

PEWNA METODA TZW. PARAMETRYCZNEGO KSZTAŁTOWANIA  
WYTRZYMAŁOŚCIOWEGO

WIESŁAW KRZYŚ i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

## 1. Uwagi wstępne

Kształtowanie wytrzymałościowe obejmuje niezwykle szeroki zakres zagadnień. W pracy autorów [7] podano klasyfikację problemów kształtowania, ujmującą typy elementów kształtowanych (pręt, płyta, powłoka itp.), wielkości podlegające wyznaczeniu (np. wymiary przekroju, kształt osi, sposób podparcia), kryteria kształtowania (minimalny ciężar, minimalne koszty wykonania lub eksploatacji) oraz warunki poboczne (warunki wytrzymałości, stateczności, sztywności itp.). Klasyfikacja ta wskazuje na takie bogactwo problemów z dziedziny kształtowania wytrzymałościowego, że dotychczasowy dorobek nauki w tym zakresie należy uważać za skromny, chociaż np. praca przeglądowa Z. WASIUTYŃSKIEGO i A. BRANDTA [21], omawia 166 pozycji literatury, a ostatnio ukazała się jedna z pierwszych monografii z tego zakresu, napisana przez R. C. JOHNSONA, [5]. Poprzednio wydane monografie traktowały zagadnienie bądź fragmentarycznie (F. R. SHANLEY, [14], G. GERARD, [4], W. A. KISIBLEW, [6]), bądź też z pewnym specjalnym nastawieniem odnośnie kryterium kształtowania (Z. WASIUTYŃSKI, [19]).

Właściwy problem kształtowania sprowadza się do doboru jednej lub kilku funkcji i stanowi w zasadzie problem rachunku wariacyjnego, przedstawiający z reguły znaczne trudności matematyczne. Często jednak podobnie jak w teorii drgań zastępuje się w przybliżeniu układy o masach rozłożonych w sposób ciągły przez układy o stosownie dobranych kilku masach skupionych (metoda Rayleigha), tak i w dziedzinie kształtowania wytrzymałościowego można stosując upraszczające przyjęcia zastąpić dobór funkcji przez dobór pewnej ilości parametrów w założonych z góry typach funkcji. Takie postępowanie będziemy nazywali parametrycznym kształtowaniem wytrzymałościowym; zagadnienie rachunku wariacyjnego («kształtowanie wariacyjne») zastępujemy wtedy przez analizę funkcji kilku zmiennych. Sens kształtowania parametrycznego leży nie tylko w prostszej metodzie obliczeń, lecz przede wszystkim w prostszej technologii, bowiem często trudno byłoby wykonać elementy o kształtach określonych metodami rachunku wariacyjnego. Tak np. pod pojęciem kształtowania parametrycznego możemy zaliczyć dobór optymalnej zbieżności jednostronnie utwierdzonego pręta stożkowego, narażonego na wyboczenie w zakresie sprężysto – plastycznym, zbadany przez jednego z autorów w pracy [25], w porównaniu z analizą wariacyjną tego problemu, podaną przez P. LAASONENA, [8]; pręt optymalny jest znacznie trudniejszy do wykonania od pręta stożkowego. Oczywiście, podobnie jak metoda Rayleigha daje w wyniku częstość drgań własnych

zawsze niemniejszą od rzeczywistej, tak i przy kształtowaniu parametrycznym uzyskujemy zawsze ciężar (lub inną wielkość przyjętą za kryterium) niemniejszy od określonego rachunkiem wariacyjnym.

W pracy obecnej podamy pewną ogólną metodę kształtowania parametrycznego, nazwaną «metodą transformacji linearyzującej warunki poboczne». Podamy następnie przykłady zastosowania tej metody do kształtowania w przypadku prętów o profilu skrzynkowym, poddanych czystemu skręcaniu lub czystemu zginaniu. Założenie, że ścianki są stałej grubości zamieni kształtowanie wariacyjne na kształtowanie parametryczne. W oparciu o klasyfikację podaną w pracy [7] będą to problemy B2 (dobór kształtu przekroju pręta cienkościennego) przy kryterium I (minimalny ciężar) i warunkach pobocznych  $a$  i  $b$  (wytrzymałości i stateczności). Od pokrewnych prac z tej dziedziny (G. STRASSER, [18], G. G. BAŁOWNIEW I G. S. TROFIMOW, [1], Z. WASIUTYŃSKI, [20], V. CADAMBE, S. KRISHNAN, [3]) analiza obecna różni się będzie nie tylko metodą, lecz przede wszystkim uwzględnieniem możliwie dużej ilości warunków pobocznych, zwłaszcza warunków stateczności, które przy analizie pracy prętów cienkościennych odgrywają zasadniczą rolę.

## 2. Metoda transformacji linearyzującej warunki poboczne

Problem parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego sprowadza się do znalezienia najmniejszej wartości (kresu dolnego) pewnej funkcji  $n$  zmiennych

$$(2.1) \quad V = V(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

przy  $m$  warunkach pobocznych, napisanych jednak na ogół nie w postaci równości, lecz w postaci nierówności słabych

$$(2.2) \quad X_i \leq \bar{X}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Symbolem  $V$  oznaczono tu wielkość stanowiącą kryterium kształtowania; w najprostszym ujęciu jest to objętość lub ciężar elementu, lub np. pole powierzchni przekroju, co przy założeniu, że pręt ma ustalony przekrój, jest w zasadzie równoznaczne. Jak wspomniano w pracy [7], kryteria kształtowania mogą również uwzględniać inne czynniki, np. koszt wykonania lub eksploatacji (lotnictwo). Przez  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) oznaczono parametry, przyjęte za niezależne; mogą one bądź posiadać prostą interpretację geometryczną (grubość ścianki, wysokość przekroju itp.), bądź też mieć znaczenie raczej oderwane występując w równaniu obranego typu, określającym np. kontur przekroju pręta, powierzchnię środkową powłoki itp. Wielkości  $X_i = X_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) są wielkościami ograniczonymi (naprężenia, przemieszczenia, wymiary gabarytowe itp.), natomiast  $\bar{X}_i$  — ograniczającymi. Wielkości ograniczające są bądź ustalone (np. naprężenia dopuszczalne), bądź też mogą również zależeć od  $a_j$  (np. naprężenia krytyczne przy warunku stateczności elementu).

Równania

$$(2.3) \quad X_i = \bar{X}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

są równaniami pewnych hiperpowierzchni w  $n$ -wymiarowej przestrzeni  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Ponieważ warunki poboczne (2.2) są sformułowane nie w postaci równań, lecz nierówności, więc niekoniecznie  $m < n$ . Poszukujemy kresu dolnego funkcji  $V$  po określonej stronie hiperpowierzchni (2.3) lub na samej hiperpowierzchni. Kres ten może być osiągnięty bądź wewnątrz obszaru (będziemy wtedy mówili o ekstremum typu  $n/n$ , bowiem przy założeniu różniczkowalności funkcji  $V$  mamy wtedy  $n$  warunków ekstremum typu  $\partial V/\partial a_j = 0$ ), lub na jednej hiperpowierzchni [ekstremum typu  $(n-1)/n$ , jeden warunek poboczny spełniony w postaci równości,  $n-1$  warunków  $\partial V/\partial a_j = 0$ ], lub na przecięciu się  $k$  hiperpowierzchni [ekstremum typu  $(n-k)/n$ ], lub wreszcie na przecięciu się  $n$  hiperpowierzchni (o ile  $m \geq n$ ), wtedy nie występuje żadne ekstremum lokalne (można mówić o ekstremum typu  $0/n$ , brak warunku  $\partial V/\partial a_i = 0$ ).

Dość żmudne badanie wszystkich typów ekstremów uprości się znacznie przez wprowadzenie nowych, specjalnie dobranych parametrów tak, by hiperpowierzchnie typu (2.3) zostały przetransformowane w hiperpłaszczyzny, prostopadłe do poszczególnych osi układu (transformacja linearyzująca warunki poboczne).

Rozpatrzmy trzy przypadki.

(a) Niech  $m \leq n$ . Wprowadzamy nowe parametry

$$(2.4) \quad x_i = \frac{X_i}{\bar{X}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Mamy wobec tego  $m$  równań

$$(2.5) \quad x_i = x_i(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Jeżeli  $m < n$ , to wybieramy dowolnie  $m$  parametrów spośród  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (kierując się łatwością rachunków) i dokonujemy odwrócenia

$$(2.6) \quad a_j = a_j(x_1, x_2, \dots, x_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zakładamy, że odwrócenie daje się jednoznacznie przeprowadzić (jakobian różny od zera). Wtedy, po podstawieniu,

$$(2.7) \quad V = V(x_1, x_2, \dots, x_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n)$$

przy warunkach pobocznych

$$(2.8) \quad x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Parametry  $a_{m+1}, \dots, a_n$  nie są teraz niczym ograniczone i możemy uwzględnić  $(n-m)$  warunków  $\partial V/\partial a_j = 0$ ; jeżeli  $\partial V/\partial x_i < 0$ , to przyjmujemy  $x_i = 1$ , a jeżeli znak tej pochodnej nie jest ustalony, to przyjmujemy warunek  $\partial V/\partial x_i = 0$ . Oczywiście, przy przyrównaniu pochodnej do zera należy się upewnić, czy warunek ten określa minimum, a nie maksimum; często własność ta jest jednak widoczna wprost z budowy wzoru (2.7).

(b) Niech  $m > n$ , czyli liczba warunków pobocznych jest większa od liczby swobodnych parametrów. Wybieramy  $n$  warunków (2.2), co do których możemy

przypuszczać, iż są w danym przypadku mocniejsze; wprowadzamy odpowiednie nowe parametry  $x_i$  (2.4) i dokonujemy odwrócenia

$$(2.9) \quad a_j = a_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Wtedy

$$(2.10) \quad V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

i szukamy ekstremum jak poprzednio, ustalając od razu  $x_i = 1$ , jeżeli  $\partial V / \partial x_i < 0$ . Po znalezieniu kresu dolnego sprawdzamy spełnienie pozostałych warunków i bądź zmieniamy dobór  $x_i$ , bądź też tylko ograniczamy zakres rozwiązania.

