

## REOLOGICZNA TEORIA WYTRZYMAŁOŚCI I JEJ ZASTOSOWANIE DO BETONU

CZESŁAW EIMER (WARSZAWA)

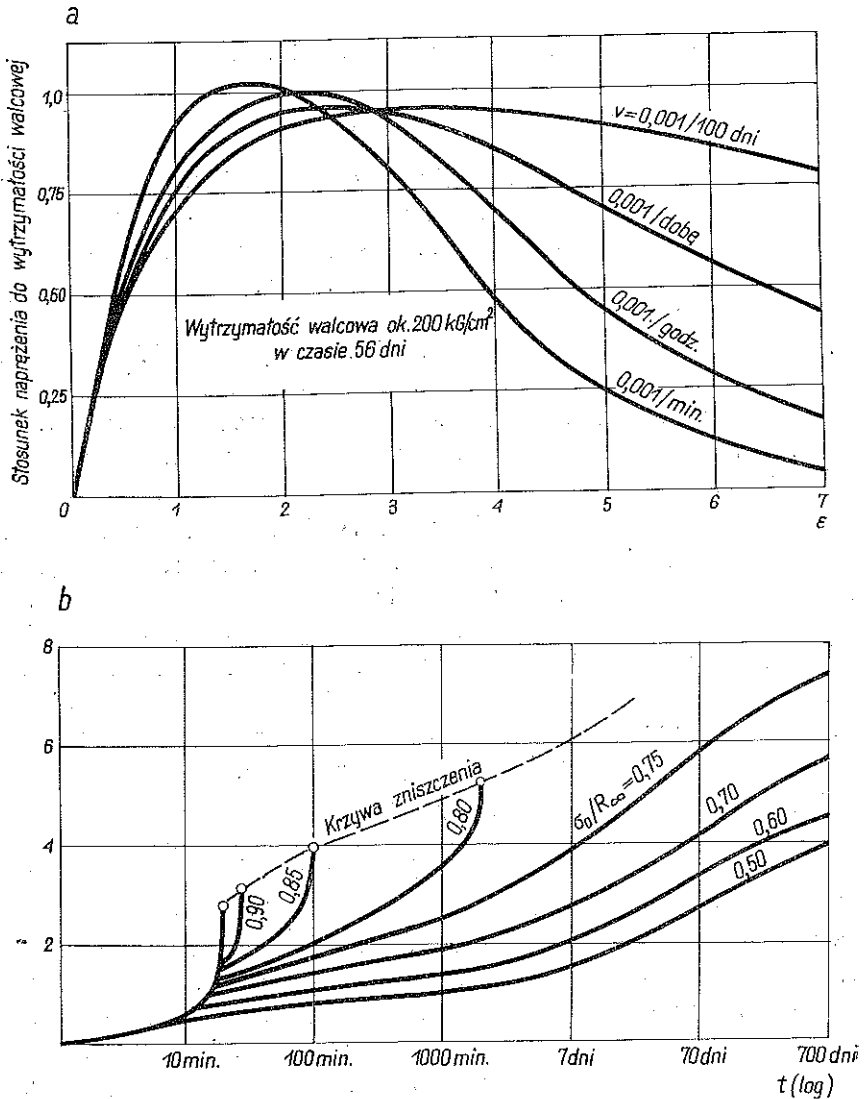
## 1. Model reologiczno — wytrzymałościowy

W tych wszystkich przypadkach, gdy w grę wchodzi długotrwałe obciążenie elementu konstrukcyjnego, bezpieczeństwo tego elementu musi być określone na podstawie wytrzymałości trwałej materiału. Rozumiemy przez nią — w najprostszym ujęciu — to maksymalne naprężenie (o stałej wartości), które może działać nieskończenie długo nie wywołując zniszczenia. Np. dla betonu wytrzymałość trwała wynosi 0,6-0,8 wytrzymałości doraźnej; pominięcie tego faktu prowadziłoby do znacznego przecenienia bezpieczeństwa, problem posiada więc istotne znaczenie praktyczne. Przy naprężeniach przekraczających wytrzymałość trwałą, a poniżej wytrzymałości doraźnej, zniszczenie następuje po określonym czasie, tym krótszym, im wyższe jest naprężenie.

Sformułujemy zagadnienie ogólniej wyróżniając dwa podstawowe zadania. Niech będzie dana funkcja zmienności naprężenia (obciążenia) w czasie  $\sigma(t, a)$ , gdzie  $a$  oznacza ogólnie pewne parametry (np. gdy  $\sigma(t) = \text{const}(t) = \sigma_0$ , parametrem jest  $\sigma_0$ ; jeśli  $\sigma'(t) = vt$ , gdzie  $v$  jest stałą prędkością obciążenia, to występuje parametr  $v$ , itd.). (1) Pytamy o czas  $t_n$ , po którym nastąpi utrata wytrzymałości, tj. o czas zniszczenia; czas ten  $t_n(a)$  zależy od postaci funkcji  $\sigma(t, a)$ , jest więc jej funkcjonałem. (2) Pragniemy ustalić funkcję zmienności wytrzymałości w czasie  $R(t_n)$ ; funkcja ta zależy od formy funkcji  $\sigma(t)$ , przedstawia zatem jej transformatę. Jeżeli zbiór wartości  $R$  jednego znaku, możliwych w interesującej nas klasie funkcji  $\sigma(t)$  (np. w klasie funkcji  $\sigma(t) > 0$  monotonicznie niemalejących), posiada różny od zera kres dolny (dla  $R > 0$ ) *resp.* kres górny (dla  $R < 0$ ), to kres ten nazywamy wytrzymałością trwałą; jest to uogólnienie podanej na początku definicji.

Rozwiązanie problemu na drodze doświadczalnej napotyka na poważne trudności trojakiej natury. Po pierwsze, badania muszą być długotrwałe i prowadzone przy bardzo precyzyjnym ustaleniu i ustabilizowaniu wszelkich istotnych parametrów termodynamicznych; rozrzuty wyników są przy tym znaczne, tym samym próby muszą być liczne; tak więc są to badania kosztowne. Po wtóre, zgodnie z wyżej powiedzianym, na podstawie badań przy danym przebiegu naprężenia  $\sigma(t)$  (który musi być oczywiście ściśle znormalizowany) nie można wnioskować o wytrzymałości w sposób ogólny [tj. przy innych funkcjach  $\sigma(t)$ ]; zwłaszcza wyniki uzyskane przy danym naprężeniu  $\sigma(t)$  przestają obowiązywać, gdy dany (narzucony) jest przebieg odkształcenia  $\varepsilon(t)$ . Wreszcie, ze zjawiskami stopniowej utraty wytrzymałości składają się procesy strukturalne niezależne od wyteżenia (dojrzewanie, starze-

nie się materiału itp.), od których niezmiernie trudno je wyodrębnić. W dalszym ciągu ograniczymy się do ośrodków, w których zjawiska te, jak również «wtórne» zmiany strukturalne w rodzaju umocnienia lub regeneracji mikrorys, można pominąć. W szczególności zastosujemy rozważania do betonu dojrzalego (o wieku co najmniej 2 do 3 miesięcy).



Rys. 1

W obliczu trudności doświadczalnych tym większa rola przypada teorii; podstawowe jej zadanie polega na ustaleniu właściwego modelu reologiczno-wytrzymałościowego, tym samym operatora różniczkowego lub całkowitego realizującego

omówione poprzednio transformacje funkcji [pozwalającego przejść od funkcji  $\sigma(t)$  do funkcji  $R(t)$  i  $\varepsilon(t)$  i na odwrót]. Jak wiadomo, w reologii chętnie posługujemy się prostymi «modelami» mechanicznymi (np. złożonymi ze sprężyn, tłumików i suwaków dla ciał lepko-sprężysto-plastycznych), co jest równoznaczne z ustaleniem wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między takim modelem a operatorem; poszukiwanie stosownego operatora i analiza zjawisk stają się przez to bardziej przejrzyste i pogładowe.

W odniesieniu do betonu problem został zapoczątkowany na drodze eksperymentalnej głównie przez H. RÜSCHA, [2]. Rysunek 1a przedstawia uzyskane przez tego autora wykresy naprężeń w próbkach betonowych osiowo ściskanych przy danych (narzuconych) odkształceniach, narastających ze stałymi prędkościami (co uzyskano za pomocą automatycznej aparatury elektronicznej). Rysunek 1b pokazuje narastanie odkształceń przy stałych naprężeniach (na wykresie zastosowano logarytmiczną skalę czasu); poniżej wytrzymałości trwałej (w danym przypadku ok. 0,78 wytrzymałości doraźnej) odkształcenia «stabilizują się», powyżej — po określonym czasie zaczynają szybko wzrastać i następuje zniszczenie.

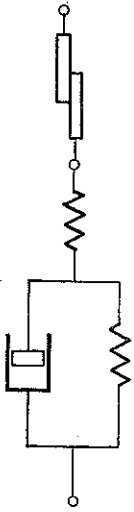
Rysunek 1a wskazuje na podstawowy fakt doświadczalny, że mianowicie przyrostowi odkształcenia odpowiada na razie wzrost, później stopniowe zmniejszanie się naprężenia, tak więc funkcja  $\sigma(\varepsilon)$  nie jest monotonicznie niemalejąca, lecz wykazuje maksimum; zagadnienie jest oczywiście silnie nieliniowe. Tym samym modele ośrodków lepko-sprężysto-plastycznych charakteryzujące się wspomnianą «monotonicznością» nie nadają się do analizy problemu wytrzymałościowego. Dotyczy to również modeli bardziej złożonych np. modelu E. TORROJI i A. PAEZA BALACA, [4], a także teorii opartych na rozważaniu zbioru takich modeli o ciągłym rozkładzie (widmie) czasów relaksacji lub czasów opóźnienia sprężystego (w myśl koncepcji pochodzącej jeszcze od E. WIECHERTA z r. 1893, rozwiniętej zwłaszcza przez B. GROSSA, [1]).

