

**METODA WYZNACZANIA PEWNYCH KLAS PRZEPLYWÓW
ZA POMOCĄ MODELOWANIA NA GRUPACH LIEGO**

PIOTR KUCHARCZYK (WARSZAWA)

Wstęp

Wiadomo, że nieliniowość układu równań opisujących przepływ jest źródłem wielu trudności, z jakimi spotykamy się w badaniach teoretycznych. Dlatego też znaczną wagę przypisuje się badaniu pewnych, stosunkowo prostych klas rozwiązań tych równań, które dają się wyróżnić spośród wszelkich rozwiązań możliwych w taki sposób, że ostateczny układ równań, pozwalający te rozwiązania wyznaczyć, jest prostszy niż układ wyjściowy. Zachodzące przy tym uproszczenia są różne; w szczególności polegają one na zmniejszeniu bądź to ilości zmiennych niezależnych, bądź też liczby funkcji poszukiwanych.

Warto podkreślić, że proste klasy rozwiązań oprócz możliwych i spotykanych zastosowań do konstruowania przepływów, interesujących praktycznie, mają także inne nie mniej ważne znaczenie. Chodzi tu o rolę, jaką odgrywają proste klasy rozwiązań w wyjaśnieniu związków między przepływami rzeczywistymi, a przybliżonym ich ujęciem w modelu matematycznym, jakim jest z konieczności każdy układ równań, stanowiący podstawę teorii. Gdy znane są pewne ściśle rozwiązania, to uogólniając uzyskane wyobrażenia poglądowe, można dokonać oceny modelu jako całości, naturalnie pod względem jakościowym. Rozumie się więc, że nawet i takie klasy rozwiązań, które nie znajdują bezpośrednich zastosowań praktycznych, w poszukiwaniach teoretycznych są bardzo ważne.

Istotne znaczenie w procesie wyodrębniania klas rozwiązań przypada w udziale samym określeniom tych klas, ponieważ tylko wtedy, gdy określenia dobrane są właściwie, cały proces jest efektywny i rzeczywiście prowadzi do uproszczeń. Z kolei jednak właściwe określenie klas rozwiązań powinno się opierać na zrozumieniu (co najmniej intuicyjnym) struktury rozważanego układu równań, a to oznacza, że określanie klas rozwiązań wymaga odwołania się, w sposób mniej lub bardziej jawny, do pojęć teorii grup przekształceń, w których także i struktura równań znajduje swój wyraz.

Przy równaniach opisujących zjawiska fizyczne można mówić o trzech właściwych im strukturach:

- I) strukturze operacji występujących w równaniach,
- II) strukturze wymiarowej, będącej wyrazem postulatu jednorodności wymiarowej poszczególnych wyrazów równania,

III) strukturze geometrycznej, wyrażającej się w tensorowym zapisie równań, a związanej z ich niezależnością od układu współrzędnych.

Naturalnie struktury te są ze sobą powiązane i tak np. struktura operacji wiąże się ściśle ze strukturą wymiarową, o ile zmienne niezależne i niewiadome funkcje mają określone wymiary fizyczne.

Strukturą wymiarową równań dynamiki gazów zajmował się między innymi L. I. SIEDOW, wyodrębniając w pracy [8] wiele ważnych klas przepływów dzięki zastosowaniu analizy wymiarowej. Próbę grupowego ujęcia struktury wymiarowej równań przepływów oraz zbudowania na tej podstawie teorii modelowania (podobieństwa hydrodynamicznego) podjęli swego czasu M. W. KIRPICZEW i P. K. KONAKOW, [6], jednakże niektóre z twierdzeń tej pracy sformułowane są nie dość jasno, dlatego też trudno na jej podstawie ocenić czy i w jakim stopniu próba ta powiodła się.

Związkami teorii grup przekształceń i mechaniki płynów zajmował się także G. BIRKHOFF poświęcając temu zagadnieniu cały rozdział w znanej książce «Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude» [1]. Niestety, także i tutaj nie wszystkie związki są dostatecznie wyraźne, a ich zrozumienie utrudnia także brak niektórych określeń, np. niezmienniczości równań względem przekształceń.

Metodę badania struktury operacji dowolnych układów równań różniczkowych, w tym także i równań teorii przepływów, oraz wyznaczania na tej podstawie prostszych klas rozwiązań zawdzięczamy pracom L. W. OWSIANNIKOWA, [9], [10]. Istota tej metody polega w skrócie na tym, że najpierw poszukuje się tzw. grupy podstawowej danego układu równań, tzn. takiej grupy Liego przekształceń wielowymiarowej przestrzeni złożonej z funkcji poszukiwanych i zmiennych niezależnych, które przeprowadzają każde rozwiązanie układu znowu na jego rozwiązanie. Grupę podstawową znajduje się z układu równań określających, który spełniać muszą jej operatory infinitezimalne. Znając grupę podstawową, a więc dopuszczalną z uwagi na strukturę równania, można z kolei konstruować pewne klasy prostszych rozwiązań. Są nimi rozwiązania inwariantne względem podgrupy grupy podstawowej. Jako funkcje niezmienników podgrupy, na której są konstruowane, nie ulegają one zmianie przy transformacjach tej podgrupy. Klasy rozwiązań inwariantnych wyodrębniane są właściwie w tym sensie, że dalsze ich wyznaczenie wiąże się na ogół z rozwiązywaniem prostszych niż wyjściowy układów równań.

Jednakże wyznaczanie grupy podstawowej, co jest przy tej metodzie nieodzowne, nastęrcza sporo trudności związanych z dużą na ogół liczbą równań określających. Przykładowo liczba ta w przypadku nieustalonych, przestrzennych przepływów izentropowych wynosi 364. Jest oczywiste, że już samo zestawienie tak wielkiej ilości równań, a tym bardziej poszukiwanie ogólnego ich rozwiązania jest bardzo żmudne. A pamiętać należy, że jest to zaledwie wstępny etap do wyznaczenia rozwiązań prostszych.

Także i praca niniejsza ma za przedmiot badanie związków teorii grup Liego i mechaniki płynów i opracowanie wynikającej stąd metody wyodrębnienia klas rozwiązań prostszych dla równań przepływów. Jednak sposób podejścia jak i sama metoda są tu inne, natury geometrycznej, dzięki czemu, jak autor ośmiela się przy-

puszczać, udało się uzyskać z jednej strony większą niż w pracy Birkhoffa przejrzystość co do przedmiotu rozważań i stosowanych narzędzi, a z drugiej strony (nie pretendując bynajmniej do ogólności metody Owsiannikowa) pokazać związki obu tych dziedzin w sposób bardziej bezpośredni i naturalny, zwracając uwagę na ich sens geometryczny. To samo dotyczy mechanizmu uproszczeń. Z natury rzeczy wynika więc, że będziemy stale powoływać się na geometryczną strukturę równań. W tym celu zaczniemy od przytoczenia tensorowej postaci równań p. 1. Warunek wyodrębniający przepływ będziemy zapisywać za pomocą pochodnej Liego. Zapis ten będzie dogodny także i z tego względu, że jest niezmienniczy. Ponieważ w pracy korzystamy z pewnych pojęć i twierdzeń spotykanych na ogół jedynie w wielowymiarowej geometrii różniczkowej, dlatego zdecydowaliśmy się zestawzić je w p. 2. Przypuszczalnie okaże się on pożyteczny i zgodnie z zamierzeniem rzeczywiście ułatwi czytanie pracy. Prócz tego będziemy konsekwentnie korzystać z analizy tensorowej. Jak się wydaje, jej możliwości w zagadnieniu wyodrębniania klas rozwiązań równań przepływów nie były dotąd systematycznie wykorzystane.

Metoda proponowana wydaje się mieć pewne zalety z następujących powodów:

1. Warunki wyodrębniające klasę przepływów nie zależą od układu współrzędnych.
2. Wskazuje się układ współrzędnych, w których równania klasy przybierają postać uproszczoną.
3. Znajduje się pewne ogólne, wewnętrzne własności rozpatrywanych klas niezależnie od warunków granicznych.
4. Zawierają się w niej liczne znane metody wyznaczania przepływów na podstawie ich własności geometrycznych. Zadanie uogólnienia tych metod jest przy tym łatwiejsze zarówno dzięki wskazaniu ich geometrycznej istoty, jak i dzięki ścisłemu rozdzieleniu postulatów geometrycznych i założeń natury fizycznej. Za tym, że jest to sprawa ważna, przemawiają uwagi o liniach granicznych (por. p. 4.4).

W zakończeniu wstępu do pracy autor pragnie wyrazić gorące podziękowanie prof. dr J. BONDEROWI za liczne i cenne uwagi, które pomogły przy jej opracowaniu.

1. Tensorowa postać równań dynamiki gazów

1.1. Przeważająca część rozważań pracy dotyczyć będzie przepływów gazu nielepkiego i nie przewodzącego ciepła. Przyjmujemy, że t oznacza czas, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ współrzędne punktu w kartezjańskim układzie prostokątnych współrzędnych prostoliniowych, v^1, v^2, v^3 składowe wektora prędkości w tym układzie, ρ gęstość gazu, p jego ciśnienie, S entropię właściwą. Przy tych oznaczeniach możemy równania zachowania masy, pędu i energii zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^i + \partial_k (\rho v^k) &= 0, \\ (1.1) \quad \partial_t v^i + v^j \partial_j v^i + \frac{1}{\rho} \delta^{ik} \partial_k p &= 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \\ \partial_t S + v^j \partial_j S &= 0. \end{aligned}$$

Operacje różniczkowania cząstkowego zapisaliśmy w skrócie $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$, stosowana jest także umowa sumacyjna; δ^{ik} jest symbolem Kroneckera.

Do równań tych należy dołączyć równanie stanu. Zakładamy, że gaz jest doskonały i że zachodzi związek

$$(1.2) \quad p/p_0 = \exp [(S - S_0)/C_v] (\rho/\rho_0)^\gamma,$$

gdzie γ jest stosunkiem pojemności cieplnych, $\gamma = C_p/C_v$.

Umówmy się, pomijając strukturę wymiarową układu (1.1) i (1.2), że wszystkie występujące w nim wielkości wymiarowe zostały odniesione do ustalonych i stosownie dobranych jednostek wymiaru, tak że układ równań przybiera postać

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_k (\rho v^k) &= 0, \\ \partial_t v^i + v^j \partial_j v^i + \frac{1}{\rho} \delta^{kj} \partial_j p &= 0, \\ \partial_t (p/\rho^\gamma) + v^j \partial_j (p/\rho^\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Zachowaliśmy, jak to się na ogół przyjmuje, dla wielkości bezwymiarowych te same oznaczenia, które przyjęliśmy uprzednio dla wielkości wymiarowych.

Ostatnie cztery równania dają w przypadku przepływów ustalonych całkę Bernoulliego

$$(1.4) \quad v^k \partial_k H = 0,$$

przy czym dla entalpii całkowitej H , zachowującej swą wartość wzdłuż linii prądu, mamy wyrażenie

$$(1.5) \quad H = v_i v^i / 2 + \gamma p / (\gamma - 1) \rho.$$

1.2. Z kolei zapiszemy układ równań (1.3) w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych w przestrzeni. Aby nie wprowadzać nowych, zachowujemy oznaczenia już wprowadzone dla współrzędnych punktu, skalarów i pola wektora¹. Będziemy też korzystać ze stosowanego w analizie tensorowej oznaczenia wektorów i tensorów literą rdzeniową. Wtedy układ równań (1.3) przy dowolnym układzie współrzędnych w przestrzeni, na ogół krzywoliniowych, zapisujemy w następującej tensorowej postaci:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla_k (\rho v^k) &= 0, \\ \partial_t v^i + v^j \nabla_j v^i + \frac{1}{\rho} g^{ik} \partial_k p &= 0, \\ \partial_t (p/\rho^\gamma) + v^j \partial_j (p/\rho^\gamma) &= 0, \end{aligned}$$

¹ Ponieważ w dalszym ciągu oprócz współrzędnych kartezjańskich występować będą inne, wyróżnione układy, tym razem krzywoliniowe, wobec tego tam gdzie to się okaże niezbędne będziemy wyraźnie podkreślać, o jakich współrzędnych aktualnie mówimy.

gdzie v^i oznaczają składowe kontrawariantne pola prędkości v , g^{ik} składowe kontrawariantne tensora metrycznego g_{ik} trójwymiarowej, metryczno-euklidesowej przestrzeni \mathcal{R}_3 ($ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$), ∇_j symbol różniczkowania kowariantnego. Przypomnijmy przy sposobności, że pochodną kowariantną pola wektorowego v , określonego za pomocą składowych kontrawariantnych v^j obliczamy według wzoru

$$(1.7) \quad \nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k,$$

gdzie Γ_{ik}^j są to symbole Christoffela drugiego rodzaju:

$$(1.8) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

Układ równań dynamiki gazów w postaci tensorowej (1.6) jest niezależny od układu współrzędnych w przestrzeni \mathcal{R}_3 , innymi słowy postać ta jest niezmiennicza względem wszelkich możliwych przekształceń układów współrzędnych $(k) \rightarrow (k')$:

$$(1.9) \quad x^{k'} = f^{k'}(x^1, x^2, x^3), \quad k' = 1', 2', 3'$$

o różnym od zera jakobianie $|\partial f^{k'}/\partial x^j|$. Niezmienniczość ta jest wyrazem jednego z podstawowych postulatów fizyki, stwierdzającego, że istota wszelkich praw fizycznych winna być niezależną od wyboru układu współrzędnych przestrzennych, służących do jej analitycznego ujęcia. Z punktu widzenia opisu zjawiska fizycznego wszelkie układy współrzędnych w \mathcal{R}_3 są jednakowo uprawnione.

1.3. Zauważmy w tym miejscu, że we wzorach (1.9) rozpatrywanych formalnie jako zwykła zamiana zmiennych niezależnych w równaniach (1.6) nie występuje czas t , traktowany tym samym jako wyraźnie odrębna zmienna niezależna i nie wiążąca się z pozostałymi zmiennymi x^1, x^2, x^3 . Szczególna rola czasu utrudnia stosowanie, formalne chociażby, metod analizy tensorowej w takich badaniach układu (1.6), w których byłoby dogodnie korzystać z przekształceń niezależnych zmiennych postaci: $x^{i'} = f^{i'}(x^1, x^2, x^3, t)$, $i' = 1', 2', 3', 4'$. Trudności te zostały pokonane w pracy J. BONDERA, [2], za którą przytaczamy (z pewnymi, nieistotnymi zresztą zmianami) czasowo-przestrzenny, tensorowy zapis równań dynamiki gazów:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \nabla_k(\rho u^k) &= 0, \\ u^j \nabla_j w^i + \frac{1}{\rho} g^{ik} \partial_k p &= 0, \quad i, j, k, l = 1, \dots, 4, \\ u^j w_j &= q^2 - H, \\ w^l w_l &= q^2 + H^2, \\ u_i - w_i &= (1 + H) \partial_i t. \end{aligned}$$

Ta postać równań pozwala rozpatrywać dowolną zamianę zmiennych niezależnych o postaci $x^{k'} = f^{k'}(x^1, x^2, x^3, t)$, jako przejście do nowych współrzędnych w czterowymiarowej czasowo-przestrzeni, rozważanej tu jako przestrzeń metryczno-euklidesowa \mathcal{R}_4 , przy którym mogą być stosowane wszelkie reguły analizy tensorowej. Sam układ zawiera 11 równań i tyleż funkcji poszukiwanych, mianowicie dwa pola wektorowe $u = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ i $w = (w^1, w^2, w^3, w^4)$ w \mathcal{R}_4 oraz trzy pola skalarne

q , p , q . Przypominamy, że $u_i = g_{ij} u^j$ oraz $w_i = g_{ij} w^j$; prócz tego $H = q^2/2 + \gamma p/(\gamma - 1) q$ jest entalpią całkowitą. Czas t występujący w zespole ostatnim układu (1.10) pojmowany jest jako znana funkcja $t = F(x^1, x^2, x^3, x^4)$, określana w taki sposób, że wybrawszy hiperpowierzchnie stałych jej wartości za hiperpowierzchnie $x^4 = \text{const}$ nowego układu współrzędnych (k') otrzymamy $ds^2 = g_{JK} dx^J dx^K + (dx^4)^2$, $JK = 1, 2, 3$, gdzie g_{JK} jest tensorem metrycznym przestrzeni \mathcal{R}_3 . Rzeczono hiperpowierzchnie stanowią zatem rodzinę wzajemnie równoległych trójwymiarowych hiperpłaszczyzn \mathcal{R}_3 czaso-przestrzeni \mathcal{R}_4 . Dodajmy do tego, że przy układzie współrzędnych kartezjańskich, takich że $x^4 \equiv t$, znajdziemy z układu (1.10) $u = (v^1, v^2, v^3, 1)$, $w = (v^1, v^2, v^3, -H)$ oraz $q^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$, gdzie v^i są to składowe pola prędkości we współrzędnych prostokątnych «zwykłej» przestrzeni \mathcal{R}_3 .

Do podanych tu postaci tensorowych równań wrócimy w p. 3 i 5.

2. Pojęcie grup inwariantności pola; pochodna Liego

2.1. Zasadniczym celem tego p. będzie przedstawienie pewnych pojęć i twierdzeń, dzięki którym można, mówiąc obrazowo, głębiej wejść w strukturę geometryczną równań dynamiki gazów, zaznaczającą się w ich tensorowej postaci, co z kolei pozwoli opracować określoną metodę wyróżniania klas rozwiązań tych równań oraz badania ich własności. Właściwie to cały zespół środków matematycznych, które zamierzamy przedstawić, należy do pojmowanej dosyć szeroko wielowymiarowej geometrii różniczkowej, choć występuje tam w nieco innym celu i wyczerpująco wyłożony jest we wstępnych rozdziałach monografii [3] i [17]. Zamieszczając go tutaj mieliśmy po pierwsze na uwadze przejrzystość pracy, a po drugie staraliśmy się dostosować narzędzie do dalszych potrzeb. Wiązało się to zarówno z określonym uporządkowaniem całości, jak i ze zrzeczeniem się w sformułowaniach z tej ogólności, która byłaby tu nie na miejscu, ograniczając się do tego, co rzeczywiście jest dalej niezbędne. Nadto trzeba było wyczerpująco i do końca wyjaśnić pewne — wydaje się, że ważne w tym rozważaniu — kwestie, które jako nieomal oczywiste traktuje się marginesowo lub po prostu pomija w ramach teorii ogólnej.

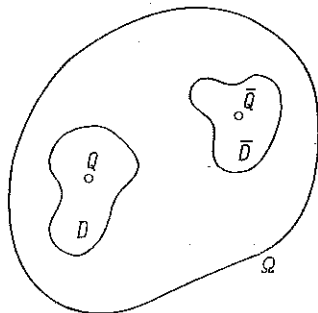
Spośród obiektów geometrycznych występują w dalszym ciągu tzw. wielkości geometryczne, a więc skalary, wektory, tensory i pojemności geometryczne (te ostatnie...określimy w p. 6) oraz obiekt przeniesienia równoległego (symbole Γ_{jk}^i Christoffela), nie będący już, jak wiadomo, wielkością geometryczną. Umówimy się, że przy formułowaniu pojęć i twierdzeń będziemy po prostu mówić o polu ω^A nie precyzując go dokładniej, domyślać się jednak będziemy, że sformułowania dotyczą wszystkich pól, jakie tu wystąpią później, a więc zarówno pól wielkości jak i pola symboli Christoffela. (Ogólnie sformułowania w większości dotyczą tzw. liniowych obiektów geometrycznych, których przypadkiem szczególnym są pola wymieniane przed chwilą, ale z tak ogólnego formułowania zrezygnujemy).

Rozważania prowadzić będziemy dla n -wymiarowej przestrzeni metryczno-euklidesowej \mathcal{R}_n . Dalej wykorzystamy je w przypadku szczególnym dla przestrzeni \mathcal{R}_3 i \mathcal{R}_2 (zwykła przestrzeń i płaszczyzna) oraz dla \mathcal{R}_4 czaso-przestrzeń.