(c) Jeżeli odwrócenie do postaci (2.6) lub (2.9) nie daje się efektywnie przeprowadzić, to możemy proponowaną metodę zastosować częściowo. Przypuścimy, że  $k$  parametrów  $a_j$  daje się wyrugować przez  $k$  parametrów  $x_i$ , czyli

$$(2.11) \quad a_j = a_j(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Wtedy

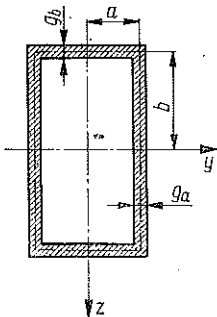
$$(2.12) \quad V = V(x_1, x_2, \dots, x_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n).$$

Postępujemy, jak poprzednio, traktując parametry  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  jako ograniczone warunkami (2.8), natomiast  $a_j$ ,  $j = k+1, k+2, \dots, n$  jako swobodne. Ponadto podstawiając (2.11) do (2.5), otrzymujemy

$$(2.13) \quad x_i = x_i(x_1, x_2, \dots, x_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n), \quad i = k+1, k+2, \dots, m$$

i po określeniu kresu dolnego funkcji (2.12) sprawdzamy dodatkowo warunki (2.8) dla wielkości (2.13). Jeżeli są one spełnione, to rozwiązanie jest poprawne; jeżeli nie, to należy przyjąć odpowiedni parametr  $x_i = 1$ , co daje dodatkowy warunek poboczny (w formie równości) dla funkcji (2.12).

Wysuwa się tu oczywiście ważne praktycznie zagadnienie, jak dobrać układ  $k$  parametrów  $a_j$  dających się wyrugować przez  $k$  parametrów  $x_i$ . Najdogodniej jest wprowadzić wszystkie wielkości  $x_i$  (2.4), i starać się rugować wszystkie parametry  $a_j$  (w przypadku b) lub  $m$  parametrów  $a_j$  (w przypadku a), a w razie niemożności wyrugowania jednego lub kilku parametrów  $a_j$  wyrugować odpowiednią liczbę  $x_i$ , co prowadzi do postaci (2.12) i (2.13).



Rys. 1

### 3. Kształtowanie skrzynkowego profilu pręta skręcanego w zakresie sprężystym

Jako przykłady zastosowania zaproponowanej metody ogólnej podamy kształtowanie przekroju pręta o cieniociennym profilu skrzynkowym, o wysokości  $2b$ , szerokości  $2a$  i stałych grubościach ścianek  $g_a$  i  $g_b$  (rys. 1). Zajmiemy się najpierw przypadkiem czystego skręcania zakładając swobodę pacyenia się przekroju. Z uwagi na biegunowo-symetryczny charakter obciążenia można by założyć  $a = b$ ,  $g_a = g_b$ , jednak będziemy prowadzili rozwiązania ogólne bez przyjęcia tego założenia.

Za kryterium kształtowania przyjmiemy minimalny ciężar pręta, który przy założeniu stałego przekroju wzdłuż osi pręta i jednorodności materiału scharakteryzowany będzie polem powierzchni przekroju, przy założeniu cienkościenności, równym

$$(3.1) \quad F = 4 (ag_b + bg_a).$$

Przyjmujemy przy tym jedynie «naturalne» warunki poboczne, ograniczające wielkość naprężeń (warunek ten nazywa się zazwyczaj, niezupełnie słusznie, warunkiem wytrzymałościowym lub warunkiem bezpieczeństwa) i zapewniające stateczność ścianek pręta (ten warunek posiada zasadnicze znaczenie w teorii prętów cienkościennych i często jego właśnie spełnienie zabezpiecza wymagane bezpieczeństwo). Nie będziemy natomiast uwzględniali możliwości utraty stateczności pręta skręcanego jako całości (wyboczenie skrętne, odpowiadające krzywej śrubowej); niebezpieczeństwo wyboczenia tego typu mogłoby być realne tylko przy prętach bardzo długich. Ilość warunków ( $m = 4$ ) jest wtedy równa ilości swobodnych parametrów ( $n = 4$ ), tak że będziemy mieli do czynienia z przypadkiem (a) omówionym w p. 2. Nałożenie dodatkowych warunków (np. odnośnie gabarytu, sztywności itp.) spowodowałoby zmianę typu problemu na (b).

Naprężenia styczne określimy wzorem Bredta

$$(3.2) \quad \tau_a = \frac{M_s}{8abg_a}, \quad \tau_b = \frac{M_s}{8abg_b},$$

natomiast naprężenia krytyczne dla ścianki przyjmujemy jak dla pasma płytowego poddanego czystemu ścinaniu. Problem utraty stateczności takiego pasma swobodnie podpartego został rozwiązany w 1924 r. przez S. W. SKAN i R. V. SOUTHWELLA, [15]. Przyjęcie pasma o nieskończonej długości zamiast płyty o pewnym skończonym stosunku boków (zależnym od długości pręta) spowodowałoby niezbyt wielkie różnice, ponieważ (jak wynika z badań M. STEINA i J. NEFFA, [16]) przy stosunku boków płyty 1:5, a więc dla pręta raczej krótkiego, przyrost naprężenia krytycznego wynosi tylko około 5%. Przyjęcie swobodnego podparcia zamiast sprężystego utwierdzenia daje również niewielki błąd na korzyść bezpieczeństwa. Należy podkreślić, że badanie stateczności pręta jako całości zastąpiliśmy przez prostsze badanie stateczności poszczególnych ścianek, ponieważ teoria stateczności prętów cienkościennych, poświęcona raczej problemom ściskania i zginania, nie dostarcza jeszcze dostatecznie prostych wzorów dla przypadku skręcania.

Wzór S. W. Skan – R. V. Southwella napiszemy za F. BLEICHEM, [2], s. 398, w postaci

$$(3.3) \quad \tau_k = \frac{\pi^2 E \sqrt{\psi}}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{g}{B} \right)^2 k,$$

przy czym  $g$  jest grubością,  $B$  szerokością pasma płytowego,  $B = 2a$  lub  $B = 2b$ ,  $k$  współczynnikiem zależnym od rodzaju obciążenia (w naszym przypadku  $k \approx 16/3 = 5,33$ ), wreszcie współczynnik  $\psi = E_t/E$ , gdzie  $E_t$  jest «modułem stycznym», uwzględnia możliwość wyboczenia niesprężystego. Wprowadzenie tego współ-

czynnika odpowiada uproszczonej teorii wyboczenia sprężysto – plastycznego płyt, podanej przez E. Z. STOWELLA, [17]; podobną koncepcję można znaleźć już wcześniej w monografii P. F. PAKOWICZA, [10], (t. 2, s. 951). Dla uzyskania ogólności pozostawimy na razie parametr  $\psi$  przyjmując później  $\psi = 1$  (wyboczenie sprężyste).

Ograniczając naprężenia styczne  $\tau$  przez naprężenia dopuszczalne  $k_t$  zapiszemy warunki wytrzymałościowe w postaci

$$(3.4) \quad \tau_a \leq k_t, \quad \tau_b \leq k_t,$$

a zabezpieczając się przed utratą stateczności ścianki stopniem pewności  $j$ , mamy dodatkowo

$$(3.5) \quad \tau_a \leq \frac{\tau_{ak}}{j}, \quad \tau_b \leq \frac{\tau_{bk}}{j}.$$

Parametry  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , wprowadzimy więc za pomocą wzorów

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x_1 = x_a &= \frac{\tau_a}{k_t} = \frac{M_s}{8 abg_a k_t}, \\ x_2 = x_b &= \frac{\tau_b}{k_t} = \frac{M_s}{8 abg_b k_t}, \\ x_3 = y_a &= \frac{j\tau_a}{\tau_{ak}} = \frac{9(1-\nu^2)jbM_s}{8\pi^2 \sqrt{\psi_a} E a g_a^3}, \\ x_4 = y_b &= \frac{j\tau_b}{\tau_{bk}} = \frac{9(1-\nu^2)jaM_s}{8\pi^2 \sqrt{\psi_b} E b g_b^3}. \end{aligned}$$

Parametry te dla wygody będziemy oznaczali przez  $x_a, x_b, y_a, y_b$ , przy czym  $x$  odnosić się będą do wytrzymałości,  $y$  do stateczności.

Rozwiązanie układu równań względem  $a, b, g_a$  i  $g_b$  nie przedstawia tu żadnych trudności; otrzymujemy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\psi_b^{1/6} \pi^{1/3} E^{1/6} M_s^{1/3} x_a^{1/2} y_b^{1/3}}{2\psi_a^{1/12} 3^{1/3} (1-\nu^2)^{1/6} k_t^{1/2} j^{1/6} x_b y_a^{1/6}}, \\ b &= \frac{\psi_a^{1/6} \pi^{1/3} E^{1/6} M_s^{1/3} x_b^{1/2} y_a^{1/3}}{2\psi_b^{1/12} 3^{1/3} (1-\nu^2)^{1/6} k_t^{1/2} j^{1/6} x_a y_b^{1/6}}, \\ g_a &= \frac{3^{2/3} (1-\nu^2)^{1/3} j^{1/3} M_s^{1/3} x_b^{1/2}}{2\psi_a^{1/12} \psi_b^{1/12} \pi^{2/3} E^{1/3} x_a^{1/2} y_a^{1/6} y_b^{1/6}}, \\ g_b &= \frac{3^{2/3} (1-\nu^2)^{1/3} j^{1/3} M_s^{1/3} x_a^{1/2}}{2\psi_a^{1/12} \psi_b^{1/12} \pi^{2/3} E^{1/3} x_b^{1/2} y_a^{1/6} y_b^{1/6}}. \end{aligned}$$

Podstawienie (3.7) do (3.1) pozwala określić pole przekroju  $F$  jako funkcję parametrów  $x$  i  $y$ :

$$(3.8) \quad F = \frac{3^{1/3} (1-\nu^2)^{1/6} j^{1/6} M_s^{2/3}}{\pi^{1/3} E^{1/6} k_t^{1/2}} (\psi_a^{-1/6} \psi_b^{1/12} x_a x_b^{-3/2} y_a^{-1/3} y_b^{1/6} + \psi_a^{1/12} \psi_b^{1/6} + x_a^{-3/2} x_b y_a^{1/6} y_b^{-1/3}).$$