Przyczyna tego stanu rzeczy tkwi głębiej. O ile mianowicie o odkształcalności w ramach nienadmiernych odkształceń decydują własności reologiczne ośrodka spoistego jako takiego, o tyle o własnościach wytrzymałościowych, mówiąc zwięźle, jego defekty strukturalne i prawa wzrostu ich liczby i zasięgu, będące prawami statystycznymi<sup>1</sup>. Teoria nie może więc zakładać ciągłości ośrodka i musi wiązać model reologiczny części (fazy) spoistej z prawami wzrostu mikrouszkodzeń. Należy wyjść z podstawowego stwierdzenia, iż każdy wzrost ich liczby i zasięgu prowadzi do koncentracji, tj. wzrostu naprężeń i odkształceń, to z kolei zwiększa prawdopodobieństwo nowych defektów w częściach dotąd nieuszkodzonych itd., mamy więc do czynienia z procesem łańcuchowym (stochastycznym).

W najprostszym ujęciu wystarczy w tym celu przyjąć ośrodek stochastycznie niejednorodny złożony z «ziaren» o tych samych własnościach reologicznych, natomiast różnych, losowo zmiennych własnościach wytrzymałościowych («granicz-

<sup>1</sup> Dotyczy to materiałów «kruchych». W metalach «plastycznych» bezpośrednią przyczyną zniszczenia może być zmiana formy geometrycznej, np. utworzenie szyjki przewężenia w próbkach rozciąganych.

nych)), przy czym do poszczególnych elementów heterogenicznych mogą w ogólności odnosić się odmienne kryteria wyteżenia. Niech model takiego ośrodka stanowi układ «przestrzenny» bardzo wielu elementów reologicznych standardowych z włączonym szeregowo suwakiem (rys. 2), rozmieszczonych równolegle, jeden obok drugiego, między sąsiednimi «sztywnymi» płaskimi przekrojami.



Rys. 2

Odkształcenia takich elementów opisuje, jak wiadomo, równanie<sup>2</sup> (por. np. A. R. RZANICYN, [3]),

$$(1.1) \quad H\tau\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma + \tau\dot{\sigma},$$

gdzie oznaczają:  $H$  moduł sprężystości doraźnej,  $E$  moduł sprężystości opóźnionej, tj. przy nieskończonej powolnej szybkości odkształcania (co jest równoznaczne z modułem przy wyłączeniu tłumika) oraz  $\tau$  czas relaksacji.

Wyposaźmy każdy element w następujące własności «graniczne»: (1) granicę plastyczności  $Q$ , po osiągnięciu której następuje ruch suwaka (granica tarcia w spoczynku) i naprężenia zachowują stałą wartość, równą  $Q$ ; (2) granicę wytrzymałości  $R$ , przy której dochodzi do zerwania sprężyny górnej i naprężenie spada do zera. Elementy, dla których  $Q < R$  odpowiadają ziarnom «plastycznym» (charakteryzują się płynięciem plastycznym); elementy o  $R < Q$

przedstawiają ziarna «kruche», niszczące się bez dodatkowych odkształceń. Ze względu na skończone rozmiary ziaren (a więc ze względów czysto geometrycznych) płynięcie plastyczne nie jest w ogólności nieograniczone, musimy więc przyjąć, niezależnie od poprzednich własności, (3) graniczne odkształcenie  $\varepsilon_{gr}$ , przy którym następuje zniszczenie elementu.

Wielkości  $Q$ ,  $R$  i  $\varepsilon_{gr}$  uważamy za zmienne przypadkowe, w najprostszym ujęciu niezależne (w sensie stochastycznym) o dystrybuantach odpowiednio  $\Psi(Q)$ ,  $X(R)$  i  $\Phi(\varepsilon_{gr})$  i odnośnych gęstościach prawdopodobieństwa  $\psi(Q)$ ,  $\chi(R)$  i  $\varphi(\varepsilon_{gr})$ . Załóżmy, że w każdej z tych funkcji występują jako parametry tylko wartości przeciętne, odpowiednio  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  i  $\bar{\varepsilon}_{gr}$ , i odchylenia standardowe  $\mu_Q$ ,  $\mu_R$  i  $\mu_{\varepsilon}$ .

Rozważmy element osiowo obciążony i niech  $\sigma_0$  oznacza naprężenie obliczeniowe (nominalne), wynikające z podzielenia siły obciążającej przez pole przekroju (nominalne), podczas gdy  $\sigma$  oznaczać będzie odtąd naprężenie rzeczywiste, tj. naprężenie przeciętne w tych częściach przekroju, które zachowały spójność (a więc z uwzględnieniem koncentracji naprężenia wywołanej mikrorysami). Przyjmijmy, że w stanie neutralnym (nieobciążonym) przekrój zachowuje pełną spójność (tj. na początku

<sup>2</sup> Równanie to bywa stosowane w zagadnieniach jednowymiarowych i dotyczy odkształceń całkowitych. Uogólnienie jego, wiążące składowe dewiatorów naprężenia i odkształcenia dotyczy, jak wiadomo, odkształceń postaciowych, czyli procesu izochorycznego, tj. po wyłączeniu odkształceń objętościowych, gdyż zakłada się, że te ostatnie mają charakter czysto sprężysty. W naszym przypadku tak proste uogólnienie nie jest możliwe, wymaga bowiem przejścia również do «przestrzennych» praw statystycznych narastania mikrouszkodzeń. Zagadnienia te rozpatrywał w kilku swych pracach J. MURZEWSKI.

obciążenia mamy  $\sigma = \sigma_0$ ), innymi słowy abstrahujemy od wstępnych mikrorys itp. Przy tych założeniach i z warunku równowagi sił w przekroju mamy

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad \sigma_0 &= \sigma \int \int \int_{\substack{Q > \sigma \\ R > \sigma \\ \varepsilon_{gr} > \varepsilon}} \psi(Q) \chi(R) \varphi(\varepsilon_{gr}) dQ dR d\varepsilon_{gr} + \\
 &\quad + \int \int \int_{\substack{Q < \sigma \\ R > \sigma \\ \varepsilon_{gr} > \varepsilon}} Q \psi(Q) \chi(R) \varphi(\varepsilon_{gr}) dQ dR d\varepsilon_{gr} = \\
 &= \sigma \int_{\sigma}^{\infty} \psi(Q) dQ \int_{\sigma}^{\infty} \chi(R) dR \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(\varepsilon_{gr}) d\varepsilon_{gr} + \int_0^{\sigma} Q \psi(Q) dQ \int_{\sigma}^{\infty} \chi(R) dR \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(\varepsilon_{gr}) d\varepsilon_{gr} = \\
 &= [1 - \Phi(\varepsilon)] [1 - X(\sigma)] [\sigma (1 - \Psi(\sigma)) + \int_0^{\sigma} Q \psi(Q) dQ].
 \end{aligned}$$

Pierwsza z prawej strony całka potrójna określa tu prawdopodobieństwo nieprzekroczenia przez naprężenie i odkształcenie żadnej z wartości granicznych, czyli proporcję elementów przenoszących naprężenie  $\sigma$ , spełniające równanie (1.1). Całka ta pomnożona przez  $\sigma$  daje tę część naprężenia  $\sigma_0$  (resp. obciążenia), która odpowiada owemu równaniu. Drugi składnik z prawej strony określa część naprężenia  $\sigma_0$  przenoszoną przez elementy, które osiągnęły granicę plastyczności (nie przekraczając  $\varepsilon_{gr}$ ), dla których ma zastosowanie zatem zależność  $\sigma = Q = \text{const.}$  Przedstawia on, jak widać, przeciętną granicę plastyczności dla  $\sigma < Q < 0$  dla tychże elementów. Dla elementów, w których  $R$  lub  $\varepsilon_{gr}$  zostało przekroczone, jest oczywiście  $\sigma = 0$ , toteż odnośny składnik sumy znika<sup>3</sup>.

Zwracamy uwagę na ogólność poczynionych założeń, nie przyjmujemy bowiem *a priori* jakiegoś określonego kryterium wyczerpania. Kryterium takie (w sensie «makroskopowym», fenomenologicznym) jest «wypadkową» własności poszczególnych typów ziaren i stopień jego stosowalności dla każdego z nich może być ustalony tylko doświadczalnie drogą analizy korelacyjnej. Np. uwzględniając tylko wpływ  $R$  i  $\varepsilon_{gr}$  i stopień ich skorelowania otrzymalibyśmy gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarową  $f(R, \varepsilon_{gr})$  i zamiast (1.2) zależność

$$(1.3) \quad \sigma_0 = \sigma \int \int_{\substack{R > \sigma \\ \varepsilon_{gr} > \varepsilon}} f(R, \varepsilon_{gr}) dR d\varepsilon_{gr},$$

gdzie funkcja  $f$  obejmuje współczynniki korelacji (chodzi tu w ogólności o korelację krzywoliniową). Funkcja  $f$  przedstawia w trójwymiarowym układzie współrzędnych pewną powierzchnię, a całka (1.3) odnośną objętość. Gdy związek korelacyjny dąży do funkcyjnego, powierzchnia zbliża się do płaszczyzny  $R, \varepsilon_{gr}$  wszędzie z wyjątkiem przedstawiającej ową funkcję krzywej, w której otoczeniu rośnie nieograniczenie

<sup>3</sup> Zwróćmy uwagę, że wyrażenie (1.2) można interpretować jako funkcję (określoną w ogólności doświadczalnie) charakteryzującą osłabienie przekroju (np. wskutek mikrorys). Jeśli np. pominiemy płynięcie plastyczne, to  $A = A_0 [1 - \Phi(\varepsilon)] [1 - X(\sigma)]$ , gdzie  $A_0$  oznacza nominalne,  $A$  rzeczywiste pole przekroju. Mamy tu  $\sigma_0 = P/A_0$  oraz  $\sigma = P/A$ , w czym  $P$  jest obciążeniem osiowym.

czenie (słowem dąży w każdym przekroju prostopadłym do tej płaszczyzny do funkcji impulsowej). Poszukiwana objętość staje się funkcją jednej zmiennej. Gdy wartości współczynników korelacji dążą do 1, związek korelacyjny przechodzi w funkcyjny i otrzymamy

$$(1.4) \quad \sigma_0 = \sigma \{1 - \omega [U(\sigma, \varepsilon)]\},$$

gdzie  $\omega(U)$  jest dystrybuantą zmiennej przypadkowej  $U$ , zaś  $U$  określoną funkcją  $\sigma, \varepsilon$ . Jest to w zestawieniu z zależnością (1.2), aktualną dla zmiennych nieskorelowanych, drugi skrajny przypadek (związek funkcyjny). Niech np.  $U$  przedstawia energię potencjalną ciała standardowego. Wówczas, jak wiadomo,

$$(1.5) \quad U = \frac{E}{2(H-E)} \left( H\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sigma + \frac{\sigma^2}{E} \right).$$

Możliwość znalezienia «uniwersalnej» funkcji wyteżenia dla materiału takiego jak beton wydaje się nader wątpliwa; wymagałoby to, by tak odmienne składniki jak kruszywo różnych rodzajów i zaprawa cementowa podlegały temu samemu typowi kryterium wyteżenia. W dalszym ciągu poprzestaniemy na zależności (1.2).