2.2. Zacniemy od pojęcia wleczonego układu współrzędnych przy przekształceniu przestrzeni. W tym celu rozpatrzmy punktowo-punktowe dostatecznie regularne i wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie:

$$(2.1) \quad \bar{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

obszaru \mathcal{D} przestrzeni \mathcal{R}_n na inny jej obszar $\bar{\mathcal{D}}$, dane w dowolnym ale ustalonym układzie współrzędnych (k) , rozpostartych na pewnym obszarze Ω , który zawiera równocześnie oba obszary \mathcal{D} i $\bar{\mathcal{D}}$. Dalej, oznaczmy przez Q dowolny punkt obszaru \mathcal{D} , a przez \bar{Q} odpowiadający mu przy odwzorowaniu (2.1) punkt obszaru $\bar{\mathcal{D}}$ (rys. 1), co zapisujemy w skrócie $\bar{Q} = f(Q)$. Określamy teraz w obszarze $\bar{\mathcal{D}}$ nowy układ współrzędnych (k') , umawiając się, że nowe współrzędne punktu \bar{Q} są co do wartości liczbowych równe dawnym współrzędnym, ale w punkcie Q . Zapisujemy to symbolicznie $(k')_{\bar{Q}} = \bar{f}(k)_Q$, przy czym \bar{f} pod znakiem równości ma uprzytamniać udział odwzorowania w określeniu odpowiedniości współrzędnych. To samo robimy dla wszystkich punktów obszaru $\bar{\mathcal{D}}$. Tym sposobem w obszarze $\bar{\mathcal{D}}$ jako całości zostaną rozpostarte nowe współrzędne (k') , przy czym powierzchnie $x^{k'} = \text{const}$ w obszarze $\bar{\mathcal{D}}$ będą to obrazy powierzchni $x^k = \text{const}$ z obszaru \mathcal{D} [obrazy przy odwzorowaniu (2.1)]. Cały ten proces nazywa się wleczeniem układu (k) z obszaru \mathcal{D} do obszaru $\bar{\mathcal{D}}$ za pomocą odwzorowania f , a powstający w ten sposób nowy układ współrzędnych (k') w obszarze $\bar{\mathcal{D}}$ nosi nazwę układu wleczonego, samo zaś przejście od jego dawnych współrzędnych do nowych zapisujemy



Rys. 1

$$(2.2) \quad x^i = f^i(x^{1'}, \dots, x^{n'}).$$

Jak wiadomo, wzory transformacyjne (2.1) można rozpatrywać dwojako: albo jako odwzorowanie punktowo-punktowe (przy ustalonym układzie współrzędnych), albo jako zmianę układu współrzędnych (w ustalonym punkcie). Obrazowo mówiąc wleczenie układu współrzędnych to nic innego jak właśnie ta druga strona rzezonego dualizmu.

Z układem współrzędnych wleczonych ma się do czynienia w podstawach mechaniki kontinuuów (tzw. współrzędne Lagrange'a, inaczej materialne). W tym rozważaniu operacji wleczenia, a także i innym określeniom tego p. nie przypisujemy interpretacji mechanicznych. Potrzebny nam będzie jedynie ich sens geometryczny.

2.3. Weźmy z kolei w obszarze \mathcal{D} pole ω dane w każdym punkcie obszaru, przy czym we współrzędnych (k) składowe pola niech wynoszą ω^A . Biorąc za punkt wyjścia to pole i operację wleczenia współrzędnych można określić pole tego samego

² Przypomnijmy tu jeszcze raz, że co do tego, jak należy pole ω pojmować, umówiliśmy się w p. 2.1.

rodzaju w obszarze $\overline{\mathcal{D}}$; będzie to tak zwane pole wleczone. Umówimy się, że z definicji zachodzi

$$(2.3) \quad \overline{\omega}^{A'}(\overline{Q}) = \omega^A(Q) \delta_A^{A'}, \quad \text{gdzie } \overline{Q} = f(Q).$$

Składowe pola ω w danym punkcie $\overline{Q} \in \overline{\mathcal{D}}$ są więc we współrzędnych wleczonych (k') równe liczbowo odpowiednim składowym pola ω , brany w punkcie Q (przeciwobraz \overline{Q} przy odwzorowaniu f) przy współrzędnych (k). Przy tym okazuje się, że to, od jakiego konkretnie układu (k) wyjdziemy, jest rzeczą obojętną, co oznacza, że tak określona operacja wleczenia pola jest niezmiennicza, niezależna od współrzędnych, [4], a o tym, jakie wartości przyjmuje pole $\overline{\omega}$ w obszarze $\overline{\mathcal{D}}$ decydują wyłącznie zachowanie się ω w obszarze \mathcal{D} i odwzorowanie f . Operacji wleczenia pola poświęcimy jeszcze jedną uwagę w p. 2.9.

Ale teraz załóżmy, że pole ω dane było jako funkcja punktu nie tylko w obszarze \mathcal{D} , lecz również w całym obszarze Ω . W obszarze $\overline{\mathcal{D}}$ będą więc dwa pola: dane ω oraz wleczone $\overline{\omega}$. Aby zbadać jak mają się do siebie pole ω i przekształcenie f należy te dwa pola od siebie odjąć. Przedtem jednak należy przedstawić składowe ich w jednym i tym samym układzie współrzędnych; niech to będą współrzędne wleczone (k'). Znajdziemy

$$(2.4) \quad \Delta_{\mathcal{E}} \omega^{A'}(\overline{Q}) = \omega^{A'}(\overline{Q}) - \overline{\omega}^{A'}(\overline{Q}).$$

Jest to tak zwana różnica Liego. Jeżeli różnica ta będzie tożsamościowo równa zeru, to powiadamy, że f jest przekształceniem inwariantności danego pola ω . Będzie to oznaczało, że istnieje określona wzajemna prawidłowość i zgodność, zarówno co do tego jak określone zostało pole ω w obu obszarach \mathcal{D} i $\overline{\mathcal{D}}$, jak i w samym zdefiniowaniu przekształcenia f tych obszarów. Większej naturalności a tym samym i pogładowości powyższych określeń można dopatrzeć się spostrzegając, że zapis odwzorowania f przy współrzędnych (k) w obszarze \mathcal{D} oraz (k') w obszarze $\overline{\mathcal{D}}$ jest odpowiedniością tożsamościową.

Wszystkie podane tu określenia pozostają oczywiście w mocy także i wtedy, gdy wszystkie trzy obszary pokrywają się. Zależy to od samego przekształcenia f . W dalszym ciągu nie będziemy obszarów tych specjalnie rozróżniać, mówiąc po prostu o polu wleczonym w punkcie Q .

2.4. Dotychczas mieliśmy na myśli, że f jest przekształceniem skończonym, a więc punkty Q i $\overline{Q} = f(Q)$ na ogół leżały «daleko» od siebie. Nie można było zatem we wzorze (2.4) dokonywać przejść granicznych, gdy Q nieograniczenie zbliża się do \overline{Q} . Ale będzie to możliwe, jeżeli f zastąpimy lokalną grupą Liego przekształceń ciągłych. Pod ostatnim terminem rozumie się rodzinę przekształceń zależną od r parametrów a_1, \dots, a_r , czyli

$$(2.5) \quad \overline{x}^k = F^k(x^1, \dots, x^n; a_1, \dots, a_r), \quad k = 1, \dots, n$$

i spełniającą następujące warunki (dla skrócenia zapisów oznaczymy $x = (x^1, \dots, x^n)$, $a = (a_1, \dots, a_r)$ i $F = (F^1, \dots, F^n)$).

1. Zawiera się w niej przekształcenie tożsamościowe; inaczej mówiąc istnieje takie a^0 , że $F(x, a^0) = x$.

2. Dla każdych a^1 i a^2 istnieje takie $a^3 = g(a^1, a^2)$, że superponując przekształcenia $\bar{x} = F(x, a^1)$ oraz $\bar{\bar{x}} = F(\bar{x}, a^2)$ dostajemy $\bar{\bar{\bar{x}}} = F(F(x, a^1), a^2) = F(x, g(a^1, a^2)) = F(x, a^3)$.

3. Wraz z danym przekształceniem należy do niej przekształcenie odwrotne, czyli do każdego a istnieje $\underline{a} = h(a)$ takie, że $g(\underline{a}, a) = g(a, h(a)) = a^0$.

4. Superpozycja przekształceń jest działaniem łącznym.

5. O funkcjach $g(a^1, a^2)$ i $h(a)$ zakładamy, że są analityczne w pewnym otoczeniu a^0 , zaś o funkcjach F , że są wystarczająco regularne w pewnym obszarze przestrzeni \mathcal{R}_n i także analityczne względem parametrów w otoczeniu a^0 .

Lokalną r -parametrową grupę Liego będziemy oznaczać G_r . Uzupełniając określenie dodajmy, że grupę G_r generuje tak zwana algebra Liego operatorów infinitesimalnych:

$$(2.6) \quad X_J \equiv \xi_J^k \partial_k, \quad J = 1, \dots, r,$$

gdzie ξ_J są to pola wektorowe w \mathcal{R}_n , określane przez składowe kontrawariantne; mianowicie $\xi_J^k = (\partial F^k / \partial a)_{a=a^0}$. Z kolei algebrę Liego określają związki

$$(2.7) \quad (X_J, X_K) \stackrel{\text{df}}{=} X_J(X_K) - X_K(X_J) \equiv \xi_{JK}^l \partial_l = C_{JK}^L X_L,$$

gdzie

$$(2.7') \quad \xi_{JK}^k = X_J(\xi_K^k) - X_K(\xi_J^k),$$

natomiast C_{JK}^L są to tzw. stałe strukturalne grupy, decydujące o tym jaki jest jej kształt algebraiczny.

Grupę G_r tworzy ∞^r podgrup jednoparametrowych

$$(2.5') \quad \bar{x}^k = F^k(x^1, \dots, x^n, a)$$

z jednym parametrem a .

Istotnie, przyjmując, że $a^0 = 0$ i następnie rozwijając prawą stronę (2.5) na szereg Taylora względem parametrów w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego oraz poprzestając na wyrazach pierwszego rzędu względem przyrostów a otrzymamy przekształcenie infinitesimalne grupy jednoparametrowej

$$(2.8) \quad \bar{x}^k = x^k + \xi^k da, \quad \text{gdzie} \quad \xi^k = C^J \xi_J^k.$$

Zapis ten, przyjęty ze względów historycznych należy w zasadzie rozumieć jako określenie grupy jednoparametrowej za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$(2.9) \quad d\bar{x}^k = \xi^k(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) da$$

i warunku początkowego $\bar{x}^k(0) = x^k$. Rozwiązanie rzeczywiście będzie postaci (2.5) i co więcej stanowić będzie z uwagi na warunek początkowy grupę jednoparametrową. Grupy jednoparametrowe oznaczać będziemy symbolem G , zaś generujący ją operator infinitesimalny symbolem $X \equiv \xi^k \partial_k$. Symbol $G : X \equiv \xi^k \partial_k$

będziemy używali skrótowo dla wyrażenia zdania: «jednoparametrowa grupa G , generowana operatorem infinitesimalnym X », niekiedy też pomijając będziemy prawą stronę operatora, ponieważ oznacza ona zawsze to samo.

2.5. Zakładając teraz, że (2.1) jest grupą jednoparametrową, możemy rozwinąć prawą stronę różnicy Liego (2.4) na szereg Taylora względem parametru a w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego ($a = 0$), wyrażając jej część główną przez różniczkę

$$(2.10) \quad d_L \omega^A = (\mathfrak{L}_\xi \omega^A) da.$$

We wzorze tym \mathfrak{L}_ξ jest symbolem pochodnej Liego. Pochodną tę wprowadził po raz pierwszy polski matematyk W. SLEBODZIŃSKI, [13], odkrywając tym samym jedno z bardziej efektywnych i szeroko stosowanych narzędzi geometrii różniczkowych, szeroko w sensie zakresu zagadnień, w których stosowała ją niewielka jak dotąd liczba badaczy. Aktualna jej nazwa wywodzi się z późniejszych prac D. VAN DANTZIGA.

Poniższe wzory i twierdzenia przytaczamy na podstawie obszernej monografii K. YANO, [17], poświęconej geometrycznym zastosowaniom pochodnej Liego. Najpierw zestawimy niezbędne wzory obliczania pochodnej Liego pól: skalarnego, wektorowego, tensorowego i symboli T_{jk}^i Christoffela:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi \sigma &= \xi^k \partial_k \sigma, \\ \mathfrak{L}_\xi u^i &= \xi^j \partial_j u^i - u^j \partial_j \xi^i = \xi^j \nabla_j u^i - u^j \nabla_j \xi^i, \\ \mathfrak{L}_\xi T_{jk}^i &= \xi^l \partial_l T_{jk}^i - T_{jk}^l \partial_l \xi^i + T_{lk}^i \partial_j \xi^l + T_{jl}^i \partial_k \xi^l = \\ &= \xi^l \nabla_l T_{jk}^i - T_{jk}^l \nabla_l \xi^i + T_{lk}^i \nabla_j \xi^l + T_{jl}^i \nabla_k \xi^l, \\ \mathfrak{L}_\xi (T_{jk}^i) &= \nabla_j \nabla_k \xi^i. \end{aligned}$$

Wzory te podaliśmy w dwojakim brzmieniu. Pierwsze wynikają wprost z określenia [wzór (2.10)], a w drugim, tensorowym, uzyskanym drogą prostych przekształceń, podkreśla się niezmienniczość operacji. Zwraca uwagę fakt, że pochodna Liego pola symboli Christoffela jest tensorem. Dodajmy jeszcze, że przy obliczaniu pochodnej Liego dowolnego iloczynu algebry tensorowej ma zastosowanie reguła Leibniza.

Istotne znaczenie pochodnej Liego polega na tym, że pozwala ona w zwięzły sposób zapisać warunek, że grupa G jest grupą przekształceń inwariantności danego pola. Istotnie, zauważmy, że pole wleczone za pomocą grupy G jest funkcją nie tylko punktu Q , ale także i parametru a . Wiąże się to z tym, że dla każdej wartości a inny punkt będzie przeciwobrazem danego punktu. (Dla $a = 0$ oba punkty pokrywają się). Otóż pole wleczone daje się prosto wyrazić za pomocą iteracji pochodnej Liego pola danego. Mianowicie ma miejsce rozwinięcie

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}^A &= \exp(-a\mathfrak{L}_\xi) \omega^A = \omega^A - \frac{a}{1!} \mathfrak{L}_\xi \omega^A + \frac{a^2}{2!} \mathfrak{L}(\mathfrak{L}_\xi \omega^A) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} (\mathfrak{L}_\xi^{(n)} \omega^A). \end{aligned}$$

Wynika stąd twierdzenie (*praca* [17], *tw.* 2.1, s. 34):

Jeżeli w przestrzeni \mathcal{R}_n istnieje pole wektorowe ξ takie, że dla danego pola ω^A zachodzi $\xi_\xi \omega^A = 0$, to wtedy istnieje także jednoparametrowa grupa przekształceń inwariantności pola ω^A . Grupą tą jest $G : X \equiv \xi^k \partial_k$.

Grupy przekształceń inwariantności pola ω będziemy nazywać w skrócie grupami inwariantności pola.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla r -parametrowych grup G_r ([17], *tw.* 2.4, str. 35):

Jeżeli każdy operator X_J grupy G_r generuje grupę G inwariantności danego pola, to wtedy także i dowolne przekształcenie skończone grupy G_r będzie przekształceniem inwariantności tego pola.

2.6. Ale co właściwie stwierdzamy powiadając, że G jest grupą inwariantności pola ω lub, co na jedno wychodzi, że $\xi_\xi \omega^A = 0$? Wyjaśnimy to przechodząc do tzw. współrzędnych kanonicznych grupy G . Są to takie współrzędne, w których składowe wektora ξ mają postać $\xi^1 = 1, \xi^2 = 0, \xi^n = 0$. Wobec tego oznaczając przez (k) dany układ współrzędnych, a przez (k') układ współrzędnych kanonicznych grupy, stwierdzamy na podstawie reguł transformacyjnych dla składowych kontrawariantnych wektorów, że znalezienie formuł przejścia od (k) do (k') $x^{i'} = f^{i'}(x^1, \dots, x^n), i' = 1', \dots, n'$ prowadzi do całkowania układu równań cząstkowych

$$(2.13) \quad \sum_{k=1}^n \xi^k (\partial f^{i'}/\partial x^k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i' = 1', \\ 0 & \text{dla } i' = 2', \dots, n'. \end{cases}$$

Nazwa «współrzędne kanoniczne» bierze się stąd, że jak łatwo widać we współrzędnych tych $X \equiv \partial_1$, a na tej podstawie skończone przekształcenia grupy G jako rozwiązania układu (2.9) będą postaci

$$(2.14) \quad \bar{x}^1 = x^1 + a, \quad \bar{x}^2 = x^2, \dots, \quad \bar{x}^n = x^n.$$

Linie pola wektorowego ξ noszą nazwę trajektorii grupy. Spełniają one w dowolnym układzie równania

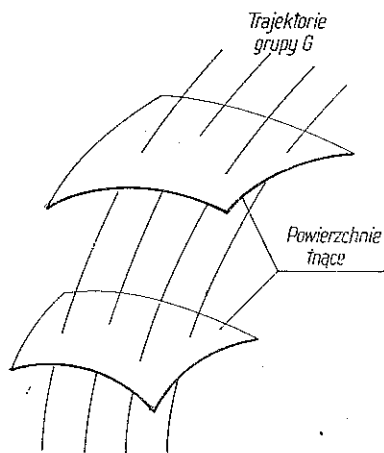
$$(2.15) \quad \frac{dx^1}{\xi^1} = \frac{dx^2}{\xi^2} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n},$$

a w układzie współrzędnych kanonicznych pokrywają się z liniami $x^2 = \text{const}, x^3 = \text{const}, \dots, x^n = \text{const}$. Powierzchnie $x^1 = \text{const}$ nazywać będziemy powierzchniami tnącymi (rys. 2). Wracając z kolei do wzorów (2.11) i wyrażając je we współrzędnych kanonicznych przekonujemy się bez trudu, że w tym przypadku pochodna Liego przyjmuje wyjątkowo prostą postać

$$(2.16) \quad \xi_\xi \omega^A = \partial_1 \omega^A.$$

Ze wzoru tego wynika, że ([17], *tw.* 2.2, str. 34): *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby w przestrzeni \mathcal{R}_n istniała grupa G inwariantności danego pola ω jest istnienie w \mathcal{R}_n takiego układu współrzędnych, w którym składowe pola ω^A nie zależą od współrzędnej x^1 . Układem tym są współrzędne kanoniczne grupy G .*

Taki jest więc sens stwierdzenia, że G jest grupą inwariantności pola ω . W przypadku gdy ω jest polem skalarnym σ , warunek $\xi_{\xi} \sigma = 0$ oznacza, że σ jest stałe wzdłuż trajektorii grupy.



Rys. 2

Stosując terminologię klasyczną Liego powiemy wtedy, że σ jest inwariantem grupy. Jeśli natomiast zachodzi $\xi_{\xi} \sigma = 1$, powiadamy, że σ jest inwariantem względnym grupy, w szczególności jest tak dla każdej funkcji stałej na powierzchniach tnących grupy.

2.7. Nie precyzowaliśmy, jak dotąd, geometrycznych własności grup G , ponieważ nie nakładaliśmy na pole wektorów ξ żadnych warunków natury geometrycznej. Ale znamy skądinąd określenia przekształceń wyróżnionych w przestrzeni \mathcal{R}_n i związanych z jej strukturą geometryczną. Mamy tu na myśli izometrie — przekształcenia zachowujące odległości, podobieństwa, przy których zachowane są stosunki odległości punktów, prze-

kształcenia afiniczne zachowujące twory liniowe i równoległość (euklidesowość \mathcal{R}_n). Wreszcie znane są przekształcenia konforemne płaszczyzny, zachowujące kąty przecięcia się odpowiadających sobie krzywych.

Już z samego pobieżnego zastanowienia się nad podanymi określeniami wynika, że przekształcenia te tworzą odpowiednio grupy: izometrii, podobieństw, afiniczną i konforemną, przy czym izometrie są podgrupą podobieństw, a podobieństwa z kolei stanowią z jednej strony podgrupę grupy afinicznej, a z drugiej strony, podgrupę grupy konforemnej. Wiemy ponadto, że w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych przekształcenia afiniczne mają postać przekształceń liniowych nieosobliwych, izometrie zaś przekształceń liniowych o macierzy ortogonalnej. Wynika stąd, że dla zwykłej przestrzeni \mathcal{R}_3 przekształcenia afiniczne tworzą grupę o dwunastu parametrach notowaną tu w skrócie $G_{12}^{(a)}$ (parametry: 9 współczynników macierzy przekształcenia i trzy współrzędne przesunięcia), a izometrie grupę sześcioparametrową $G_6^{(m)}$ (parametry: trzy kąty obrotu i trzy współrzędne przesunięcia). Jednakże, w związku z zadaniem jakie sobie postawiliśmy, będą nas interesować dowolne układy współrzędnych krzywoliniowych na płaszczyźnie, w zwykłej przestrzeni i w czasoprzestrzeni \mathcal{R}_4 . Ten wzgląd jest zasadniczym powodem stosowania tu analizy tensorowej. Wynika stąd, że potrzebne nam będą niezmiennicze warunki, które narzucone na pole ξ zapewnią, że skończone przekształcenia odpowiedniej jednoparametrowej grupy G , generowanej operatorem $X \equiv \xi^i \partial_i$, rzeczywiście będą odpowiednio izometriami, podobieństwami itd. Do tego warunki te z natury rzeczy powinny pozwalać na zbudowanie całych grup G_r , wychodząc z grup jednoparametrowych G .