Ograniczymy się najpierw do zakresu wybożenia sprężystego przyjmując  $\psi_a = \psi_b = 1$ . Z wybożeniem sprężystym mamy do czynienia wtedy, gdy naprężenie krytyczne nie przekracza granicy sprężystości przy ścinaniu  $S_t$ , czyli gdy  $j\tau \leq S_t$ . Wtedy

$$(3.9) \quad F = \frac{3^{1/3} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} M_s^{2/3}}{\pi^{1/3} E^{1/6} k_t^{1/2}} (x_a x_b^{-3/2} y_a^{-1/3} y_b^{1/6} + x_a^{-3/2} x_b y_a^{1/6} y_b^{-1/3}).$$

Wykażemy najpierw w sposób ogólny, że funkcja tego typu nie może mieć ekstremum ze względu na więcej niż jedną zmienną (przy innych zmiennych ustalonych). Weźmiemy pod uwagę funkcję

$$(3.10) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} + \prod_{i=1}^n x_i^{b_i}.$$

Przyrównanie do zera pochodnej  $\partial f / \partial x_j$  daje

$$(3.11) \quad \frac{a_j}{x_j} \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} + \frac{b_j}{x_j} \prod_{i=1}^n x_i^{b_i} = 0,$$

skąd po podzieleniu przez  $\frac{1}{x_j} \prod_{i=1}^n x_i^{b_i}$ ,

$$(3.12) \quad \prod_{i=1}^n x_i^{a_i - b_i} = -\frac{b_j}{a_j}.$$

Obierając inną zmienną  $x_k$  otrzymujemy po prawej stronie  $-b_k/a_k$  przy niezmięnionej lewej stronie. Prowadzi to do sprzeczności, o ile nie zachodzi

$$(3.13) \quad \frac{b_k}{a_k} = \frac{b_j}{a_j}.$$

W naszym przypadku nie zachodzi taka proporcja dla żadnej pary wykładników, zatem możliwe jest ekstremum tylko ze względu na jedną ze zmiennych. Przy ustalonych  $x_b$ ,  $y_a$  i  $y_b$  funkcja  $F$  posiada minimum dla  $x_a = (3/2)^{2/5} > 1$ ; przy ustalonych  $x_a$ ,  $x_b$  i  $y_b$  minimum występuje dla  $y_a = 4$ . W takim razie dla  $x < 1$  lub  $y < 1$  funkcja jest malejąca i kres dolny zostaje osiągnięty w punkcie  $x_a = x_b = y_a = y_b = 1$  (spełnienie wszystkich warunków pobocznych w formie równości, ekstremum typu 0/4).

Optymalne wartości parametrów  $a$ ,  $b$ ,  $g_a$ ,  $g_b$  wynoszą zatem

$$(3.14) \quad a = b = \frac{\pi^{1/3} E^{1/6} M_s^{1/3}}{2 \cdot 3^{1/3} (1 - \nu^2)^{1/6} k_t^{1/2} j^{1/6}} = 0,5158 \frac{E^{1/6} M_s^{1/3}}{k_t^{1/2} j^{1/6}},$$

$$(3.15) \quad g_a = g_b = \frac{3^{2/3} (1 - \nu^2)^{1/3} j^{1/3} M_s^{1/3}}{2\pi^{2/3} E^{1/3}} = 0,4699 \frac{j^{1/3} M_s^{1/3}}{E^{1/3}},$$

a minimalna wartość pola przekroju

$$(3.16) \quad F_{\min} = \frac{2 \cdot 3^{1/3} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} M_s^{2/3}}{\pi^{1/3} E^{1/6} k_t^{1/2}} = 1,9388 \frac{j^{1/6} M_s^{2/3}}{E^{1/6} k_t^{1/2}}.$$

Liczbowe wartości współczynników podano tu dla  $\nu = 0,3$  z tym, że zmiana wartości współczynnika Poissona posiada w tym przypadku wpływ nieistotny.

#### 4. Kształtowanie skrzynkowego profilu pręta skręcanego w zakresie sprężysto - plastycznym

Wobec uzyskanego poprzednio wyniku  $x_a = x_b = 1$  mamy  $\tau = k_t$ , czyli warunkiem stosowalności uzyskanych wzorów jest  $jk_t \leq S_t$ . Przy małych naprężeniach dopuszczalnych  $k_t$  nierówność ta może mieć miejsce, bowiem przyjmowane stopnie pewności ze względu na stateczność płyty  $j$  posiadają z reguły znacznie mniejszą wartość niż przy stateczności prętów. Tak np. A. PFLÜGER, [11], zaleca przyjmować dla przypadku ścinania  $j = 1, 2$ , Ch. MASSONET, [9], przyjmuje  $j = 1,35$ . Tym niemniej, przy podwyższeniu naprężeń dopuszczalnych nierówność powyższa nie będzie spełniona i należy wtedy liczyć się z możliwością wybożenia sprężysto - plastycznego.

Rozpatrzmy obecnie szczegółowo ten przypadek o tyle ciekawy, że prowadzący do jakościowo różnych wyników od przypadku wybożenia sprężystego. Będziemy zakładali zatem  $S_t < jk_t$ .

Założymy, że rozkład naprężeń  $\tau$  również w zakresie sprężysto - plastycznym określony jest wzorami (3.2). Przy  $g_a = g_b$  przyjęcie takie można uważać za ścisłe, bowiem wtedy  $\tau_a = \tau_b$ ; natomiast przy różnych grubościach ścianek przyjęcie to będzie jedynie przybliżone. Do wzorów (3.7) i (3.8) należy podstawić stosowną funkcję  $\psi = \psi(\tau_k)$ . Najpierw podobnie jak F. BLEICH ([2], s. 54) oprzemy się na wzorze parabolicznym typu Johnsona - Ostenfelda, otrzymując ostatecznie dla przypadku naprężeń ścinających

$$(4.1) \quad \psi = \frac{(Q_t - \tau_k) \tau_k}{(Q_t - S_t) S_t},$$

gdzie  $Q_t$  oznacza granicę plastyczności przy ścinaniu. W naszym przypadku

$$(4.2) \quad \tau_{ak} = \frac{j\tau_a}{y_a} = jk_t \frac{x_a}{y_a},$$

zatem

$$(4.3) \quad \psi_a = \frac{(Q_t y_a - jk_t x_a) jk_t x_a}{(Q_t - S_t) S_t y_a^2}$$

i podobnie dla ścianki  $b$ .

Podstawiając (4.3) do (3.8) stwierdzamy najpierw, że pochodne  $\partial F/\partial y_a$  i  $\partial F/\partial y_b$  są dla  $0 < y_a < 1$  i  $0 < y_b < 1$  ujemne, zatem należy przyjąć  $y_a = y_b = 1$  (wykorzystanie warunków stateczności w formie równości). Otrzymujemy więc

$$(4.4) \quad F = \frac{3^{1/3} (1 - \nu^2)^{1/6} (Q_t - S_t)^{1/12} S_t^{1/12} j^{1/12} M_s^{2/3}}{\pi^{1/3} E^{1/6} k_t^{7/12}} [(Q_t - jk_t x_a)^{-1/6} \times \\ \times (Q_t - jk_t x_b)^{1/12} x_a^{5/6} x_b^{-17/12} + (Q_t - jk_t x_a)^{1/12} (Q_t - jk_t x_b)^{-1/6} x_a^{-17/12} x_b^{5/6}].$$



Badanie tej funkcji, jako funkcji dwóch zmiennych  $x_a$  i  $x_b$ , jest żmudne i natrafia na trudności. Przypuszczając, że otrzymamy w wyniku profil kwadratowy (podobnie jak poprzednio), założymy  $x_a = x_b = x$ , co znacznie uprości analizę, a następnie wykazemy, że założenie to istotnie realizuje minimum funkcji dwóch zmiennych. Przy tym założeniu możemy napisać

$$(4.5) \quad F = C(Q_t - jk_t x)^{-1/12} x^{-7/12},$$

a przyrównanie do zera pochodnej  $\partial F/\partial x$  daje

$$(4.6) \quad x_{\text{opt}} = \frac{7}{8} \frac{Q_t}{jk_t}.$$

Wynik ten jest interesujący z praktycznego punktu widzenia: ponieważ  $\tau_k = j\tau = = jk_t x$ , przeto okazuje się, że w świetle wzoru Johnsona - Ostenfelda optymalne warunki uzyskuje się przy przyjęciu naprężeń krytycznych dla ścianki równych  $7/8 = 0,875$  odpowiedniej granicy plastyczności.

Podamy obecnie szkic dowodu, iż uzyskany wynik realizuje minimum funkcji dwóch zmiennych. Wprowadzając dla uproszczenia nowe zmienne bezwymiarowe, różniące się od poprzednich tylko stałymi współczynnikami,

$$(4.7) \quad u = \frac{jk_t}{Q_t} x_a, \quad v = \frac{jk_t}{Q_t} x_b,$$

zamiast (4.5) otrzymamy

$$(4.8) \quad F = C[(1 - v)^{1/12} (1 - u)^{-1/6} u^{5/6} v^{-17/12} + (1 - u)^{1/12} (1 - v)^{-1/6} u^{-17/12} v^{5/6}].$$

Ta funkcja rośnie nieograniczenie na brzegach kwadratu  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$ ,  $v = 1$ , zatem wewnątrz kwadratu posiada minimum. Przyrównując do zera pochodne  $\partial F/\partial u$  i  $\partial F/\partial v$  otrzymujemy układ równań

$$(4.9) \quad \begin{aligned} (10 - 8u) (1 - v)^{1/4} u^{9/4} - (17 - 16u) (1 - u)^{1/4} v^{9/4} &= 0, \\ (10 - 8u) (1 - u)^{1/4} v^{9/4} - (17 - 16v) (1 - v)^{1/4} u^{9/4} &= 0. \end{aligned}$$

Obliczając z pierwszego równania  $(1 - v)^{1/4} u^{9/4}$  i podstawiając do drugiego otrzymujemy liniowe równanie ze względu na  $v$ , skąd

$$(4.10) \quad v = \frac{63 - 64u}{64(1 - u)},$$

a po podstawieniu tej wartości z powrotem do pierwszego równania uzyskujemy

$$(4.11) \quad 8192(5 - 4u)(1 - u)^{7/4} u^{9/4} - (17 - 16u)(63 - 64u)^{9/4} = 0.$$

Równanie to posiada pierwiastek  $u = 7/8$ ; badając pochodną wyrażenia po lewej stronie (4.11) stwierdzamy, że wewnątrz przedziału  $0 < u < 1$  nie istnieje inny pierwiastek, a ponieważ tej wartości  $u$  odpowiada  $v = 7/8$ , więc uzyskaliśmy potwierdzenie wyniku (4.6).