Rozwiązanie zagadnienia polega w ogólności na wyeliminowaniu z równań (1.1) i (1.2) nieznannej wielkości  $\sigma$  i uzyskaniu związku między  $\sigma_0, \varepsilon$  i  $t$ . Możemy tu wyróżnić dwa zasadnicze przypadki: (1) dane jest z góry (narzucone) odkształcenie jako funkcja czasu,  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , i poszukujemy funkcji  $\sigma_0(t)$ ; (2) dane jest obciążenie  $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ , a poszukujemy  $\varepsilon(t)$ . W przypadku (1) interesować nas będzie głównie maksymalna wartość  $\sigma_0$ , w przypadku (2) czas, przy którym  $\varepsilon \rightarrow \infty$  czyli następuje zniszczenie. Teoretycznie prostszy jest przypadek (1), gdyż odkształcenie  $\varepsilon$  «lokalne» identyfikuje się z «przeciętnym» w myśl założenia «sztywnych» płaskich przekrojów.

## 2. Zależności podstawowe

Przed przystąpieniem do analizy wymienionych problemów należy określić funkcje  $\varphi(\varepsilon_{gr})$ ,  $\chi(R)$  i  $\psi(Q)$ . Dla wszystkich tych zmiennych przypadkowych przyjmujemy rozkłady *gamma* (należące, jak wiadomo, do rozkładów typu Pearsona), odpowiednio

$$(2.1) \quad \varphi(\varepsilon_{gr}) = \frac{\beta^m}{\Gamma(m)} e^{-\beta\varepsilon_{gr}} \varepsilon_{gr}^{m-1}, \quad \chi(R) = \frac{\delta^r}{\Gamma(r)} e^{-\delta R} R^{r-1},$$

$$\psi(Q) = \frac{\gamma^n}{\Gamma(n)} e^{-\gamma Q} Q^{n-1}.$$

Są to rozkłady asymetryczne, odnoszące się do wielkości dodatnich, posiadające dla tychże bardzo dobre uzasadnienie teoretyczne, podobnie jak rozkład normalny uzasadniony jest dla wielkości przyjmujących wartości dodatnie i ujemne. Ponadto rozkłady te, w odróżnieniu od innych powszechnie stosowanych, pozwalają uzyskać rozwiązania w postaci zamkniętej. Zachodzą następujące związki między parametrami

trami rozkładów (2.1) a odnośnymi wartościami przeciętnymi (oznaczonymi kreskami poziomymi) i odchyleniami standardowymi  $\mu$ :

$$(2.2) \quad \bar{\varepsilon}_{gr} = \frac{m}{\beta}, \quad \bar{R} = \frac{r}{\delta}, \quad \bar{Q} = \frac{n}{\gamma};$$

$$(2.3) \quad \mu_{\varepsilon} = \frac{\sqrt{m}}{\beta}, \quad \mu_R = \frac{\sqrt{r}}{\delta}, \quad \mu_Q = \frac{\sqrt{n}}{\gamma}.$$

Współczynniki jednorodności  $\nu = \mu/\bar{X}$  charakteryzujące dyspersję względną wyrażają się wzorami

$$(2.4) \quad \nu_{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \nu_R = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad \nu_Q = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

zależą one zatem tylko od parametrów  $m$ ,  $r$  i  $n$ ; gdy te ostatnie rosną, dyspersja względna maleje. Dla  $m > 2$  odnośna funkcja (i analogicznie funkcje pozostałe) przedstawia krzywą styczną w punkcie początkowym do osi odciętych, dla  $1 < m < 2$  styczną do osi rzędnych (o wykresie, podobnym jak krzywe na rys. 1a), wreszcie dla  $m = 1$  degeneruje się do rozkładu wykładniczego

$$\varphi(\varepsilon_{gr}) = \beta e^{-\beta \varepsilon_{gr}}.$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do całkowitych parametrów  $m$ ,  $r$  i  $n$ , co najzupełniej wystarcza dla zastosowań praktycznych, i skorzystamy z następującej przejrzystej symboliki:

$$(m, y)! = \int_0^y e^{-t} t^m dt, \quad q(m, y) = \int_y^{\infty} e^{-t} t^m dt.$$

W drugiej zależności stosuje się zazwyczaj symbol  $Q$ , który tutaj zastąpiliśmy przez  $q$  dla odróżnienia od granicy plastyczności.

Pierwsze z tych wyrażeń przedstawia niepełną funkcję gamma, przy czym

$$(m, \infty)! = m! = \Gamma(m+1).$$

Stosując całkowanie przez części dochodzimy bez trudności do związków

$$(m, y)! = m! e^{-y} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y^k}{k!},$$

$$q(m, y) = m! e^{-y} \sum_{k=0}^m \frac{y^k}{k!};$$

to ostatnie wyrażenie przedstawia, jak widzimy, pewien wielomian. Korzystając z tych zależności otrzymamy bardzo proste, zamknięte wzory dla funkcji dystrybucji i poszczególnych czynników we wzorze (1.2), ogólnie:

$$1 - \Phi(y) = \int_y^{\infty} \frac{\beta^m}{\Gamma(m)} e^{-\beta x} x^{m-1} dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{\beta y}^{\infty} e^{-t} t^{m-1} dt = \frac{q(m-1, \beta y)}{(m-1)!} = e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\beta y)^k}{k!}.$$

Dla całki w ostatnim nawiasie we wzorze (1.2) otrzymujemy

$$\int_0^{\sigma} Q\psi(Q) dQ = \frac{\gamma^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\sigma} Q^n e^{-\gamma Q} dQ = \frac{1}{\gamma(n-1)!} \int_0^{\gamma\sigma} t^n e^{-t} dt = \frac{(n, \gamma\sigma)!}{\gamma(n-1)!}.$$

Stosując powyższe wzory do wyrażenia (1.2) otrzymujemy ostatecznie

$$(2.5) \quad \sigma_0 = \frac{q(m-1, \beta\varepsilon)}{(m-1)!} \frac{q(r-1, \delta\sigma)}{(r-1)!} \left[ \sigma \frac{q(n-1, \gamma\sigma)}{(n-1)!} + \frac{1}{\gamma} \frac{(n, \gamma\sigma)!}{(n-1)!} \right].$$

Korzystając z podanych poprzednio rozwinięć możemy wyrażenie w nawiasie graniastym w (1.2) przekształcić następująco:

$$\begin{aligned} \sigma(1 - \Psi(\sigma)) + \int_0^{\sigma} Q\psi(Q) dQ &= \sigma e^{-\gamma\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma\sigma)^k}{k!} + \frac{n}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma\sigma)^k}{k!} \right) = \\ &= \frac{n}{\gamma} \left[ 1 - e^{-\gamma\sigma} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma\sigma)^k}{k!} - \frac{\gamma}{n} \sigma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma\sigma)^k}{k!} \right) \right] = \\ &= \frac{n}{\gamma} \left[ 1 - e^{-\gamma\sigma} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma\sigma)^k}{k!} \left( 1 - \frac{\gamma}{n} \sigma \right) + \frac{(\gamma\sigma)^n}{n!} \right) \right]. \end{aligned}$$

Uwzględniając to możemy zależność (2.5) przedstawić w formie nadającej się do obliczeń liczbowych:

$$(2.6) \quad \sigma_0 = \left( e^{-\beta\varepsilon} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\beta\varepsilon)^k}{k!} \right) \left( e^{-\delta\sigma} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\delta\sigma)^k}{k!} \right) \frac{n}{\gamma} \left[ 1 - e^{-\gamma\sigma} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma\sigma)^k}{k!} \left( 1 - \frac{\gamma}{n} \sigma \right) + \frac{(\gamma\sigma)^n}{n!} \right) \right].$$

Korzystając ze związków (2.2) i (2.3) możemy też nadać temu wyrażeniu postać:

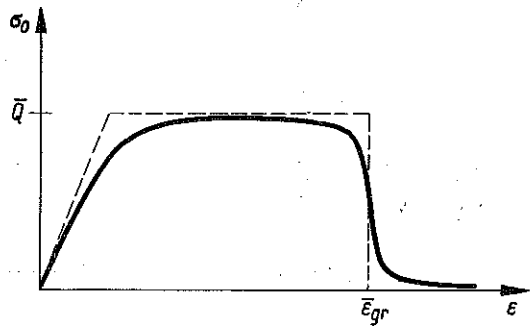
$$(2.7) \quad \sigma_0 = \bar{Q} \left( e^{-m \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\left( m \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{gr}} \right)^k}{k!} \right) \left( e^{-r \frac{\sigma}{R}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left( r \frac{\sigma}{R} \right)^k}{k!} \right) \times \\ \times \left[ 1 - e^{-n \frac{\sigma}{Q}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left( n \frac{\sigma}{Q} \right)^k}{k!} \left( 1 - \frac{\sigma}{Q} \right) + \frac{\left( n \frac{\sigma}{Q} \right)^n}{n!} \right) \right].$$

Pod znakami sum występują tu wielomiany stopnia tym wyższego, im niższa jest dyspersja względna, w myśl (2.4) mamy bowiem  $m = 1/\nu_e^2$  itd.