Otóż staje się to możliwe dzięki wprowadzonym pojęciom grup inwariantności G oraz pochodnej Liego. Mamy mianowicie twierdzenia ([17], tw. 1.3, str. 5, tw. 2.3, str. 8, tw. 1.3, str. 32, wz. (5.1), str. 166 oraz tw. 5.1, str. 167):

Operator $X \equiv \xi^i \partial_j$ generuje jednoparametrową grupę przekształceń izometrii $G^{(m)}$, jeżeli pole ξ spełnia równanie

$$(2.17) \quad \mathfrak{L}_\xi g_{ik} = 0.$$

A zatem $G^{(m)}$ jest grupą inwariantności tensora metrycznego g_{ik} , innymi słowy pole wleczone \bar{g}_{ik} za pomocą $G^{(m)}$ pokrywa się z danym i mamy $\bar{g}_{ik} = g_{ik}$. Warunek (2.17) daje tzw. równanie Killinga:

$$(2.18) \quad \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0, \quad \text{gdzie} \quad \xi_i = g_{ik} \xi^k.$$

Jest to równanie określające grupy izometrii. Przez termin równanie określające grupy rozumie się tutaj równanie, dokładniej układ równań, o tej własności, że zbiór jego rozwiązań stanowi przestrzeń liniową, r -wymiarową i że dla rozwiązań liniowo niezależnych zachodzi (2.7), tylko wtedy bowiem można z ∞^r grup jednoparametrowych G skonstruować r -parametrową grupę G_r .

Operator X generuje jednoparametrową grupę przekształceń afinicznych, oznaczaną dalej $G^{(a)}$, jeżeli

$$(2.19) \quad \mathfrak{L}_\xi (\Gamma_{jk}^i) = 0,$$

albo inaczej [por. (2.11), formuła ostatnia], *gdzy $\nabla_j \nabla_k \xi^i = 0$.*

A więc $G^{(a)}$ jest grupą inwariantności pola Γ_{jk}^i , inaczej mówiąc zachodzi $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i$. O tym, że (2.19) jest równaniem określającym grupy afinicznej, a więc że wyznacza ją w całości, można przekonać się, w następujący sposób: We współrzędnych kartezjańskich warunek (2.19) wyraża się bardzo prosto: $\partial_j \partial_k \xi^i = 0$, czyli składowe pola ξ są to funkcje liniowe współrzędnych kartezjańskich x, y, z , zależne od dwunastu stałych dowolnych. Warunki (2.7) będą spełnione, z liniowości zaś ξ wynikać będzie liniowość samych przekształceń z uwagi na wzór [odnoszący się zresztą do dowolnego układu (k)]: $\bar{x}^k = \exp(a \xi_\epsilon) x^k$.

Operator X generuje jednoparametrową grupę przekształceń konforemnych $G^{(c)}$, jeżeli

$$(2.20) \quad \mathfrak{L}_\xi g_{ik} = \sigma g_{ik},$$

gdzie σ jest pewną funkcją skalarną.

Równaniem tym zajmiemy się bliżej w p. 6.

Operator X generuje jednoparametrową grupę podobieństw $G^{(p)}$, jeżeli ma miejsce

$$(2.21) \quad \mathfrak{L}_\xi g_{ik} = C g_{ik},$$

gdzie C jest stałą dowolną.

Zachodzi wtedy (por. 2.12) $\bar{g}_{ik} = \exp(-aC) g_{ik}$.

Nim przejdziemy do dalszych uwag, przyjmujemy pewne uproszczenia terminologiczne. Chodzi po prostu o uelastyczenie dalszych wyśłowień, bowiem stałe powtarzanie się pewnych — przyjętych wprawdzie, ale przydługich terminów w rodzaju

«operatora infinitesimalnego» jest bardzo niedogodne. Z tego tytułu operatory X będziemy po prostu nazywać generatorami (istnieją zresztą racje algebraiczne uzasadniające ten termin w danym przypadku). Zamiast «grupa jednoparametrowa generowana operatorem X », powiemy po prostu: grupa generatora X , zamiast «operator infinitesimalny grupy podobieństw», powiemy generator podobieństw, itp. Umówimy się też oznaczać generatory, analogicznie jak to czyniliśmy przy grupach, stosownie do charakteru geometrycznego ich grup. I tak $X^{(p)}$ — to generator podobieństw, a $X^{(m)}$ — generator izometrii. Ale w gruncie rzeczy X to pole ξ , dlatego też niekiedy właśnie samo pole wektorowe ξ będziemy nazywać generatorem.

Wracając do generatorów grup geometrycznych zauważmy, że jeżeli grupa generatora X jest grupą afiniczną i konforemną zarazem, to tym samym jest ona grupą, podobieństw $G^{(p)}$. Jest to warunek konieczny i dostateczny. Istotnie, zakładając, że $\xi_{\xi} g_{ik} = \sigma g_{ik}$ oraz że dla tego samego generatora X mamy $\xi_{\xi} (\Gamma_{jk}^i) = 0$ i korzystając ze wzoru ([17], wzór (5.2), str. 166)

$$(2.22) \quad \xi_{\xi} (\Gamma_{jk}^i) = \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j \xi_{\xi} g_{lk} + \nabla_k \xi_{\xi} g_{jl} - \nabla_l \xi_{\xi} g_{jk}),$$

otrzymamy w dowolnym nieortogonalnym układzie współrzędnych (przyjmując $i = 1, j = 2, k = 3$, a potem przestawiając cyklicznie)

$$(g^{11} \partial_i \sigma) g_{23} = 0, \quad (g^{22} \partial_i \sigma) g_{13} = 0, \quad (g^{33} \partial_i \sigma) g_{12} = 0.$$

Ponieważ jednak $g = |g_{ik}| \neq 0$, zatem z powyższego układu równań wynika, że $\sigma = \text{const}$, co też należało wykazać. Z drugiej strony (2.21) stanowi przypadek szczególny (2.20), mianowicie gdy $\sigma = C$, ponowne zaś wykorzystanie wzoru (2.22) wskazuje, że gdy zachodzi (2.21), to także zachodzi (2.19). W ten sposób zakończyliśmy dowód konieczności i dostateczności. Przy okazji dowiedliśmy także, że podobieństwa są podgrupą grupy afinicznej $G^{(a)}$. Równie łatwo widzi się porównując (2.21) i (2.17), że izometrie są podgrupami podobieństw albo inaczej mówiąc, że każdy generator izometrii jest też generatorem podobieństwa (a tym samym afiniczności), ale nie na odwrót.

Z twierdzeń przytoczonych w tym punkcie wynikają pewne proste, i nie podkreślane gdzie indziej, a dla dalszych wywodów bardzo istotne fakty. Mamy tu na myśli w pierwszym rzędzie wynikające z porównania (2.16) i (2.17) oraz (2.19) stwierdzenia:

We współrzędnych kanonicznych grupy generatora izometrii $X^{(m)}$ g_{ik} są niezależne od współrzędnej x^1 .

We współrzędnych kanonicznych grupy generatora afiniczności $X^{(a)}$ symbole Γ_{jk}^i nie zależą od x^1 .

Tak samo, o czym dokładniej powiemy później, i we współrzędnych kanonicznych grup $G^{(p)}$ i $G^{(a)}$ nastąpią określone uproszczenia, dlatego też ogólnie współrzędne kanoniczne grup odgrywać będą dalej rolę zasadniczą.

2.8. Obecnie ilustrując częściowo wyniki poprzedniego punktu a także dla późniejszych zastosowań przy wyznaczaniu klas przepływów określimy generatory podobieństw i izometrii. Przedstawiając równania określające grupy podobieństw

we współrzędnych kartezjańskich x, y, z , przy których $g_{ik} = \delta_{ik}$, oraz stosując wzór na obliczanie pochodnej Liego tensora dwukrotnie kowariantnego (2.11)₃, otrzymamy

$$(2.23) \quad \begin{aligned} 2\partial_x \xi^1 &= C, & 2\partial_y \xi^2 &= C, & 2\partial_z \xi^3 &= C, \\ \partial_y \xi^1 + \partial_x \xi^2 &= 0, & \partial_x \xi^3 + \partial_z \xi^1 &= 0, & \partial_y \xi^3 + \partial_z \xi^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne tego układu równań zależy od stałej dowolnej C , a prócz tego jeszcze od sześciu dalszych stałych dowolnych. W rezultacie dowolny generator $G^{(p)}$ będzie postaci

$$(2.24) \quad X^{(p)} = C^J X_J, \quad C^J = \text{const}, \quad J = 1, \dots, 7,$$

przy czym generatory liniowo niezależne (operatory infinitesimalne algebry Liego) mają postać:

$$(2.25) \quad \begin{aligned} X_1 &\equiv x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \\ X_2 &\equiv -z\partial_y + y\partial_z, & X_3 &\equiv z\partial_x - x\partial_z, & X_4 &\equiv -y\partial_x + x\partial_y, \\ X_5 &\equiv \partial_x, & X_6 &\equiv \partial_y, & X_7 &\equiv \partial_z. \end{aligned}$$

Łatwo przekonać się, że spełnione są warunki (2.7), co oznacza, że zestawione wyżej generatory rzeczywiście dają pełną siedmioparametrową grupę podobieństw $G_7^{(p)}$. Jej podgrupą jest sześcioparametrowa grupa izometrii $G_6^{(m)}$ oparta na generatorach X_2, \dots, X_7 . Można ją otrzymać i bezpośrednio, rozpatrując równanie Killinga (2.18).

Sens poszczególnych generatorów jest taki: X_1 daje przekształcenia jednokładności (podobieństwa w węższym znaczeniu wyrazu),

X_2, X_3, X_4 — obroty odpowiednio wokół osi x, y, z i wreszcie

X_5, X_6, X_7 — przesunięcia w kierunku tych osi.

2.9. W podpunkcie tym, zamykającym p. 2, podamy dalsze własności pochodnej Liego oraz wynikające z nich uwagi o grupach inwariantności, tym razem pół wielkości geometrycznych. Część uwag znajdzie bezpośrednie zastosowanie w p. następnym, pozostałe, luźniej związane z całością pracy, mają na celu zapobieżenie ewentualnym wątpliwościom, które mogłyby powstać przy milczącym założeniu oczywistości tych uwag.

W pierwszym rzędzie zajmiemy się ważnym pytaniem, kiedy można przedstawiać kolejność pochodnej Liego i pochodnej kowariantnej.

Odpowiedź na nie zawiera się w twierdzeniu W. Ślebodzińskiego, [14], które w przyjętej tu terminologii brzmi:

Przemienność pochodnej Liego i pochodnej kowariantnej dla każdego pola wielkości κ^A , czyli równość

$$(2.26) \quad \xi_i \nabla_j \kappa^A = \nabla_j \xi_i \kappa^A$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby $X \equiv \xi^i \partial_i$ był generatorem afiniczności.

A więc operacje te są przestawialne dla generatorów grup: afinicznej, podobieństw i izometrii (dla dwóch ostatnich jako podgrup grupy $G^{(a)}$).

Dalej zajmimy się pewną własnością pochodnej Liego na pierwszy rzut oka dosyć dziwną zwłaszcza w porównaniu z pochodną kowariantną. Inne różnice są naturalniejsze i można rzec od razu widoczne jak to, że mimo iż obie operacje są niezmiennicze — pochodna Liego określona jest dla szerszej klasy pól (np. także dla I_{ik}^j), a liczona od wielkości nie zmienia jej walencji, podczas gdy pochodna kowariantna daje przyrost walencji o jeden we wskaźnikach kowariantnych).

Otóż własność ta polega na tym, że pochodnej Liego nie można przestawiać na ogół z operacją podwyższania i obniżania wskaźnika wielkości. Zilustrujemy to przyjmując, że wielkością jest pole wektorowe. Jak przypominamy, w przestrzeni \mathcal{R}_n , a nawet i w ogólniejszych (domyślamy się tu tzw. przestrzeni Riemanna) pozycje wskaźników wielkości mają znaczenie drugorzędne. Mówi się po prostu o wektorach, tensorach określonego rzędu itp., traktując ich składowe kontrawariantne, kowariantne itd. jako jedynie różne sposoby przedstawienia wielkości rozważanej. Mając przykładowo pole wektorowe u , określone za pomocą składowych kontrawariantnych u^i , możemy je zawsze przedstawić także w składowych kowariantnych obniżwszy wskaźnik $u_j = g_{jk} u^k$. Ponadto we współrzędnych kartezjańskich (dopuszczalnych jak wiadomo w \mathcal{R}_n) składowe kowariantne i kontrawariantne u nie będą się nawet różniły liczbowo.

Weźmy teraz równość $u_j = g_{jk} u^k$ i obliczmy z obu jej stron pochodną kowariantną:

$$\nabla_i u_j = \nabla_i (g_{jk} u^k) = (\nabla_i g_{jk}) u^k + g_{jk} \nabla_i u^k = g_{jk} \nabla_i u^k,$$

ponieważ $\nabla_i g_{jk} = 0$. Jak widać, kolejność różniczkowania i obniżania wskaźnika (jak i jego podwyższania) jest w przypadku pochodnej kowariantnej obojętna. Ale wychodząc z tej samej równości i licząc pochodną Liego dostajemy $\mathcal{L}_\xi u_j = = (\mathcal{L}_\xi g_{jk}) u^k + g_{jk} \mathcal{L}_\xi u^k$. Jasne jest, że na to, aby operacja \mathcal{L} była przemieniana z podwyższaniem i obniżaniem wskaźników dla dowolnej wielkości musi być $\mathcal{L}_\xi g_{jk} = 0$, a to zachodzi tylko dla generatorów izometrii. Istnieje też inna możliwość, że dla danego generatora X istnieją takie pola u , że znika wyraz $(\mathcal{L} g_{jk}) u^k$, $j = 1, \dots, n$ ale np. generatory podobieństw oraz konforemności dają tu wynik banalny $u = 0$ z uwagi na to, że wyznacznik $g = |g_{ik}|$ jest różny od zera.

Otóż głębszy sens przemienności pochodnej kowariantnej i zmiany pozycji wskaźnika wielkości polega na tym, że wynik jej jest jednoznaczny. Pochodna kowariantna wektora u daje jeden tensor drugiego rzędu. Inaczej jest z pochodną Liego. Wynik będzie różny w zależności od tego, czy pochodną tę policzymy od składowych kontrawariantnych: $\mathcal{L}_\xi u^i = \xi^k \nabla_k u^i - u^k \nabla_k \xi^i$ czy kowariantnych $\mathcal{L}_\xi u_i = = \xi^k \nabla_k u_i + u_k \nabla_i \xi^k$ (co najlepiej widać we współrzędnych kartezjańskich). W obu przypadkach dostajemy dwa różne pola wektorowe: jedno dane przez składowe kontrawariantne, drugie — przez składowe kowariantne. Będzie to jednak jedno i to samo pole przy generatorze izometrii.

Istota tego faktu tkwi w samym określeniu wleczenia pola, w którym odwołujemy się w sposób zasadniczy do jego składowych. W przypadku pola wektorowego u

i dowolnego przekształcenia otrzymamy w wyniku wleczenia dwa różne pola wektorowe, w zależności od tego czy przez ω^A według (2.3) będziemy rozumieli składowe kontrawariantne u , czy też jego składowe kowariantne. Mamy wprawdzie $u_k(Q) = g_{kl}(Q) u^l(Q)$ i analogiczną równość po wleczeniu $\bar{u}_k(Q) = \bar{g}_{kl}(Q) u^l(Q)$, $\bar{Q} = f(Q)$, rzecz polega jednak na tym, że na ogół nie zachodzi $\bar{g}_{kl}(Q) = g_{kl}(Q)$. Równość ta zachodzi tylko, gdy f jest izometrią.

Stwierdzenia te rzutują także na pojęcie grup inwariantności danego pola wektorowego u . Warunki $\mathfrak{L}_\xi u^i = 0$ i $\mathfrak{L}_\xi u_i = 0$ rozpatrywane jako równanie generatora ξ dadzą na ogół dwa różne generatory, a tym samym dwie różne grupy G . Pole u będzie ślizgać się wzdłuż trajektorii pierwszej wraz z bazą e_1, e_2, \dots, e_n układu kanonicznego, a wzdłuż trajektorii drugiej — wraz z bazą e_1, \dots, e_n jej układu kanonicznego, ponieważ takie jest właśnie znaczenie tego, że wzdłuż trajektorii pierwszej nie zmieniają się składowe kontrawariantne, a wzdłuż trajektorii drugiej — kowariantne. Chodzi naturalnie o składowe w odpowiednich współrzędnych kanonicznych. Z tego tytułu pierwszy generator należałoby nazwać generatorem kontrawariantności u , a drugi — generatorem kowariantności u .

Oczywiście tensory (a ściślej pola tensorowe) mają więcej generatorów inwariantności. Np. dla tensora drugiego rzędu s otrzymamy je rozpatrując równania

$$(2.27) \quad \mathfrak{L}_\xi s^{ij} = 0, \quad \mathfrak{L}_\xi s^i_j = 0, \quad \mathfrak{L}_\xi s_{ij} = 0,$$

które dadzą na ogół trzy różne generatory ξ , chyba że znajdzie się wśród nich generator izometrii, który spełniając jedno z wypisanych równań spełni także automatycznie i pozostałe.

Odwrotnie, jeżeli w równaniach (2.27) ustalimy generator ξ a szukać będziemy pola s , to naturalnie z uwagi na to, że są to przy generatorze nieizometrycznym różne postulaty w odniesieniu do s , otrzymamy trzy różne pola, dawane odpowiednio w składowych dwukrotnie kontrawariantnych, mieszanych, i dwukrotnie kowariantnych. Nie oznacza to bynajmniej, aby warunku narzucanego na s pierwszym równaniem nie można było sformułować za pomocą składowych mieszanych pola szukanego. Nie będzie miał on jednak postaci drugiego równania. Uzyskamy go obliczając pochodną Liego z równości $s^{ij} = g^{ik} s^j_k$ i przyrównując ją do zera, skąd $\mathfrak{L}_\xi s^j_k = -g_{kl} (\mathfrak{L}_\xi g^{il}) s^i_l$ i to jest właśnie warunek równoważny pierwszemu z równań (2.27).

W świetle uwag tych może nasuwać się słuszne pytanie, czy podane w p. 2.7 równania określające grup izometrii (2.17), podobieństw (2.21) i konforemnej (2.20) nie wymagają uzupełnień albo inaczej, czy dostaniemy z nich to samo biorąc zamiast g_{ik} składowe kontrawariantne g^{ik} .

Okazuje się, że tak nie jest, a to dlatego, że g^{ik} jako składowe kontrawariantne tensora metrycznego g_{ik} określają jednocześnie tensor odwrotny do g_{ik} ; inaczej mówiąc mamy $g^{ik} g_{jk} = \delta^i_j$. Obliczając z obu stron pochodną Liego otrzymamy po prawej stronie zero, natomiast po lewej $(\mathfrak{L}_\xi g^{ik}) g_{jk} + (\mathfrak{L}_\xi g_{jk}) g^{ik}$; skąd $\mathfrak{L}_\xi g^{ik} \equiv -g^{ik} g^{jl} \mathfrak{L}_\xi g_{kj}$, co wskazuje, że warunki $\mathfrak{L}_\xi g_{jk} = 0$ oraz $\mathfrak{L}_\xi g^{jk} = 0$ są sobie równoważne. Ogólnie, jeżeli mamy tensor s_{ij} o macierzy nieosobliwej i odwrotny

do niego tensor s^{ij} , a więc gdy zachodzi warunek $s_{ij} s^{jk} = \delta_i^k$, to wtedy równania $\mathfrak{L}_g s_{ij} = 0$ oraz $\mathfrak{L}_g s^{ij} = 0$ także są równoważne.

Analogicznie rzecz ma się z warunkami (2.21) i (2.20). Zastępując w nich składowe kowariantne tensora metrycznego g jego składowymi kontrawariantnymi dostaniemy te same równania określające grupy podobieństw i grupy konforemnej, przy czym nie bez znaczenia jest to, że w samym określeniu C i σ oznaczają odpowiednio stałą dowolną i funkcję dowolną.

3. Rozwiązania równań dynamiki gazów modelowane na grupach izometrii przestrzeni oraz na grupach jej podobieństw

3.1. Weźmy pod uwagę układ równań (1.6). Zadanie poszukiwania klas rozwiązań tego układu polega na tym, że trzeba coś założyć o postaci rozwiązań, czyli dołączyć do samych równań jakiś dodatkowy warunek, z jednej strony służący jako określenie klas, z drugiej strony zacieśniający w pewnym sensie układ wyjściowy równań, aby ten układ, który pozostaje, pozwalał wyznaczyć właśnie te klasy.

Geometrycznie rzecz biorąc układ (1.6) wyznacza trzy pola: dwa skalarne — gęstości ρ i ciśnienia p oraz jedno wektorowe, mianowicie pole prędkości v . Z tego też punktu widzenia poszukiwanie prostszych rozwiązań polegać będzie na wybraniu spośród wszelkich pól ρ , p i v czyniących zadość układowi (1.6) takich pól, odpowiednio z góry określonych, których wyznaczenie w pewnym układzie współrzędnych (układ ten także powinien być wskazany z góry) będzie prostszym zadaniem niż rozwiązywanie wyjściowego układu równań.