Należy teraz rozróżnić następujące trzy podprzypadki:

$$(a) S_t < jk_t < \frac{7}{8} Q_t, \quad (b) S_t < \frac{7}{8} Q_t < jk_t, \quad (c) \frac{7}{8} Q_t < S_t < jk_t.$$

Wprowadzimy dogodnie oznaczenia bezwymiarowych stałych materiałowych

$$(4.12) \quad \frac{S_t}{Q_t} = s, \quad \frac{jk_t}{Q_t} = \xi,$$

przy czym stała  $\xi$  zależy również od przyjętego stopnia bezpieczeństwa (warunków pracy konstrukcji) i określimy zakres poszczególnych podprzypadków następująco:

$$(a) s < \xi < \frac{7}{8}, \quad (b) s < \frac{7}{8} < \xi, \quad (c) \frac{7}{8} < s < \xi.$$

W zapisie tym rozwiązany poprzednio zakres sprężysty scharakteryzowany jest przez  $\xi < s$ .

(a). Jeżeli  $jk_t < 7/8 Q_t$ , to ze wzoru (4.6) wynika  $x_{opt} > 1$ . Wobec warunku  $x \leq 1$  należy więc przyjąć  $x = 1$ . Otrzymujemy więc tutaj, pobobnie jak w zakresie sprężystym, ekstremum typu 0/2 (bez wstępnego założenia profilu kwadratowego — ekstremum typu 0/4). Podstawienie  $x = 1$  do (4.4) pozwala napisać ten wzór w postaci

$$(4.13) \quad F_{min} = F_0 \sqrt[12]{\frac{(1-s)s}{(1-\xi)\xi}},$$

gdzie  $F_0$  jest przekrojem minimalnym dla zakresu sprężystego, określonym wzorem (3.16). Podobnie, podstawiając  $x = 1$  do (4.3), a następnie (3.7) określimy wymiary przekroju za pomocą wzorów

$$(4.14) \quad a = b = a_0 \sqrt[12]{\frac{(1-\xi)\xi}{(1-s)s}},$$

$$g_a = g_b = g_0 \sqrt[6]{\frac{(1-s)s}{(1-\xi)\xi}},$$

przy czym  $a_0$  i  $g_0$  określone są wzorami (3.14) i (3.15).

(b). Jeżeli  $S_t < 7/8 Q_t < jk_t$ , czyli  $s < 7/8 < \xi$ , to określona wzorem (4.6) optymalna wartość  $x$ ,  $x_{opt} = 7/8 \xi$ , jest mniejsza od jedności i realizuje minimum pola przekroju  $F$ . Jest to ekstremum typu 1/2 (lub typu 2/4 bez wstępnego założenia profilu kwadratowego). Optymalne naprężenia styczne w ściance są wtedy mniejsze od naprężeń dopuszczalnych  $k_t$ . Podstawienie otrzymanej wartości  $x_{opt}$  do (4.3), a następnie do (4.4) i (3.7) daje

$$(4.15) \quad F_{min} = F_0 \sqrt[12]{\frac{8^8 (1-s)s \xi^6}{7^7}},$$

$$a = b = a_0 \sqrt[12]{\frac{8^4 \xi^6}{7^5 (1-s)s}},$$

$$g_a = g_b = g_0 \sqrt[6]{\frac{8^2}{7} (1-s)s}.$$

(c). W przypadku  $7Q_t/8 < S_t$  optymalne naprężenie, określone w oparciu o wzór Johnsona – Ostenfelda, leży poza zakresem stosowalności tego wzoru. Wobec tego należy przyjąć wartość graniczną  $j\tau = S_t$ , czyli  $x = S_t/jk_t = s/\xi$ . Mamy wtedy również ekstremum typu 1/2 (lub 2/4), chociaż nie zachodzi warunek  $\partial F/\partial x = 0$ ; minimum jest osiągnięte na granicy stosowalności dwóch wzorów i ma charakter «punktu załomu». Podstawienie tej wartości  $x$  do (4.3), (4.4) i (3.7) prowadzi do wzorów

$$(4.16) \quad F_{\min} = F_0 \sqrt{\xi/s}, \quad a = b = a_0 \sqrt{\xi/s}, \quad g_a = g_b = g_0.$$

W tym przypadku grubość ścianek nie ulega zmianie w stosunku do grubości obliczonej w zakresie sprężystym.

Określone za pomocą wzorów (4.13), (4.15) i (4.16) wartości  $F_{\min}$  są oczywiście większe od  $F_0$ . Tak mogłoby nie być tylko w przypadku przyjęcie  $s < 0,5$  we wzorze (4.13), jednak przy tak małej granicy sprężystości stosowalność wzoru Johnsona – Ostenfelda jest w ogóle dyskusyjna, bowiem wtedy część paraboli leży powyżej hiperboli Eulera.

Dla zbadania wpływu przyjętego wzoru wyjściowego dla naprężeń krytycznych w zakresie sprężysto – plastycznym na uzyskane wyniki rozwiązaliśmy jeszcze raz badany problem przy innym wyborze funkcji  $\psi$ . Oprzemy się mianowicie na propozycji A. YLINENA, [23] i [24], z której wynika

$$(4.17) \quad \psi = \frac{Q_t - \tau_k}{Q_t - c\tau_k},$$

gdzie  $c$  jest pewną bezwymiarową stałą materiałową, zestawioną przez YLINENA w tablicy dla kilku ważniejszych materiałów konstrukcyjnych. Wzór (4.17), którego słuszność postuluje się dla całego zakresu  $0 < \tau_k < Q_t$ , był punktem wyjścia dla wielu prac z dziedziny stateczności prętów, w szczególności niepryzmatycznych (I. SALA, [13], M. WNUK i M. ŻYCZKOWSKI, [22]).

Ograniczając się do badania profilu kwadratowego otrzymujemy teraz zamiast (4.5)

$$(4.18) \quad F = C(Q_t y - cjk_t x)^{1/12} (Q_t y - jk_t x)^{-1/12} x^{-1/2} y^{-1/6}.$$

Łatwo sprawdzić, że pochodna  $\partial F/\partial y$  jest ujemna, zatem przyjmujemy  $y = 1$ . Przyrównanie do zera pochodnej prowadzi do równania kwadratowego, którego mniejszy pierwiastek

$$(4.19) \quad x = \frac{7+5c - \sqrt{(1-c)(49-25c)}}{12c} \frac{Q_t}{jk_t}$$

odpowiada minimum funkcji  $F$ .

Rozwiązaniem optymalnym na parametr  $x$  jest zatem

$$(4.20) \quad x = \min \left\{ \frac{7+5c - \sqrt{(1-c)(49-25c)}}{12c} \frac{Q_t}{jk_t}, 1 \right\}.$$

Obliczone za pomocą wzoru (4.19) wartości podaje tablica 1; w tablicy tej przyjęto stałe  $c$  według A. YLINENA, [24]. W przypadku  $c = 0$  otrzymano wartość przez przejście do granicy.

Tablica 1. Optymalne wartości naprężeń krytycznych według wzoru A. Ylinena

Materiał	$c$	$\tau_k/Q_t$
Beton	0	0,857
Elektron (stop magnezu)	0,857	0,904
Sośnina fińska	0,875	0,909
Stal St37 i St52	0,977	0,950

Wartości te są na ogół nieco wyższe od wartości 0,875 uzyskanej w oparciu o wzór Johnsona – Ostenfelda, jednak różnice nie są zbyt istotne. Należy podkreślić, że wobec postulowanej uniwersalności wzoru (4.17) nie musimy tu analizować podprzypadków, których badanie przy przyjęciu wzoru Johnsona – Ostenfelda było dość żmudne.

#### 5. Kształtowanie skrzynkowego profilu pręta poddanego czystemu zginaniu

Podobnie jak w poprzednim zagadnieniu będziemy poszukiwali wartości czterech parametrów  $a$ ,  $b$ ,  $g_a$  i  $g_b$ , realizujących minimalną wartość pola powierzchni przekroju  $F$ , (3.1), przedstawionego na rysunku 1. Założymy, że pręt o długości  $l$ , podparty dwuprzegubowo, poddany jest czystemu zginaniu momentem  $M$ . Ścianka  $z = -b$ , którą w dalszym ciągu będziemy nazywali umownie ścianką górną, jest wtedy ściskana i może utracić stateczność; ścianka dolna — rozciągana. Ścianki  $y = \pm a$  będziemy nazywali ściankami bocznymi; są one zginane w swoich płaszczyznach i mogą również utracić stateczność. Ponadto pręt jako całość może ulec zwichrzeniu. Przyjmijmy więc cztery warunki poboczne:

warunek wytrzymałościowy, który w oparciu o elementarną teorię zginania przyjmie postać

$$(5.1) \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{I_y} b \leq k,$$

gdzie  $k$  jest ustalonym naprężeniem dopuszczalnym;

warunek stateczności ścianki górnej

$$(5.2) \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{I_y} b \leq \frac{\sigma_{kg}}{j};$$

warunek stateczności ścianki bocznej

$$(5.3) \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{I_y} b \leq \frac{\sigma_{kb}}{j},$$

gdzie  $\sigma_{kg}$  i  $\sigma_{kb}$  oznaczają naprężenia krytyczne odpowiednio dla ścianki górnej i bocznej,  $j$  stopień pewności ze względu na wyboczenie ścianek;

warunek zwiczenia

$$(5.4) \quad M \leq \frac{M_k}{j_z},$$

przy czym  $M_k$  jest momentem krytycznym ze względu na zwiczenie,  $j_z$  odpowiednim stopniem pewności.