Z powyższych wywodów widzimy, że opis własności wytrzymałościowych ośrodka niejednorodnego za pomocą jednej wielkości (np. wytrzymałości doraźnej) jest bardzo niewystarczający. W naszym przypadku mieliśmy 6 takich wielkości ( $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{gr}$ ;  $\nu_Q$ ,  $\nu_{Re}$ ,  $\nu_e$ ) i to przy pominięciu związków korelacyjnych i bardziej subtelnych zależności.



Gdy rozrzuty danej wielkości, np.  $R$ , maleją nieograniczenie, tj. ziarna stają się ze względu na tę własność jednorodne, to  $r \rightarrow \infty$ ,  $\chi(R)$  dąży do funkcji impulsowej (funkcji Diraca przesuniętej wzdłuż osi odciętych o odcinek  $\bar{R}$ ), zaś  $X(\sigma)$  do funkcji określonej wzorami  $X(\sigma) = 0$  dla  $\sigma < \bar{R}$ ,  $X(\sigma) = 1$  dla  $\sigma > \bar{R}$  (tj. do odpowiednio przesuniętej funkcji Heaviside'a). Wtedy dana wielkość nie wpływa na przebieg odkształceń [por. (1.2)], dopóki nie zostanie osiągnięta odnośna wartość przeciętna, np.  $\bar{R}$  lub  $\bar{\varepsilon}_{gr}$ , przy której  $\sigma_0$  spada do zera, tj. następuje nagłe zniszczenie. Podobnie przy zanikającej dyspersji  $Q$  wartość ostatniego nawiasu graniastego w (1.2) dąży do  $\sigma$  przy  $\sigma < \bar{Q}$  (całka w nawiasie znika) oraz do  $Q = \bar{Q}$  przy osiągnięciu przez  $\sigma$  wartości  $\bar{Q}$  (całka dąży do  $\bar{Q}$ , pierwszy zaś wyraz znika). Na rysunku 3 pokazany jest np. rozkład odkształceń dla ciała zbudowanego z elementów, w których wpływ  $R$  można pominąć i w których dyspersja zmiennej  $Q$  i  $\varepsilon_{gr}$  zdąża do zera. Jeżeli wpływ danej wielkości ma być w ogóle pominięty, to wystarczy przyjąć, że jej wartość przeciętna dąży do nieskończoności, tzn. odnośny parametr  $\beta$ ,  $\delta$  lub  $\gamma$  znika [por. wzory (2.2)].



Rys. 3

Należy zaznaczyć, że dopóki rozważamy monotonicznie rosnące w czasie odkształcenia i naprężenia  $\sigma$ , tzn. dopóki nie zajmujemy się problemem odciążenia, dopóty możemy w ogólności pomijać wpływ  $Q$ . Możemy wówczas na ogół uzyskać wykresy odkształceń, odpowiadające bardzo dobrze wynikom doświadczalnym wyłącznie przez odpowiedni dobór funkcji  $\varphi(\varepsilon_{gr})$  i  $\chi(R)$  (por. niżej p. 3). Przy odciążeniu jednak występują istotne różnice, mianowicie w elementach, które osiągnęły  $Q$ , następuje liniowy spadek  $\varepsilon$  i  $\sigma$ , w tych zaś, które osiągnęły  $R$ , naprężenie  $\sigma$  znika. Ma to zasadnicze znaczenie, jeśli chodzi o odkształcenie trwałe (doraźnie powstające) oraz o wyjściowy stan samonapężania i dystorsji przy zagadnieniu obciążeń wielokrotnych.

W dalszym ciągu problemów tych nie będziemy analizowali i wpływ  $Q$  pominiemy. W celu uproszczenia wzorów będziemy dążyli do możliwie niskich wartości  $m$  i  $r$ . Jak zobaczymy, dobre wyniki uzyskamy już przyjmując  $m = 1$ ,  $r = 2$  (przyjęcie równocześnie  $m = 1$  oraz  $r = 2$  prowadziłoby do zależności zdegenerowanych). Wówczas wzór (2.6) przyjmuje bardzo prostą postać

$$(2.8) \quad \sigma_0 = \sigma (1 + \delta\sigma) e^{-\delta\sigma} e^{-\beta\varepsilon}.$$

Przy dużych wartościach parametrów  $m$ ,  $r$  i  $n$  stosowanie wzoru (2.6) jest uciążliwe ze względu na wysokie stopnie wielomianów i wówczas korzystne jest przedstawienie odnośnych funkcji dystrybucji za pomocą szeregów. Pozwala to ponadto uogólnić zależności na niecałkowite wartości tych parametrów. Otóż dla małych odkształceń

(ogólnie dla małych wartości  $y$ ) korzystamy z następującego szeregu potęgowego Legendre'a

$$(z, \varrho)! = e^{-e} e^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho^k}{(z+1) \dots (z+k)},$$

zachowującego sens dla dowolnych zespolonych  $z$ , różnych od  $-1, -2, \dots$ . W zastosowaniu do naszego zagadnienia [por. (2.5)] otrzymujemy ogólnie

$$(2.9) \quad \Phi(y) = \frac{\left(m-1, m \frac{y}{x}\right)!}{(m-1)!} = \frac{e^{-m \frac{y}{x}} \left(m \frac{y}{x}\right)^{m-1}}{(m-1)!} \left[ \frac{m \frac{y}{x}}{m} + \frac{\left(m \frac{y}{x}\right)^2}{m(m+1)} + \frac{\left(m \frac{y}{x}\right)^3}{m(m+1)(m+2)} + \dots \right].$$

Dla dużych wartości  $y$  dogodnie jest skorzystać z następującego szeregu asymptotycznego (w sensie Poincarégo):

$$q(z, \varrho) = e^{-e} e^z \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{\varrho^k} \right),$$

skąd otrzymujemy

$$(2.10) \quad 1 - \Phi(y) = \frac{q\left(m-1, m \frac{y}{x}\right)}{(m-1)!} = \frac{e^{-m \frac{y}{x}} \left(m \frac{y}{x}\right)^{m-1}}{(m-1)!} \left[ 1 + \frac{m-1}{m \frac{y}{x}} + \frac{(m-1)(m-2)}{\left(m \frac{y}{x}\right)^2} + \dots \right].$$

Dostosowanie wyrażeń (2.9) dla poszczególnych rozkładów nie nastęrcza trudności.

Na koniec zwrócimy uwagę, że wzajemny stosunek liczby elementów (ziaren) niszczących się przez osiągnięcie  $R$  i elementów osiagających  $Q$  jest w sensie «strukturalnym» miarą stopnia kruchości materiału. Miarę tę możemy wprost zdefiniować jako prawdopodobieństwo spełniania nierówności

$$(2.11) \quad p = p(R < Q).$$

Mamy oczywiście

$$(2.12) \quad p = \int_{R < Q} \int \chi(R) \psi(Q) dR dQ = \int_0^{\infty} X(Q) \psi(Q) dQ.$$

### 3. Zagadnienie dla narzuconych z góry odkształceń

Rozważymy obecnie pierwszy z wymienionych przy końcu p. 1 problemów, gdy mianowicie dany jest z góry przebieg odkształceń w czasie, tj. funkcja  $\varepsilon(t)$ .

Wówczas rozwiązanie równania różniczkowego (1.1) przy warunkach początkowych  $\varepsilon(0) = 0$ ,  $\sigma(0) = 0$ , jak wiadomo, ma postać

$$(3.1) \quad \sigma(t) = H\varepsilon(t) - \frac{H-E}{\tau} \int_0^t \varepsilon(\vartheta) \exp\left(-\frac{t-\vartheta}{\tau}\right) d\vartheta.$$

Pierwszy wyraz z prawej strony przedstawia naprężenie wywołane odkształceniem doraźnym w chwili  $t$ , drugi odkształceniem opóźnionym. Funkcja  $\exp\left[-(t-\vartheta)/\tau\right]$  określa wpływ odkształcenia jednostkowego w chwili  $\vartheta$  na naprężenie w chwili  $t$ ; jak widzimy, zachodzi sumowanie tych wpływów, a zależność (3.1) wyraża prawo superpozycji dla odkształceń lepkosprężystych.

Wstawiając funkcję  $\sigma(t)$  określoną wyrażeniem (3.1) oraz znaną funkcję  $\varepsilon(t)$  w prawą stronę zależności (2.6) otrzymujemy w postaci wyraźnej funkcję  $\sigma_0 = \sigma_0(t)$  określającą przebieg naprężeń w czasie, tj. ogólne rozwiązanie zagadnienia dla przypadku monotonicznie niemalejącej funkcji  $\varepsilon(t)$ .

Praktyczne znaczenie posiada prawie wyłącznie przypadek, gdy odkształcenia narastają ze stałą prędkością,  $\varepsilon = vt$ ,  $v = \text{const}$ . Wtedy w myśl (3.1) mamy

$$(3.2) \quad \sigma = Evt + \tau v (H - E) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Korzystając z konkretnej zależności (2.8) otrzymujemy ogólnie równanie krzywych  $\sigma_0(t)$ :

$$(3.3) \quad \sigma_0 = [Evt + \tau v (H - E) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)] [1 + \delta Evt + \\ + \delta \tau v (H - E) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)] \exp\{-[\delta Evt + \beta vt + \delta \tau v (H - E) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)]\}.$$

Krzywe te posiadają maksima, odpowiadające różnym wartościom  $t$  w zależności od  $v$  i odnoszą się do całego zakresu odkształceń.

