-\int a(t) dt} \quad (\text{I})$$

$$\varphi = C - \int b(t) dt, \quad (\text{II})$$

Stąd na podstawie (6.2) ugięcia odpowiednio wynoszą

$$(6.8) \quad w = h \int_0^t \left[ C - \int e^{\int a(\xi) d\xi} b(\xi) d\xi \right] e^{-\int a(\xi) d\xi} d\xi, \quad (\text{I})$$

$$w = h \int_0^t \left[ C - \int b(\xi) d\xi \right] d\xi. \quad (\text{II})$$

W «klasycznych» rozwiązaniach metody małych ugięć zazwyczaj pomija się wpływ siły podłużnej przy działaniu sił prostopadłych do osi belki. Gdyby i tu przyjąć podobne uproszczenie, to otrzymalibyśmy dla ugięć  $w$  i kątów ugięcia  $\varphi$  bardzo proste rozwiązania typu II. Przy najczęściej spotykanych typach obciążeń będą to wielomiany zmiennej  $t$ . I tak w przypadku działania jedynie sił skupionych dla  $\varphi$  otrzymujemy wielomiany stopnia drugiego, przy obciążeniu ciągłym  $q = \text{const}$  stopnia trzeciego itd., a dla ugięć odpowiednio o stopień wyżej. Tymczasem w rozwiązaniach typu I dla  $\varphi$  i  $w$  pojawiają się funkcje typu  $e^{at}$  przy siłach skupionych i  $e^{-t^2} \int e^{\xi^2} d\xi$  przy obciążeniach ciągłych. Dla sił skupionych mamy bowiem

$$a(t) = a_0, \quad b(t) = b_0 t + b_1,$$

gdzie  $a_0$ ,  $b_0$  i  $b_1$  są stałymi, a wtedy z (6.7) mamy

$$\varphi = Ce^{-a_0 t} - \frac{1}{a_0^2} [b_0 (a_0 t - 1) + a_0 b_1], \quad (I)$$

(6.9)

$$\varphi = C - \frac{b_0 t^2}{2} - b_1 t \quad (II)$$

oraz dla  $k$ -tego przedziału na podstawie (6.2) i (6.8)

$$w_k = w_{k0} + h \left\{ -\frac{C}{a_0} e^{-a_0 \xi} - \frac{1}{a_0^2} \left[ b_0 \left( a_0 \frac{\xi^2}{2} - \xi \right) + a_0 b_1 \xi \right] \right\}_{t_{k0}}, \quad (I)$$

(6.10)

$$w_k = w_{k0} + h \left\{ C\xi - \frac{b_0 \xi^3}{6} - \frac{b_1 \xi^2}{2} \right\}_{t_{k0}} \quad (II)$$

Natomiast przy obciążeniu ciągłym  $q = \text{const}$  mamy

$$a(t) = a_0 t + a_1,$$

$$b(t) = b_0 t^2 + b_1 t + b_2,$$

gdzie  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  i  $b_2$  są to stałe. Otrzymamy stąd równania

$$\varphi = Ce^{-\left(\frac{a_0}{2} t^2 + a_1 t\right)} - \frac{1}{a_0} \left( b_0 t - \frac{a_1 b_0}{a_0} + b_1 \right) - \sqrt{\frac{2}{a_0}} \left[ \frac{a_1^2 b_0}{a_0^2} - \frac{a_1 b_1 + b_0}{a_0} + b_2 \right] V \left( \frac{a_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \right), \quad (I)$$

(6.11)

$$\varphi = C - \frac{b_0 t^3}{3} - \frac{b_1 t^2}{2} - b_2 t; \quad (II)$$

$$w_k = w_{k0} + \frac{hC\pi e^{\frac{a_1^2}{2a_0}}}{\sqrt{2a_0}} \left[ \Phi \left( \frac{a_0 t_{k0}}{\sqrt{2}} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \right) - \Phi \left( \frac{a_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \right) \right] + \frac{ht}{a_0} \left[ \frac{b_0 t}{2} - \frac{a_1 b_0}{a_0} + b_1 \right] - h \sqrt{\frac{2}{a_0}} \left[ \frac{a_1^2 b_0}{a_0^2} - \frac{a_1 b_1 + b_0}{a_0} + b_2 \right] \times \int_{t_{k0}}^t V \left( \frac{a_0 \xi}{\sqrt{2}} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \right) d\xi, \quad (I)$$

(6.12)

$$w_k = w_{k0} + h \left[ C\xi - \frac{b_0 \xi^4}{12} - \frac{b_1 \xi^3}{6} - \frac{b_2 \xi^2}{2} \right]_{t_{k0}}, \quad (II)$$

przy czym

$$V(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{u^2} du, \quad \Phi(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-u^2} du$$

(por. K. A. KARPOW, [14]), a  $C$  jest stałą całkowania.

Już nawet z przytoczonych powyżej przykładów widać wyraźnie, iż pominięcie wpływu sił podłużnych przy obciążeniu prostopadłym do osi belki zasadniczo upraszcza obliczenie efektywnych wyrażeń dla  $\varphi$  i  $w$ , zwłaszcza ze względu na konieczność «zszywania» rozwiązań dla różnych zakresów (rys. 4).

6.3. Siły skupione ukośnie działające i momenty skupione. W tym przypadku związki (5.6) przyjmują postać:

$$(6.13) \quad m = \frac{1}{WQ_r} \left( \sum_{i=1}^{k_1} P_i \{ -(t-t_i)h \cos \delta_i + [w(ht) - w(ht_i)] \sin \delta_i + \sum_{i=1}^{k_2} M_i \right),$$

$$n = -\frac{1}{2FQ_r} \left( \varphi \sum_{i=1}^{k_1} P_i \cos \delta_i + \sum_{i=1}^{k_1} P_i \sin \delta_i \right).$$