Możliwość istnienia takich konkretnych układów współrzędnych, w których określone klasy rozwiązań układu (1.6) dadzą się łatwiej wyznaczyć, nie stoi bynajmniej w sprzeczności z podkreślaną w p. 2.1 niezmienniczością jego postaci. Niezmienniczość ta pozwala rozwiązać równanie w jakimkolwiek układzie współrzędnych; przekształcając je zgodnie z regułami transformacji dla skalarów i dla wektorów otrzymamy także rozwiązania czyniące zadość równaniom w nowym układzie współrzędnych. Ale nim zabierzemy się do rozwiązywania równań w jakimś konkretnym układzie współrzędnych, czyli zanim zaczniemy rozpatrywać je jako konkretny układ równań cząstkowych pierwszego rzędu, musimy w rozwiniętej postaci wypisać zależności funkcyjne $g^{ik} = g^{ik}(x^1, x^2, x^3)$ oraz $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x^1, x^2, x^3)$ dla tego właśnie konkretnego układu współrzędnych. Nie ma powodu, dla którego zależności te nie miałyby być w jednych układach prostsze, a w drugich bardziej złożone. (Zwróćmy uwagę np., że w układzie kartezjańskim współczynniki Christoffela są równe zeru, a składowe tensora metrycznego sprowadzają się do symboli Kroneckera).

Tak więc tensorowa postać równań dynamiki gazów nie tylko że nie ogranicza możliwości dobierania dogodnych układów współrzędnych, ale przeciwnie, wzbogacona o pojęcia i twierdzenia poprzedniego p. takie właśnie układy pozwala przewidywać.

Ale można by zapytać, dlaczego w poszukiwaniu prostszych klas rozwiązań nie wystarczy ograniczyć się do układu kartezjańskiego współrzędnych, skoro w nich i współczynniki Christoffela i tensor metryczny tak dalece się upraszczają. Otóż

trzeba sobie wyraźnie zdać sprawę z tego, że ostateczny układ równań prostszych klas jest konsekwencją założeń upraszczających narzucanych na rozwiązanie i uproszczeń w samym układzie równań, przy czym może się zdarzyć, że rozwiązania prostsze w pewnym konkretnym układzie współrzędnych, tracą tę prostotę po przejściu do układu kartezjańskiego. I dlatego właśnie szukając konkretnych układów współrzędnych o prostszych wyrażeniach funkcyjnych na składowe tensora metrycznego i symbole Christoffela będziemy mieli na myśli na ogół współrzędne krzywoliniowe.

3.2. W pierwszym rzędzie nasuwa się pytanie: w jakich układach współrzędnych (krzywoliniowych) składowe g^{ik} oraz symbole Γ_{jk}^i będą niezależne od jednej z współrzędnych, np. — od x^1 .

Otóż zauważmy, że jest tak we współrzędnych kanonicznych dowolnej grupy izometrii $G^{(m)}$. Istotnie, jej generator ma w tych współrzędnych postać $X \equiv \partial_1$ zaś warunek izometryczności postać $\partial_1 g_{ij} = 0$ lub, co na jedno wychodzi, $\partial_1 g^{ij} = 0$, ale równocześnie X jest generatorem afiniczności — musi więc zachodzić $\partial_1 \Gamma_{jk}^i = 0$. Ponieważ jednak grupa izometrii $G^{(m)}$ była przy tym dowolną jednoparametrową podgrupą pełnej grupy izometrii $G_6^{(m)}$, powiemy więc krótko, że w strukturze układu (1.6) wyróżniona jest grupa izometrii $G_6^{(m)}$.

Ale wobec tego jeśli weźmiemy konkretny generator $X^{(m)}$ i przedstawimy układ (1.6) we współrzędnych kanonicznych grupy generatora $X^{(m)}$, to będziemy mogli wyróżnić spośród wszystkich rozwiązań układu (1.6) takie rozwiązanie, w których ϱ , p i v^i będą stałe wzdłuż trajektorii grupy, inaczej, dla których zachodzi

$$(3.1) \quad \partial_1 \varrho = 0, \quad \partial_1 p = 0, \quad \partial_1 v^i = 0.$$

Warunki te w dowolnym układzie współrzędnych (k) mają następującą postać:

$$(3.2) \quad \mathfrak{L}_\xi g_{ij} = 0, \quad \mathfrak{L}_\xi \varrho = 0, \quad \mathfrak{L}_\xi p = 0, \quad \mathfrak{L}_\xi v^i = 0.$$

Postać ta jest niezależna od układu współrzędnych, co wynika z niezmienniczego charakteru operacji \mathfrak{L} . Pierwszy warunek specjalizuje generator ξ wybierając go spośród generatorów grupy izometrii $G_6^{(m)}$, dalsze trzy zacieśniają rozwiązania (1.6) do takich rozwiązań, dla których grupa generatora ξ jest grupą inwariantności.

Z punktu widzenia teorii układów równań różniczkowych cząstkowych równania (1.6) i (3.2) traktowane łącznie stanowią układ *nadokreślony*, mamy bowiem więcej równań niż funkcji poszukiwanych. Ale z faktu, że grupa $G_6^{(m)}$ wyróżniona jest w strukturze geometrycznej układu (1.6) i z tego, że dodatkowe warunki sformułowane zostały właśnie w postaci (3.2) wynikało, jak zauważyliśmy, że po przejściu do stosownego układu współrzędnych, w danym wypadku kanonicznych generatora $X^{(m)}$, otrzymaliśmy równania klasy rozwiązań (1.6), w których ilość funkcji poszukiwanych dokładnie odpowiada ilości równań, a tylko ilość zmiennych niezależnych zmniejsza się o jedną. Ostateczny układ równań klasy rozwiązań jest więc określony. Z tego tytułu taki rodzaj nadokreślności, który można usunąć przechodząc do specjalnego układu współrzędnych, gdzie zmniejsza się dzięki nadokreślności liczba zmiennych niezależnych, nazywać będziemy geometrycznie usuwalnym.

O rozwiązaniach układu (1.6) spełniających warunki (3.2) powiemy, że są one modelowane na grupach izometrii przestrzeni lub krótko modelowane izometrycznie, ponieważ geometria tych rozwiązań narzucona została generatorem izometrii. Niżej podajemy przegląd rozwiązań modelowanych izometrycznie rozpatrując po kolei niezależne generatory grupy $G_6^{(m)}$ oraz odpowiednie modelowane przez nie przepływy.

Przypominamy generatory izometrii [por. (2.25)]:

$$\begin{aligned} X_2 &\equiv -z\partial_y + y\partial_z, & X_3 &\equiv z\partial_x - x\partial_z, & X_4 &\equiv -y\partial_x + x\partial_y, \\ X_5 &\equiv \partial_x, & X_6 &\equiv \partial_y, & X_7 &\equiv \partial_z. \end{aligned}$$

Odpowiadają im następujące przepływy modelowane warunkiem (3.2):

1. Przepływy płaskie, generator inwariantności X_7 .
2. Przepływy jednowymiarowe, generatory modelowania X_6 i X_7 .
3. Przepływy radialne o symetrii centralnej. Warunek modelowania spełniony jest dla każdego z operatorów X_2 , X_3 i X_4 oddzielnie. Łącznie operatory te generują trójparametrową grupę sztywnych obrotów przestrzeni.
4. Przepływy osiowo-symetryczne, modelowane na generatorze X_4 .
5. Przepływy osiowo-symetryczne ze stałą składową prędkości podłużnej; inaczej płaskie osiowo-symetryczne; generatory X_4 i X_7 ;
6. Przepływy śrubowe o stałej gęstości, ciśnieniu i module prędkości q wzdłuż rodziny współrównoległych linii śrubowych. (Wartości wymienionych parametrów nie zmieniają się wzdłuż danej linii śrubowej, dla różnych zaś linii mogą być różne). Generatorem grupy inwariantności jest w tym przypadku $X \equiv X_4 + mX_7$, gdzie m jest stałą różną od zera. Istotnie, rozwiązując równanie trajektorii grupy tego generatora $dx/(-y) = dy/x = dz/m$ otrzymujemy rodzinę linii śrubowych: $x^2 + y^2 = c^2$, $z + b = m \operatorname{arctg}(y/x)$, natomiast zachowanie parametrów przepływu wzdłuż tych linii wynika z samych warunków inwariantności (3.2).

Przegląd ten wyczerpuje wszystkie przepływy modelowane izometrycznie na jedno-, dwu- i trójparametrowych podgrupach pełnej grupy izometrii. Jak widać są to rozwiązania dobrze znane w teorii przepływów. Do nowych rozwiązań przepływy modelowane izometrycznie nie prowadzą, niemniej przytoczyliśmy je tu niejako dla porządku, licząc na to, że dobrze jest zdawać sobie sprawę dzięki, czemu z punktu widzenia czysto geometrycznego dają się one wyodrębnić i jaką rolę odgrywa przy tym geometryczna struktura równań.

Skoro jednak generatory izometrii do nowych rozwiązań nie prowadzą, wypada albo zmodyfikować warunki (3.2), albo zostawić je pomijając zupełnie tylko pierwszy z nich. Jednakże zupełna dowolność generatora X jest niedopuszczalna; w jego wyborze krępowani jesteśmy właśnie strukturą geometryczną równań (1.6). Ona też powinna sugerować wybór właściwy. Gdybyśmy bowiem założyli warunki (3.2) na rozwiązanie nic nie założywszy o generatorze ξ , to wtedy przechodząc do współrzędnych kanonicznych jego grupy moglibyśmy stworzyć taką sytuację, że definiowana klasa rozwiązań, z założenia niezależna od x^1 , musiałaby spełniać równania, w których albo tensor metryczny, albo symbole Christoffela są zależne od tej właśnie współrzędnej i wobec tego rozwiązania, na to żeby rzeczywiście były

niezależne od x^1 , musiałyby spełniać nowe, wynikające z równań warunki. Nadokreśloność równań pozostałaby nadal i zamiast spodziewanych uproszczeń zjawilyby się dodatkowe trudności, częstokroć przekreślające wręcz obrany sposób postępowania. Mając to na uwadze ograniczymy się do generatorów podobieństw przestrzeni, jak okaże się bowiem także i pełna grupa podobieństw $G_7^{(p)}$ wyróżniona jest w strukturze geometrycznej układu (1.6).

3.3. Wobec tego zmodyfikujemy warunki (3.2) drogą prostego i narzucającego się uogólnienia. Zamiast generatora izometrii weźmy pod uwagę generator podobieństw

$$(3.3) \quad \mathfrak{L}_\xi g_{ij} = C g_{ij}$$

i kierując się formalną postacią tego warunku zmienimy trzy pozostałe tak, że ostatecznie szukać będziemy rozwiązań (3.1) spełniających warunki

$$(3.4) \quad \mathfrak{L}_\xi g_{ij} = C g_{ij}, \quad \mathfrak{L}_\xi \varrho = c_1 \varrho, \quad \mathfrak{L}_\xi p = c_2 p, \quad \mathfrak{L}_\xi v^i = c_3 v^i,$$

gdzie C , c_1 , c_2 , c_3 są to pewne stałe, na razie bliżej nieokreślone. Zauważmy, że gdy stałe c_1 , c_2 , c_3 są równe zeru, to trzy ostatnie warunki sprowadzają się do żądania, aby grupa generatora podobieństw była grupą inwariantności pól wyznaczanych (w przypadku pola prędkości grupą kontrainwariantności). Dokładniejszy ich sens przy niezerowych wartościach tych stałych będzie wyjaśniony w punkcie następnym.

Pokażemy obecnie, że stałe C , c_1 , c_2 , c_3 można dobrać w taki sposób, żeby nadokreśloność układu, powstałego z połączenia (1.6) i (3.4), była geometrycznie usuwalna, to jest żeby zniknęła po przejściu do stosownych współrzędnych (okażą się nimi współrzędne kanoniczne grupy podobieństw $G^{(p)}$, odpowiadającej wybranemu generatorowi). Wykażemy tym samym, że cała grupa podobieństw $G_7^{(p)}$ wyróżniona jest w strukturze geometrycznej (1.6), a to z kolei pozwoli wyodrębnić sporo klas rozwiązań tego układu.

W tym celu zakładamy, że istnieją rozwiązania (1.6) modelowane warunkiem (3.4) i obliczamy z obu stron równań (1.6) pochodną Liego. Możemy przy tym skorzystać z twierdzenia W. Ślebodzińskiego [por. wzór (2.26)], ponieważ generator podobieństwa jest jednocześnie generatorem afinicznym. Przedstawiając pochodną Liego z pochodną kowariantną i korzystając z warunków modelowania (3.4), otrzymujemy,

$$(3.5) \quad \begin{aligned} c_1 \partial_i \varrho + (c_1 + c_3) \nabla_j (\varrho v^j) &= 0, \\ c_3 \partial_i v^i + 2c_3 v^k \nabla_k v^i + \frac{1}{\varrho} (c_2 - C - c_1) g^{ii} \partial_i p &= 0, \\ (c_2 - \gamma c_1) \cdot \partial_i (p/\varrho^n) + (c_2 + c_3 - \gamma c_1) v^i \partial_j (p/\varrho^n) &= 0. \end{aligned}$$

Ale cały czas mamy na uwadze rozwiązanie układu (1.6), wobec tego porównując równania (3.5) z tym układem wyjściowym dochodzimy do następujących wniosków:

1. W przypadku przepływów ustalonych mamy tylko jeden warunek wiążący stałe

$$(3.6) \quad 2c_3 + C = c_2 - c_1.$$

Gdyby warunek ten nie był spełniony, to z układu (1.6) i (3.5) otrzymalibyśmy $g^{ij} \partial_j p = 0$, skąd $\partial_j p = 0$, ponieważ wyznacznik $|g^{ij}| \neq 0$ i z kolei byłoby $v^k \nabla_k v^i = 0$. Oznaczałoby to jednak, że wektor prędkości przenoszony jest równolegle wzdłuż linii prądu. Tym sposobem przepływ zostałby zawężony do jednostajnego. Innymi słowy poszukiwanie rozwiązań układu (1.6) z warunkiem (3.4) bez spełnienia warunku (3.6) na stałe nie wyprowadziłoby nas poza przepływy banalne.

2. Dla przepływów nieustalonych mamy dwa warunki

$$(3.7) \quad c_3 = 0, \quad C + c_1 - c_2 \equiv 0.$$

I w tym przypadku, gdyby warunki te nie były spełnione, rozwiązania spełniające warunek geometryczny (3.4) nie byłyby wybierany w sposób naturalny spośród całości rozwiązań układu (3.1), a jedynie z wąskiej i sztucznej ich podklasy i w omawianym wypadku takiej, że dla nich gęstość i ciśnienie byłyby niezależne od czasu i musiałyby być stałe dla elementu płynu, a ponadto przyśpieszenie jego także nie zależałoby od czasu.

O ile jednak wybierając warunki modelowania (3.4) kierowaliśmy się jedynie względami natury geometrycznej (pokażemy za chwilę, na ile to było uzasadnione), o tyle warunki na stałe, jako wynik konfrontacji narzucanej geometrii i fizyki przepływu wyrażającej się równaniami (1.6), powinny mieć charakter dynamiczny. Aby sens ich pokazać, zacznijmy od przepływów ustalonych. Utwórzmy skalar

$$(3.8) \quad Eu = p/\rho q^2 = p/\rho g_{ij} v^i v^j$$

znany w teorii modelowania hydrodynamicznego pod nazwą inwariantu Eulera, skąd jego oznaczenie Eu (nie jest to w tym miejscu liczba Eulera, ponieważ jest to na ogół funkcja punktu przestrzeni), [6]. Obliczmy teraz pochodną Liego dla Eu zbudowanego z rozwiązań modelowanych warunkiem (3.4); otrzymamy po wykorzystaniu tychże warunków

$$(3.9) \quad \mathfrak{L}_\xi(Eu) = (c_2 - C - 2c_3 - c_1) Eu.$$

A zatem warunek zgodności (3.6) wymaga, aby $\mathfrak{L}_\xi(Eu) = 0$, tj. aby inwariant Eulera był stały wzdłuż trajektorii grupy generatora ξ . Inaczej mówiąc, na trajektoriach tych stosunek ciśnienia p do ciśnienia dynamicznego ρq^2 nie zmienia się; dla każdej jednak trajektorii może być inny.

Podobnie, do czego zresztą wrócimy w p. 3.8, wykazuje się, że warunki (3.7) wyrażają postulat zachowania wzdłuż trajektorii grupy tzw. inwariantu jednoczesności $\dot{H}o$, [6], i także inwariantu Eu .

Rozwiązania układu (3.1) przy warunkach (3.4) oraz (3.6) (lub 3.7) będziemy nazywać modelowanymi na grupach podobieństw przestrzeni. Uzasadnimy ten termin w p. 3.8.

Wracając do warunków modelowania geometrycznego zauważmy, że treść (3.4) może być różna i zależy od wyboru stałych, naturalnie w ramach swobody, na którą pozwalają warunki dynamicznego modelowania (3.6) i (3.7). W szczególności co się tyczy pola prędkości, to grupa generatora X może być dla niego grupą kontra-inwariantności dla $c_3 = 0$ (dla przepływów nieustalonych zawsze ma miejsce ten rodzaj inwariantności); lub grupą ko-inwariantności, gdy $c_3 = -C$.

Zauważmy jeszcze, że to, iż przy formułowaniu warunków (3.4) posługujemy się składowymi kontrawariantnymi prędkości v^i , ma znaczenie drugorzędne. Zastępując czwarty warunek warunkiem $\mathbb{L}_\xi v_i = {}^*c_3 v_i$ narzucąc będziemy na pole v ten sam postulat, o ile będzie $c_3 + C = {}^*c_3$. W samej rzeczy $\mathbb{L}_\xi v_i = \mathbb{L}_\xi g_{ij} v^j = (\mathbb{L}_\xi g_{ij}) v^j + g_{ij} \mathbb{L}_\xi v^j$ i stąd przy założeniu pierwszego i czwartego z warunków (3.4) mamy $\mathbb{L}_\xi v_i = (C + c_3) v_i = {}^*c_3 v_i$, co należało wykazać.

3.4. Co jednak daje modelowanie warunkami (3.4) w odniesieniu do kształtu rozwiązań? Wyjaśnimy to dowodząc najpierw twierdzenia:

Jeżeli dla danego generatora ξ i dla danego pola tensorowego s^{ij} zachodzi warunek $\mathbb{L}_\xi s^{ij} = c s^{ij}$, gdzie c jest stałą, to wtedy istnieje pole skalarne σ o tej własności, że pole $\hat{s}^{ij} = \sigma s^{ij}$ i grupa generatora ξ związane są warunkiem inwariantności $\mathbb{L}_\xi \hat{s}^{ij} = 0$.

Twierdzenia dowodzimy pokazując, jak to pole skalarne znaleźć. Istotnie, na to, żeby było $\mathbb{L}_\xi \sigma s^{ij} = 0$, potrzeba i wystarcza zadość uczynić równaniu $\xi^j \partial_j \ln \sigma = -c$, które we współrzędnych kanonicznych grupy generatora ξ przyjmuje postać $\partial_1 \ln \sigma = -c$, skąd $\sigma = \exp(-cx^1) f(x^2, x^3)$.

Jak widać, pole skalarne σ wyznaczone zostało z dokładnością do czynnika stałego wzdłuż trajektorii grupy (inwariant). Czynniki ten można będzie włączyć do pola \hat{s}^{ij} pomijając go tym samym w wyrażeniu na σ . Poszukiwane pole skalarne jest więc inwariantem względnym grupy. Twierdzenie udowodnione jest szczególnym przypadkiem tw. 5.1 z pracy [17], str. 45-46.

Na podstawie twierdzenia odnoszącego się oczywiście także do skalarów i wektorów możemy warunki (3.4) zapisać we współrzędnych kanonicznych grupy podobieństw generatora ξ jak następuje:

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \exp(-Cx^1) \hat{g}^{ij}(x^2, x^3), \\ \varrho &= \exp(c_1 x^1) \hat{\varrho}(x^2, x^3, t), \\ p &= \exp(c_2 x^1) \hat{p}(x^2, x^3, t), \\ v^1 &= \exp(c_3 x^1) \hat{v}^1(x^2, x^3, t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

A więc nałożenie warunków (3.4) powoduje, że w rozwiązaniach na tym warunku modelowanych następuje we współrzędnych tych rozdzielenie zmiennych przestrzennych; współrzędna x^1 została oddzielona od pozostałych. Ogólnie zaś w dowolnym układzie współrzędnych rozwiązania różnią się tylko czynnikiem skalarnym (inwariantem względnym grupy podobieństw) od takich pól, dla których grupa generatora ξ jest grupą inwariantności. Tym samym, zapisując równania (1.6) we współrzędnych kanonicznych grupy generatora ξ i podstawiając do nich znaną postać (3.10) rozwiązań modelowanych warunkami (3.4), znajdujemy układ następujący:

$$\begin{aligned} \exp(-c_3 x^1) \partial_t \hat{\varrho} + (c_1 + c_3) \hat{\varrho} \hat{v}^1 + \nabla_j (\hat{\varrho} \hat{v}^j) &= 0, \\ \exp(c_3 x^1) \partial_t \hat{v}^i + \exp(2c_3 x^1) (c_3 \hat{v}^1 \hat{v}^i + \hat{v}^k \nabla_k \hat{v}^i) + \\ + \frac{1}{\hat{\varrho}} \exp[(c_2 - c_1 - C)x^1] (c_2 \hat{g}^{1i} \hat{p} + \hat{g}^{ij} \partial_j \hat{p}) &= 0, \\ \exp(-c_3 x^1) \partial_t (\hat{p}/\hat{\varrho}^\nu) + (c_2 - \gamma c_1) \hat{v}^1 (\hat{p}/\hat{\varrho}^\nu) + \hat{v}^i \partial_i (\hat{p}/\hat{\varrho}^\nu) &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

W tym układzie równań zarówno funkcje poszukiwane \hat{q} , \hat{p} , \hat{v}^i jak i \hat{g}^{ij} oraz współczynniki Christoffela występujące w pochodnych kowariantnych [por. (1.7)] nie zależą od współrzędnej x^1 . (Te ostatnie dlatego, że generator podobieństw jest jednocześnie generatorem afiniczności).