Badanie na maszynie wytrzymałościowej przy narzuconej stałej prędkości odkształcenia, powtarzane dla kilku wartości  $v$ , należy uznać za podstawowe źródło informacji o własnościach wytrzymałościowych materiału. Zazwyczaj interesują nas bezpośrednio krzywe  $\sigma_0(\varepsilon)$  przy różnych wartościach parametru  $v$ , które uzyskujemy przepisując (3.2) w postaci

$$(3.4) \quad \sigma = E\varepsilon + \varepsilon_\tau (H - E) \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\tau}}\right)$$

i podobnie jak poprzednio wstawiając do (2.6) lub (2.8); tutaj  $\varepsilon_\tau = v\tau$  oznacza odkształcenie przy  $t = \tau$ , tj. po okresie równym czasowi relaksacji.

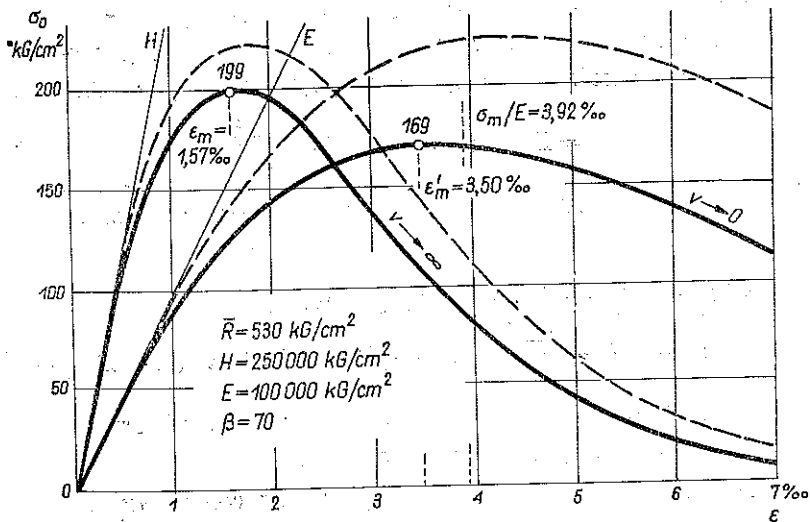
Podstawowe znaczenie posiadają krzywe «skrajne» dla  $v \rightarrow \infty$ , tj. dla obciążenia doraźnego oraz dla  $v \rightarrow 0$ , czyli dla odkształcenia nieskończenie powolnego, ponieważ wszystkie inne krzywe mieszczą się «między» nimi. W pierwszym przypadku nie występują odkształcenia opóźnione i mamy  $\sigma = H\varepsilon$  (działa tylko górna sprężyna modelu, we wzorze zaś (3.4)  $\varepsilon_\tau \rightarrow \infty$ ); w drugim przypadku  $\sigma = E\varepsilon$  (wyłą-

cza się tłumik w modelu,  $\varepsilon_r \rightarrow 0$ ). Podstawiając te wartości do (2.8) otrzymujemy bardzo proste równania odnośnych krzywych:

$$(3.5) \quad \sigma_0 = H\varepsilon(1 + \delta H\varepsilon) e^{-\delta H\varepsilon} e^{-\beta\varepsilon} = H\varepsilon \left(1 + \frac{2H}{R}\varepsilon\right) \exp\left[-\left(\frac{2H}{R} + \frac{1}{\varepsilon_{gr}}\right)\varepsilon\right],$$

$$(3.6) \quad \sigma_0 = E\varepsilon(1 + \delta E\varepsilon) e^{-\delta E\varepsilon} e^{-\beta\varepsilon} = E\varepsilon \left(1 + \frac{2E}{R}\varepsilon\right) \exp\left[-\left(\frac{2E}{R} + \frac{1}{\varepsilon_{gr}}\right)\varepsilon\right].$$

Przy konstrukcji tych krzywych można zalecić następujące postępowanie: najpierw pomijamy czynnik  $e^{-\beta\varepsilon}$  i wykreślamy krzywą określoną pozostałym równaniem dla obciążenia doraźnego, po czym przez zwykłą zmianę skali  $\varepsilon$  w stosunku  $H/E$  («rozciągnięcie» krzywej wzdłuż osi odciętych) otrzymujemy czysto wykresnym sposobem krzywą dla  $v \rightarrow 0$ ; następnie wszystkie rzędne obu krzywych redukujemy w stosunku  $e^{-\beta\varepsilon}$ .

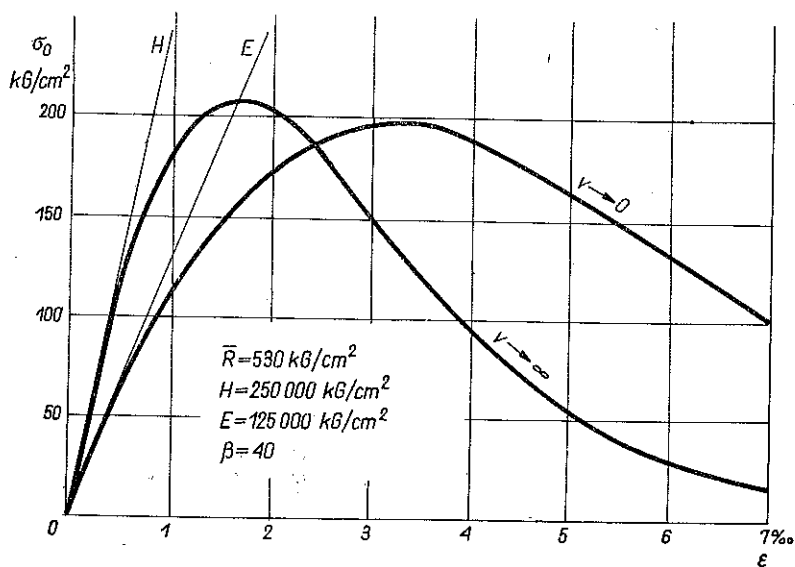


Rys. 4

Na rys. 4 wykreśliliśmy w ten sposób krzywe (3.5) i (3.6) dla betonu (wykresy kreskowane przedstawiają omówione krzywe pomocnicze) przy następujących założeniach:  $H = 250000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E = 100000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\bar{R} = 530 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\delta = 2/\bar{R} = 0,00378 \text{ cm}^2/\text{kG}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{gr} = 0,0143$ ,  $\beta = 1/\bar{\varepsilon}_{gr} = 70$ . Jest rzeczą charakterystyczną, że wytrzymałość «strukturalna»  $\bar{R}$  przewyższa znacznie wytrzymałość doraźną; wskazuje to na ogromną rolę mikrodefektów. Jak wiadomo, jeszcze niepomniernie większe różnice zachodzą przy rozpatrywaniu defektów budowy sieciowej kryształów.

Na rysunku 5 wykreślono obie krzywe zasadnicze przy nieco odmiennych założeniach:  $H = 250000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E = 125000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\bar{R} = 530 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\delta = 2/\bar{R} = 0,00378 \text{ cm}^2/\text{kG}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{gr} = 0,025$ ,  $\beta = 1/\bar{\varepsilon}_{gr} = 40$ .

Porównanie tych krzywych z rysunkiem 1a wskazuje na bardzo dobrą zgodność wyników teoretycznych z doświadczalnymi. Występują też jednak pewne charakterystyczne różnice, nasuwające kilka uwag krytycznych odnośnie wspomnianych badań H. Rüscha, gdzie za krzywe «graniczne» (dla  $v \rightarrow \infty$  i  $v \rightarrow 0$ ) będziemy uważali w przybliżeniu krzywe na rys. 1, odpowiednio dla  $v = 0,001/\text{min}$  i  $v = 0,001/100$  dni. Przede wszystkim przy niewielkich odkształceniach krzywe doświadczalne niemal zlewają się nie wykazując wzrostu według odmiennych modułów  $H$  i  $E$ . Zdaniem autora jest to bardzo poważna nieścisłość, gdyż jeszcze przy naprężeniach równych ok. 40% wytrzymałości doraźnej nie widać żadnego dostrzegalnego wpływu pełzania betonu, mimo iż odnośne odkształcenie zostaje osiągnięte na jednej krzywej «skrajnej» w czasie ok. 20 sek., na drugiej zaś ok. miesiąca. Co się tyczy drugiej krzywej skrajnej doświadczalnej, to jak widać, na to, by móc określić jej rzędną



Rys. 5

np. przy  $\epsilon = 0,007$ , należałoby prowadzić badanie przez 700 dni, zachowując przez cały ten czas stałą szybkość przyrostu odkształcenia. Nie ma żadnych wskazówek, aby badania H. Rüscha obejmowały tak długi okres czasu i aby w ogóle zadanie uzyskania tak powolnej, ściśle stałej prędkości odkształcenia zostało eksperymentalnie pokonane; tym samym trudno się oprzeć na owej krzywej doświadczalnej. Jak widać, krzywa ta, w odróżnieniu od krzywej teoretycznej, wykazuje łagodniejszy spadek przy większych odkształceniach. Gdyby dalsze badania miały to potwierdzić, to należałoby to przypisać wpływowi spontanicznych zmian strukturalnych czyli dojrzewania betonu, czego nasz model teoretyczny nie uwzględnia. Wskazywałoby to wówczas, że model ten nie opisuje już badanego zjawiska (a przynajmniej ściśle) przy tak długich okresach obciążenia bądź też że beton nie był w chwili obciążenia w pełni dojrzały (w badaniach H. Rüscha był on obciążany w wieku 56 dni).