Dla przejścia z formy różniczkowo - całkowej równań na formę różniczkową zróżniczkujemy względem  $t$  związki (6.13) oraz równania (4.2); stąd

$$(6.14) \quad \frac{dm}{dt} = \frac{h}{WQ_r} \sum_{i=1}^{k_1} P_i (-\cos \delta_i + \varphi \sin \delta_i),$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\varphi'}{2FQ_r} \sum_{i=1}^{k_1} P_i \cos \delta_i$$

oraz

$$(6.15) \quad \varphi'' = -\alpha \frac{dm}{dt} - \beta \frac{dn}{dt}, \tag{I}$$

$$\varphi'' = -\alpha \frac{dm}{dt}. \tag{II}$$

Oznaczmy

$$a = \frac{h}{WQ_r} \sum_{i=1}^{k_1} P_i \cos \delta_i, \quad b = \frac{h}{WQ_r} \sum_{i=1}^{k_1} P_i \sin \delta_i, \quad c = \frac{h}{2FQ_r} \sum_{i=1}^{k_1} P_i \cos \delta_i;$$

wówczas równania (6.15) przyjmą postać

$$(6.16) \quad \varphi'' - c\beta\varphi' + ba\varphi = aa, \tag{I}$$

$$\varphi'' + ba\varphi = aa. \tag{II}$$

Rozwiązaniem tych równań są funkcje

$$(6.17) \quad \varphi = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{a}{b};$$

gdzie

$$(6.18) \quad r_{1,2} = \frac{1}{2} (c\beta \pm \sqrt{c^2\beta^2 - 4ba}), \tag{I}$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-ba}. \tag{II}$$

są pierwiastkami odpowiednich równań charakterystycznych, a  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi całkowania. Stąd dalej na podstawie (6.2) mamy

$$(6.19) \quad w_k = w_{k0} + h \left[ \frac{C_1}{r_1} e^{r_1 \xi} + \frac{C_2}{r_2} e^{r_2 \xi} + \frac{a}{b} \xi \right]_{t_{k0}}^t$$

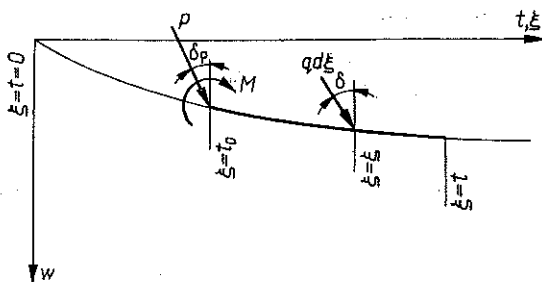
6.4. Obciążenie ciągłe  $q = \text{const}$  działające pod kątem  $\delta = \text{const}$ , liczone na jednostkę długości łuku. W rozważanym przypadku związki (5.6) można zapisać (rys. 6) w postaci

$$(6.20) \quad m = \frac{1}{WQ_r} \left( \int_{t_0}^t qh^2 \left\{ -(t-\xi) \cos \delta + \frac{1}{h} [w(ht) - w(h\xi)] \sin \delta \right\} d\xi + \right. \\ \left. + P \{ -h(t-t_0) \cos \delta_p + [w(ht) - w(ht_0)] \sin \delta_p \} + M \right), \\ n = -\frac{1}{2FQ_r} \left[ \varphi \left( \int_{t_0}^t qh \cos \delta d\xi + P \cos \delta_p \right) + \left( \int_{t_0}^t qh \sin \delta d\xi + P \sin \delta_p \right) \right],$$

gdzie zgodnie z rys. 6  $P$  i  $M$  oznaczają wypadkową siłę skupioną i moment skupiony pochodzący od części belki na lewo od lewego końca  $t_0$  rozpatrywanego przedziału. Aby jak poprzednio przejść do czysto różniczkowych równań ugięcia trzeba zróżniczkować wyrażenia (6.20) względem  $t$ , a następnie podstawić do (6.15). Otrzymamy stąd równania

kować wyrażenia (6.20) względem  $t$ , a następnie podstawić do (6.15). Otrzymamy stąd równania

$$(6.21) \quad \begin{aligned} \varphi'' - \varphi'(at+b) + \\ + \varphi(ct+d) &= et+f, \quad (\text{I}) \\ \varphi'' + \varphi(ct+d_1) &= \\ &= et+f_1, \quad (\text{II}) \end{aligned}$$



Rys. 6

gdzie

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\beta}{2FQ_r} qh \cos \delta, \\ b &= +\frac{\beta}{2FQ_r} (qht_0 \cos \delta - P \cos \delta_p), \\ c &= \frac{a}{WQ_r} qh^2 \sin \delta, \\ d &= \frac{a}{WQ_r} (-qh^2 t_0 \sin \delta + Ph \sin \delta_p) - \frac{\beta}{2FQ_r} qh \cos \delta, \\ e &= \frac{a}{WQ_r} qh^2 \cos \delta, \end{aligned}$$

$$f = \frac{\alpha}{WQ_r} (-qh^2 t_0 \cos \delta + Ph \cos \delta_p) + \frac{\beta}{2FQ_r} qh \sin \delta,$$

$$d_1 = \frac{\alpha}{WQ_r} (-qh^2 t_0 \sin \delta + Ph \sin \delta_p),$$

$$f_1 = \frac{\alpha}{WQ_r} (-qh^2 t_0 \cos \delta + Ph \cos \delta_p).$$

Obecnie podamy rozwiązania równań (6.21).

I. Równanie jednorodne (6.21.I) przez podstawienie

$$(6.22) \quad \varphi(t) = \eta(\xi) e^{-\frac{c}{a} t},$$

gdzie

$$\xi = \sqrt{|a|} \left( t + \frac{ab - 2c}{a^2} \right) = \sqrt{|a|} (t + \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{ab - 2c}{a^2},$$

sprowadza się do postaci

$$(6.23) \quad \eta'' \pm \eta' \xi \pm a^{-3} (c^2 - abc + a^2 d) \eta = 0,$$

gdzie plus odnosi się do  $a > 0$  oraz minus do  $a < 0$ .

Niech  $A = \pm 1$ ,  $B = \pm a^{-3} (c^2 - abc + a^2 d)$ . Wtedy mamy do czynienia z równaniem hipergeometrycznym konfluentnym (zdegenerowanym), którego rozwiązanie podaje E. KAMKE, [13], s. 416, wzór (2.52) oraz s. 475, wzór (2.273,10):

$$(6.24) \quad \eta = \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4} A \xi^2} \eta \left( \frac{B}{2A} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{A}{2} \xi^2 \right),$$

gdzie

$$\eta(k, m, u) = C_1 M_{k, m}(u) + C_2 M_{k, -m}(u),$$

przy czym

$$M_{k, m}(u) = u^{\frac{1}{2} + m} e^{-\frac{1}{2} u} {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} + m - k, 2m + 1, u \right),$$

(6.25) a

$${}_1F_1(a, b, u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) u^n}{b(b+1) \dots (b+n-1) n!}$$

jest funkcją konfluentną hipergeometryczną.