Przy analizie stateczności ograniczymy się tylko do zakresu sprężystego przyjmując, że naprężenia krytyczne nie przekroczą granicy sprężystości  $S$ . Założymy, że ścianki są pasmami płytowymi swobodnie podpartymi; podobnie, jak poprzednio, pominiemy wpływ sprężystego utwierdzenia pasma czyniąc błąd na korzyść pewności. Za F. BLEICHEM, [2], przyjmijmy zatem dla ścianki górnej jako równomiernie jednokierunkowo ściskanego pasma o szerokości  $2a$ ,

$$(5.5) \quad \sigma_{kg} = \frac{\pi^2 E g_a^2}{12 (1 - \nu^2) a^2},$$

a dla ścianki bocznej, jako zginanego w swojej płaszczyźnie pasma o szerokości  $2b$ ,

$$(5.6) \quad \sigma_{kb} = \frac{\pi^2 E g_b^2}{2 (1 - \nu^2) b^2}.$$

Moment krytyczny ze względu na zwiczenie pręta dwuprzegubowo podpartego jest równy (F. BLEICH, [2], s. 160)

$$(5.7) \quad M_k = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_z GK} \sqrt{1 + \pi^2 \frac{EI_\omega}{l^2 GK}},$$

przy czym charakterystyki geometryczne przekroju w naszym przypadku wyniosą: momenty bezwładności względem osi  $y$  i  $z$

$$(5.8) \quad I_y = 4u g_b b^2 + \frac{4}{3} b^3 g_a, \quad I_z = 4a^2 b g_a + \frac{4}{3} a^3 g_b;$$

moment bezwładności czystego skręcania

$$(5.9) \quad K = \frac{\Omega^2}{\int \frac{ds}{g}} = \frac{16 a^2 b^2 g_a g_b}{a g_a + b g_b},$$

główny wycinkowy moment bezwładności (S. D. PONOMARIEW i inni, [22], t. I, s. 429)

$$(5.10) \quad I_\omega = \frac{4a^2 b^2 (a g_b + b g_a) (a g_a - b g_b)^2}{3 (a g_a + b g_b)^2}.$$

Drugi składnik pod pierwiastkiem wzoru (5.7) przedstawia wpływ skrępowania końcowych przekrojów pręta na zwiczenie. Okazuje się, że w naszym przypadku można będzie składnik ten pominąć, ponieważ przy większej długości  $l$  wpływ skrępowania jest znikomy, a w zakresie mniejszych długości sam warunek zwiczenia (5.4) będzie, jak zobaczymy, niemal bez znaczenia.

Wprowadzimy najpierw bezwymiarowe parametry

$$(5.11) \quad \frac{g_a}{b} = \alpha, \quad \frac{g_b}{b} = \beta, \quad \frac{a}{b} = \gamma$$

pozostawiając tylko jeden parametr wymiarowy, a mianowicie  $b$ ; takie przyjęcie ułatwi znacznie rugowanie poszczególnych parametrów i cały przebieg analizy. Parametry  $x_i$ , wprowadzone odpowiednio do warunków (5.1)-(5.4), dadzą się przedstawić w postaci

$$(5.12) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{Mb}{I_y k} = \frac{3M}{4b^3 k (\alpha + 3\beta\gamma)}, \\ x_2 &= \frac{Mbj}{I_y \sigma_{kg}} = \frac{9(1-\nu^2) Mj\gamma^2}{\pi^2 Eb^3 \beta^2 (\alpha + 3\beta\gamma)}, \\ x_3 &= \frac{Mbj}{I_y \sigma_{kb}} = \frac{3(1-\nu^2) Mj}{2\pi^2 Eb^3 \alpha^2 (\alpha + 3\beta\gamma)}, \\ x_4 &= \frac{Mj_z}{M_k} = \frac{Mj_z l \sqrt{3} \sqrt{\beta + \alpha\gamma}}{8\pi \sqrt{EG} b^4 \gamma^2 \sqrt{\alpha\beta (\beta\gamma + 3\alpha)}}, \end{aligned}$$

a powierzchnia przekroju, której kres dolny chcemy obliczyć,

$$(5.13) \quad F = 4b^2 (\alpha + \beta\gamma).$$

Rugowanie parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $b$  z układu (5.12) jest trudniejsze niż w poprzednim przypadku. Dzieliąc pierwsze równanie przez trzecie otrzymujemy najpierw

$$(5.14) \quad \alpha = \sqrt{\frac{2(1-\nu^2)jk}{\pi^2 E}} \sqrt{\frac{x_1}{x_3}},$$

a z podzielenia drugiego przez trzecie wynika

$$(5.15) \quad \beta = \alpha\gamma \sqrt{\frac{6x_3}{x_2}} = \gamma \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)jk}{\pi^2 E}} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Podstawiając tę wartość do równań pierwszego i czwartego otrzymujemy układ o niewiadomych  $b$  i  $\gamma$ . Obliczając z pierwszego  $b$  równania uzyskujemy

$$(5.16) \quad b = \frac{3^{1/3} \pi^{1/3} E^{1/6} x_3^{1/6} M^{1/3}}{2^{5/6} (1-\nu^2)^{1/6} j^{1/6} k^{1/2} x_1^{1/2} \left(1 + 3\gamma^2 \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}\right)^{1/3}},$$

a podstawienie z kolei tej wartości do czwartego równania prowadzi do związku

$$(5.17) \quad x_4 = \frac{(1-\nu^2)^{1/6} j^{1/6} j_z k^{3/2} l x_1^{3/2} x_2^{1/4} \left(1 + \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}\right)^{1/2} \left(1 + 3\gamma^2 \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}\right)^{4/3}}{2^{5/12} 3^{13/12} \pi^{4/3} (1+\nu)^{1/2} E^{7/6} M^{1/3} x_3^{5/12} \gamma^2 \left(3 + \gamma^2 \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}\right)^{1/2}}.$$

Z równania tego należałoby obliczyć pozostały jeszcze do wyrugowania parametr  $\gamma$ . Niestety, uwalniając je od niewymierności otrzymujemy równanie dziewiątego stopnia względem  $\gamma^2$ , tak że napisanie wzoru ogólnego na rozwiązanie nie jest możliwe. Możemy więc zaproponowaną metodę «transformacji linearyzującej» zastosować tylko częściowo (przypadek c omówiony w p. 2).

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy zamiast  $\gamma$  nowy parametr  $\delta$ :

$$(5.18) \quad \delta = \gamma^2 \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}$$

i po wprowadzeniu na bezwymiarową wielkość o charakterze «smukłości pręta» oznaczenia

$$(5.19) \quad \zeta = \frac{2^{1/12} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} j_z k^{3/2} l}{3^{7/12} \pi^{4/3} (1 + \nu)^{1/2} E^{7/6} M^{1/3}} = 0,1047 \frac{j^{1/6} j_z k^{3/2} l}{E^{7/6} M^{1/3}},$$

wzór (5.17) przedstawimy w postaci

$$(5.20) \quad x_4 = \frac{x_1^{3/2} x_3^{1/12} \left(1 + \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}\right)^{1/2} (1 + 3\delta)^{4/3}}{x_2^{1/4} (3 + \delta)^{1/2} \delta} \zeta.$$

Współczynnik liczbowy we wzorze (5.19), podobnie jak i we wzorach następnych, podano dla  $\nu = 0,3$ . Wpływ współczynnika Poissona jest tu jednak z reguły do pominięcia.

Podstawiając (5.14), (5.15), (5.16) i (5.18) do (5.13) otrzymujemy

$$(5.21) \quad F = \frac{2^{5/6} 3^{2/3} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} M^{2/3} (1 + \delta)}{\pi^{1/3} k^{1/2} E^{1/6} x_1^{1/2} x_3^{1/6} (1 + 3\delta)^{2/3}};$$

wprowadzimy bezwymiarowe pole przekroju

$$(5.22) \quad f = \frac{\pi^{1/3} k^{1/2} E^{1/6}}{2^{5/6} 3^{2/3} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} M^{2/3}} F = 0,4014 \frac{k^{1/2} E^{1/6}}{j^{1/6} M^{2/3}} F$$

i będziemy badali funkcję

$$(5.23) \quad f = \frac{1 + \delta}{x_1^{1/2} x_3^{1/6} (1 + 3\delta)^{2/3}}.$$

Zauważymy, że  $f$  zależy od  $x_2$  i od  $x_4$  tylko za pośrednictwem parametru  $\delta$ ; interpretację tej ważnej własności podamy poniżej.

Rozpatrzmy obecnie trzy przypadki.

(a) Przyjmijmy, że parametr  $\delta$  jest we wzorze (5.23) parametrem niezależnym. Przyjęcie takie będzie słuszne, jak długo ze wzoru (5.20) będziemy otrzymywali  $x_4 \leq 1$ , czyli dla dostatecznie małych smukłości  $\zeta$ . Tak więc warunek  $x_4 = 1$  wyrażony za pomocą  $\zeta$  będzie stanowił ograniczenie badanego zakresu. Przy tym założeniu

$\partial f/\partial x_1 < 0$ ,  $\partial f/\partial x_3 < 0$ , więc  $x_1 = x_3 = 1$ , a przyrównanie do zera pochodnej  $\partial f/\partial \delta$  daje  $\delta = \delta_{\text{opt}} = 1$  oraz  $f = f_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,7937$ . Ze wzoru (5.18) wynika

$$(5.24) \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{x_2}{6}} = 0,6389 \sqrt[4]{x_2},$$

a po podstawieniu do (5.14), (5.15), (5.16) i (5.22) określimy poszukiwane wymiary i odpowiednie pole powierzchni przekroju wzorami

$$(5.25) \quad b = \frac{3^{1/3} \pi^{1/3} E^{1/6} M^{1/3}}{2^{3/2} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} k^{1/2}} = 0,7586 \frac{E^{1/6} M^{1/3}}{j^{1/6} k^{1/2}},$$

$$a = \gamma b = \frac{3^{1/12} \pi^{1/3} E^{1/6} M^{1/3}}{2^{7/4} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} k^{1/2}} x_2^{1/4} = 0,4847 \frac{E^{1/6} M^{1/3}}{j^{1/6} k^{1/2}} x_2^{1/4},$$

$$g_a = ab = \frac{3^{1/3} (1 - \nu^2)^{1/3} j^{1/3} M^{1/3}}{2\pi^{2/3} E^{1/3}} = 0,3258 \frac{M^{1/3} j^{1/3}}{E^{1/3}},$$

$$g_b = \beta b = \frac{3^{7/12} (1 - \nu^2)^{1/3} j^{1/3} M^{1/3}}{2^{3/4} \pi^{2/3} E^{1/3}} x_2^{-1/4} = 0,5098 \frac{M^{1/3} j^{1/3}}{E^{1/3}} x_2^{-1/4},$$

$$F_{\text{min}} = \frac{2^{1/2} 3^{2/3} (1 - \nu^2)^{1/6} j^{1/6} M^{2/3}}{\pi^{1/3} k^{1/2} E^{1/6}} = 1,9772 \frac{M^{2/3} j^{1/6}}{k^{1/2} E^{1/6}}.$$

Warto zauważyć, że mamy tu  $ag_b = bg_a$ , zatem ciężar ścianki górnej równy jest ciężarowi ścianki bocznej.