Zauważmy teraz znamioną rolę dynamicznych warunków modelowania na grupie podobieństw, zanotowanych wyżej jako (3.6) lub (3.7). Otóż gdy są one spełnione, współrzędna x^1 całkowicie ruguje się z powyższego układu (3.11) dając określony układ równań o pięciu poszukiwanych funkcjach («z daszkami»). Jeśli natomiast nie będą one spełnione, sam układ (3.11) byłby sprzeczny, bo po odpowiednim jego uporządkowaniu mielibyśmy po jednej stronie wyrażenia typu $\exp(cx^1)$, po drugiej zaś wyrażenia nie zawierające w ogóle x^1 .

Zakładając więc dalej, że spełnione są zarówno geometryczne (3.4) jak i dynamiczne (3.6) lub (3.7) warunki modelowania przepływu na grupie podobieństw (właśnie rozwiązania spełniające, oba te warunki nazwaliśmy modelowanymi na grupie podobieństw przestrzeni) otrzymujemy dla nich następujący układ równań prostszy od wyjściowego układu (1.6), ponieważ liczba zmiennych niezależnych będzie mniejsza o jedność:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \partial_t \hat{q} + (c_1 + c_3) \hat{q} \hat{v}^1 + \nabla_j (\hat{q} \hat{v}^j) &= 0, \\ \partial_t \hat{v}^i + c_3 \hat{v}^1 \hat{v}^i + \hat{v}_k \nabla_k \hat{v}^i + \frac{1}{\hat{q}} (c_2 \hat{g}^{1i} \hat{p} + \hat{g}^{ii} \partial_i \hat{p}) &= 0, \\ \partial_t (\hat{p}/\hat{q}^\nu) + (c_2 - \gamma c_1) \hat{v}^1 (\hat{p}/\hat{q}^\nu) + \hat{v}^j \partial_j (\hat{p}/\hat{q}^\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Skracając sam zapis układu w dalszym ciągu korzystaliśmy z umowy sumacyjnej. Należy jednak pamiętać, że niektóre ze składników sum są zerami i że różniczkowanie kowariantne względem x^1 zawiera tylko operacje algebraiczne z uwagi na niezależność funkcji różniczkowanych od tej właśnie współrzędnej i mamy np. $\nabla_1 \hat{v}^i = \Gamma_{1j}^i \hat{v}^j$.

Układ ten wraz z warunkami (3.6) lub (3.7) na występujące w nim stałe jest równoważny łącznemu układowi (1.6) i (3.4), ponieważ każde jego rozwiązanie po uwzględnieniu ostatniej trójki wzorów (3.10) daje pole przepływu, a więc rozwiązanie (1.6) spełniające ponadto warunki (3.4) w układzie kanonicznym współrzędnych, a zatem i w dowolnym układzie współrzędnych. I odwrotnie, każde niebanalne rozwiązanie (1.6) zadość czyniące warunkowi modelowania geometrycznego (3.4) musi spełniać we współrzędnych kanonicznych układ (3.12) po uprzednim oddzieleniu się oraz eliminacji x^1 .

Zaznaczmy jeszcze, że gdybyśmy rozwiązali układ (3.12) nie spełniając dynamicznych warunków modelowania (3.6) lub (3.7) na stałe, to z takich rozwiązań nie moglibyśmy za pomocą formuł (3.10) przejść do rozwiązań (1.6) w układzie kanonicznym, ponieważ wymaga to uprzedniego pomnożenia przez czynniki uproszczone przy przejściu od (3.11) do (3.12). To zaś możliwe jest tylko przy spełnieniu dynamicznych warunków modelowania.

Rozważania powyższe ujmijmy więc w krótką formułę mówiąc, że w strukturze geometrycznej układu (1.6) wyróżniona jest grupa podobieństw przestrzeni $G_7^{(p)}$,

wyjaśniliśmy na czym to wyróżnienie polega i pokazaliśmy że w wyniku prowadzi ono do wyróżnienia prostszych klas rozwiązań układu.

3.5. Przepływy modelowane na dowolnej grupie podobieństw przestrzeni można otrzymać także i na innej drodze, mianowicie rozpatrując zadanie separacji zmiennych niezależnych w równaniach (1.6) po ich zapisaniu we współrzędnych kanonicznych tej grupy. Kierując się tym, że wtedy współczynniki Christoffella nie zależą od współrzędnej x^1 , a g^{ij} mają postać przedstawioną pierwszą formułą wzoru (1.10), szuka się rozwiązań w ogólniejszej niż (3.10) postaci:

$$(3.13) \quad \varrho = f_1(x^1) \hat{\varrho}, \quad p = f_2(x^1) \hat{p}, \quad v^i = f_3(x^1) \hat{v}^i,$$

przy czym funkcje z daszkami zależą od pozostałych zmiennych, w szczególności od czasu t dla przepływów nieustalonych. Ograniczymy się jednak w ilustracji postępowania do przepływów ustalonych. W obu wypadkach wygląda ono analogicznie.

Funkcje f_1, f_2, f_3 należy określić w taki sposób, żeby podstawienie (3.13) do równań (1.6) prowadziło do określonego układu równań na funkcje $\hat{\varrho}, \hat{p}, \hat{v}^i$ nie zawierającego x^1 .

Podstawienie (3.13) do równania ciągłości daje $\hat{\varrho} \hat{v}^1 d(\ln f_1 f_3)/dx^1 + \nabla_j (\hat{\varrho} \hat{v}^j) = 0$. Zatem powinno być $d(\ln f_1 f_3)/dx^1 = \text{const}$ i stąd $f_1 f_3 = A \exp(Bx^1)$, gdzie A, B są to stałe. Podobnie podstawienie do równań ruchu daje

$$v^1 v^1 d(\ln f_3)/dx^1 v^j + v^j \nabla_i v^i + \frac{1}{\hat{\varrho}} \frac{f_2 \exp(-Cx^1)}{f_1 f_3} (\hat{p} \hat{g}^{1i} d(\ln f_2/dx^1 + g^{ij} \partial_j \hat{p})) = 0$$

i jak widać musi zachodzić

$$d(\ln f_3)/dx^1 = \text{const}, \quad d(\ln f_2)/dx^1 = \text{const}, \quad f_2 \exp(-Cx^1) f_1 f_3 = \text{const}.$$

Dwie pierwsze równości po uwzględnieniu związku otrzymanej z równania ciągłości dają

$$f_1 = A_1 \exp(c_1 x^1), \quad f_2 = A_2 \exp(c_2 x^2), \quad f_3 = A_3 \exp(c_3 x^3),$$

natomiast ostatnia równość otrzymana z równań ruchu wiąże stałe c_1, c_2, c_3 ze stałą C występującą w składowych g^{ij} dając dokładnie warunek dynamiczny modelowania (3.6). Z kolei włączając stałe A_1, A_2, A_3 do funkcji poszukiwanych otrzymamy układ (3.12). Analogicznie jest dla przepływów nieustalonych, dla których otrzymamy warunek (3.7).

Przekonałiśmy się w ten sposób, że z jednej strony można rozwiązania modelowane na grupie podobieństw $G^{(p)}$ otrzymać metodą rozdzielania zmiennych w jej współrzędnych kanonicznych, a z drugiej strony, że są to jedyne rozwiązania, do których takie rozdzielanie zmiennych przestrzennych prowadzi.

3.6. Jest oczywiste, że do klasy przepływów modelowanych na grupach podobieństw należą wyliczone w p. 3.2 przepływy modelowane izometrycznie, ponieważ warunki (3.4) w przypadku szczególnym zerowania się wszystkich stałych sprowadzają się do (3.2). Rzecz ciekawa, że wtedy warunki modelowania dynamicznego spełnione są automatycznie.

Ponadto do klasy tej należą ze znanych przepływów przepływy stożkowe. Otrzymujemy je modelując rozwiązania (1.6) na grupie jednokładności (generator X_1), co daje $C = 2$, a warunki dynamiczne spełniając przy stałych $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = -1$. Istotnie, podstawiając (3.4) przy danych wartościach stałych we współrzędnych kartezyjskich x, y, z mamy

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \quad \text{i} \quad X_1\rho = 0, \quad X_1p = 0, \quad X_1v^i - v^i = -v^i,$$

czyli też $X_1v^i = 0$, co z uwagi na znaną tożsamość Eulera pokazuje, że tak gęstość i ciśnienie jak i składowe prędkości są funkcjami jednorodnymi rzędu zera i tym samym są stałe na prostych poprowadzonych z początku układu (trajektorie grupy). Fakt ten jest zwykle podawany jako określenie przepływów stożkowych.

Naturalnie przykłady te, bardzo pogładowe i znane, nie wyczerpują całej klasy, bowiem w jej ramach dysponujemy zarówno swobodą wyboru konfiguracji geometrycznej trajektorii grupy modelującej o generatorze $X = C^J X_J$, wyrażającą się w dowolności stałych C^J , jak i swobodą doboru stałych c_1, c_2, c_3 geometrycznego modelowania pola przepływu (3.4) w ramach, na które pozwalają dynamiczne warunki (3.6) lub (3.7).

Ale dokładniejsze poznanie własności przepływów tej klasy wymaga, niestety, odwołania się do metod numerycznych włącznie z zastosowaniem elektronowych maszyn liczących celem znalezienia rozwiązań numerycznych równań (3.12). Trzeba jednak stwierdzić, że ewentualne postępowanie numeryczne będzie dla tych przepływów łatwiejsze, dzięki zmniejszeniu ilości zmiennych niezależnych niż przy bezpośrednim rozwiązywaniu układu wyjściowego (1.6).

3.7. Pewne własności klasy nie wymagają jednak rozwiązywania układu (3.12) i wynikają bezpośrednio z warunków modelowania. Zajmiemy się tymi własnościami w przypadku przepływów ustalonych. Pokażemy najpierw, że: *skończone przekształcenia grupy $G^{(p)}$, na której przepływ jest modelowany, przekształcają linie prądu wzajemnie na siebie, przy czym linie prądu nie mogą pokrywać się z trajektoriami tej grupy.*

Istotnie, na podstawie (3.10)₄ można równania linii prądu zapisać we współrzędnych kanonicznych w postaci

$$(3.14) \quad dx^1/\hat{v}^1(x^2, x^3) = dx^2/\hat{v}^2(x^2, x^3) = dx^3/\hat{v}^3(x^2, x^3).$$

Całki pierwsze, czyli rodziny powierzchni wyznaczające w przecięciu linie prądu będą więc postaci

$$x^1 + A = E(x^2, x^3), \quad F(x^2, x^3, B) = 0,$$

gdzie A, B są to stałe. Z drugiej strony skończone przekształcenia grupy $G^{(p)}$ mają postać (por. 2.14) $\bar{x}^1 = x^1 + a$, $\bar{x}^2 = x^2$, $\bar{x}^3 = x^3$. Wobec tego przekształcając linię prądu daną powyżej otrzymamy w wyniku linię, której równanie ma postać

$$\bar{x}^1 + \bar{A} = E(\bar{x}^2, \bar{x}^3), \quad F(\bar{x}^2, \bar{x}^3, B) = 0,$$

gdzie $\bar{A} = A - a$. Jak widać jest to równanie linii prądu tylko z inną wartością stałej, co właśnie należało wykazać.

Zakładając, że linie prądu pokrywają się z trajektoriami grupy, czyli przyjmując, że $\hat{v}^2 = 0$ i że $\hat{v}^3 = 0$, otrzymalibyśmy po podstawieniu do układu (3.12) rozwiązania trywialne.

Aby otrzymać dalsze wnioski policzmy pochodną Liego z kwadratu prędkości q^2 . Na mocy (3.4) dostajemy $\mathcal{L}_\xi q^2 = (C + 2c_3) q^2$. Jak widać, moduł prędkości będzie stały wzdłuż trajektorii grupy modelującej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.15) \quad C + 2c_3 = 0.$$

Na mocy (3.6) warunek ten można też zapisać jako $c_2 = c_1$.

Ponieważ jednak stwierdziliśmy w p. 3.3, że $Eu = p/\rho q^2$ (inwariant Eulera) jest stałe na trajektoriach grupy modelującej, wobec tego także p/ρ , a tym samym i entalpia całkowita H , muszą być stałe wzdłuż tych trajektorii. Ostatecznie H jest inwariantem grupy modelującej wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (3.15).

W szczególności ma to miejsce, gdy entalpia całkowita jest stałą absolutną w przepływie modelowanym; inaczej mówiąc związek (3.15), to konieczny warunek izoenergetyczności. Odwrotnie, na ogół jest to także warunek wystarczający. Istotnie, jego spełnienie oznacza, że H jako inwariant grupy jest stałe wzdłuż jej trajektorii. Ale H jest także stałe wzdłuż linii prądu. Ponieważ te ostatnie nie mogą pokrywać się z trajektoriami grupy, wobec tego budując przestrzenną kongruencję z obu rodzin linii możemy na ogół dojść z jedną i tą samą wartością H do każdego punktu obszaru. Konstrukcja ta zawodzi dla takich rozwiązań układu (3.12), które dają rodzinę powierzchni prądu rozwarstwiających obszar i taką, że powierzchnie prądu nie przecinają trajektorii, ale je zawierają. W tym ostatnim przypadku H będzie stałe na powierzchniach prądu.

Z kolei obliczając pochodną Liego entropii przepływu S otrzymamy na mocy (3.4) $\mathcal{L}_\xi S = (c_2 - \gamma c_1) S$. Jak widać, na to, aby entropia była inwariantem grupy modelującej, potrzeba i wystarcza, aby

$$(3.16) \quad c_2 - \gamma c_1 = 0.$$

Otóż jest faktem znanym w dynamice gazów, że założenie potencjalności i izentropowości przepływu powoduje automatycznie jego izoenergetyczność. Fakt ten widoczny jest od razu z równań Crocco:

$$(3.17) \quad \text{grad } H - T \text{ grad } S = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$$

Zatem warunkiem koniecznym, aby przepływ modelowany na grupie podobieństw był potencjalny i izentropowy, jest

$$(3.18) \quad c_1 = c_2 = 0,$$

ponieważ tylko przy takim wyborze stałych można spełnić jednocześnie oba warunki (3.15) i (3.16).

Równość otrzymana jest na ogół warunkiem wystarczającym, aby przepływ modelowany należał do tak zwanych przepływów Beltramiiego, w których wektor rotacji jest równoległy do prędkości. Istotnie, jego spełnienie oznacza, że zarówno S jak i H są inwariantami grupy. Ponieważ z drugiej strony są to wielkości stałe na

liniach prądu, można więc dojść po kongruencji trajektorii i linii prądu do dowolnego punktu obszaru z tymi samymi wartościami obu wielkości. W tych przypadkach, gdy konstrukcja zawodzi, powierzchniami stałych wartości H i S będą powierzchnie prądu. To, że w przypadku udanej konstrukcji otrzymamy przepływy Beltramięgo, widoczne jest z równań (3.17).

Warto zaznaczyć w tym miejscu, że przepływ stożkowy jest jedynym spośród przepływów potencjalnych i izentropowych modelowanych na grupie generatora X_1 . Innych przepływów przy założeniu potencjalności i izentropowości na tej grupie nie da się zbudować.

Przenosząc otrzymane wnioski na przypadek płaskich i ustalonych przepływów, modelowanych na grupie podobieństw płaszczyzny (ich badaniem zajmiemy się w następnym p.) zauważmy, że warunek (3.15) będzie warunkiem koniecznym i dostatecznym ich izoenergetyczności, a (3.18) — warunkiem koniecznym i dostatecznym ich potencjalności i izentropowości. Nie będzie w tym przypadku takich sytuacji, które sprawiały, że mogliśmy mówić tylko o «dostateczności na ogół» tych warunków, jak to było w przypadku przepływów przestrzennych. Co się tyczy warunku (3.18), to potencjalność będzie wynikać z tego, że w płaskich przepływach rotacja jest zawsze prostopadła do prędkości i przepływy Beltramięgo nie są możliwe.

I wreszcie bardzo ważna własność ogólna wprowadzonych przepływów: *wektor prędkości w takich przepływach ślizgając się po danej trajektorii grupy modelującej wraz z lokalną bazą układu kanonicznego tworzy z wektorami bazy stale te same kąty, choć dla różnych trajektorii — różne*. Oczywiście wektory bazy także na danej trajektorii tworzą z sobą te same kąty, co jest charakterystyczne dla grupy podobieństw.

3.8. Obecnie wyjaśnimy, jaki związek łączy przepływy wyodrębnione w tym paragrafie z teorią modelowania lub, jak zwykle się mówi, podobieństwa przepływów. Aby pokrótce teorię tę przypomnieć, wróćmy do równań (1.3) w postaci bezwymiarowej. Otrzymaliśmy je zakładając, że jednostki długości l_0 , czasu t_0 , prędkości q_0 , gęstości ϱ_0 i ciśnienia p_0 wybrane zostały w stosowny sposób. Na to, aby układ (1.1) i (1.2) przybrał postać (1.3), jednostki te musiały spełniać związki

$$(3.19) \quad q_0 t_0 / l_0 = 1, \quad p_0 / \varrho_0 q_0^2 = 1.$$

Ale obierając inne jednostki np. przez zmianę ich skali

$$\bar{l}_0 = k_l l_0, \quad \bar{t}_0 = k_t t_0, \quad \bar{\varrho}_0 = k_\varrho \varrho_0, \quad \bar{p}_0 = k_p p_0, \quad \bar{q}_0 = k_q q_0,$$

tak żeby było

$$(3.20) \quad q_0 t_0 / l_0 = \bar{q} / \bar{l} \bar{t}_0, \quad p_0 / \varrho_0 q_0^2 = \bar{p}_0 / \bar{\varrho}_0 \bar{q}_0^2$$

lub

$$(3.20') \quad k_q k_t / k_l = 1, \quad k_p / k_\varrho k_q^2 = 1,$$

dla zmiany skal, jesteśmy nadal przy tym samym układzie równań (1.3). Wobec tego biorąc jakiegokolwiek jego rozwiązanie q^* , p^* , v^* i pisząc następnie

$$\varrho_I = \varrho_0^* \varrho, \quad p_I = p_0^* p, \quad v^i = q_0^* v^i$$

oraz

$$\bar{\varrho}_{II} = \bar{\varrho}_0^* \bar{\varrho}, \quad \bar{p}_{II} = \bar{p}_0^* \bar{p}, \quad \bar{v}_{II}^i = \bar{q}_0^* \bar{v}^i$$

otrzymujemy dwie różne realizacje przepływu, odpowiadające temu samemu rozwiązaniu (1.3), a tym samym dwa różne rozwiązania układu (1.2) i (1.1). W szczególności jedno z nich np. może być otrzymane doświadczalnie na modelu w obszarze \mathcal{D}_I i wtedy po przejściu do jego bezwymiarowej postaci możemy znaleźć rozwiązanie w obszarze \mathcal{D}_{II} przepływu rzeczywistego (o sytuacji geometrycznej podobnej do modelu) za pomocą prostej zmiany skali zadość czyniącej (3.20'). Przejście do geometrycznie podobnej sytuacji oznacza, że odpowiednie obszary \mathcal{D}_I i \mathcal{D}_{II} są przekształcane na siebie za pomocą skończonego przekształcenia grupy podobieństw $G^{(p)}$. Oznaczając przez Q i \bar{Q} odpowiadające sobie punkty obu obszarów, możemy związki (3.20) napisać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} t_0 q_I(Q)/l_0 &= \bar{t}_0 q_{II}(\bar{Q})/\bar{l}_0 \equiv H_0(Q) = H_0(\bar{Q}), \\ [p_I/\varrho_I q_I^2]_Q &= [\bar{p}_{II}/\bar{\varrho}_{II} \bar{q}_{II}^2]_{\bar{Q}} \equiv Eu(Q) = Eu(\bar{Q}). \end{aligned}$$

To zaś oznacza, że w obu przepływach (a więc zarówno na modelu jak i w rzeczywistości) dają się utworzyć agregaty, skalarne i bezwymiarowe funkcje punktu, zachowujące tę samą wartość w odpowiadających sobie punktach. Są to zatem inwarianty punktowo-punktowe przekształcenia obszarów \mathcal{D}_I i \mathcal{D}_{II} za pomocą podobieństwa. Pierwszy z nich to inwariant jednoczesności, drugi — inwariant Eulera.

Tak można modelować, co podkreślamy, dowolne rozwiązanie (1.3).