Na tej podstawie można podać, iż w naszym przypadku

$$(6.26) \quad \eta = C'_1 \xi e^{-\frac{A}{2} \xi^2} {}_1F_1 \left( 1 - \frac{B}{2A}, \frac{3}{2}, \frac{A}{2} \xi^2 \right) + C'_2 e^{-\frac{A}{2} \xi^2} {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{B}{2A}, \frac{1}{2}, \frac{A}{2} \xi^2 \right).$$

Stąd mamy

$$(6.27) \quad \varphi(t) = C_1(t+\varepsilon) e^{-\frac{c}{a}t - \frac{A}{2}|a|(t+\varepsilon)^2} {}_1F_1\left(1 - \frac{B}{2A}, \frac{3}{2}, \frac{A}{2}|a|(t+\varepsilon)^2\right) + \\ + C_2 e^{-\frac{c}{a}t - \frac{A}{2}|a|(t+\varepsilon)^2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2A}, \frac{1}{2}, \frac{A}{2}|a|(t+\varepsilon)^2\right).$$

Do rozwiązania tego trzeba dodać całkę szczególną równania niejednorodnego (6.21.I) np. w postaci

$$(6.28) \quad \varphi_0(t) = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1(et-f)}{W(t)} dt - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2(et+f)}{W(t)} dt,$$

gdzie

$$W(t) = \varphi_1(t) \varphi_2'(t) - \varphi_1'(t) \varphi_2(t),$$

przy czym  $\varphi_1(t)$  i  $\varphi_2(t)$  są to podane wyżej całki szczególne równania jednorodnego (6.21.I).

II. Równanie jednorodne (6.21.II) przez podstawienie

$$(6.29) \quad \varphi(t) = \eta(\xi), \quad t = \xi \sqrt[3]{c} - \frac{d_1}{\sqrt[3]{c}}$$

przechodzi w

$$\eta'' + \xi \eta = -(A\xi + B),$$

gdzie

$$A = -\frac{e}{c}, \quad B = \frac{ed_1}{c} - f_1.$$

Równanie to daje się sprowadzić do równania Bessela [por. KAMKE, [13], (2.162.10)], a jego rozwiązanie daje się zapisać w postaci

$$(6.30) \quad \eta(\xi) = \sqrt{\xi} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) + \eta_0(\xi),$$

gdzie

$$Z_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) = C_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) + C_2 Y_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right),$$

a  $\eta_0(\xi)$  jest całką szczególną równania niejednorodnego. Ponieważ wrońskian

$$(6.31) \quad W(\xi) = \left[ \sqrt{\xi} J_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \right] \left[ \sqrt{\xi} Y_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \right]' - \\ - \left[ \sqrt{\xi} Y_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \right] \left[ \sqrt{\xi} J_{1/3}\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \right]' = \frac{3}{\pi \sqrt{\xi}},$$



to mamy stąd

$$(6.32) \quad \eta_0(\xi) = \frac{\pi \sqrt{\xi}}{3} J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \int \xi (A\xi + B) Y_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) d\xi - \\ - \frac{\pi \sqrt{\xi}}{3} Y_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \int \xi (A\xi + B) J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) d\xi.$$

Ostatecznie zatem

$$(6.33) \quad \varphi(t) = \sqrt{\xi} \left\{ J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \left[ C_1 + \frac{\pi}{3} \int \xi (A\xi + B) Y_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) d\xi \right] + \right. \\ \left. + Y_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \left[ C_2 - \frac{\pi}{3} \int \xi (A\xi + B) J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) d\xi \right] \right\}$$

przy podstawieniu

$$\xi = \frac{t}{\sqrt[3]{c}} + \frac{d_1}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

**6.5. Warunki brzegowe.** W punktach 6.2, 6.3 i 6.4 rozpatrzono przypadki obciążenia, przy których możemy podać efektywne rozwiązania równań ugięcia (4.2). Występujące tam stałe określamy z odpowiednich warunków brzegowych, których sprecyzowaniem zajmujemy się obecnie. W tym celu rozpatrując ugięcia dowolnej belki podobnie jak w zakresie sprężystym należy podzielić ją na szereg przedziałów w ten sposób, aby w każdym z nich ugięcie można było przedstawić za pomocą tylko jednego równania różniczkowego. Podstawą do takiego podziału z jednej strony są te same przyczyny, co przy zginaniu sprężystym, jak np. zmiana równania momentów, zmiana sztywności belki, podpora, przegub itp., z drugiej strony zaś dodatkowo przejście belki z jednego do drugiego zakresu sprężysto – plastycznego (rys. 4). Przy każdym takim podziale wystąpi jedna stała całkowania dla równań (4.2), a dla równań (6.15) lub wyższych rzędów otrzymanych przez kolejne różniczkowanie układu (4.2) — odpowiednio więcej. W tych ostatnich przypadkach w celu sprowadzenia liczby niezależnych stałych całkowania do jednej po znalezieniu całek równań (6.15) itd. wymagamy, aby te rozwiązania spełniały wyjściowe równania (4.2). Fizycznie oznacza to spełnienie warunków dla krzywizny. Pozostałą stałą całkowania wyznaczamy z warunków zachowania się belki na podporach oraz ciągłości kątów ugięcia i samych ugięć. Warunki te ustala się tak samo jak w zakresie sprężystym, a ponadto żąda się ciągłości funkcji

$$(6.34) \quad \varphi_j(t_i) = \varphi_{j+1}(t_i), \quad w_j(t_i) = w_{j+1}(t_i)$$

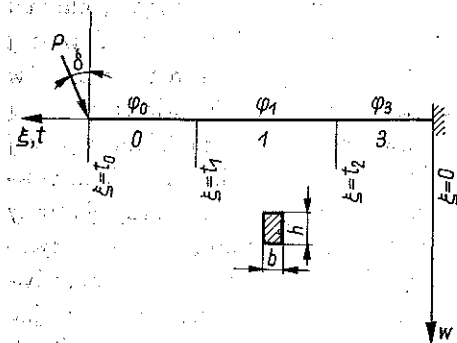
w granicach  $t_i$  sąsiednich dwóch zakresów sprężysto – plastycznych. Dla belek o czteropunktowym przekroju zastępczym  $t_i$  wyznaczamy jako pierwiastek następujących równań (rys. 4) odpowiednio

$$\begin{aligned}
 m(t_i) + n(t_i) &= 1 \quad \text{między zakresami } \textcircled{2} \text{ i } \textcircled{1}; \\
 (6.35) \quad m(t_i) - \frac{\bar{\eta}_2}{\mu} n(t_i) &= 1 \quad \text{między zakresami } \textcircled{1} \text{ i } \textcircled{3}; \\
 \frac{\bar{\eta}_2 + \nu_1(1 - \bar{\eta}_2)}{\mu - \nu_1(1 - \bar{\eta}_2)} \mu m(t_i) + n(t_i) &= 1 \quad \text{między zakresami } \textcircled{1} \text{ i } \textcircled{2}.
 \end{aligned}$$

W ten sposób możemy już jednoznacznie określić kąty  $\varphi$ . Do wyznaczenia samych ugięć natomiast wystarczają wzory (6.2) zapewniające od razu ciągłość ugięć na granicach przedziałów czyli automatycznie spełniające warunki brzegowe. Często jednak wygodniej jest wykonać całkowanie nieoznaczone równania kątów  $w = \int h \int \varphi d\xi + C$ , a powstałe stąd dodatkowe stałe całkowania wyznaczyć z warunków ciągłości ugięć oraz zerowania się ugięć na podporach.