Podstawienie  $\delta = 1$  do (5.20) daje

$$(5.26) \quad x_4 = 2^{5/3} \left( 1 + \sqrt{\frac{6}{x_2}} \right)^{1/2} x_2^{-1/4} \zeta.$$

Ze wzoru tego wynika, że ze wzrostem  $x_2$  maleje  $x_4$  i na odwrót. Parametry te nie występują we wzorze na  $F$ , można je więc dobrać dowolnie [przy zachowaniu związku (5.26)], byleby zachować warunki  $x_2 \leq 1$  i  $x_4 \leq 1$ . Ponieważ  $x_2$  występuje we wzorach (5.25) na  $a$  i  $g_b$ , więc zmieniając  $x_2$  zmieniamy grubość i szerokość ścianki górnej, nie zmieniając pola powierzchni jej przekroju. Minimalna grubość  $g_b$  ograniczona jest warunkiem stateczności ścianki górnej ( $x_2 = 1$ ), a minimalna szerokość  $2a$  warunkiem zwiczerzenia ( $x_4 = 1$ ). Przyjmując we wzorze (5.26) jednocześnie  $x_2 = 1$  i  $x_4 = 1$  określamy granicę badanego zakresu

$$(5.27) \quad \zeta_{\text{max}} = \frac{1}{2^{5/3} \sqrt{1 + \sqrt{6}}} = 0,1696;$$

dla  $\zeta > 0,1696$ , czyli prętów o większej długości, spełnienie jednocześnie  $x_2 \leq 1$  i  $x_4 \leq 1$  nie jest możliwe.



Określmy teraz graniczne wartości  $\gamma$  i odpowiednie  $x_2$  i  $x_4$ . Przyjmując  $x_2 = 1$ , czyli pełne wykorzystanie warunku stateczności ścianki górnej, otrzymujemy  $\gamma = \gamma_{\max} = 6^{-1/4}$ . Odpowiednia wartość  $x_4$  wynosi wtedy

$$(5.28) \quad x_4 = x_{4\min} = 2^{5/3} \sqrt{1 + \sqrt{6}} \zeta = 5,8965 \zeta.$$

Przyjmując  $x_4 = 1$ , czyli pełne wykorzystanie warunku zwichrzenia, otrzymujemy z (5.26) równanie kwadratowe ze względu na  $\sqrt{x_2}$ , skąd

$$(5.29) \quad x_2 = x_{2\min} = 2^{14/3} \zeta^4 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2^{5/6} \zeta^2}} \right)^2$$

oraz wobec (5.24)

$$(5.30) \quad \gamma = \gamma_{\min} = \frac{2^{11/12}}{3^{1/4}} \zeta \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2^{5/6} \zeta^2}}} = \\ = 1,4344 \zeta \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{0,9721}{\zeta^2}}}.$$

Za optymalny można uznać przypadek  $x_2 = x_4$ . Za optimum uważamy tu już nie pole powierzchni przekroju, które od tych parametrów nie zależy, lecz jednoczesny proporcjonalny wzrost współczynników pewności ze względu na stateczność ścianki górnej i ze względu na zwichrzenie. Podstawiając do (5.26)  $x_2 = x_4 = x = x_{\text{opt}}$  po przekształceniach otrzymujemy równanie szóstego stopnia

$$(5.31) \quad \left( \frac{x^3}{2^{10/3} \zeta^2} - \sqrt{6} \right)^2 - x = 0.$$

Równanie to rozwiążemy metodą uogólnionych szeregów potęgowych. Funkcję odwrotną względem poszukiwanej możemy mianowicie określić ściśle

$$(5.32) \quad \zeta = \frac{x^{3/2}}{2^{5/3} (\sqrt{6} + \sqrt{x})^{1/2}},$$

a rozwinięcie jej w uogólniony szereg potęgowy zmiennej  $x$  daje

$$(5.33) \quad \zeta = \frac{1}{2^{23/12} 3^{1/4}} x^{3/2} - \frac{1}{2^{11/12} 3^{3/4}} x^2 + \dots$$

Odwrócenia tego szeregu będziemy poszukiwali w postaci

$$(5.34) \quad x = a_1 \zeta^{2/3} + a_2 \zeta + \dots;$$

po podniesieniu tego szeregu do odpowiednich potęg, [26], [27], podstawieniu do (5.33) i porównaniu współczynników obliczamy  $a_i$  i ostatecznie

$$(5.35) \quad x = 2^{23/18} 3^{1/6} \zeta^{2/3} + \frac{2^{17/12}}{3^{5/4}} \zeta + \dots = 2,9119 \zeta^{2/3} + 0,6762 \zeta + \dots$$

Jest to szereg w interesującym nas zakresie  $0 < \zeta < 0,1696$  bardzo szybko zbieżny. Podstawiając największą wartość  $\zeta = 0,1696$  i uwzględniając tylko dwa wyrazy

otrzymujemy  $x = 1,0069$  zamiast  $x = 1$ . Pierwiastkując szereg i podstawiając do (5.24) określimy teraz optymalną zmienność parametru  $\gamma$ ,

$$(5.36) \quad \gamma = \frac{2^{5/72}}{3^{5/24}} \zeta^{1/6} + \frac{1}{2^{43/24} 3^{13/8}} \zeta^{1/2} + \dots = 0,8346 \zeta^{1/6} + 0,0485 \zeta^{1/2} + \dots$$

Szereg ten jest jeszcze lepiej zbieżny od poprzedniego: podstawiając  $\zeta = 0,1696$  otrzymujemy przy zachowaniu dwóch wyrazów  $\gamma = 0,6408$  zamiast  $0,6389$  (błąd  $0,3\%$ ). Dla zastosowań praktycznych wystarczy więc zachować w szeregach (5.35) i (5.36) nawet tylko pierwszy wyraz.

Podstawienie (5.35) i (5.19) do wzorów (5.25) na  $a$  i  $g_b$  daje ostatecznie optymalne wartości następujące:

$$(5.37) \quad a = \frac{3^{1/36} \pi^{1/9} j_z^{1/6} l^{1/6} M^{5/18}}{2^{17/12} (1 - \nu^2)^{5/36} (1 + \nu)^{1/12} j^{5/36} k^{1/4} E^{1/36}} = 0,4347 \frac{j_z^{1/6} l^{1/6} M^{5/18}}{j^{5/36} k^{1/4} E^{1/36}};$$

$$g_b = \frac{3^{23/36} (1 - \nu^2)^{11/36} (1 + \nu)^{1/12} j^{11/36} M^{7/18}}{2^{13/12} \pi^{4/9} j_z^{1/6} k^{1/4} l^{1/6} E^{5/36}} = 0,5685 \frac{j^{11/36} M^{7/18}}{j_z^{1/6} k^{1/4} l^{1/6} E^{5/36}}.$$

Tablica 2. Parametry kształtowania prętów krótkich

$\zeta$	$x_4 = 1$		$x_2 = x_4 = x$		$x_2 = 1$	
	$\gamma_{\min}$	$x_{2\min}$	$\gamma_{\text{opt}}$	$x_{\text{opt}}$	$\gamma_{\max}$	$x_{4\min}$
0	0	0	0	0	0,6389	0
0,02	0,2035	0,0103	0,4415	0,2279	0,6389	0,1179
0,04	0,2907	0,0428	0,4974	0,3672	0,6389	0,2358
0,06	0,3597	0,1004	0,5334	0,4859	0,6389	0,3538
0,08	0,4195	0,1858	0,5606	0,5927	0,6389	0,4717
0,10	0,4738	0,3023	0,5828	0,6914	0,6389	0,5896
0,12	0,5243	0,4533	0,6017	0,7852	0,6389	0,7076
0,14	0,5720	0,6423	0,6179	0,8746	0,6389	0,8255
0,16	0,6176	0,8732	0,6325	0,9604	0,6389	0,9434
0,1696	0,6389	1,	0,6389	1,	0,6389	1,

Wartości określone wzorami (5.27), (5.29), (5.30), (5.35) i (5.36) zestawione zostały w tablicy 2, a zależność najbardziej charakterystycznego parametru  $\gamma$  od  $\zeta$  przedstawiona ponadto na rys. 2. Z punktu widzenia klasyfikacji ekstremów przytoczonej w p. 2 mamy tu do czynienia z ekstremum typu  $1/3$  przy jednym parametrze dowolnym lub typu  $1/4$  przy założeniu  $x_2 = x_4$ .

(b) Jeżeli  $\zeta > 0,1696$ , to musimy przyjąć  $x_4 = 1$ , czyli pełne wykorzystanie warunku zwichrzenia. Czyniąc takie założenie we wzorze (5.20) otrzymujemy dodatkowe równanie, które, jak już stwierdziliśmy, nie da się efektywnie rozwiązać ze względu na  $\delta$ . Zgodnie z uwagami przytoczonymi w p. 2c postaramy się wyrugować pewną ilość parametrów  $x_i$ , by zaproponowaną metodą zastosować częściowo. Najłatwiej obliczymy  $x_1$ :