Przejdźmy z kolei do wprowadzonych w tym punkcie klas rozwiązań. Rozpatrzmy takie rozwiązanie na dowolnej powierzchni tnącej $x^1 = \text{const}$ we współrzędnych kanonicznych grupy. Przy wyborze jednostek (3.19) mamy

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \varrho(x^1, x^2, x^3, t) &= \varrho_0 \exp(c_1 x^1) \hat{\varrho}(x^2, x^3, t), \\ p(x^1, x^2, x^3, t) &= p_0 \exp(c_2 x^1) \hat{p}(x^2, x^3, t), \\ v^i(x^1, x^2, x^3, t) &= q_0 \exp(c_3 x^1) \hat{v}^i(x^2, x^3, t). \end{aligned}$$

Prócz tego jak pamiętamy

$$(2.23) \quad g_{ij} = \exp(Cx^1) g_{ij}(x^2, x^3).$$

Zatem przy przejściu od jednej powierzchni tnącej ($x^1 = x_1^1$) do innej ($x^1 = x_{II}^1$) będziemy mieli do czynienia ze zmianą skal poszczególnych wielkości

$$(3.24) \quad \begin{aligned} k_q &= \exp(c_1(x_{II}^1 - x_1^1)), & k_p &= \exp(c_2(x_{II}^1 - x_1^1)), \\ k_a &= \exp[(\frac{1}{2}C + c_3)(x_{II}^1 - x_1^1)], & k_t &= \exp(\frac{1}{2}C(x_{II}^1 - x_1^1)). \end{aligned}$$

Przy okazji wyjaśniamy, że zmianę skali długości określamy tu stosunkiem długości danego łuku na drugiej powierzchni tnącej, do długości przeciwobrazu tego

łuku na pierwszej powierzchni przy przekształceniu grupy modelującej, które przeprowadza te powierzchnie wzajemnie na siebie.

Łatwo sprawdzić, że z uwagi na (3.6) lub (3.7) ta zmiana skal spełnia warunki modelowania (3.20'). A więc wprowadzone tu rozwiązania mają tę własność, że są jakby zbudowane z warstw, odpowiadających poszczególnym powierzchniom tnącym, z tym, że przechodzeniu do kolejnych warstw towarzyszy zmiana skal zadość czyniąca warunkom modelowania przepływów. Przy tym Ho i Eu są inwariantami tej grupy, nazwanej uprzednio modelującą, której przekształcenia skończone uwarstwiają rozwiązanie. Wskazywaliśmy na to już w p. 3.3 omawiając warunki (3.6) i (3.7). Można by powiedzieć, że rozwiązania te są modelowane wewnętrznie lub modelowane w sobie. Dlatego też nazwaliśmy je rozwiązaniami modelowanymi na grupie podobieństw mając na myśli to, że można je budować w obszarze wychodząc z dowolnego rozwiązania układu (3.12) na jednej powierzchni tnącej tego obszaru. W tym kontekście poprzednio omówione modelowanie, stosowane do każdego rozwiązania (1.6), można by nazwać zewnętrznym. Modelowanie zewnętrzne nie zakłada niczego o naturze rozwiązania i zawsze pozwala zbudować z niego rozwiązanie dla sytuacji geometrycznie podobnej. To zaś jako złożenie skończonej izometrii i jednokładności pozwala na to, że można posługiwać się w obu przypadkach kartezjańskimi układami współrzędnych. Natomiast przepływ modelowany wewnętrznie jako zbudowany z warstw wymaga, aby jego rozwarstwienie było zgodne z zasadami modelowania. Ma się rozumieć, że niektóre tylko rozwiązania (1.6) mają tę własność. Ich znalezienie jest jednak do pewnego stopnia łatwiejsze, przy czym rola współrzędnych kanonicznych grupy modelującej jest tu istotna.

Kończąc punkt zauważmy jeszcze, że zamiast o inwariancie Eu można mówić o inwariancie Macha (lokalna liczba Macha), mamy bowiem $Eu = M^{-2}$. Na trajektoriach grupy modelującej lokalna liczba Macha jest więc stała. W szczególności z trajektorii utkana jest powierzchnia paraboliczna rozwiązań modelowanych na grupach podobieństw.

4. Płaskie i ustalone przepływy, modelowane na grupach podobieństw płaszczyzny

4.1. Punkt ten poświęcimy specjalizacji rozważań p. 3 na przypadek przepływów płaskich i ustalonych. Równania tych przepływów mają postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \nabla_j(\rho v^j) &= 0, \\ v^l \nabla_l v^i + \frac{1}{\rho} g^{ik} \partial_k p &= 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, \\ v^j \partial_j (p/\rho^n) &= 0. \end{aligned}$$

Czteroparametrową grupę podobieństw płaszczyzny wyznaczają niezależne generatory

$$(4.2) \quad \begin{aligned} X_1 &\equiv x\partial_x + y\partial_y, & X_2 &\equiv y\partial_x - x\partial_y, \\ X_3 &\equiv \partial_x, & X_4 &\equiv \partial_y. \end{aligned}$$

Określenie rozwiązań modelowanych na jednoparametrowej podgrupie $G^{(p)}$ grupy $G_4^{(p)}$ przenosimy bez zmian z poprzedniego paragrafu warunek (3.4). Tak samo jak i tam znajdujemy dynamiczny warunek zgodności (3.6) oraz postać (3.10) tych rozwiązań we współrzędnych kanonicznych grupy modelującej. W wyborze grup modelujących ograniczymy się do grup generatora $X \equiv mX_1 + nX_2$, tj.

$$(4.3) \quad X \equiv (mx - ny) \partial_x + (my + nx) \partial_y,$$

(m i n są to stałe dowolne), zawierających punkt stały, początek kartezjańskiego układu współrzędnych.

Równanie trajektorii dla grupy tego generatora ma postać $dx/(mx - ny) = dy/(my + nx)$ i po rozwiązaniu daje rodzinę spirali logarytmicznych

$$(4.4) \quad \mu = \frac{1}{m^2 + n^2} [m \operatorname{arc} \operatorname{tg} (y/x) - n \ln (x^2 + y^2)^{1/2}]$$

albo

$$(4.5) \quad r = \exp \left[\frac{1}{n} \left(m\varphi - \frac{m^2 + n^2}{\mu} \right) \right]$$

we współrzędnych biegunowych, przecinających jak widać promienie wodzące z początku układu pod kątem $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (n/m)$. Jako rodzinę linii tnących bierzemy

$$(4.6) \quad \lambda = \frac{1}{m^2 + n^2} [n \operatorname{arc} \operatorname{tg} (y/x) + m \ln (x^2 + y^2)^{1/2}].$$

Są to także spirale logarytmiczne, ortogonalne do poprzednich (rys. 3). Obierając λ, μ za nowe współrzędne na płaszczyźnie otrzymujemy następujące formuły przekształcenia układu współrzędnych:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x &= \exp (m\lambda - n\mu) \cos (n\lambda + m\mu), \\ y &= \exp (m\lambda - n\mu) \sin (n\lambda + m\mu), \end{aligned}$$

co też można zapisać łącznie w postaci

$$(4.8) \quad x + iy = \exp [(m + in) (\lambda + i\mu)]$$

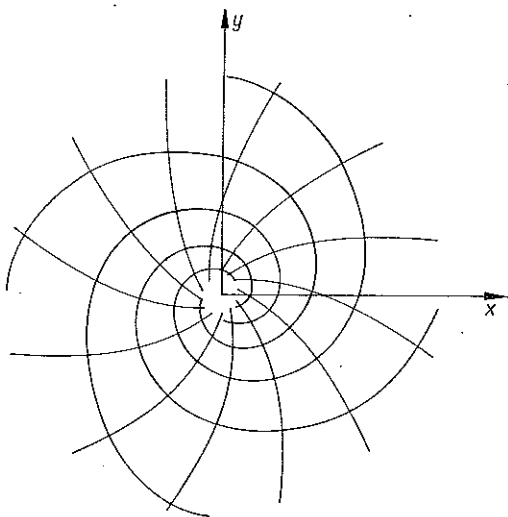
albo też

$$(4.8') \quad z = \exp [(m + in) \zeta],$$

gdzie $z = x + iy$, $\zeta = \lambda + i\mu$.

Wynika stąd od razu, że jacobian przekształcenia współrzędnych

$$J = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 = (m^2 + n^2) \exp (2m\lambda - 2n\mu)$$



Rys. 3

jest różny od zera poza początkiem układu oraz, że

$$ds^2 = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 (d\lambda^2 + d\mu^2);$$

inaczej λ , μ stanowią układ współrzędnych nazywany niekiedy izometrycznym.

Generator X przybiera we współrzędnych tych postać $X \equiv \partial_\lambda$. Są to jak widać współrzędne kanoniczne jego grupy.

Składowe tensora metrycznego są równe

$$(4.9) \quad g_{11} = g_{22} = (m^2 + n^2) \exp 2(m\lambda - n\mu), \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

a symbole Christoffela są w tych współrzędnych równe

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= m, & \Gamma_{22}^2 &= -n, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -n, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = m, & \Gamma_{22}^1 &= -m, & \Gamma_{21}^2 &= n \end{aligned}$$

i jak widać są stałe. Jest to spowodowane tym, że nie tylko linie $\mu = \text{const}$ są trajektoriami grupy generatora X (4.3), lecz także linie $\lambda = \text{const}$ są trajektoriami pewnej grupy podobieństwa, mianowicie są to trajektorie grupy generatora $*X = nX_1 + mX_2$. Co do układu współrzędnych zauważmy też, że w przypadku granicznym, gdy $n = 0$, trajektorie przechodzą na pęk prostych, przechodzących przez początek układu (trajektoria grupy jednokładności; generator X_1) natomiast przy $n = 1$ i $m = 0$ linie tnące przechodzą w rodzinę okręgów współśrodkowych (trajektorie generatora obrotów X_2).

4.2. Powtarzając dosłownie rozważania punktu 3.4 otrzymamy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych, z którego wyznacza się przepływy modelowane na grupie generatora X ,

$$(4.11) \quad \begin{aligned} (c_1 + c_3 + 2m) \hat{q} \hat{v}^1 e^{-2n\mu} + \frac{d}{d\mu} (\hat{q} \hat{v}^2 e^{-2n\mu}) &= 0, \\ e^{-2n\mu} [(c_3 + m) (\hat{v}^1)^2 - m (\hat{v}^2)^2] + \hat{v}^2 \frac{d}{d\mu} (e^{-2n\mu} \hat{v}^1) + c_2 \hat{p} / (m^2 + n^2) \hat{q} &\equiv 0, \\ e^{-2n\mu} [(c_3 + 2m) \hat{v}^1 \hat{v}^2 + n (\hat{v}^1)^2] + \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} (e^{-n\mu} \hat{v}^2)^2 + \left(\frac{d}{d\mu} \hat{p} \right) / (m^2 + n^2) \hat{q} &= 0, \\ (c_2 - \gamma c_1) \hat{v}^1 \hat{p} / \hat{q}^\gamma + v^2 \frac{d}{d\mu} (\hat{p} / \hat{q}^\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Pochodne kowariantne zostały przedstawione w formie rozwiniętej korzystając z (4.10), a stałe związane są warunkiem (3.6), który tym razem ma postać

$$(4.12) \quad 2c_3 + 2m = c_2 - c_1,$$

(ponieważ $C = 2m$). Wprowadzając nowe funkcje poszukiwane

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{U} &= \hat{v}^1 \exp(-n\mu), & \mathcal{V} &= \hat{v}^2 \exp(-n\mu), & \mathcal{R} &= \hat{q} \exp(-n\mu), \\ \mathcal{P} &= \hat{p} \exp(-n\mu) \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań o postaci

$$\begin{aligned}
 & (c_1 + c_3 + 2m) \mathcal{R} \mathcal{U} + \frac{d}{d\mu} (\mathcal{R} V) = 0, \\
 & (c_3 + m) \mathcal{U}^2 - m \mathcal{W}^2 - n \mathcal{U} \mathcal{W} + \mathcal{W} \frac{d}{d\mu} \mathcal{U} + c_2 \mathcal{P} / (m^2 + n^2) \mathcal{R} = 0, \\
 & (c_3 + 2m) \mathcal{U} \mathcal{W} + n \mathcal{U}^2 + \mathcal{W} \frac{d}{d\mu} \mathcal{W} + \left(n \mathcal{P} + \frac{d}{d\mu} \mathcal{P} \right) / (m^2 + n^2) \mathcal{R} = 0, \\
 & [\mathcal{U} (c_2 - \gamma c_1) + \mathcal{W} (1 - \gamma) n] (\mathcal{P} / \mathcal{R}^\gamma) + \mathcal{W} \frac{d}{d\mu} (\mathcal{P} / \mathcal{R}^\gamma) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

W równaniach tych, jak widać, współrzędna μ nie występuje w sposób jawny. Funkcje \mathcal{U} i \mathcal{W} w prosty sposób wiążą się ze składowymi pola prędkości — styczną v_s i normalną v_n do trajektorii grupy. Rzeczywiście, obliczając te składowe otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 v_s &= \sqrt{m^2 + n^2} \exp(m\lambda - n\mu) v^1 = \sqrt{m^2 + n^2} \exp[(c_3 + m)\lambda] \mathcal{U}, \\
 v_n &= \sqrt{m^2 + n^2} \exp(m\lambda - n\mu) v^2 = \sqrt{m^2 + n^2} \exp[(c_3 + m)\lambda] \mathcal{W}.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

4.3. Rozpatrzmy układ (4.14) nadając stałym wartości $c_1 = c_2 = 0$. Wtedy oczywiście będzie także na mocy (4.12) $c_3 + m = 0$ i jak widać w tym przypadku ze wzorów (4.15) składowe v_s i v_n będą stałe wzdłuż trajektorii grupy. Jest to przypadek przepływów zbadanych przez TOLLIENIA, [15], który odkrył je rozpatrując we wstępie cytowanej pracy zagadnienie znalezienia takich ustalonych, potencjalnych i izentropowych przepływów płaskich, w których istniałaby rodzina linii niosących stałe, styczną i normalną do nich, składową prędkości. Z analizy TOLLIENIA wynikało, że do przepływów takich prócz znanych podówczas przepływów osiowo-symetrycznych, opływu naroża i ścianki zakrzywionej (przeptyw Prandtla-Meyera), należą także przepływy, w których prędkość dźwięku a oraz v_s i v_n są stałe wzdłuż rodziny spirali logarytmicznych. Te właśnie przepływy otrzymujemy biorąc dla przepływów modelowanych na grupie generatora (4.3) zaznaczone wartości stałych. Ich równanie ma postać

$$\begin{aligned}
 & m \mathcal{R} \mathcal{U} + \frac{d}{d\mu} (\mathcal{R} \mathcal{W}) = 0, \\
 & m \mathcal{W} + n \mathcal{U} - \dot{\mathcal{U}} = 0, \\
 & m \mathcal{U} \mathcal{W} + n \mathcal{U}^2 + \mathcal{W} \dot{\mathcal{W}} + (n \mathcal{P} + \dot{\mathcal{P}}) / (m^2 + n^2) \mathcal{R} = 0, \\
 & (1 - \gamma) n \mathcal{P} / \mathcal{R}^\gamma + \frac{d}{d\mu} (\mathcal{P} / \mathcal{R}^\gamma) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Drugie z nich wyraża potencjalność przepływu. Istotnie warunek niewirowości $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 0$ po uwzględnieniu związków

$$v_1 = (m^2 + n^2) \exp(m\lambda - n\mu) \mathcal{U}, \quad v_2 = (m^2 + n^2) \exp(m\lambda - n\mu) \mathcal{W}.$$

przyjmie dokładnie postać tego równania. Czwarte równanie daje $\exp[(\gamma-1)n\mu] \times \times \mathcal{R}^\gamma/\mathcal{P} = \text{const}$, a stąd z uwagi na (4.13) i (3.10) $p/\varrho^\gamma = \text{const}$. Przepływ jest więc izentropowy. Zresztą o tym, że warunek $c_1 = c_2 = 0$ gwarantować będzie niewirowość i izentropowość płaskich przepływów, modelowanych na grupie podobieństw, wzmiankowaliśmy w podpunkcie 3.7.

Dalej mamy $a^2 = p/\varrho^\gamma = \mathcal{P}/\mathcal{R}^\gamma$ (a jest prędkością dźwięku) oraz $a^2/(\gamma-1) + (m^2 + n^2)(\mathcal{U}^2 + \mathcal{W}^2)/2 = \text{const}$, co pozwala nadać równaniom (4.16) postać

$$(4.17) \quad a^2(m\dot{\mathcal{U}} - n\dot{\mathcal{W}}) + [a^2 - (m^2 + n^2)\mathcal{W}^2]\dot{\mathcal{W}} - (m^2 + n^2)\mathcal{U}\dot{\mathcal{U}}\mathcal{W} = 0,$$

$$m\dot{\mathcal{W}} + n\dot{\mathcal{U}} - \dot{\mathcal{U}} = 0,$$

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(m^2 + n^2)(\mathcal{U}^2 + \mathcal{W}^2) = \frac{1}{2}q_{\text{max}}^2.$$

Jak wiadomo potencjał dowolnego ustalonego przepływu spełnia równanie

$$(4.18) \quad (v^j v^k - a^2 g^{jk}) \nabla_j \partial_k \varphi = 0$$

lub

$$(4.19) \quad (v^j v^k - a^2 g^{jk}) \partial_j \partial_k \varphi - (v^j v^k - a^2 g^{jk}) \Gamma_{jk}^l \partial_l \varphi = 0.$$

Charakterystyki tego równania wyznaczone są z warunku

$$(4.20) \quad (v^i v^j - a^2 g^{ij}) \partial_i f \partial_j f = 0.$$

W szczególności dla płaskich przepływów naddźwiękowych mamy następujące wyrażenie na kierunki charakterystyczne:

$$(4.20') \quad \frac{dx^1}{dx^2} = \frac{v^1 v^2 \pm g^{1j} a \sqrt{q^2 - a^2}}{(v^2)^2 - g^{11} a^2}.$$

Stąd dla przypadku przepływów Tollmiena będzie

$$(4.21) \quad \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{(m^2 + n^2)\mathcal{U}\mathcal{W} \pm a\sqrt{q^2 - a^2}}{(m^2 + n^2)\mathcal{W}^2 - a^2},$$

co daje $\lambda + \lambda_0 = F(\mu)$. A więc w przypadku tym nie tylko linie prądu [por. początek (3.7)], lecz także i charakterystyki przekształcane są wzajemnie na siebie przez skończone przekształcenia grupy modelującej.

Potencjał dla przepływów Tollmiena będzie postaci

$$(4.22) \quad \varphi = \frac{\exp(m\lambda + n\mu)}{m^2 + n^2} f(\mu),$$

przy czym

$$(4.23) \quad \mathcal{U} = mf, \quad \mathcal{W} = \dot{f} - nf$$

i drugie z równań (4.17) będzie spełnione automatycznie, natomiast pierwsze prowadzi do równania na funkcję $f(\mu)$

$$(4.24) \quad a^2 - (m^2 + n^2) (\dot{f} - nf)^2 \ddot{f} - (m^2 + n^2) f (\dot{f})^2 + n [(m^2 + n^2)^2 f^2 - 2a^2] \dot{f} = 0.$$

Zanotujmy marginesowo, że równanie to można sprowadzić do równania pierwszego rzędu obierając f za zmienną niezależną oraz przyjmując $\dot{f} = F(f)$. Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(4.25) \quad \frac{dF}{df} = \frac{(m^2 + n^2)^2 fF + n [2a^2 - (m^2 + n^2)^2 f^2]}{a^2 - (m^2 + n^2) (F - nf)^2}.$$

Zanim przejdziemy do dalszych uwag zauważmy jeszcze, że nadając stałym takie wartości, żeby było $c_3 + m = 0$, ale $c_1 = c_2 \neq 0$ otrzymalibyśmy przepływ izoenergetyczny też o tej własności, że styczna i normalna składowa prędkości (oraz a) będą w nim stałe na trajektoriach grupy modelującej (spirale $\mu = \text{const}$). Tak więc zadanie, które Tollmien postawił na początku swej pracy, można z powodzeniem formułować otrzymując geometrycznie taką samą odpowiedź dla ogólniejszej klasy przepływów, mianowicie dla przepływów izoenergetycznych.

4.4. Na podkreślenie zasługują dwa ważne fakty, wykryte przez Tollmiena przy analizie badanych przezeń przepływów. Pierwszy fakt dotyczy przebiegu linii prądu przy przekraczaniu linii dźwięku (linia paraboliczna układu), którą jest trajektoria grupy modelującej, wyznaczana przez warunek $a(\mu_0) = [(\gamma - 1)(\gamma + 1)]^{1/2}$. Tollmien stwierdził, że wbrew przypuszczeniom poza przewężeniem rurek prądu nie występuje przy tym żadna inna osobliwość w zachowaniu się przepływu. Drugi fakt polegał na odkryciu, że w obszarze naddźwiękowym powstają przy pewnych warunkach linie graniczne³. Są to także spirale z rodziny trajektorii, na których występują nieskończone przyśpieszenia i gradienty ciśnienia. Zajmiemy się nimi nieco bliżej.