## 7. Przykłady liczbowe

7.1. Ugięcia sprężysto-plastyczne wspornika obciążonego siłą skupioną. Obecnie podamy kilka przykładów liczbowych. Jako pierwszy rozpatrzmy zginanie wspornika o przekroju prostokątnym obciążonego siłą skupioną na końcu. Dla porównania skali trudności, jakie wynikają przy tym zadaniu zależnie od przyjętych założeń upraszczających, rozważmy go w trzech przypadkach: 1) zupełnie ogólnym, ściśle



Rys. 7

wg równań (6.16), 2) przy przyjęciu upraszczającego założenia  $n = \text{const}$ , 3) przy pominięciu ponadto wpływu na zginanie belki składowej poziomej siły. Następnie podamy rozwiązanie szczegółowe dla  $\delta = 0$ , tj. siły prostopadłej. W tym celu rozważmy belkę przedstawioną na rys. 7. Załóżmy przy tym, iż siła  $P$  i kąt  $\delta$  zawarte są w takich granicach, iż belka znajdzie się w zakresach sprężystym  $\textcircled{2}$ , jednostronnego uplastycznienia  $\textcircled{1}$  i dwustronnego uplastycznienia  $\textcircled{3}$  (rys. 4), przy czym jak widać z rys. 7  $m < 0$  i  $n < 0$ . Ze względu na warunki brzegowe w rozważanym przypadku wygodniej jest przyjąć początek układu współrzędnych w utwierdzeniu. Równania momentu gnącego i siły podłużnej można wówczas zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 (7.1) \quad m &= -\sigma p [(t_0 - t) \cos \delta + \sin \delta \int_t^{t_0} \varphi d\xi], \\
 n &= -p (\varphi \cos \delta + \sin \delta),
 \end{aligned}$$

gdzie  $p = P/bhQ_r$  jest bezwymiarową siłą zewnętrzną. Równania (6.16) w oparciu o tablicę 2 i wzory (7.1) przyjmą dla poszczególnych stref postać

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \varphi_0'' + 12a^2 p \sin \delta \varphi_0 &= -12a^2 p \cos \delta & \text{dla } t_1 \leq t \leq t_0, \\ \varphi_1'' - \frac{3}{2} a^2 p \cos \delta \varphi_1' + 21a^2 p \sin \delta \varphi_1 &= -21a^2 p \cos \delta & \text{dla } t_2 \leq t \leq t_1, \\ \varphi_3'' + 48a^2 p \sin \delta \varphi_3 &= -48a^2 p \cos \delta & \text{dla } 0 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Stąd po rozwiązaniu

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t - \operatorname{ctg} \delta & \text{dla } t_1 \leq t \leq t_0, \\ \varphi_1 &= C_3 e^{r_1 t} + C_4 e^{r_2 t} - \operatorname{ctg} \delta & \text{dla } t_2 \leq t \leq t_1, \\ \varphi_3 &= C_5 \sin \omega_3 t + C_6 \cos \omega_3 t - \operatorname{ctg} \delta & \text{dla } 0 \leq t \leq t_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$r_{1,2} = \frac{3}{4} a^2 p \cos \delta \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{2} a^2 p \cos \delta\right)^2 - 84a^2 p \sin \delta},$$

przy czym dla  $a^2 p \operatorname{ctg} \delta < 112/3$ ,  $r_{1,2}$  jest zespolone oraz

$$\omega_0 = 2 \sqrt{3a^2 p \sin \delta}, \quad \omega_3 = 4 \sqrt{3a^2 p \sin \delta}.$$

Dla określenia stałych całkowania  $C_1, \dots, C_6$  oraz dwóch nieznanymi granic przedziałów  $t_1$  i  $t_2$  potrzeba 8 warunków brzegowych. Będą to trzy równania krzywizny (por. p. 6.5 i tablica 2)

$$(7.4.1) \quad \begin{aligned} -\varphi_0' &= 2a^2 m, \\ -\varphi_1' &= \frac{7}{2} a^2 m + \frac{3}{2} a^2 n + \frac{3}{2} a^2, \\ -\varphi_3' &= 8a^2 m + 6a^2, \end{aligned}$$

dwa warunki ciągłości i warunek w utwierdzeniu

$$(7.4.2) \quad \begin{aligned} \varphi_0(t_1) &= \varphi_1(t_1), \\ \varphi_1(t_2) &= \varphi_3(t_2), \\ \varphi_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

oraz dwa warunki na granicy stref [rys. 4, wzory (6.35), (4.1) i (4.3)]

$$(7.4.3) \quad \begin{aligned} m(t_1) + n(t_1) &= -1, \\ 3m(t_1) - n(t_1) &= -3. \end{aligned}$$

Powyższe warunki prowadzą do określenia stałych  $C_1, \dots, C_6$  jako funkcji  $t_1$  i  $t_2$ ,  $C_i = f_i(t_1, t_2)$  oraz do układu dwóch bardzo skomplikowanych równań przestępnych typu

$$(7.5) \quad F_1(t_1, t_2) = 0, \quad F_2(t_1, t_2) = 0.$$

Gdyby założyć, iż  $n = -p \sin \delta = \text{const}$ , to zmieni się jedynie drugie równanie (7.2) na równanie

$$\varphi_1'' + 21a^2 p \sin \delta \varphi_1 = -21a^2 p \cos \delta,$$

a jego rozwiązaniem będzie funkcja

$$\varphi_1 = C_3 \sin \omega_1 t + C_4 \cos \omega_1 t - \operatorname{ctg} \delta,$$

gdzie  $\omega_1 = (21a^2 p \sin \delta)^{1/2}$ . Ponadto warunki brzegowe (7.4.3) przyjmą uproszczoną postać

$$(7.6) \quad m(t_1) = p \sin \delta - 1, \quad 3m(t_2) = p \sin \delta - 3.$$

Istotnym wynikiem przyjętego uproszczenia jest jednak możliwość sprowadzenia układu (7.5) do jednego tylko równania przestępnego

$$(7.7) \quad F[t_2, f(t_2)] = 0,$$

gdzie  $t_1 = f(t_2)$ .