Za charakterystyczne punkty krzywych należy uznać ich maksima i obliczyć odpowiadające im wartości  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  i  $\sigma_0$ , które oznaczymy kolejno (odpowiednio dla  $v \rightarrow \infty$  i  $v \rightarrow 0$ )  $\sigma_m$ ,  $\sigma'_m$ ,  $\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon'_m$ ,  $R_\infty$  i  $R_0$  (dobór dwóch ostatnich oznaczeń stanie się zrozumiałe w p. 4). Stosując warunek ekstremum  $d\sigma_0/d\sigma = 0$  do wyrażenia (2.8), przepisane w postaci

$$\sigma_0 = \sigma (1 + \delta\sigma) e^{-\delta\sigma} e^{-\frac{\beta}{H}\sigma},$$

dochodzimy do równania

$$\delta(H\delta + \beta)\sigma^2 - (H\delta - \beta)\sigma - H = 0,$$

o rozwiązaniu

$$(3.7) \quad \sigma_m = \frac{(H\delta - \beta) + \sqrt{(H\delta - \beta)^2 + 4\delta H(H\delta + \beta)}}{2\delta(H\delta + \beta)}$$

i analogicznie

$$(3.8) \quad \sigma'_m = \frac{(E\delta - \beta) + \sqrt{(E\delta - \beta)^2 + 4\delta E(E\delta + \beta)}}{2\delta(E\delta + \beta)}$$

Odpowiednie odkształcenia mają wartość

$$(3.9) \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{H},$$

$$(3.10) \quad \varepsilon'_m = \frac{\sigma'_m}{E},$$

zaś odnośne naprężenia maksymalne, czyli wytrzymałości

$$(3.11) \quad R_\infty = \sigma_m (1 + \delta\sigma_m) \exp \left[ - \left( \delta + \frac{\beta}{H} \right) \sigma_m \right],$$

$$(3.12) \quad R_0 = \sigma'_m (1 + \delta\sigma'_m) \exp \left[ - \left( \delta + \frac{\beta}{E} \right) \sigma'_m \right].$$

Dla krzywych na rys. 4 odpowiednie wartości wynoszą:  $\sigma_m = 392$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma'_m = 350$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_m = 0,00157$ ,  $\varepsilon'_m = 0,0035$ ,  $R_\infty = 199$  kG/cm<sup>2</sup>,  $R_0 = 169$  kG/cm<sup>2</sup>.

Przy nie nadmiernych naprężeniach (do ok. 0,4  $R_\infty$ ), jak widać z rys. 4, wykresy nieznacznie odbiegają od przebiegu liniowego, co oznacza, że pozostajemy w przybliżeniu w zasięgu teorii pełzania liniowego. Jednakże nieliniowość jest głównym czynnikiem określającym zachowanie się materiału przy znacznych naprężeniach i w szczególności jego własności wytrzymałościowe. Wytrzymałość zależy w ogólności od prędkości odkształcenia, toteż oznaczmy ją przez  $R_v$ ; mieści się ona w przedziale  $R_\infty > R_v > R_0$ . Jest ona zmienna i nie jest, jak widzimy, cechą istotną materiału, w odróżnieniu od wytrzymałości «strukturalnej»  $\bar{R}$ , przedstawiającej

dla danego materiału stały parameter. Osiągnięcie  $R_0$  oznacza tylko utratę «stateczności» wewnętrznej ośrodką w «łańcuchowym» procesie zniszczenia.

Łatwo zauważyć, że dla ciała, w którym wpływ rozkładu  $\Phi$  (czyli odkształceń) można pominąć, tj.  $\beta = 0$ , otrzymalibyśmy  $\sigma_m = \sigma'_m$  [ułamki (3.7) i (3.8) uprościłyby się przez  $H$  lub  $E$ ] oraz  $R_\infty = R_0$  i mielibyśmy jedynie  $\varepsilon_m/\varepsilon'_m = E/H$  w myśl wzorów (3.9) i (3.10). Na odwrot, w ośrodkach, gdzie można pominąć wpływ  $R$ , tzn. rozkładu  $X$ , byłoby, jak widać z (1.2),  $\sigma_0 = H\varepsilon [1 - \Phi(\varepsilon)]$  lub  $\sigma_0 = E\varepsilon [1 - \Phi(\varepsilon)]$  i warunek  $d\sigma_0/d\varepsilon = 0$  prowadziłby do  $\varepsilon_m = \varepsilon'_m$ , natomiast otrzymalibyśmy  $R_\infty/R_0 = H/E$ . W pierwszym przypadku krzywa «skrajna» dla  $v \rightarrow 0$  byłaby tylko «rozciągnięta» wzdłuż osi odciętych, w drugim — tylko «obniżona».

Na koniec dla porównania rozważymy przypadek ścisłej korelacji, tj. istnienia jedyne go kryterium wyteżenia i przyjmiemy, że mają miejsce zależności (1.4) i (1.5), przy czym, jak poprzednio, zmienna losowa  $U$  wykazuje rozkład gamma o parametrach  $m$  i  $\beta$ . Analogicznie do postępowania przedstawionego wyżej dochodzimy bez trudności do równania krzywych  $\sigma_0(\varepsilon)$ :

$$(3.13) \quad \sigma_0 = [E\varepsilon + \varepsilon_* (H - E) (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}})] \exp \left[ -\frac{\beta E}{2(H - E)} \left( H\varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon_* + \frac{\sigma^2}{E} \right) \right],$$

redukującego się dla krzywych «skrajnych» do postaci odpowiednio

$$(3.14) \quad \sigma_0 = H\varepsilon \exp \left( -\frac{B}{2} H\varepsilon^2 \right),$$

$$(3.15) \quad \sigma_0 = E\varepsilon \exp \left( -\frac{B}{2} E\varepsilon^2 \right).$$

Z warunku  $d\sigma_0/d\varepsilon = 0$  otrzymuje się

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{1}{\beta H}}, \quad \varepsilon'_m = \sqrt{\frac{1}{\beta E}},$$

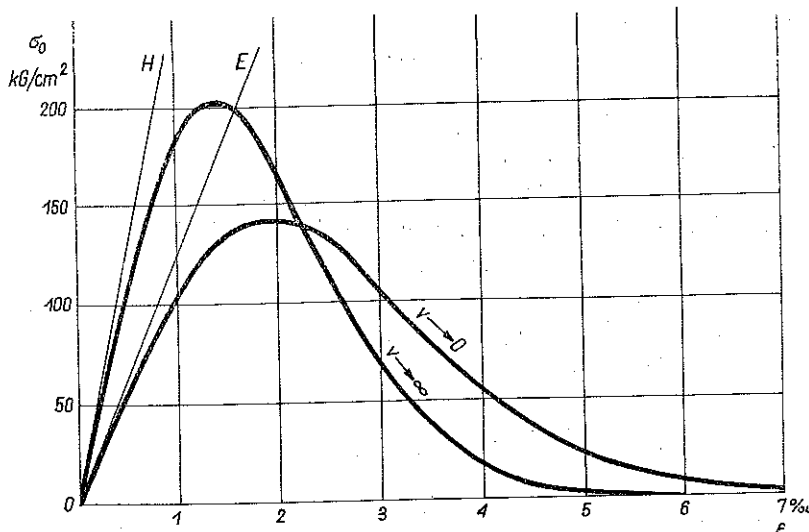
$$R_\infty = \sqrt{\frac{H}{\beta e}}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{E}{\beta e}}.$$

Jak widać, zachodzą tu zależności

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon'_m} = \sqrt{\frac{E}{H}}, \quad \frac{R_\infty}{R_0} = \sqrt{\frac{H}{E}}.$$

Korzystając z rozwinięcia funkcji (1.4) w myśl wzorów w p. 2 można łatwo wykazać, że związki te zachowują moc niezależnie od wielkości parametrów  $m$  i  $\beta$ . Stanowią one sprawdzian (warunek konieczny) możliwości przyjęcia energetycznego kryterium wyteżenia [por. (1.5)]. Ograniczają one w poważnym stopniu możliwość zastosowania tego kryterium, co jest następstwem faktu, że liczba niezależnych parametrów zredukowała się w wyniku ścisłej korelacji z sześciu do dwu ( $\bar{U}$  i  $\mu_u$ ), tym samym zmniejszyła się swoboda w dostosowaniu krzywych do wyników doświadczalnych.

Na rysunku 6 wykreślono krzywe «skrajne» dla hipotezy energetycznej przy następujących założeniach:  $H = 250000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E = 125000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 2,2$ ,  $\bar{U} = 1/\beta = 0,455 \text{ kG/cm}^2$ . Uzyskano następujące wartości:  $\varepsilon_m = 0,00135$ ,



Rys. 6

$\varepsilon'_m = 0,00191$ ,  $R_{\infty} = 204 \text{ kG/cm}^2$ ,  $R_0 = 144 \text{ kG/cm}^2$ . Porównanie rys. 6 z rys. 1 wskazuje, że krzywe znacznie gorzej niż w poprzednim przypadku odpowiadają wykresom doświadczalnym.

#### 4. Zagadnienie dla danych z góry naprężeń

W zagadnieniach praktycznych (w odróżnieniu od badań doświadczalnych) występuje prawie wyłącznie przypadek, gdy znany jest przebieg naprężeń (obciążeń) w czasie, tzn. dana jest funkcja  $\sigma_0(t)$ . Wówczas, w ogólnym ujęciu, wstawiając wyrażenie (3.1) do (2.6) otrzymujemy równanie całkowe (nieliniowe) ze względu na niewiadomą funkcję  $\varepsilon(t)$ . Rozwiązanie tego równania (na ogół nie dające się przedstawić w postaci zamkniętej) jest ogólnym rozwiązaniem problemu dla monotonicznie niemalejących funkcji  $\varepsilon(t)$ .

W praktyce podstawowe znaczenie ma przypadek stałego obciążenia,  $\sigma_0 = \text{const}$ , prowadzący do znacznych uproszczeń i w dalszym ciągu ograniczymy się do jego rozważania przy przyjęciu zależności (2.8) (przy wyższych wartościach parametrów  $m$ ,  $r$  i  $n$ , analiza przebiega w sposób zupełnie podobny). Zagadnienie polega na rozwiązaniu układu równań (2.8) i (1.1). Logarytmując obustronnie równanie (2.8) otrzymujemy

$$(4.1) \quad \varepsilon = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\sigma(1+\delta\sigma)}{\sigma_0} - \frac{\delta}{\beta} \sigma$$



i stąd, różniczkując to wyrażenie względem czasu,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\beta} \frac{1+2\delta\sigma}{\sigma(1+\delta\sigma)} - \frac{\delta}{\beta} \dot{\sigma}.$$

Wstawiając to wyrażenie do (1.1) otrzymujemy po drobnych przekształceniach

$$(4.2) \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{\tau} \frac{\sigma(E\delta + \beta) - E \ln \frac{\sigma(1+\delta\sigma)}{\sigma_0}}{H \frac{1+2\delta\sigma}{\sigma(1+\delta\sigma)} - (H\delta + \beta)}.$$

Jak widzimy, jest to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych,

$$(4.3) \quad dt = \tau \frac{H \frac{1+2\delta\sigma}{\sigma(1+\delta\sigma)} - (H\delta + \beta)}{\sigma(E\delta + \beta) - E \ln \frac{\sigma(1+\delta\sigma)}{\sigma_0}} d\sigma,$$

pozwalające wyznaczyć funkcję  $t(\sigma)$ .