Rozwiązania układu (4.17) można konstruować lokalnie w otoczeniu $\mu = \mu_0$ przy danych w tym punkcie wartościach \mathcal{U}_0 i \mathcal{Q}_0 (czyli w otoczeniu danej spirali), jeżeli da się wyznaczyć z tego układu $\dot{\mathcal{U}}$ i $\dot{\mathcal{Q}}$, co drogą kolejnych różniczkowań pozwoliłoby znaleźć rozwiązanie w postaci szeregu potęg $\mu - \mu_0$. Otóż mamy

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \dot{\mathcal{U}} &= n\mathcal{U} + m\mathcal{Q}, \\ \dot{\mathcal{Q}} &= \frac{(m^2 + n^2) \mathcal{U} \dot{\mathcal{U}} \mathcal{Q} - a^2 (m\mathcal{U} - n\mathcal{Q})}{a^2 - (m^2 + n^2) \mathcal{Q}^2}. \end{aligned}$$

A zatem w obszarze naddźwiękowym na spirali $\mu = \mu_0$ takiej, że

$$(4.27) \quad a^2(\mu_0) = (m^2 + n^2) \mathcal{Q}_0^2$$

nie można stawiać warunku początkowego dla układu (4.17), ponieważ wtedy we wzorze (4.26) znika mianownik, a licznik równy przy tym $n(\mathcal{U}_0^2 + \mathcal{Q}_0^2)$ jest różny od zera. Rola punktu μ_0 będzie więc w takim wypadku analogiczna jak rola charakterystyki w zagadnieniu Cauchy'ego. Zresztą jak wskazuje równanie (4.21), istotnie, trajektoria $\mu = \mu_0$ jest obwiednią jednej rodziny charakterystyk, czyli linii Macha

³ Od Tollmiena wywodzi się też nazwa tych linii (Grenzlínie).

i warunki Cauchy'ego postawione na niej (chodzi tu o rozwiązania w klasie przepływów modelowanych i mowa jest o zagadnieniu Cauchy'ego dopuszczalnym w tej klasie) nie da jednoznacznego rozwiązania na potencjał. Warunek (4.27) oznacza, że składowa prędkości, prostopadła do linii granicznej, jest równa prędkości dźwięku [por. (4.15)].

Pojęcie linii granicznej i z nim związane linii «zwrotu» przepływu i strefy «zabronionej» były swego czasu szeroko dyskutowane. Ich genezy doszukiwano się w zmianie entropii i w załamaniu się potencjalności przepływu na linii granicznej. To jednak wymagałoby, aby linia graniczna była miejscem mocnej nieciągłości przepływu czyli falą uderzeniową. Ale ta alternatywa odpada dlatego, że fala uderzeniowa nie może tworzyć z kierunkiem przepływu kąta Macha, a tak właśnie jest dla linii granicznych.

Późniejsze rozważania dotyczące linii granicznych związane z osobliwością odwzorowania płaszczyzny przepływu na płaszczyznę hodografu prędkości i zbadano szereg ich własności, [7], [12] i [16]. Od początku jednak pojęcie linii granicznych związane z przepływami potencjalnymi i izentropowymi, zaś sama ich geneza została trochę na uboczu. Nie bez pożytku będzie więc wskazanie, że linie graniczne mogą pojawić się także w pewnych warunkach w przepływach niepotencjalnych i nieizentropowych, co także i ich genezę stawia w nowym świetle. Aby to zrobić wróćmy do układu (4.14) i obliczmy wyznacznik macierzy współczynników pochodnych \mathcal{R} , \mathcal{P} , \mathcal{U} , \mathcal{V} . Mamy

$$\begin{vmatrix} \mathcal{U} & 0 & 0 & \mathcal{R} \\ 0 & 0 & \mathcal{V} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{R}(m^2+n^2)} & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma\mathcal{U}}{\mathcal{R}} & \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{P}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathcal{U}^2 \left(\frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{P}} - \frac{\gamma}{(m^2+n^2)\mathcal{R}} \right).$$

W takich punktach, w których wyznacznik ten jest równy zeru, nie można dla układu (4.14) stawiać zagadnienia początkowego. Zachodzi to w dwóch przypadkach:

1. Gdy $\mathcal{U} = 0$, co w uzupełnieniu drugiej części twierdzenia z p. 3.7 wyłącza także możliwość pokrywania się pojedynczej trajektorii z linią prądu.
2. Gdy $(m^2+n^2)\mathcal{U}^2 = \gamma\mathcal{P}/\mathcal{R}$, co po uwzględnieniu wzorów (4.13) i (3.10) oraz (4.12) i (4.15) daje

$$(4.28) \quad v_n^2 = a^2.$$

A zatem także i w tym przypadku na trajektoriach, na których normalna składowa prędkości jest równa prędkości dźwięku⁴, pojawiają się nieskończone przyspiesze-

⁴ Lokalna prędkość dźwięku nie jest w tym przypadku stała wzdłuż trajektorii, przeciwnie niż dla przepływów Tollmiena, ale mimo to i linia paraboliczna i linia graniczna pokrywają się z trajektoriami.

nia i nieskończony gradient ciśnienia. Równość ta wskazuje także na to, że trajektoria taka będzie obwiednią charakterystyk.

Wydaje się, że słusznym będzie przypisać powstanie linii granicznej w tym przypadku nadmiernemu ograniczeniu przepływu od strony geometrycznej. Konfiguracja geometryczna zbyt mocno zwięża go w sensie kinematycznym. Tak samo jest we wszystkich przypadkach znanych przepływów z linią graniczną (I. TAYLOR, F. RIENGLER). Są to zawsze rozwiązania z geometrią narzuconą wewnątrz całego obszaru, a nie tylko na jego brzegu.

Warto w tym miejscu nawiazać do sygnalizowanego we wstępie znaczenia modelowego prostszych klas przepływów. Widać tu, że rzecz ta wymaga dużej ostrożności, że trzeba zdawać sobie sprawę z natury czynionych założeń, które pozwoliły taką prostszą klasę otrzymać. Przy tym, jak się wydaje, wyraźne rozdzielenie postulatów fizycznych i geometrycznych, zasada ta jest tu konsekwentnie stosowana, jest ogromnie ważne. Wracając do genezy linii granicznych przypomnijmy sobie, że na początku tego punktu wyszliśmy od narzucenia określonych warunków geometrycznych na pole przepływu. Z warunków tych już bez żadnych dalszych założeń natury fizycznej doszliśmy do pojęcia linii granicznej (pokrywających się w dodatku z trajektorią grupy modelującej). Dopiero dalsze ograniczenia geometryczne (warunek $c_1 = c_2 = 0$) przywiodło nas do potencjalnych i izentropowych przepływów Tollmiena, w których także pojawiają się linie graniczne. Słusznym chyba będzie dopatrywać się ich przyczyny właśnie w tej geometrii narzuconej na początku. Właśnie z tej geometrii należałoby zrezygnować, a nie z potencjalności i izentropowości, aby przepływ dał się przedłużyć poza linię graniczną.

Powyższe uwagi rzucając pewne światło na samo powstawanie linii granicznych nie poruszały sprawy najbardziej tu istotnej, mianowicie czy linie graniczne mogą występować w przepływach fizycznych. Bowiem jak dotąd ich nie zaobserwowano. W związku z tym podkreślimy jeszcze raz, że linie graniczne w przypadkach omówionych wynikają z narzucenia określonych wymogów geometrycznych co do przepływu w całym obszarze wraz z brzegami, natomiast w realnych warunkach jesteśmy w stanie narzucać wymogi geometryczne tylko na brzegu obszaru. Z tego oczywiście nie wynika, aby realizujący się przy tym przepływ miał wykazywać tę geometrię wewnątrz obszaru.

5. Rozwiązania układu (1.10) modelowane na grupach podobieństw czasoprzestrzeni

5.1. Rozpatrując jednoparametrowe grupy podobieństw czasoprzestrzeni można przenieść opracowany algorytm na przypadek tensorowej postaci równań dynamiki gazów w czasoprzestrzeni, przytoczonej w p. 1.3. Warunki modelowania geometrycznego formułujemy analogicznie do warunków (3.4), żądając, aby

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \xi_{\xi} \rho &= c_1 \rho, & \xi_{\xi} p &= c_2 p, & \xi_{\xi} u^i &= c_3 u^i, \\ \xi_{\xi} w^i &= c_4 w^i, & \xi_{\xi} q &= c_5 q, \end{aligned}$$

gdzie generator ξ wybierany jest spośród generatorów podobieństw czasoprzestrzennych, czyli zachodzi

$$\xi_{\xi} g_{ij} = C g_{ij}.$$

Powtarzając rozumowanie stosowane w p. 3.3 znajdujemy warunki zgodności, wiążące także tylko stałe z (5.1):

$$(5.2) \quad 2c_3 = 2c_4 = C, \quad c_1 = c_2, \quad c_5 = 0.$$

Z warunków tych wynika, że wielkości p/q , q , moduły wektorów u i w oraz entalpia całkowita są stałe wzdłuż trajektorii grupy modelującej. Podobnie jak i poprzednio modelowanie geometryczne (5.1) zapewnia, że oba wektory ślizgają się sztywno wraz z bazą lokalną kanonicznego układu współrzędnych grupy, nie zmieniając kątów swego nachylenia względem jej wektorów. Dodatkowo nie ulega zmianie także ich długość.

5.2. Otrzymując warunki (5.2) nie korzystaliśmy z ostatniego zespołu równań w układzie (1.10). Obliczając z kolei pochodną Liego z wektora czasoprzestrzeni wyrażonego tym właśnie zespołem i korzystając z już otrzymanych warunków otrzymujemy

$$(5.3) \quad C(w_j - u_j) = 2(1 + H) \partial_j \xi_\xi t.$$

Na mocy (1.10) mamy $u_j - w_j = (1 + H) \partial_j t$, co z uwagi na (5.3) prowadzi do związku

$$(5.4) \quad \partial_j (\xi_\xi t + \frac{1}{2} Ct) = 0,$$

skąd

$$2\xi_\xi t + Ct = \text{const.}$$

To zaś po przedstawieniu we współrzędnych kanonicznych grupy prowadzi do wyrażenia

$$(5.5) \quad t = \exp(-Cx^1) F(x^2, x^3, x^4) + \text{const.}$$

Jak widać ostateczny wynik jest taki, że postać t w funkcji współrzędnej kanonicznej x^1 liczonej wzdłuż trajektorii jest definitywnie ustalona. Wobec tego można rozpatrywać przy modelowaniu (5.1) niektóre tylko z podgrup pełnej grupy podobieństw czasoprzestrzeni, te mianowicie, dla których czas zmienia się wzdłuż trajektorii zgodnie z (5.5). Dla przykładu rozpatrzenie w czasoprzestrzeni dwuwymiarowej o generatorach podobieństwa

$$X_1 \equiv x\partial_x + t\partial_t, \quad X_2 \equiv x\partial_t - t\partial_x, \quad X_3 \equiv \partial_x, \quad X_4 \equiv \partial_t$$

podgrup generatora $X \equiv mX_1 + nX_2$ (co pozwoliłoby przenieść rozważania poprzedniego punktu na przypadek jednowymiarowych przepływów nieustalonych) jest niedopuszczalne. Istotnie, przejście od współrzędnych kanonicznych do x , t byłoby dla tego generatora postaci (por. (4.7)).

$$x = \exp(mx^1 - nx^2) \cos(nx^1 + mx^2),$$

$$t = \exp(mx^1 - nx^2) \sin(nx^1 + mx^2)$$

niezgodnej z (5.5), o ile n jest różne od zera.

Można jednak modelować rozwiązania na grupie jednokładności czasoprzestrzeni (generator $X \equiv t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$), co prowadzi do prostszych przypadków tzw. przepływów samopodobnych.

6. Płaskie, ustalone i potencjalne przepływy cieczy nieściśliwej jako przykład przepływów modelowanych na grupach konforemności płaszczyzny

6.1. Ograniczaliśmy się dotychczas do grup podobieństw i izometrii jako podstawy do poszukiwania klas modelowanych. Zaznaczaliśmy w p. 3.2, że rozpatrywanie zupełnie dowolnych generatorów, nie wyróżnionych w strukturze układu równań, nie jest celowe. Ale może się zdarzyć, że narzucenie pewnych dodatkowych założeń fizycznych rzutuje także na wyróżnienie innych grup przekształceń. Jest tak dla płaskich, potencjalnych i nieściśliwych przepływów ustalonych. Mianowicie pokażemy, że w strukturze rządzącego nimi równania Laplace'a wyróżniona jest grupa przekształceń konforemnych płaszczyzny. Zresztą fakt związku przepływów takich z odwzorowaniami konforemnymi jest doskonale znany, ale chcemy go nawiązać od strony czysto geometrycznej, biorąc za punkt wyjścia w wyznaczaniu grupy konforemnej układ (2.20). Zaczniemy od ustalenia pewnych dalszych pojęć geometrycznych, które przydadzą się także w następnym paragrafie.

6.2. Pierwszym z nich jest pojęcie pojemności tensorowej n o wadze s . Przykładowo wyjaśniając sens tego pojęcia weźmy pod uwagę pojemność tensorową dwukrotnie kontrawariantną i jednokrotnie kowariantną wagi s . Reguła transformacyjna składowych takiej wielkości przy zmianie układu współrzędnych jest następująca:

$$(6.1) \quad n_k^{i'j'} = \Delta^{-s} A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^k n_k^{ij}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = \left| \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i} \right|, \quad A_i^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}.$$

W geometrii pojemności oznacza się literami alfabetu gotyckiego. Większość autorów nazywa je także gęstościami tensorowymi, ale termin taki mógłby się mylić w tym kontekście z gęstością płynu.

Dla tejże samej pojemności tensorowej pochodną kowariantną i pochodną Liego liczymy podług wzorów

$$(6.2) \quad \nabla_l n_k^{ij} = \partial_l n_k^{ij} + \Gamma_{lh}^i n_k^{hj} + \Gamma_{lh}^j n_k^{ih} - \Gamma_{lk}^h n_h^{ij} - s \Gamma_l n_k^{ij},$$

gdzie $\Gamma_l = \Gamma_{jl}^j$;

$$(6.2') \quad \xi_\varepsilon n_k^{ij} = \xi^\varepsilon \nabla_l n_k^{ij} - n_k^{ij} \nabla_l \xi^\varepsilon - n_k^{ij} \nabla_l \xi^j + n_k^{ij} \nabla_k \xi^\varepsilon + s n_k^{ij} \nabla_l \xi^\varepsilon$$

Pojemnością jest spotykany dosyć często wyznacznik macierzy tensora metrycznego g . Jest to pojemność wagi $s = 2$. Potęgi g czyli $(g)^{n^*}$ są pojemnościami wagi $2n^*$. Obliczając dla nich pochodną kowariantną otrzymujemy $\nabla_i (g)^{n^*} = \partial_i (g)^{n^*} - 2n^* \Gamma_i (g)^{n^*}$, co po uwzględnieniu zależności $\Gamma_i = \partial_i \ln \sqrt{g}$ daje

$$(6.3) \quad \nabla_i (g)^{n^*} = 0.$$

Z kolei korzystając ze wzoru (6.2') otrzymujemy

$$\xi_\varepsilon (g)^{n^*} = \xi^\varepsilon \nabla_l (g)^{n^*} + 2n^* \Gamma_l (g)^{n^*} \nabla_l \xi^\varepsilon,$$

co po uwzględnieniu (6.3) pozwala napisać

$$(6.4) \quad \mathbb{L}_\xi(g)^{n*} = 2n^*(g)^{n*} \nabla_j \xi^j.$$

Zależność tę wykorzystuje się w równaniach określających (2.20) grupy konforemnej w przestrzeni \mathcal{R}_n nadając im inną postać, do czego właśnie przechodzimy.

Wyrażna postać tego układu równań jest następująca:

$$(6.5) \quad g_{lk} \nabla_l \xi^l + g_{il} \nabla_k \xi^l = \sigma g_{lk}.$$

Mnożąc tensorowo obie strony przez g^{ir} , a następnie ponownie sumując po k i r dostajemy $2\nabla_l \xi^l = n\sigma$, co w połączeniu ze wzorem (6.4) daje $\mathbb{L}_\xi(g)^{n*} = n^* n\sigma (g)^{n*}$ dla generatora spełniającego (6.5) (n jest tu wymiarem przestrzeni). W szczególności biorąc $n^* = 1/n$ oraz $n^* = -1/n$ otrzymujemy $\mathbb{L} g^{1/n} = \sigma g^{1/n}$ i $\mathbb{L}_\xi g^{-1/n} = -\sigma g^{-1/n}$. Warunki te, spełnione dla generatora konforemności, pozwalają wprowadzić pojemności tensorowe

$$(6.6) \quad \mathbb{G}^{ik} = g^{1/n} g^{ik} \quad \text{wagi} \quad 2/n$$

i

$$(6.7) \quad \mathbb{G}_{ik} = g^{-1/n} g_{ik} \quad \text{wagi} \quad 2/n$$

takie, że dla każdego generatora konforemności zachodzi

$$(6.8) \quad \mathbb{L}_\xi \mathbb{G}^{ik} = 0, \quad \mathbb{L}_\xi \mathbb{G}_{ik} = 0.$$

Odwrotnie, każdy generator spełniający którekolwiek z tych równań daje grupę jednoparametrową przekształceń konforemnych. Tak więc grupa konforemna jest grupą inwariantności wprowadzonych pojemności.

6.3. Zauważmy teraz, że prawą stronę równania ciągłości można przekształcić następująco:

$$\nabla_k(\rho v^k) = \partial_k(\rho v^k) + \Gamma_l v^l \rho = \partial_k(\rho v^k) + \rho v^l \partial_l \ln \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k(\rho \sqrt{g} v^k),$$

i nadać mu postać

$$(6.9) \quad \partial_k(\rho \sqrt{g} v^k) = 0.$$

Gwoli ścisłości trzeba dodać, że ta ostatnia postać jest pierwotna w stosunku do tej, od której wyszliśmy i że to ją właśnie otrzymuje się z niezmienniczej całkowitej zasady zachowania masy.

Przy założeniu, że przepływ jest potencjalny $v^l = \partial_l \varphi$ oraz $v^j = g^{jk} \partial_k \varphi$ i nieściśliwy, otrzymujemy

$$(6.10) \quad \nabla_j(\sqrt{g} g^{jk} \partial_k \varphi) = 0.$$

Otóż zauważmy, że dla przepływów płaskich $\sqrt{g} g^{jk}$ nie jest niczym innym jak tylko pojemnością \mathbb{G}^{jk} wagi $s=1$, wyznaczającą grupę konforemną płaszczyzny [por. (6.6) w przypadku $n=2$]. A więc równanie (6.10) można napisać w przypadku tym następująco:

$$(6.11) \quad \partial_k(\mathbb{G}^{kl} \partial_l \varphi) = 0.$$

Wobec tego we współrzędnych kanonicznych dowolnej grupy przekształceń konforemnych płaszczyzny współczynniki tego równania będą niezależne od x^1 , w szczególności rozwiązania o postaci $\varphi = ax^1 + F(x^2)$ (a — stała) będą otrzymywane jako rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych. Co więcej, jak za chwilę zobaczymy, można tak dobrać rodzinę linii tnących, ortogonalnych do trajektorii, że będzie $\mathfrak{G}^{11} = \mathfrak{G}^{22} = \text{const}$, $\mathfrak{G}^{12} = \mathfrak{G}^{21} = 0$, tak że rozwiązania typu $\varphi = ax^1 + F(x^2)$ sprowadzą się wyłącznie do $\varphi = ax^1 + bx^2 + c$ (b, c są to stałe).

6.4. Aby wyznaczyć grupę konforemną płaszczyzny, należy znaleźć jej generatory z równania

$$(6.12) \quad \xi_\xi \sqrt{g} g^{ik} = 0.$$

To równanie ma postać $g^{ik} \Delta_l \xi^l - g^k \Delta_l \xi^i - g^{lk} \Delta_l \xi^k = 0$ i w szczególności we współrzędnych kartezjańskich x, y przyjmuje dobrze znaną postać warunków Cauchy-Riemanna

$$(6.13) \quad \partial_x \xi^1 - \partial_y \xi^2 = 0, \quad \partial_y \xi^1 + \partial_x \xi^2 = 0.$$

Składowe generatora są to więc funkcje harmoniczne sprzężone i mamy

$$(6.14) \quad \xi^1 + i\xi^2 = f(z),$$

gdzie $z = x + iy$, a $f(z)$ jest funkcją analityczną z .

Pokażemy, że z generatorów tych można zbudować pełną grupę konforemną inaczej, że jeśli X i Y są generatorami konforemności, to także $Z = (X, Y)$ jest generatorem konforemności. Otóż niech $X \equiv \xi^k \partial_k$, $Y \equiv \eta^k \partial_k$ i stosownie do tego $\xi^1 + i\xi^2 = f(z)$, $\eta^1 + i\eta^2 = g(z)$; ($f(z)$ oraz $g(z)$ są to funkcje analityczne). Na podstawie (2.7') znajdujemy $Z \equiv \zeta^k \partial_k$, $\zeta^k = \xi^j \partial_j \eta^k - \eta^j \partial_j \xi^k$.

Ale ostatnim związkom można nadać postać

$$\zeta^1 + i\zeta^2 = f(z) \frac{d}{dz} g(z) - g(z) \frac{d}{dz} f(z),$$

z której widać, że $\zeta^1 + i\zeta^2$ jest także funkcją analityczną z , co należało pokazać. Ponieważ jednak rozwiązanie ogólne (6.14) zależy od funkcji dowolnych, wobec tego grupa konforemna płaszczyzny jest grupą nieskończoną $G_\infty^{(e)}$.