Zasadniczym uproszczeniem staje się dopiero pominięcie wpływu momentu pochodzącego od poziomej składowej siły ukośnej. W tym przypadku

$$(7.8) \quad m = \sigma p (t - t_0) \cos \delta, \quad n = -p \sin \delta$$

i wystarczy obecnie skorzystać z równań (4.2), które tu przyjmą postać (7.4.1). Stąd

$$(7.9) \quad \begin{aligned} -\varphi_0' &= 12a^2 p (t - t_0) \cos \delta, \\ -\varphi_1' &= 21a^2 p (t - t_0) \cos \delta + \frac{3}{2} a^2 (1 - p \sin \delta), \\ -\varphi_3' &= 48a^2 p (t - t_0) \cos \delta + 6a^2, \end{aligned}$$

a po scałkowaniu

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= -12a^2 p \left( \frac{t^2}{2} - t_0 t \right) \cos \delta + C_0, \\ \varphi_1 &= -21a^2 p \left( \frac{t^2}{2} - t_0 t \right) \cos \delta - \frac{3}{2} a^2 t (1 - p \sin \delta) + C_1, \\ \varphi_3 &= -48a^2 p \left( \frac{t^2}{2} - t_0 t \right) \cos \delta - 6a^2 t + C_3. \end{aligned}$$

Z warunków brzegowych (7.4.2) i (7.6) mamy

$$(7.11) \quad \begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{p \sin \delta - 1}{6p \cos \delta}, \quad t_2 = t_0 + \frac{p \sin \delta - 3}{18p \cos \delta}, \\ C_0 &= -9a^2 p \left( \frac{t_1^2}{2} - t_0 t_1 \right) - \frac{3}{2} a^2 t_1 (1 - p \sin \delta) + C_1, \\ C_1 &= -27a^2 p \left( \frac{t_2^2}{2} - t_0 t_2 \right) \cos \delta + \frac{3}{2} a^2 t_2 (1 - p \sin \delta) - 6a^2 t_2, \\ C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jak widać, w tym przypadku rozwiązania są wielomianami zmiennej  $t$ .

Dla siły prostopadłej, czyli przy  $\delta = 0$ , zniknie zakres jednostronnego uplastycznienia, gdyż

$$(7.12) \quad t_1 = t_2 = t_0 - \frac{1}{6p};$$

z warunków brzegowych pozostaną tylko następujące:

$$(7.13) \quad \varphi_0(t_1) = \varphi_3(t_1), \quad \varphi_3(0) = 0, \quad m(t_1) = -1,$$

a stąd równania (7.10) przyjmą postać

$$(7.14) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= -6a^2 p t^2 + 12a^2 p t_0 t + 18a^2 p t_0^2 \left(1 - \frac{1}{6p t_0}\right)^2, & t_1 \leq t \leq t_0, \\ \varphi_3 &= -24a^2 p t^2 + 48a^2 p t_0 t \left(1 - \frac{1}{8p t_0}\right), & 0 \leq t \leq t_1. \end{aligned}$$

Przechodząc do obliczenia ugięć na podstawie (6.2) mamy

$$(7.15) \quad w_3(t) = h \int_0^t \varphi_3 d\xi, \quad w_0(t) = h \int_0^{t_1} \varphi_3 d\xi + h \int_{t_1}^t \varphi_0 d\xi.$$

a stąd

$$(7.16) \quad \begin{aligned} w_0(t) &= -2a^2 p h t^3 + 6a^2 p h t_0 t^2 + 18a^2 p h t_0^2 t \left(1 - \frac{1}{6p t_0}\right)^2 - 6a^2 p h t_0^3 \left(1 - \frac{1}{6p t_0}\right)^3, \\ w_3(t) &= -8a^2 p h t^3 + 24a^2 p h t_0 t^2 \left(1 - \frac{1}{8p t_0}\right). \end{aligned}$$

Ponieważ maksymalny moment wystąpi w przekroju utwierdzonym, zatem z warunków

$$(7.17) \quad m(0) = -1, \quad m(0) = -\frac{3}{2}$$

możemy określić graniczne wartości, pomiędzy którymi musi zawierać się siła  $p$ , aby belka znalazła się w stanie sprężysto-plastycznym. Mamy stąd [por. (7.8)]

$$(7.18) \quad \frac{1}{6t_0} \leq p \leq \frac{1}{4t_0}.$$

Powracając do oznaczeń wymiarowych [por. (6.2) i (7.1)] rozwiązania możemy ostatecznie zapisać w postaci

$$(7.19) \quad \begin{aligned} \varphi_0(x) &= -\frac{Px^2}{EI} + \frac{Plx}{EI} + \frac{3Pl^2}{2EI} \left(1 - \frac{\bar{x}}{l}\right)^2, \\ w_0(x) &= -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{Plx^2}{2EI} + \frac{3Pl^2x}{2EI} \left(1 - \frac{\bar{x}}{l}\right)^2 - \frac{Pl^3}{2EI} \left(1 - \frac{\bar{x}}{l}\right)^3 \end{aligned}$$

dla  $l - \bar{x} \leq x \leq l$ ,

$$(7.20) \quad \begin{aligned} \varphi_3(x) &= -\frac{2Px^2}{EI} + \frac{4Plx}{EI} \left(1 - \frac{3\bar{x}}{4l}\right), \\ w_3(x) &= -\frac{2Px^3}{3EI} + \frac{2Plx^2}{EI} \left(1 - \frac{3\bar{x}}{4l}\right), \end{aligned}$$

dla  $0 \leq x \leq l - \bar{x}$ ,

gdzie  $\bar{x} = bh^2 Q_r/6P$ . Warunek (7.18) dla siły  $P$  przyjmuje postać

$$(7.21) \quad \frac{bh^2 Q_r}{6l} \leq P \leq \frac{bh^2 Q_r}{4l}$$

Stąd otrzymujemy np., iż przy wartości siły  $P = bh^2 Q_r/4l$  niszczącej belkę zasięg zakresu sprężysto-plastycznego w belce wyniesie

$$(7.22) \quad l - \bar{x} = \frac{l}{3}$$

zgodnie ze znanymi rozwiązaniami ścisłymi.