Dyskusja powyższych zależności prowadzi do wyników następujących. Mianownik w wyrażeniu (4.2) jest funkcją monotonicznie malejącą od  $\infty$  dla  $\sigma \rightarrow 0$  do  $-(H\delta + \beta)$  dla  $\sigma \rightarrow \infty$ . Przyrównując go do zera dochodzimy do tego samego równania kwadratowego, co przy wywodzie wzoru (3.7), zatem odnośna krzywa (przedstawiająca przebieg funkcji w mianowniku) przecina oś odciętych w punkcie  $\sigma_m$ , danym tymż wzorem. Licznik w (4.2) z razu maleje (od  $\infty$  dla  $\sigma \rightarrow 0$ ), osiąga swe minimum, po czym znowu wzrasta (dążąc do  $\infty$  dla  $\sigma \rightarrow \infty$ ). W zależności od parametru  $\sigma_0$  funkcja w liczniku może przybierać przy tym w pewnym zakresie  $\sigma$  wartości ujemne (tj. posiadać 2 pierwiastki rzeczywiste) bądź też być styczną do osi odciętych (posiadać jeden pierwiastek), bądź wreszcie przybierać tylko wartości dodatnie (nie posiadać pierwiastka). Przyrównując licznik do zera otrzymujemy równanie

$$\sigma_0 = \sigma(1+\delta\sigma) e^{-\delta\sigma} e^{-\frac{\beta}{E}\sigma}.$$

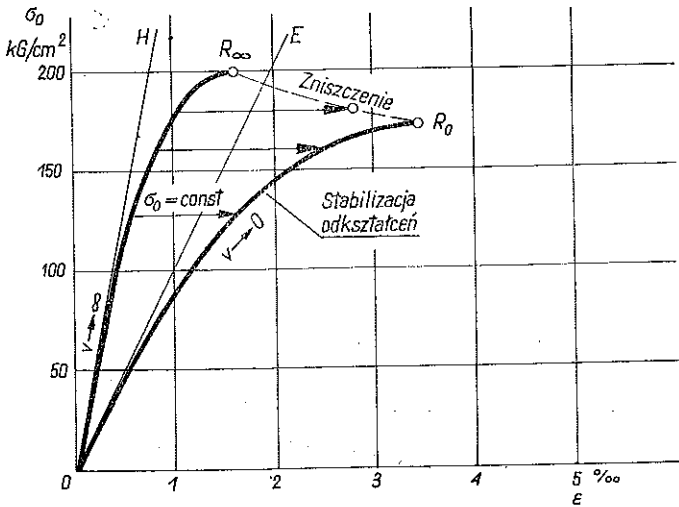
Jak widać, otrzymaliśmy równanie (3.6), w którym podstawiono  $\varepsilon = \sigma/E$ , wobec czego zerowanie się licznika można zastąpić warunkiem równoważnym osiągnięcia krzywej «skrajnej» dla  $v \rightarrow 0$  na rys. 4 i następnych. Otóż prosta  $\sigma_0 = \text{const}$  (tj. równoległa do osi odciętych), przedstawiająca przebieg obciążenia, przecina tę krzywą w 2 punktach dopóki  $\sigma_0 < R_0$ , w tym więc zakresie licznik ma 2 pierwiastki. Dla  $\sigma_0 = R_0$  prosta jest styczna do krzywej w punkcie «szczytowym» i licznik ma jeden pierwiastek  $\sigma = \sigma'_m$ . Wreszcie dla  $\sigma_0 > R_0$  licznik pierwiastka nie posiada.

Z powyższych rozważań wynika, że możemy wyróżnić dwa podstawowe przypadki:

(1)  $\sigma_0 < R_0$ . Wówczas licznik w (4.2) osiąga wartość 0 przy stałe dodatnim mianowniku 4; oznacza to, że prędkość przyrostu naprężeń  $\dot{\sigma}$  i odkształceń  $\dot{\varepsilon}$  zdąża do zera, czyli odkształcenia «stabilizują się», (zdążają dla  $t \rightarrow \infty$  asymptotycznie do pewnej wartości granicznej).

(2)  $\sigma_0 > R_0$ . Licznik jest stałe dodatni, zaś mianownik osiąga wartość 0 dla  $\sigma = \sigma_m$ , co oznacza że prędkość  $\dot{\sigma} \rightarrow \infty$ , czyli że następuje zniszczenie.

Dla  $\sigma_0 = R_0$  zniszczenie następuje po czasie teoretycznie nieskończenie długim;  $R_0$  przedstawia więc wytrzymałość trwałą, tj. wartość graniczną oddzielającą obszar naprężeń  $\sigma_0 = \text{const}$ , w którym zniszczenie jest możliwe (niezależnie od czasu, po którym nastąpi) od obszaru «bezpiecznego», w którym zająć ono nie może.

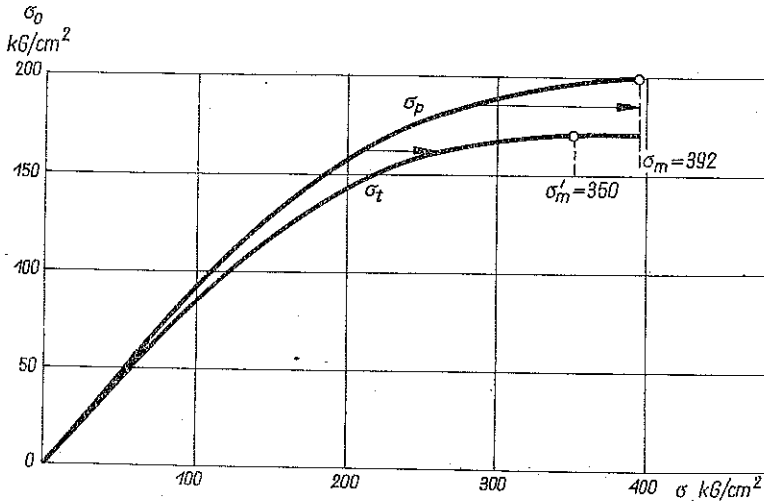


Rys. 7

Wywody powyższe dają się bardzo przejrzysto zilustrować na wykresach  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$  (rys. 7). Liniami pełnymi wykreślono tu części początkowe krzywych z rys. 4 (aż do punktów «szczytowych»). Zaczepiając obciążenie posuwamy się po krzywej obciążenia doraźnego (o  $v \rightarrow \infty$ ) do określonej wartości  $\sigma_0$ . Utrzymując to obciążenie w dalszym ciągu posuwamy się po prostej «poziomej». Jeśli prosta ta natrafia na drugą krzywą skrajną (dla  $v \rightarrow 0$ ), to zniszczenie nie następuje, a odkształcenie dąży dla  $t \rightarrow \infty$  do wartości określonej odnośnym punktem tejże krzywej. Jeśli prosta na drugą krzywą nie natrafia (dla  $R_0 < \sigma_0 < R_\infty$ ), następuje zniszczenie po określonym czasie, zmieniającym się od  $t \rightarrow \infty$  dla  $\sigma_0 = R_0$  do  $t \rightarrow 0$  dla  $\sigma_0 = R_\infty$ . Odpowiednie odkształcenia przy zniszczeniu przedstawia krzywa kreskowana. Gdyby wreszcie było  $\sigma_0 > R_\infty$ , nastąpiłoby zniszczenie doraźne. Jak widzimy, krzywe dla stałej prędkości odkształcenia grają też zasadniczą rolę w zagadnieniu

<sup>4</sup> Mniejszy z pierwiastków licznika jest mniejszy od pierwiastka mianownika, gdyż jest niższy od  $\sigma'_m$ , zaś  $\sigma'_m < \sigma_m$ . Oczywiście w zakresie ważności rozważań wyrażenie (4.2) nie może być ujemne (a więc licznik musi być  $\geq 0$ ) w myśl założenia o monotonicznym wzroście  $\sigma(t)$ .

stałego obciążenia, a wzory (3.11) i (3.12) są podstawowymi wzorami dla określenia wytrzymałości doraźnej i trwałej.



Rys. 8

Krzywe skrajne przedstawiono na rys. 8 w układzie współrzędnych  $\sigma$ ,  $\sigma_0$ ; uzyskano je na podstawie krzywych na rys. 4 przez pomnożenie odciętych (tj. odkształceń) odpowiednio przez  $H$  lub  $E$ . Tutaj po przekroczeniu punktu szczytowego (o odciętej  $\sigma'_m$ ) wszystkie proste «poziome» dochodzą do stałej odciętej  $\sigma_m$ , przy której następuje zniszczenie. Przy naprężeniach  $\sigma_0$  bliskich  $R_0$  proces odkształcenia po dostatecznie długim czasie staje się mało stabilny i wystarczą drobne zmiany obciążenia lub inne przyczyny, aby wywołać zniszczenie.