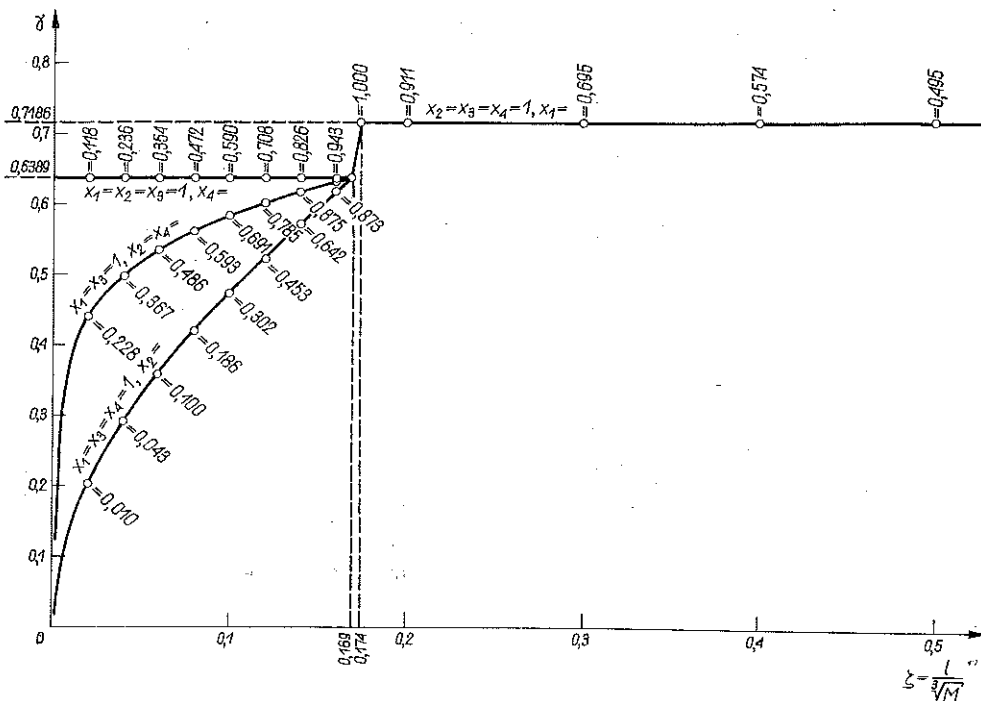
$$(5.38) \quad x_1 = \frac{x_2^{1/6} (3 + \delta)^{1/3} \delta^{2/3}}{x_3^{1/18} \left( 1 + \sqrt{6} \sqrt{\frac{x_3}{x_2}} \right)^{1/3} (1 + 3\delta)^{8/9} \zeta^{2/3}},$$

a po podstawieniu tej wartości do (5.23) uzyskujemy do badania funkcję

$$(5.39) \quad f = \frac{(\sqrt{x_2} + \sqrt{6x_3})^{1/6} (1+\delta) \xi^{1/3}}{(3+\delta)^{1/6} (1+3\delta)^{2/9} \delta^{1/3} x_2^{1/6} x_3^{5/36}}.$$

Łatwo sprawdzić, że  $\partial f/\partial x_2 < 0$  oraz  $\partial f/\partial x_3 < 0$ , wobec tego przyjmujemy  $x_2 = x_3 = 1$  oraz

$$(5.40) \quad f = \frac{(1+\sqrt{6})^{1/6} (1+\delta)}{(3+\delta)^{1/6} (1+3\delta)^{2/9} \delta^{1/3}} \xi^{1/3}.$$



Rys. 2

Zamiast obliczać pochodną  $\partial f/\partial \delta$  wygodniej jest posłużyć się pochodną  $\partial(f^{18})/\partial \delta$ . Przyrównanie jej do zera prowadzi do równania trzeciego stopnia

$$(5.41) \quad 5\delta^3 - 14\delta^2 - 21\delta - 6 = 0,$$

którego jedyny dodatni pierwiastek, obliczony numerycznie, wynosi  $\delta = \delta_{opt} = 1,2661$ , zatem

$$(5.42) \quad \gamma_{opt} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt[4]{6}} = 0,7189.$$

Uzyskałmy tu więc w wyniku profil bardziej zbliżony do kwadratowego niż poprzednio (poszerzenie profilu wobec niebezpieczeństwa zwichrzenia). Musimy jednak

jeszcze dodatkowo sprawdzić warunek  $x_1 \leq 1$ . Podstawiając uzyskane wartości do (5.38) otrzymujemy

$$(5.43) \quad x_1 = \frac{0,3117}{\zeta^{2/3}};$$

przyrównanie  $x_1$  do jedności określa minimalną wartość  $\zeta$ :

$$(5.44) \quad \zeta_{\min} = 0,3117^{3/2} = 0,1740.$$

Wartości funkcji  $x_1 = x_1(\zeta)$  zestawione są osobno w tabelicy 3. Parametr  $x_1$  określa, jakim ułamkiem naprężenia dopuszczalnego jest największe naprężenie w przecie. Okazuje się, że w przypadku prętów długich warunek bezpieczeństwa (5.1) powinien być wykorzystany nie w formie równości, lecz w formie nierówności mocnej. Mamy tu więc ekstremum typu 1/4.

Tablica 3. Parametry kształtowania prętów długich

$\zeta$	$x_1$	$\zeta$	$x_1$
0,1740	1	1	0,3117
0,2	0,9113	2	0,1963
0,3	0,6954	5	0,1066
0,4	0,5741	10	0,0671
0,5	0,4947	$\infty$	0

Przejdziemy do określenia wymiarów optymalnych oraz minimalnego przekroju w badanym zakresie. W tym celu wystarczy do wzorów ogólnych (5.14), (5.15), (5.16) i (5.21) podstawić (5.43) oraz  $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ ,  $\delta = 1,2661$ ,  $\gamma = 0,7189$ :

$$(5.45) \quad \begin{aligned} b &= 0,6029 \frac{j_z^{1/3} l^{1/3} M^{2/9}}{j^{1/9} E^{2/9}}, \\ a &= \gamma b = 0,4334 \frac{j_z^{1/3} l^{1/3} M^{2/9}}{j^{1/9} E^{2/9}}, \\ g_a &= ab = 0,3066 \frac{j^{1/3} M^{1/3}}{E^{1/3}}, \\ g_b &= \beta b = 0,5399 \frac{j^{1/3} M^{1/3}}{E^{1/3}}, \\ F_{\min} &= 1,6756 \frac{j^{2/9} j_z^{1/3} l^{1/3} M^{5/9}}{E^{5/9}}. \end{aligned}$$

W tym przypadku  $ag_b > bg_a$ , więc ścianka górna jest cięższa od ścianki bocznej.

(c) W zakresie  $0,1696 < \zeta < 0,1740$  muszą być spełnione wszystkie cztery warunki poboczne w formie równości,  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$  (ekstremum typu 0/4). Zakres ten, zresztą bardzo wąski, będziemy nazywali zakresem prętów o średniej długości. Równanie  $x_4 = 1$  określające zależność  $\delta = \delta(\zeta)$ , a więc i  $\gamma = \gamma(\zeta)$ ,

nie da się efektywnie rozwiązać ze względu na  $\delta$ , natomiast można je rozwiązać ze względu na  $\zeta$  i określić w ten sposób funkcję odwrotną względem poszukiwanej:

$$(5.46) \quad \zeta = \frac{(3+\delta)^{1/2} \delta}{(1+\sqrt{6})^{1/2}(1+3\delta)^{4/3}},$$

przy czym  $1 < \delta < 1,2661$ . Z (5.18) wynika teraz

$$(5.47) \quad \delta = \gamma^2 \sqrt{6};$$

określamy tym samym funkcję  $\zeta = \zeta(\gamma)$  dla  $0,6389 < \gamma < 0,7189$ . Wartości tej funkcji zestawione są w tabelcy 4 wraz z odpowiednimi wartościami  $\delta$ .

Tablica 4. Parametry kształtowania prętów o średniej długości

$\gamma$	$\delta$	$\zeta$	$\gamma$	$\delta$	$\zeta$
0,6389	1	0,1696	0,68	1,1326	0,1721
0,64	1,0033	0,1697	0,69	1,1662	0,1726
0,65	1,0349	0,1703	0,70	1,2003	0,1731
0,66	1,0670	0,1709	0,71	1,2348	0,1736
0,67	1,0996	0,1715	0,7193	1,2661	0,1740

Korzystając z tabelcy 4 możemy dla danej wartości  $\zeta$  dobrać wartości  $\gamma$  i  $\delta$ , a przez podstawienie ich do (5.14), (5.15) i (5.16) określić optymalne wymiary przekroju.

Zauważymy jeszcze, że pominięcie drugiego składnika pod pierwiastkiem we wzorze (5.7) jest bez znaczenia. Składnik ten rośnie ze zmniejszaniem się  $l$ , czyli zmniejszaniem się  $\zeta$ . Przyjmując np. minimalną wartość  $\zeta$  dla drugiego zakresu,  $\zeta = 0,1740$ , możemy określić ten składnik za pomocą wzoru

$$p = 0,468 \frac{(1+\nu)^2 k^2 j_z^2}{E^2};$$

tak więc dla większości materiałów konstrukcyjnych jest to wielkość rzędu ułamka procentu. Przy mniejszych  $\zeta$  natomiast warunek (5.4) nie posiada istotnego znaczenia.

#### 6. Przykład liczbowy kształtowania przekroju pręta zginanego

Dobierzemy optymalne wymiary przekroju pręta o profilu skrzynkowym przy obciążeniu momentem gnącym  $M = 10^6$  kGcm, wykonanego ze stali o danych  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>,  $k = 1600$  kG/cm<sup>2</sup>. Długość pręta podpartego dwuprzegubowo wynosi  $l = 1000$  cm; przyjmiemy stopień pewności ze względu na wyboczenie ścianek  $j = 1,5$  oraz ze względu na zwichrzenie  $j_z = 5$  (wyższą wartość  $j_z$  od  $j$  można uzasadnić znacznie bardziej niebezpiecznymi skutkami zwichrzenia). Założymy ponadto, że granica sprężystości materiału jest tak wysoka, że założenie sprężystego wyboczenia jest uzasadnione.

Dla zbadania zakresu kształtowania obliczymy najpierw «smukłość»  $\zeta$ , określoną za pomocą wzoru (5.19). Otrzymujemy  $\zeta = 0,01525$ , zatem pręt zaliczymy do krótkich [jak widać zakresy (b) i (c) występują przy bardzo znacznych długościach]. Wymiary ścianki bocznej i minimalny przekrój określą więc wzory (5.25): otrzy-

mujemy  $b = 20,0$  cm,  $g_a = 0,291$  cm,  $F_{\min} = 46,6$  cm<sup>2</sup>. Wymiary ścianki górnej mogą się zmieniać w granicach wyznaczonych przez  $\gamma_{\min}$  i  $\gamma_{\max}$ . Ze wzoru (5.30)  $\gamma_{\min} = 0,177$  przy  $x_{2\min} = 0,0059$ , co daje wzrost współczynnika bezpieczeństwa ze względu na wyoboczenie ścianki górnej aż do  $\bar{j} = 1,5/0,0059 = 255$  przy zachowaniu  $j_z = 5$ . Jest to oczywiście wynik czysto teoretyczny, nie uwzględniający możliwości wyoboczenia sprężysto - plastycznego. Największa dopuszczalna wartość  $\gamma$  wynosi tu  $\gamma_{\max} = 0,639$  przy  $x_{4\min} = 0,090$ , co oznacza wzrost współczynnika bezpieczeństwa ze względu na zwichrzenie do  $\bar{j}_z = 5/0,090 = 55,6$  (teoretycznie) przy zachowaniu  $j = 1,5$ . Optymalną wartość  $\gamma$ , wyrównującą wzrost  $j$  i  $j_z$ , określa wzór (5.36) — otrzymujemy  $\gamma_{\text{opt}} = 0,416$  przy  $x_2 = x_4 = 0,178$ , co daje  $\bar{j} = 1,5/0,178 = 8,43$  oraz  $\bar{j}_z = 5/0,178 = 28,1$ . Odpowiednie wymiary  $a$  i  $g_b$  wyniosą wtedy  $a = 8,31$  cm oraz  $g_b = 0,702$  cm. Ciężar całej belki wyniesie  $Q = \gamma Fl = 366$  kG.