Obecnie porównamy otrzymane rezultaty z rozwiązaniem ścisłym podanym np. w pracy [18]. Porównanie to przeprowadzimy dla wzorów podających wielkość strzałki ugięcia na końcu wspornika jako funkcję siły  $P$ . Dla przekroju zastępczego  $f = w_0(l)$ . Przy  $P = bh^2 Q_r/6l = \bar{P}$  otrzymujemy wartość ścisłą

$$(7.23) \quad f_0 = \frac{\bar{P}^3}{3EI}$$

Przy zginaniu sprężysto-plastycznym mamy

$$(7.24) \quad f(\vartheta) = f_0 \frac{1}{2\vartheta^2} (3 - 9\vartheta^2 + 8\vartheta^3),$$

podczas gdy wzór ścisły daje

$$(7.25) \quad \tilde{f}(\vartheta) = f_0 \frac{1}{2\vartheta^2} [10 - 2(\vartheta + 3)\sqrt{3 - 2\vartheta}],$$

gdzie  $\vartheta = \frac{P}{\bar{P}} = \frac{l}{\bar{x}}$ .

Porównanie obu wzorów dla różnych  $\vartheta$  zamieszczono w tabelicy 4, przy czym  $B = (1 - \tilde{f}/f) \cdot 100\%$  jest procentowym błędem względnym.

Tablica 4. Ścisłe i przybliżone wartości strzałki ugięcia

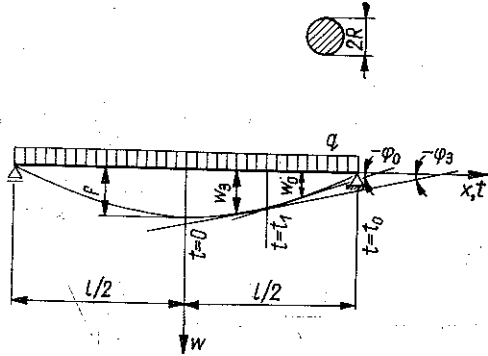
$\vartheta = \frac{P}{\bar{P}}$	$\tilde{f}/f_0$	$f/f_0$	$B$ [%]	$\frac{\tilde{f}-f}{f_0}$
1,000	1,000	1,000	0,000	0,000
1,100	1,101	1,139	-3,45	-0,038
1,200	1,214	1,341	-10,46	-0,127
1,300	1,351	1,587	-17,47	-0,236
1,400	1,548	1,864	-20,47	-0,316
1,433	1,647	1,964	-18,85	-0,317
1,450	1,710	2,016	-15,18	-0,306
1,500	2,222	2,167	2,50	0,055

Z przeprowadzonej analizy wynika, iż

$$(7.26) \quad \begin{array}{ll} \text{dla} & 0 \leq \vartheta \leq 1 & \tilde{f} = f, \\ & 1 < \vartheta < 1,493 & \tilde{f} < f, \\ & 1,493 < \vartheta \leq 1,5 & \tilde{f} > f; \end{array}$$

dla  $P = 1,433 \bar{P}$  otrzymuje się maksymalny błąd bezwzględny przez nadmiar, a dla  $P = 1,500 \bar{P}$  przez niedomiar. Ponadto z tablicy 4 widać, że błędy wahają się w granicach  $-20,5\%$  do  $2,5\%$  i w przeważnym zakresie są popełnione przez nadmiar.

7.2. Ugięcia sprężysto-plastyczne belki wolnopodpartej o przekroju kołowym obciążonej w sposób ciągły. Ścisłego rozwiązania postawionego w tytule problemu jak dotąd w postaci zamkniętej nie podano, a to ze względu na trudności związane z rozwiązaniem odpowiedniego równania różniczkowego ugięć, które w tym przypadku jest nie liniowe i nader skomplikowane (por. np. [18]). Natomiast przytoczony poniżej sposób rozwiązania przy zastosowaniu czteropunktowego przekroju zastępczego jest równie prosty (przy przyjęciu  $n = 0$ ) jak w poprzednim przykładzie. Przyjmując do obliczeń belkę jak na rys. 8 i uwzględniając, iż w tym przypadku  $n = 0$  i  $m > 0$  w oparciu o wzory (4.2) oraz tablicę 3, mamy (zachowując dokładność 3 cyfr znaczących) równanie ugięcia w postaci



Rys. 8

$$(7.27) \quad \begin{aligned} -\varphi_0' &= 2a^2 m & \text{przy } t_1 \leq t \leq t_0 & \text{ w zakresie sprężystym,} \\ -\varphi_3' &= 6,59a^2 m - 4,59a^2 & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

w zakresie sprężysto-plastycznym (dwustronne uplastycznienie). Jak widać z rys. 8

$$(7.28) \quad m = 8p(t_0^2 - t^2),$$

przy czym [por. (3.11) i (6.2)]

$$(7.29) \quad t = \frac{x}{2R}, \quad t_0 = \frac{1}{4R}, \quad p = \frac{q}{\pi R Q_r}, \quad a^2 = \frac{Q_r}{E}.$$

Równania te muszą spełnić warunki brzegowe

$$(7.30.1) \quad \varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_3(t_1) = \varphi_0(t_1), \quad m(t_1) = 1,$$

a ponadto do obliczenia wielkości samych ugięć  $w$  możemy skorzystać ze związków (6.2) lub też narzucić dwa dalsze warunki brzegowe

$$(7.30.2) \quad w_3(t_1) = w_0(t_1), \quad w_0(t_0) = 0.$$

W ten sposób po dwukrotnym scałkowaniu równań (7.27), obliczeniu stałych z warunków (7.30.1) i (7.30.2) i po powrocie do zmiennych wymiarowych [por. (7.29)] i rozszerzeniu wyników na całą długość belki otrzymujemy równania ugięcia w postaci

$$\begin{aligned}
 w(x) = w_0(x) &= 0,0416 \frac{qx^4}{EI} - 0,0625 \frac{ql^2 x^2}{EI} - 0,0957 \frac{ql^3 x}{EI} \Theta^3 + \\
 &+ 0,0130 \frac{ql^4}{EI} (1 + 3,67 \Theta^3), \quad \text{dla } x_1 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\
 (7.31) \quad w(x) = w_3(x) &= 0,1374 \frac{qx^4}{EI} - 0,2060 \frac{ql^2 x^2}{EI} \left(1 - 0,697 \frac{\bar{x}^2}{l^2}\right) + \\
 &+ 0,0130 \frac{ql^4}{EI} (1 + 3,67 \Theta^3 - 1,38 \Theta^4) \quad \text{dla } -x_1 \leq x \leq x_1, \\
 w(x) = w_0(x) &= 0,0416 \frac{qx^4}{EI} - 0,0625 \frac{ql^2 x^2}{EI} + 0,0957 \frac{ql^3 x}{EI} \Theta^3 + \\
 &+ 0,0130 \frac{ql^4}{EI} (1 + 3,67 \Theta^3) \quad \text{dla } -\frac{l}{2} \leq x \leq -x_1,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(7.32) \quad \bar{x}^2 = \frac{2\pi R^3 Q_r}{q}, \quad x_1 = \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{l^2}}, \quad \Theta = \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{l^2}} \quad \text{oraz} \quad I = \frac{\pi R^4}{4}$$