Pozostaje jeszcze tylko obliczyć czas zniszczenia  $t_n$  dla  $R_0 < \sigma_0 < R_\infty$ . Na podstawie zależności (4.3) otrzymujemy od razu

$$(4.4) \quad t_n = \tau \int_{\sigma_p}^{\sigma_m} \frac{H \frac{1+2\delta\sigma}{\sigma(1+\delta\sigma)} - (H\delta + \beta)}{\sigma(E\delta + \beta) - E \ln \frac{\sigma(1+\delta\sigma)}{\sigma_0}} d\sigma.$$

Całkujemy zgodnie z rys. 8 od wartości  $\sigma_p$  odpowiadającej obciążeniu doraźnemu do stałej wartości  $\sigma_m$ . (Wartości  $\sigma_t$  na rys. 8, odnoszące się do  $\sigma_0 < R_0$ , oznaczają naprężenia, do których  $\sigma$  dąży asymptotycznie dla  $t \rightarrow \infty$ ). Wartość  $\sigma_p$  odczytujemy z krzywej «doraźnej» na rys. 8 lub rys. 4 (mnożąc  $\varepsilon$  przez  $H$ ) bądź też wyznaczamy ściśle rozwiązując (np. metodą iteracyjną Newtona) równanie

$$\sigma_0 = \sigma(1 + \delta\sigma) e^{-\delta\sigma} e^{-\frac{\beta}{H}\sigma}$$

względem niewiadomej  $\sigma$ . Górną granicę całkowania określa wzór (3.7). Konkretnie wartości całki (4.4) można obliczyć dowolną metodą numeryczną, np. stosując

regułę Simpsona [w tym celu należy podzielić przedział  $(\sigma_p, \sigma_m)$  na parzystą liczbę odcinków i wyznaczyć w odnośnych punktach wartość funkcji podcałkowej]. Dla przykładu na rys. 4 i 8 i  $\sigma_0 = 180 \text{ kG/cm}^2$  czas ten wynosi  $t_n = 3,20 \tau$ ; jest on zawsze proporcjonalny do czasu relaksacji  $\tau$ .

Przebieg odkształceń w czasie przy danym  $\sigma_0 = \text{const}$ , tzn. funkcja  $\varepsilon(t)$  dana jest w myśl wzorów (4.1) i (4.3) w postaci parametrowej (parametrem jest  $\sigma$ ):

$$(4.5) \quad t = \tau \int_{\sigma_p}^{\sigma} \frac{H \frac{1+2\delta\sigma}{\sigma(1+\delta\sigma)} - (H\delta + \beta)}{\sigma(E\delta + \beta) - E \ln \frac{\sigma(1+\delta\sigma)}{\sigma_0}} d\sigma,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\sigma(1+\delta\sigma)}{\sigma_0} - \frac{\delta}{\beta} \sigma.$$

Przyjmując kolejne wartości  $\sigma$  obliczamy przynależne sobie wartości  $t$  i  $\varepsilon$ . Wzory te odnoszą się do całego zakresu  $\sigma_0$ , zarówno poniżej jak i powyżej  $R_0$ .

Dla niewielkich naprężeń  $\sigma_0$  (do ok. 40%  $R_{\infty}$ , tj. w granicach naprężeń dopuszczalnych, użytkowych) krzywe  $\sigma_{pi}$  i  $\sigma_t$  biegną, jak widać z rys. 8, bardzo blisko siebie i mamy  $\sigma_p \approx \sigma_0 H/H = \sigma_0$ ,  $\sigma_t \approx \sigma_0 E/E = \sigma_0$ ,  $\sigma_t \rightarrow \sigma_p \rightarrow \sigma_0$ . Oznacza to, że w całym zakresie całkowania można poprzestać na teorii pełzania liniowego i przyjąć w przybliżeniu  $\sigma = \sigma_0$ . Tym samym rozwiązanie określone jest wyłącznie równaniem różniczkowym [por. (1.1)]

$$(4.6) \quad H\tau\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma_0 + \tau\dot{\sigma}_0.$$

Rozwiązanie tego równania dla  $\sigma_0 = \text{const}$  ma postać:

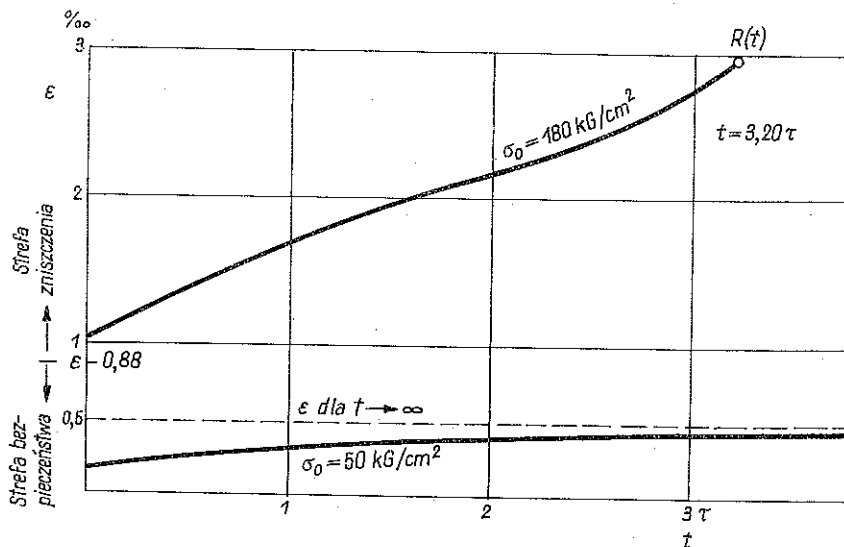
$$(4.7) \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} - \sigma_0 \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{H} \right) \exp \left( - \frac{Et}{H\tau} \right).$$

Porównując ten wynik z rozwiązaniem ścisłym (4.5) (opartym na teorii nieliniowej) można określić wielkość błędu.

Na rysunku 9 przedstawiono przebieg funkcji  $\varepsilon(t)$  dla przykładu z rys. 4 dla dwóch wartości  $\sigma_0$ , mianowicie  $\sigma_0 = 50 \text{ kG/cm}^2 < R_0$  oraz  $\sigma_0 = 180 \text{ kG/cm}^2 > R_0$ ; w pierwszym przypadku zastosowano przybliżony wzór (4.7), w drugim wzory (4.5), przy czym wykreślono krzywą na podstawie wyznaczenia 5 rzędnych «pośrednich». W pierwszym przypadku odkształcenie zdąża asymptotycznie do swej wartości «ostatecznej», w drugim — po określonym czasie zaczyna szybko wzrastać i osiąga wartość, przy której następuje zniszczenie. Naniesiono też wielkość odkształcenia doraźnego odpowiadającego wartości  $\sigma_0 = R_0$ , oddzielającego dwa zasadnicze obszary (wynosi ono  $\varepsilon = 0,00088$ ).

Przedstawiona teoria może znaleźć zastosowanie do wszelkich ciał odpowiadających omówionym w p. 1 założeniom «strukturalnym», ciał które moglibyśmy umownie nazwać *prostymi*. Jak widzieliśmy, pozwala ona w sposób konkretny i stosunkowo prosty wyznaczyć podstawowe wielkości mające znaczenie w praktyce,

przy czym obliczenia liczbowe nie wymagają więcej czasu niż kilka godzin. Obliczenia liczbowe wyrażeń typu (4.4) i (4.5) muszą być wykonywane na arytmometrze bądź też za pomocą wielocyfrowych tablic logarytmicznych, a nie na suwaku, mamy



Rys. 9

bowiem (w liczniku i mianowniku) do czynienia m.in. z małymi wielkościami, będącymi różnicami dużych liczb. W przypadku betonu, gdzie wykazano nader zadowalającą zgodność wyników teoretycznych z doświadczalnymi, może one być bezpośrednio stosowana w praktyce.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] B. GROSS, *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity*, Paryż 1953.
- [2] H. RÜSCH, *Researches toward a general flexural theory of structural concrete*, JACI, VII 1960.
- [3] A. P. Ржаницын, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*, Москва-Ленинград 1949.
- [4] E. TORROJA, A. RAÉZ BALACA, *A rheological model for concrete*, Kongr. AIFC, Lizbona 1956.

#### Резюме

#### РЕОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К БЕТОНУ

В работе представлена теория прочности, основанная на предположении, что среда состоит из большого числа реологических элементов (моделей расположенных пространственно, рис. 2) и обладающих соответствующими прочностными свойствами, являющимися случайными переменными с известными распределениями вероятности. Эта модель связывает реологические свойства с прочностными и учитывает основной факт, что по мере нарастания

структурных микродефектов увеличивается концентрация напряжений в остальных частях и разрушение носит характер «цепного» процесса.

Рассматриваются подробно случаи нарастания деформаций с постоянной скоростью и нагрузки с постоянным напряжением, при чем доказывается, что между ними существует тесная связь. Доказано наличие определенного условного сопротивления (меньше временного), ниже которого разрушение невозможно, тогда как в противоположном случае разрушение наступает после истечения определенного времени. Приводятся формулы для определения этого сопротивления и времени разрушения, а также формулы для кривых процесса деформаций во времени. Указывается, в приближении область применения линейной теории ползучести.

Получены результаты в замкнутой форме, пригодной для численных расчетов и непосредственного использования на практике. Они применяются к бетону и сравниваются с исследованиями Х. Рюша, [2], с которыми проявляют хорошее согласие. Приводятся некоторые численные результаты.

### S u m m a r y

#### RHEOLOGIC THEORY OF STRENGTH AND ITS APPLICATION TO CONCRETE

This strength theory is based on the assumption that the body is composed of a great number of rheologic elements located in space (Fig. 2) and having definite strength properties constituting random variables with known probability distribution. This assumption concerns both rheologic and strength properties and takes into consideration the fundamental fact that strength concentrations in the remaining parts of the body increase as structural microdefects increase and that the destruction has the character of a «chain» process.

The case of constant strain rate and constant stress are considered in detail, it being shown that there exists a close relation between them. It is shown that there exists a durable strength (lower than the immediate one) below which destruction is not possible. Above this value, it takes place with a certain delay.

Equations determining this strength and the failure delay are obtained as well as those describing the strain process in function of time. The applicability range of the linear creep theory is discussed.

The results are obtained in a closed form convenient for numerical computation and direct practical use. They are applied to concrete and confronted with the tests of H. RÜSCH, [2] showing a very good agreement. Certain numerical results are given for comparison.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 stycznia 1963 r.*