Przy uwzględnieniu możliwości wyoboczenia niesprężystego należałoby (wobec założenia  $j_z > j$ ) przyjąć większą wartość  $\gamma$ , bowiem na naprężenie krytyczne ze względu na zwichrzenie jako wyższe będzie miała wpływ większy niesprężystość wyoboczenia niż na naprężenie krytyczne ze względu na stateczność ścianek.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] Г. Г. Баловнев, Г. С. Трофимов, *О рациональных формах сечений тонкостенных гнутых профилей*, Вестник Машиностроения, 4, 39 (1959), 3-10.
- [2] F. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill, New York 1952.
- [3] V. CADAMBE, S. KRISHNAN, *Note on the minimum weight of thin walled cells in combined bending and torsion*, J. Roy. Aero. Soc., 541, 60 (1956), 65-66.
- [4] G. GERARD, *Minimum weight analysis of compression structures*, New York Univ. Press, 1956.
- [5] R. C. JOHNSON, *Optimum design of mechanical elements*, Wiley, New York 1961.
- [6] В. А. Киселев, *Рациональные формы арок и подвесных систем*, Стройиздат, Москва 1953.
- [7] W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego*, Czasopismo Techniczne, 2, 68 (1963).
- [8] F. P. LAASONEN, *Nurjahdustuen edullisimmasta poikkipinnavalimmasta* [Dobór najkorzystniejszego kształtu pręta poddanego wyoboczeniu], Tekn. Aikakausi., 2, 38 (1948), 49-52.
- [9] Ch. MASSONNET, *Recherches experimentales sur le voilement de l'ame des poutres à ame pleine*, CERES, v. V., Liege 1951.
- [10] П. Ф. Папкович, *Строительная механика корабля*, т. II, Судпромгиз, Ленинград 1941.
- [11] A. PFLÜGER, *Die erforderliche Beulsicherheit von Blechfeldern unter Schubbeanspruchung*, Abhandl. aus dem Stahlbau 8, Bremen 1950.
- [12] С. Д. Пономарев и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. I, Машгиз, Москва 1956.
- [13] I. SALA, *Über die unelastische Knickung eines verjüngten Stabes*, Suomen Tekn. Korkeakoulu 3, Helsinki 1951.
- [14] F. R. SHANLEY, *Weight-strength analysis of aircraft structures*, McGraw-Hill, New York 1952.
- [15] S. W. SKAN, R. V. SOUTHWELL, *On the stability under shearing forces of a flat elastic strip*, Proc. Roy. Soc., Series 105 (1924), 582.
- [16] M. STEIN, J. NEFF, *Buckling stress of simply supported rectangular flat plates in shear*, NACA Techn. Note 1222, 1947.
- [17] E. Z. STOWELL, *Critical shear stresses of an infinitely long plate in the plastic region*, NACA Techn. Note 1681, 1948.

- [18] G. STRASSER, *Optimization of multiweb beams under combined bending and torsional loading*, J. Aero-space Sci., 8, 25 (1958).
- [19] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akademia Nauk Technicznych, Warszawa 1939.
- [20] Z. WASIUTYŃSKI, *Kształtowanie belek słupowych o przekrojach dwuteowych lub skrzynkowych*, Księga Jubil. prof. W. Wierzbickiego, Warszawa 1959, 401-427.
- [21] Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji*, Rozpr. Inżyn., 2, 10 (1962), 307-332.
- [22] M. WNUK, M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ osłabienia pręta na siłę krytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 3, 7 (1959), 311-336.
- [23] A. YLINEN, *Eräs aksiaalisen jäänitystilan muodonmuutos funktio* [Zależność między odkształceniami i naprężeniami i jej zastosowanie w teorii wybożenia], Tekn. Aikakausl., 38 (1948), 9-14.
- [24] A. YLINEN, *A method of determining the buckling stress and the required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range*, Mem. Assoc. Int. Ponts Charpenters 16, Zurich 1956, 529-550.
- [25] M. ŻYCZKOWSKI, *W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych*, Rozpr. Inżyn., 4, 4 (1956), 441-456.
- [26] M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Z. angew. Math. Physik, 6, 12 (1961), 572-576.
- [27] M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice współczynników przy potęgowaniu szeregów potęgowych*, Zast. Matematyki, 4, 6 (1963), 395-406.

Р е з ю м е

НЕКОТОРЫЙ МЕТОД

«ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ФОРМЫ»  
И ПРИМЕРЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЕЧЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Задача, касающаяся оптимального проектирования сводится к подбору одной или нескольких функций, определяющих форму элемента, и является, в основном, задачей вариационного исчисления. Часто однако, по соображениям исчислительного характера или ввиду более простой технологии изготовления, подбор функций заменяется подбором нескольких параметров в предположенных априори типах функций. Такая процедура названа «параметрическим оптимальным проектированием»; вопрос вариационного исчисления заменяется здесь анализом функции нескольких переменных.

Целью работы является предложение некоторого метода параметрического оптимального проектирования названного «методом преобразования линеаризующего дополнительные условия». Задача состоит именно в определении нижней границы некоторой функции  $V$  (2.1), (напр. веса элемента), зависящей от  $n$  параметров  $a_i$ , при  $m$  дополнительных условий, записанных в виде слабых неравенств (2.2). Постараемся определить таким образом нижнюю границу функции на некоторой гиперповерхности в пространстве параметров  $a_i$  или на некоторой определенной стороне этой гиперповерхности. Метод состоит в введении новых параметров  $x_i$  (2.4), представлению  $a_i$  с помощью  $x_i$  (всех или некоторых) и в исследовании  $V$  как функции параметров  $x_i$ . Тогда дополнительные побочные условия имеют вид (2.8), т.е. линейный. Рассматриваются особые случаи введения параметров  $x_i$ , зависящих прежде всего от того, является ли  $m$  больше или меньше  $n$ .

Метод иллюстрируется двумя подробно решенными примерами. Первый пример касается проектирования на минимум веса коробчатого сечения с постоянной толщиной стенки, подверженного чистому изгибу. Без предварительного предположения четырехкратной симметрии имея здесь четыре параметра (толщина стенок  $g_a$  и  $g_b$ , высота и ширина сечения, рис. 1); поставлены также четыре условия: два ограничивающие величину напряжений и два условия устойчивости стенок. Параметры  $x_i$  вводятся с помощью формул (3.6). В упру-

гом состоянии оптимальное решение определяют формулы (3.14), (3.15) и (3.16), которые соотносятся к случаю, в котором все параметры  $x_i$  равняются единице. Кроме того, решается случай упруго-пластического продольного изгиба, основываясь на формулах Джонсона-Остенфельда и Илинена. Второй случай принимая во внимание чистый изгиб, касается проектирования на минимум веса такого же самого сечения; кроме условия ограниченных напряжений и устойчивости стенок поставлено также условие обеспечения от потерь устойчивости плоской формы изгиба стержня как целости. Результат анализа, который проводился исключительно в упругой области, отображает рисунок 2, приводящий оптимальное отношение сторон искомого сечения.

### Summary

## A METHOD OF «PARAMETRIC OPTIMUM STRENGTH DESIGN» AND SOME DESIGN EXAMPLES OF THIN-WALLED PROFILES

The problem of proper optimum strength design is that of finding of one or several functions determining the form of a structural element and constitutes, in principle, a variational problem. However, for computation reasons or for simpler production methods, the finding of the function is often replaced by that of a few parameters, the types of functions being assumed beforehand. Such an approach is called «parametric optimum strength design». The variational problem is replaced here by an analysis of a function of several variables.

The aim of the present paper is to devise a certain method of parametric optimum design called the «method of transformation linearizing the auxiliary conditions». The problem consists in finding the lower bound of a certain function  $V$  (2.1) (the weight of the element, for instance) depending on  $n$  parameters  $a_j$  with  $m$  auxiliary conditions expressed in the form of weak inequalities (2.2). Thus, we seek for the lower bound of a function on a certain hypersurface in the space of parameters  $a_j$  or on one side of this hypersurface. The method consists in introducing new parameters  $x_i$  (2.4), expressing  $a_j$  in terms of  $x_i$  (all or some of them) and examining  $V$  in function of the parameters  $x_i$ . Then, the auxiliary conditions have the form (2.8) that is a linear form. Particular cases of introduction of the parameters  $x_i$  are discussed, depending above all on whether  $m$  is greater or less than  $n$ .

The method is illustrated by means of two examples of which detailed solution is given. The first example concerns the design of a box profile with constant wall thickness, subject to pure torsion. With no assumption on the fourfold symmetry we have four parameters (wall thickness  $g_a$  and  $g_b$ , height and width of the cross-section, Fig. 1). Four conditions are introduced. Two of them bound the stresses and the other two concern the stability of the walls. The parameters  $x_i$  are introduced by means of the equations (3.6). In the elastic range the optimum solution is determined by the equations (3.14), (3.15), and (3.16) and corresponds to the case where all the parameters  $x_i$  are equal to unity. In addition the problem of elastic-plastic buckling is solved on the basis of the equations of Johnson-Ostenfeld and A. Ylinen. The second case concerns the design of the same profile but subject to pure bending. In addition to the condition of bounded stress and stability of the walls, we have a condition of security against lateral buckling of the bar as a whole. The result of the analysis which is performed for the elastic range only is illustrated by Fig. 2, giving the optimum side ratio of the sought-for profile.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1963 r.*