jest momentem bezwładności całego przekroju kołowego względem jego osi ciężkości. Wzory te dają ścisłą wartość maksymalnej strzałki sprężystej  $f_0$  w środku belki, gdyż wówczas z warunku

$$(7.33) \quad m(q)_{t=0} = 1$$

mamy kolejno

$$q = \frac{2\pi Q_r R^3}{l^2}, \quad \bar{x}^2 = l^2, \quad \Theta = 0,$$

a stąd

$$(7.34) \quad f_0 = w(0) = 0,0130 \frac{ql^4}{EI} \approx \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Natomiast gdy

$$\frac{2\pi Q_r R^3}{l^2} < q \leq \frac{32 Q_r R^3}{3l^2} = \bar{q},$$

związki (7.31) dają wartości przybliżone, które w przeważnym zakresie (aż do  $q$  bliskich  $\bar{q}$  niszczącego belkę) ze względu na większą krzywiznę belki o przekroju zastępczym niż o przekroju danym (por. [27]) są wyższe w stosunku do wartości ścisłych. Jednakże przy  $q = \bar{q}$  otrzymujemy  $f_{\max} = 2,95 f_0$ , podczas gdy wartość «ścisła» (por. [29]) w tym przypadku zmierza do nieskończoności (przy nieuwzględnieniu sił podłużnych). Porównanie z rozwiązaniem ścisłym w innym zakresie nie jest możliwe ze względu na brak tego ostatniego. Pewne wnioski można by jednak wyciągnąć z tego co pisze A. PHILLIPS, [29]. Podaje on, iż dla belki przedstawionej na rys. 8 lecz o przekroju prostokątnym,  $f_{\max} = \infty$ , jeszcze przy  $q = 0,9999 \bar{q}$  mamy  $f_{\max} = 4,52 f_0$ . Widać stąd, iż w szerokim zakresie wzory (7.31) powinny dawać wystarczająco dobre przybliżenie.



## Uwagi końcowe

Z przytoczonych w pracy rozważań wynika, iż proponowana tu przybliżona metoda obliczania ugięć sprężysto – plastycznych belek może w pewnym stopniu przyczynić się do usunięcia jednej z podstawowych trudności, jakie w tym zagadnieniu się kryją, a to wpływu kształtu przekroju poprzecznego na postać równania różniczkowego. Można więc w ten sposób ująć problem zginania sprężysto – plastycznego dla wielu przekrojów, dla których uzyskanie rozwiązania ścisłego byłoby bardzo trudne lub zgoła niemożliwe. W najprostszych przypadkach, tj. przy działaniu sił prostopadłych do osi belki nieodkształconej, otrzymujemy przy dopuszczalnym i najczęściej stosowanym wówczas pominięciu siły podłużnej zupełnie proste postacie rozwiązań (np. [7.20] i [7.31]). W innych przypadkach rozwiązania są wprawdzie nieraz dość skomplikowane (warunki brzegowe), ale i tak bez porównania prostsze niż ścisłe. Można je jeszcze uprościć przyjmując zupełnie usprawiedliwione założenie, iż przy małych ugięciach odkształcenie belki nie ma wpływu na wielkość siły podłużnej. W tym przypadku otrzymujemy zawsze znacznie prostsze równania typu II. Na korzyść proponowanej metody można też zapisać stosowność jej tak do belek wykonanych z materiału idealnie sprężysto – plastycznego jak i podlegającego wzmocnieniu plastycznemu.

Błąd otrzymanych tu wyników przy ograniczeniu się do przekroju czteropunktowego jest rzędu najwyżej kilkunastu procent i w przeważnym zakresie z wyjątkiem obciążeń bliskich obciążeniom niszczącym błędy popełniamy przez nadmiar. Prócz ograniczeń związanych z założeniami wstępnymi niewątpliwą wadą powyższej metody jest zwiększenie (zależnie od liczby «mas skupionych» w przekroju zastępczym) liczby przedziałów, które należy wyróżnić na belce (konieczność zszywania) ze względu na konieczność opisanie ugięcia w każdym przedziale jednym równaniem. Z drugiej strony jednak, jak wykazano w pracy [26], zwiększenie liczby «mas skupionych» w przekroju zastępczym prowadzi szybko do ściślejszych wyników.

## Literatura cytowana w tekście

- [1] F. BARON, H. S. DAVIS, *The pressure line and the inelastic buckling of columns*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1957, p. 1424.
- [2] L. S. BEEDLE, J. A. READY and B. G. JOHNSTON, *Tests of columns under combined thrust and moment*, Proc. Soc. exp. Stress Anal., 8, 109 (1950).
- [3] P. P. BIJLAARD, *Buckling of plates under non – homogeneous stress*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, July 1957, 1293-31.
- [4] M. E. CLARK, C. M. SIDEBOTTOM, R. W. SHREEVES, *Inelastic analysis of eccentrically-loaded columns*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1957, p. 1418.
- [5] A. A. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
- [6] P. G. HODGE JR., *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw – Hill, New York 1959.
- [7] P. G. HODGE, A. SAWCZUK, *Porównanie warunków plastyczności dla powłok cylindrycznych*, Materiały nadesłane na Sesję Nauk. Wydz. Mech. Politechniki Kraków, październik 1960; J. of Franklin Institute, 5, 269 (1960), 362-374.
- [8] N. I. HOFF, *The Idealized Column*, Ing. Arch., 28 (1959), 89-99.