Weźmy pod uwagę dowolną jednoparametrową podgrupę grupy $G_\infty^{(e)}$. Przejście od współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych kanonicznych $G^{(e)}$ napiszemy jak następuje:

$$\zeta = \lambda + i\mu = \int \frac{dz}{f(z)} M(z),$$

Istotnie, mamy stąd $f(z) M'(z) = 1$, czyli $\xi^1 \partial_x \lambda + \xi^2 \partial_y \lambda = 1$ oraz $\xi^1 \partial_x \mu + \xi^2 \partial_y \mu = 0$ [por. (2.13)]. Oznaczając przez $N(\zeta)$, $\zeta = \lambda + i\mu$, funkcję odwrotną do $M(z)$ znajdziemy $ds^2 = |N'|^2 (d\lambda^2 + d\mu^2)$, czyli $g_{11} = g_{22} = |N'|^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, co daje $\mathfrak{G}^{11} = \mathfrak{G}^{22} = 1$ i $\mathfrak{G}^{12} = \mathfrak{G}^{21} = 0$. Jak widać we współrzędnych λ, μ skła-

dowe pojemności G^{ij} są stałe. Jest to powodowane tym, że linie tnące są swoją drogą trajektoriami innej grupy konforemnej $+G^{(c)}$ o generatorze $\eta^1 + i\eta^2 = -if(z)$.

6.5. Pokażemy obecnie, że z każdym przepływem o potencjale zespolonym $W(z) = \varphi + i\psi$ (ψ jest funkcją prądu) związana jest grupa konforemna inwariantności kowariantnej dla pola prędkości przepływu. W tym celu wyznaczmy związek potencjału $W(z)$ i funkcji $f(z)$ wyznaczającej tę grupę. Warunek aby generator konforemności dawał grupę ko-inwariantności dla pola prędkości ma postać $\xi_\xi v_i = 0$, to jest zapisuje się następująco:

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \xi^1 \partial_x v_1 + \xi^2 \partial_y v_1 + v_1 \partial_x \xi^1 + v_2 \partial_x \xi^2 &= 0, \\ \xi^1 \partial_x v_2 + \xi^2 \partial_y v_2 + v_1 \partial_y \xi^1 + v_2 \partial_y \xi^2 &= 0, \end{aligned}$$

co też można napisać

$$\frac{d}{dz} \left(f(z) \frac{dW}{dz} \right) = 0,$$

stąd

$$(6.16) \quad f(z) = \frac{dW}{dz} = \text{const} = \alpha + i\beta.$$

Z drugiej strony inwariantność ta oznacza, że we współrzędnych kanonicznych λ, μ mamy $v_k = v_k(\mu)$, co prowadzi do linii prądu o postaci $\lambda + h(\mu) = c$. Wynika z tego, że także i w tym przypadku linie prądu przekształcane są przy skończonych przekształceniach grupy na siebie. Dla $\alpha = 0$ trajektorie pokrywają się z liniami ekwipotencjalnymi, a dla $\beta = 0$ z liniami prądu.

Stwierdzenia te nie stanowią oczywiście żadnego *novum*, jeśli chodzi o samo podejście do zagadnień hydromechaniki, tym niemniej naświetlenie tych spraw z punktu widzenia koncepcji tensorowo-geometrycznych, pogłębiające dobrze znane modelowanie konforemne i ukazujące, że każde rozwiązanie jest tu modelowane wewnątrznie na odpowiedniej grupie konforemnej, może okazać się pożyteczne.

7. Struktura równania płaskich i ustalonych przepływów cieczy lepkiej. Przepływy Oseena i Hamela jako przepływy modelowane na grupie podobieństw płaszczyzny

7.1. Funkcja prądu płaskich, ustalonych przepływów cieczy lepkiej spełnia równanie

$$(7.1) \quad \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, y)} = \nu\Delta\psi,$$

gdzie $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ jest operatorem Laplace'a, a ν współczynnikiem lepkości dynamicznej.

Aby zbadać strukturę geometryczną tego równania, zapisujemy je najpierw w dowolnym układzie współrzędnych k :

$$(7.2) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ij} \partial_i(\Delta\psi) \partial^j \psi = \nu\Delta\psi, \quad i, j = 1, 2,$$

przy czym ε^{ij} jest symbolem Ricciego, czyli pojemnością tensorową skośnie symetryczną wagi $s = 1$, o składowych $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$, a operator Laplace'a ma postać $\Delta\psi = \nabla_i (g^{ik} \partial_k \psi)$. Funkcja prądu wiąże się ze składowymi prędkości za pomocą następującej zależności niezmienniczej:

$$(7.3) \quad v^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ik} \partial_k \psi, \quad i, k = 1, 2.$$

Równanie (7.2) ma postać niezależną od układu współrzędnych z dokładnością do jego orientacji, ponieważ znak ε^{ik} zmienia się na przeciwny, gdy jacobian przekształcenia współrzędnych jest ujemny.

Pisząc to równanie wyraźniej

$$(7.2') \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ij} \partial_i [\nabla_k (g^{kl} \partial_l \psi)] \partial_j \psi = \nu \nabla_r [g^{rs} \partial_s (\nabla_k (g^{kl} \partial_l \psi))],$$

a następnie mnożąc je obustronnie przez g i uwzględniając (6.3) otrzymamy

$$(7.4) \quad \varepsilon^{ij} \nabla_i [\nabla_k (\mathfrak{G}^{kl} \partial_l \psi)] \partial_j \psi = \nu \nabla_r [\mathfrak{G}^{rs} \nabla_s (\nabla_k (\mathfrak{G}^{kl} \partial_l \psi))],$$

gdzie \mathfrak{G}^{kl} oznacza gęstość tensorową, wprowadzoną uprzednio przy badaniu grupy konforemnej płaszczyzny.

7.2. Przyjrząwszy się tej postaci równania (7.1) widzimy, że zmienne niezależne, tj. współrzędne, występują w nim za pośrednictwem pojemności \mathfrak{G}^{ik} oraz za pośrednictwem symboli Christoffela, pojawiających się przy obliczaniu pochodnych kowariantnych. Jak wiemy, pojemność \mathfrak{G}^{ik} związana jest z grupą przekształceń konforemnych $G_\infty^{(c)}$ płaszczyzny i w układzie kanonicznym dowolnej jednoparametrowej grupy przekształceń konforemnych $G^{(c)}$ będziemy mieli $\mathfrak{G}^{11} = \mathfrak{G}^{22} = 1$, $\mathfrak{G}^{12} = \mathfrak{G}^{21} = 0$. Wiemy także, że symbole Christoffela związane są z grupą afiniczną płaszczyzny i że z kolei są one niezależne od współrzędnej x^1 w układzie współrzędnych kanonicznych dowolnej grupy $G^{(a)}$. Zatem maksymalne uproszczenie (co się tyczy postaci funkcyjnych \mathfrak{G}^{ik} i Γ_{jk}^i) dostaniemy we współrzędnych kanonicznych grupy podobieństw $G^{(p)}$, stanowiącej podgrupę obu grup.

Ostatecznie więc biorąc generator (4.3) i układ współrzędnych kanonicznych odpowiadającej mu grupy podobieństw stwierdzamy, że współczynniki równania (7.4) będą stałe, mimo że sam układ współrzędnych jest krzywoliniowy (rys. 3). Pozwala to w szczególności na wyodrębnienie rozwiązań o postaci $\psi = c\lambda + F(\mu)$, gdzie c jest pewną stałą. W postaci niezmienniczej warunek modelujący takie rozwiązania napiszemy:

$$(7.5) \quad \xi_\xi \psi = c,$$

gdzie ξ jest generatorem (4.3).

Innymi słowy, modelujemy tak, żeby funkcja prądu była inwariantem względnym grupy modelującej.

Ostateczne równanie dla przepływów tak modelowanych znajdziemy podstawiając do (7.4) $\psi = c\lambda + F(\mu)$ i wykonując kolejne operacje z tym, że przy obliczaniu pochodnych kowariantnych korzystamy ze wzoru (6.1)₁.

Rachunkowo wygląda to tak: (1) oznaczamy jak zwykle $F^{(n)} = d^n/d\mu^n F(\mu)$ i bierzemy pod uwagę skalar $\psi = c\lambda + F(\mu)$; (2) następnie mamy pojemność $v^i = \mathbb{G}^{ik} \partial_k \psi$ jednokrotnie kontrawariantną wagi $s = 1$ i o składowych $v^1 = c$, $v^2 = F^{(1)}$; (3) z kolei licząc $m = \nabla_k v^k = \partial_k v^k$ otrzymujemy pojemność wagi 1, o składowej $m = F^2$ (4) licząc pochodną kowariantną m dostajemy pojemność jednokrotnie kowariantną $w_l = \nabla_l m = \partial_l m - \Gamma_l m$ wagi 1. Jej składowe wynoszą $w_1 = -2mF^{(2)}$, $w_2 = F^{(3)} + 2nF^{(2)}$, ponieważ $\Gamma_1 = 2m$, $\Gamma_2 = -2n$, [por. (4.10)]; (5) następnie znajdujemy pojemność $h^k = \mathbb{G}^{kl} w_l$ jednokrotnie kontrawariantną wagi 2, o składowych $h^1 = -2mF^{(2)}$, $h^2 = F^{(3)} + 2nF^{(2)}$ i obliczając jej dywergencję $\nabla_s h^s$ otrzymamy $\partial_s h^s - \Gamma_s h^s = F^{(4)} + 4nF^{(3)} + 4(m^2 + n^2)F^{(2)}$. Tym sposobem obliczyliśmy prawą stronę równania (7.4.) Z kolei obliczamy lewą stronę. Znajdujemy

$$\varepsilon^{ij} w_i \partial_j \psi = w_1 \partial_2 \psi - w_2 \partial_1 \psi = -2mF^{(2)} F^{(1)} - (F^{(3)} + 2nF^{(2)}) c.$$

Ostatecznie więc mamy

$$(7.6) \quad bF^{(2)} F^{(1)} - c(F^{(3)} + aF^{(2)}) = \nu [F^{(4)} + 2aF^{(3)} + (a^2 + b^2)F^{(2)}],$$

gdzie przyjęliśmy $a = 2n$, $b = -2m$. Równanie to otrzymał Oseen, [11], uogólniając klasę przepływów odkrytych przed tem przez Hamela [5]. Widzimy, że z samej założonej postaci rozwiązania $\psi = c\lambda + F(\mu)$ wynika, że skończone przekształcenia grupy modelującej przekształcają linie prądu wzajemnie na siebie. Przepływy Hamela otrzymuje się przyjmując $c = 0$. Funkcja prądu będzie wtedy, jak wskazuje (7.5), inwariantem grupy, a ponieważ jest to także funkcja stała na linii prądu, więc w przepływach Hamela obie rodziny krzywych pokrywają się i linie prądu są w nim spiralami logarytmicznymi. W szczególności dla $a = 0$ spirale te przechodzą na pęk prostych, a odpowiednie równanie pozwala znaleźć płaski przepływ Hamela w dyfuzorze. Rozpatrzenie rozwiązań typu $\psi = c\mu + G(\lambda)$ także dopuszczalnych w strukturze równania (7.4) [chodzi bowiem o rozwiązanie będące inwariantem względnym grupy generatora ${}^+X$ (p. 4.1)] prowadzi do równania

$$(7.7) \quad \nu [G^{(4)} + 2bG^{(3)} + (a^2 + b^2)G^{(2)}] = c(G^{(3)} + bG^{(2)}) - aG^{(2)} G^{(1)},$$

które w przypadku szczególnym $c = 0$ i $a = 0$ (ten ostatni warunek oznacza, że grupą modelującą są obroty) przechodzi w równanie przepływów Couetta po okręgach współśrodkowych.

Przepływowi Hamela i Oseena oraz ich przypadkom szczególnym poświęcono sporo uwagi, ponieważ są to ściśle rozwiązania w teorii przepływów lepkich, których znalezienie sprowadza się do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych. Z tej racji często przytacza się te równania i ich wyprowadzenia w literaturze. Wyprowadzenia przytaczane nawiązują do pracy Hamela. Jednakże związek tych rozwiązań ze strukturą geometryczną równania wyjściowego, który wyjaśniłby, dlaczego właściwie takie klasy rozwiązań można wyróżnić, nie był wyraźnie zaznaczony. To właśnie można było wyjaśnić przedstawiając równanie (7.1) w postaci niezmienniczej (7.4). Przez to także i samo wyprowadzenie równań było prostsze i bardziej przejrzyste od zwykle podawanych.

Ale można je wyprowadzić także wychodząc z innej koncepcji niż ta, którą tutaj posłużyliśmy się. Otóż łatwo sprawdzić, że warunek (7.5) (nazwijmy go geometrycznym warunkiem modelowania) w połączeniu z (7.3) i (4.9) prowadzi do dynamicznego warunku modelowania $\xi_{\xi} R = 0$, gdzie $R = ql/v^5$ jest lokalną liczbą Reynoldsa. Zatem dla przepływów tych R jest inwariantem grupy modelującej. Wobec tego skoro wiemy z teorii modelowania hydrodynamicznego, że w przepływach podobnych geometrycznie cieczy lepkich R musi być takie same w odpowiadających sobie punktach, przepływy modelowane wewnątrznie można zbudować żądając, aby R w takich przepływach było inwariantem grupy podobieństw $G^{(v)}$. To było właśnie punktem wyjścia bardzo prostego wyprowadzenia równania Oseena, jakie podał Birkhoff ([1], rozdział 4, § 6). Wydaje się jednak, że podane tu bardziej szczegółowe wyjaśnienie zagadnienia od strony geometrycznej także zasługuje na uwagę.

Literatura cytowana w tekście

- [1] G. BIRKHOFF, *Hydrodynamics — a study in logic, fact and similitude*, New York, 1950.
- [2] J. BONDER, *Sur une forme symétrique spatio-temporelle des équations de la dynamique des gaz et sur quelques-unes de ses applications*, Arch. Mech. Stos., 3/4, 14 (1962), 289-311.
- [3] L. P. EISENHART, *Continuous groups of transformations*, Univ. Press, Princeton, 1953
- [4] S. GOŁĄB, A. JAKUBOWICZ, P. KUCHARCZYK, *Sur la notion du «champ entraîné»*, Matematica, Cluj (w druku).
- [5] G. HAMEL, *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten*, Jahresbericht, d. Deutch. Mat. Ver., 25 (1917), 34-60.
- [6] М. В. Кирпичев, П. К. Конаков, *Математические основы теории подобия*, Москва-Ленинград 1949.
- [7] R. MISES, *Mathematical theory of compressible fluid flow*, New York, 1958.
- [8] Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Москва 1954.
- [9] А. В. Овсянников, *Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений*, ДАН СССР, 3, 118 (1958), 439-442.
- [10] Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности*, ДАН СССР, 3, 125 (1959), 492-495.
- [11] С. W. OSEEN, *Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen*, Arkiv for Mat. Astr. o Fys., 20 (1927), 14, 18.
- [12] F. RINGLEB, *Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung*, ZAMM, 20 (1940), 185-198.
- [13] W. SLEBODZIŃSKI, *Sur les équations de Hamilton*, Bull. Acad. Roy. de Belg., 5, 17 (1931), 834-870.
- [14] W. SLEBODZIŃSKI, *Sur les transformations isomorphe d'une variété affine*, Prace Matematyczno-Fizyczne, 39, 1932, 55-62.
- [15] W. TOLLMIEN, *Zum Übergang von Unterschall- in Überschall-strömungen*, ZAMM, 17, 1937, 117-136.
- [16] H. S. TSIEN, *The limiting line in mixed subsonic and supersonic flow of compressible fluids*, NACA, Techn. Note No 961, 1944.
- [17] K. YANO, *The theory of Lie derivatives and its applications*, Amsterdam 1955.

⁵ Jeśli chodzi o lokalną jednostkę długości to, definiujemy ją jak w podpunkcie 3.8.

Резюме

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ
МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ГРУППАХ ЛИ

В работе дается метод определения классов течений, более простых в геометрическом смысле. Метод основывается на анализе геометрической структуры рассматриваемых уравнений и определении группы преобразований Ли, отличающихся в этой структуре. С этой целью применяются некоторые понятия и теоремы современной дифференциальной геометрии, являющихся естественным развитием тензорного анализа. Они собраны в п. 2, который поэтому играет роль математического введения. Там определяется, между прочим, понятие групп Ли, производной Ли, групп инвариантности полей линейных геометрических объектов и интерпретации условия инвариантности в канонических координатах однопараметрических групп.

Основываясь на этом доказываются в п. 3, что в геометрической структуре уравнений динамики газов отличаются: шестипараметрическая группа изометрии и семипараметрическая группа подобий пространства. Этот факт дал возможность выделить определенные классы течений, связанные, соответственно, с подгруппами приведенных групп условиями (3.2) и (3.4). Эти условия названы условиями геометрического моделирования, так как они уточняют геометрическую конфигурацию течения. При моделировании условием (3.4) течений для групп подобий, существующие в нем постоянные должны удовлетворять зависимостям (3.6) или (3.7). Эти зависимости выражают требование, чтобы не изменялись вдоль траекторий моделирующей группы локальные числа Эйлера и так наз. параметр гомохронности. Исследование соотношений с теорией моделирования течений п. (3.8) — показало, что введенные классы течений являются внутренне моделированными.

Заключительные уравнения течений моделированных на группах подобий и изометрии не включают канонической координаты, считаемой вдоль траекторий моделирующей группы. В случае установившихся течений определение их сводится, таким образом, к решению систем уравнений, заключающих только две независимые переменные. В этом случае также и линии тока обладают тем свойством, что преобразовываются взаимно при конечных преобразованиях моделирующей группы.

Более подробный анализ метода иллюстрируется в п. 4, исследуя плоские и стационарные течения, моделируемые на подобиях плоскости (подгруппа спиральных движений). Эти течения определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В особенности в п. 4.4 показано, что наличие предельных линий в течениях Тальмина связано с геометрическим ограничением течения внутри области.

Применение метода к тензорной форме уравнений динамики газов в пространстве-времени предложенной Ю. Бондером приводится в п. 5. В этом случае можно выделить решение только на таких группах подобий пространства-времени, которые удовлетворяют условию (5.5).

В пункте 6 ограничиваясь плоскими, установившимися и несжимаемыми потенциальными течениями показано, что они внутренне моделированы на соответствующих группах конформных преобразований.

Наконец, применяя моделирование на группе подобий плоскости плоского стационарного течения вязкой жидкости в п. 7 выводятся уравнения течений Озена и Гамеля, доказывая связь точных решений, полученных этими авторами, с геометрической структурой исходного уравнения.

Summary

A METHOD FOR DETERMINING CERTAIN FLOWS BY MODELLING
ON LIE TRANSFORMATION GROUPS

The method described concerns a class of geometrically simple flows. It is based on an analysis of the geometrical structure of the equations considered and the research of Lie transformation groups discerned by this structure. For this purpose are applied certain notions and theorems of more recent branches of differential geometry constituting a natural development of the tensor analysis. They are explained in Sec. 2 which, therefore, plays the role of a mathematical introduction. Among other things it contains the definition of Lie groups, Lie derivative, invariance groups of linear geometric objects and interpretation of the invariance condition in canonical coordinates of one-parameter groups.

On this basis it is proved in Sec. 3 that in the geometric structure of the equations of gas dynamics the six-parameter isometry group and seven parameter space similarity group play a special role. This fact enables us to select definite classes of flow connected with sub-groups of the above groups by the conditions (3.2) and (3.4), respectively, called of conditions of geometric modelling because they determine the geometric flow pattern. If the condition (3.4) is used to model flows on similarity groups, the constants appearing in it must satisfy the relations (3.6) or (3.7) which may be interpreted as a requirement that the local Euler number and the so called simultaneity parameter is invariant along trajectories of the modelling group. An investigation of the connexions with the theory of modelling of flows (Sec. 3.8) shows that the flow classes introduced are modelled intrinsically.

Final equations of flows modelled on similarity and isometry groups do not contain the canonical coordinate along the trajectory of the modelling group. In the steady-state case their determination reduces therefore to the solution of sets of equations containing only two independent variables.

In this case the streamlines have also the property of mutual transformation with finite transformations of the modelling group.

The method is illustrated in greater detail in Sec. 4 by investigating plane and stationary flows modelled on similarities of the plane (the sub-group of spiral motions). These flows are determined from a set of ordinary differential equations. In particular it is shown in Sec. 4.4 that the appearance of limiting lines in the Tollmien flow is connected with a geometric limitation of the flow inside a region.

Section 5 is devoted to the application of the method to the equations of gas dynamics in time-space in a tensor form given by J. Bonder. In this case we can only distinguish solutions on such time-space similarity groups that satisfy the condition (5.4).

In Section 6, confining ourselves to plane, steady state and incompressible potential flows it is shown that they are intrinsically modelled on suitable groups of conformal transformations.

Finally, using the modelling on a group of similarities of plane steady-state flow of a viscous liquid the equations of Oseen and Hamel flows are derived in Sec. 7, showing a relation between the exact solutions obtained by these authors and the geometrical structure of considered equation.

ZAKŁAD MECHANIKI CIECZY I GAZÓW
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 grudnia 1962 r.