- [9] M. R. HORNE, *The full plastic moments of sections subjected to shear forces and axial load*, British Weld. J. Appl. Mech. 4, 5 (1958).
- [10] J. A. HULT, *Creep Buckling*, Instn. Halfasthetslära Kungl. Tekniska Hogskolan, Publ. nr. 111, Stockholm 1955.
- [11] K. JEŽEK, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Julius Springer, Wien 1937.
- [12] Л. М. Качанов, *Механика пластических сред*, Гостехиздат, Москва 1948.
- [13] E. КАМКЕ, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest and Portig, Leipzig 1956.
- [14] К. А. Карпов, *Таблицы функции  $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$  в комплексной области*, Изд. Акад. Наук СССР, Москва 1954.
- [15] K. KLÖPFEL, M. YAMADA, *Fließpolyeder des Rechteck und I-Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normalkraft und Querkraft*, der Stahlbau, 11, 27 (1958), 284-290.
- [16] G. KNUDSEN, C. H. YANG, B. G. JOHNSTON and L. S. BEEDLE, *Plastic Strength and Deflection of Continuous Beams*, Fritz Eng. Labor. Reprint No 86 in Progress Report, No 9.
- [17] A. L. KOLESNIKOW, *Metod doslinzennja wielkich pieremiszczien stierznia u pruzno-plastycznyj stadij*, Pribl. Miecz., 3, 4 (1958), 317-325.
- [18] W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność, wybór zadań i przykładów*, PWN Warszawa 1962.
- [19] С. Д. Лейтес, *К вопросу о механизме потери устойчивости*, Инж. Сб., 7 (1950), 123-130.
- [20] С. Д. Лейтес, *Устойчивость сжатых стальных стержней*, Гос. Изд. Лит. по Строит. и Архит., Москва 1954.
- [21] J. MUTERMILCH, E. OLSZEWSKI, M. ŁUBIEŃSKI, *Wymiarowanie konstrukcji stalowych, nowe metody*, Budown. Archit., Warszawa 1956.
- [22] A. NADAI, *Plasticity*, Mc Graw - Hill, New York - London 1931.
- [23] B. C. NEAL, *The Plastic Methods of Structural Analysis*, John Wiley, New York 1956.
- [24] E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of arches*, J. Mech. Phys. Solids, 1 (1953), 77-89.
- [25] E. T. ONAT and W. PRAGER, *The influence of axial forces on the collapse loads of frames*, Proc. 1-st Midwestern Conf. Solid. Mech. Urbana, 1953, 40-42.
- [26] J. ORKISZ, *Zasady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla belek zginanych w zakresie sprężysto - plastycznym*, Czes. Techn. 3, 67 (1962), 9-13. Streszczenie ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 10, 10 (1962), 405-414.
- [27] J. ORKISZ, *Krzywe graniczne dla zastępczych wielopunktowych przekrojów belek zginanych sprężysto - plastycznie*, Czas. Techn. 6, 67 (1962), 1-11. Streszczenie ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11, 10 (1962), 451-460.
- [28] J. ORKISZ, *Przykłady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla belek zginanych w zakresie sprężysto - plastycznym*, Czas. Techn., 10, 67 (1962).
- [29] A. PHILLIPS, *Introduction to Plasticity*, Ronald Press Co, New York 1956.
- [30] С. Д. Пономарев, *Графический способ определения прогибов при упруго-пластическом изгибе*, Сборник: Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания, Москва 1955, 131-142.
- [31] С. Д. Пономарев и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, Машгиз, Москва 1958, т. 2.
- [32] А. Р. Ржаницын, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*. Стройвоенмориздат, Москва 1954.
- [33] А. Р. Ржаницын, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1955.
- [34] F. V. SEELY, J. O. SMITH, *Advanced Mechanics of Materials*, John Wiley, II ed., New York 1957.
- [35] В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950.
- [36] W. SWIDA, *Die Berechnung von Stahlernen Bogen unter Berücksichtigung der Tragfähigkeitsreserve im elastisch - plastischen Zustand*, Stahlbau, 19 (1950), 20 (1951).

[37] Н. В. Валишвили, *К вопросу упруго-пластического изгиба балок*, Расчеты на прочность, Сборник статей, выпуск 7, Госуд. Научно-Техни. Изд. Маш. Лит., Москва 1961.

[38] A. YLINEN, *Theory of continuous beams whose material does not follow Hooke's law*, Arch. Mech. Stos., 2, 14 (1962), 219-237.

[39] M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically non-linear creep buckling of bars*, Arch. Mech. Stos., 3, 12 (1960), 379-411.

[40] M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe graniczne przy jednoczesnym zginaniu i rozciąganiu lub ściskaniu dla belek o dowolnym przekroju* (w druku).

[41] M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wyężenia*, Rozprawy Inż., 4, 9 (1961), 609-637.

[42] M. ŻYCZKOWSKI, *Teoria skończonych ugięć belek sprężysto-plastycznych*, Czas. Techn., 3, 62 (1957), 1-7.

### Резюме

#### МАЛЫЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПРОГИБЫ БАЛОК ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Дается приближенный метод определения малых упруго-пластических прогибов балок. Этот метод состоит в рассмотрении вместо данных балок — балок, обладающих теоретическими эквивалентными сечениями состоящими из ряда «сосредоточенных масс» (так называемые многоточечные сечения). Такой подход, при соответствующем подборе многоточечных сечений (принципы которых даются напр. в работах [26] и [28]), приводит к дифференциальным уравнениям прогиба в виде независимым от формы поперечного сечения данной балки. Эти уравнения выражают возможно самую простую т. е. линейную зависимость между кривизной балки и изгибающим моментом и продольной силой [ср. (3. 8)]. Главное внимание обращается на четырехточечные эквивалентные сечения, которые с точки зрения применений могут быть самыми полезными. Для таких сечений даются подробные дифференциальные уравнения прогиба (4.2), и затем их решения, при различных внешних нагрузках. Как это следует из приведенных решений и учитывая их несомненный порок, которым является необходимость «сшивки» выражений, обязывающих в отдельных интервалах, предлагаемый метод дает возможность либо получить результаты в случаях нерешенных точно, либо эти решения являются более простыми по сравнению с точными решениями. В особенности, в случае действия сил перпендикулярных недеформированной оси балки, получается этим путем весьма простое решение в виде полиномов для прогибов и углов прогиба. В заключение приводятся числовые примеры и проводится дискуссия точности полученных результатов.

### Summary

#### SMALL ELASTIC-PLASTIC DEFLECTIONS OF A BEAM WITH ANY FORM OF CROSS-SECTION

An approximate method is proposed for computing small elastic-plastic deflections of a beam. This method consists in replacing the beam under consideration by a beam with a substitutive cross-section with concentrated masses, called also a «multipoint» cross-section. Such an approach enables us, with an appropriate device of this multi-point section (of which the principles are explained in [26] and [28], for instance) to derive differential equations of deflection the form of which is independent of the form of the given cross-section. These equations express the simplest relation possible — a linear one — between the curvature of the beam, the bending moment and

the longitudinal force (cf. (3.8)). Main attention is paid to substitutive four-point sections which seem to be most advantageous from the practical viewpoint. For such sections detailed differential equations of deflection (4.2) are derived, their solutions being found for various types of external loading. It is seen from the solutions quoted that in spite of the drawback of the necessity of «joining», expressions valid for each particular segment the method proposed enables us either to obtain results in cases that cannot be solved in an accurate manner or a much simpler solution than the accurate one. In particular, in the case of forces normal to the undeformed beam axis we obtain very simple expressions for deflections and slopes in the form of polynomials. In conclusion a few numerical examples are given.

The accuracy of the results is discussed.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI  
I KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1963 r.*

---