

O TAK ZWANEJ APROKSYMACJI JEDNOKROTNIE OPTYMALNEJ I NIEKTÓRYCH JEJ ZASTOSOWANIACH W MECHANICE

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi o typach aproksymacji

Aproksymowanie funkcji, określonych w sposób niedogodny do zastosowań, przez funkcje prostszego typu, występuje często we wszystkich niemal gałęziach zastosowań matematyki. Przyjmuje się przy tym różne kryteria aproksymacji w zależności od problemu i przewidywanych zastosowań, a także od koniecznego wkładu pracy rachunkowej przy określaniu funkcji aproksymującej. Szczególnie często stawia się warunek minimum wartości bezwzględnej różnicy funkcji aproksymującej i funkcji aproksymowanej w pewnym określonym przedziale (minimum odległości dwóch funkcji); aproksymację tego typu zwiemy aproksymacją optymalną lub najlepszą (Czebyszewa), przy czym sama nazwa wskazuje na znaczenie, jakie się przywiązuje do tak sformułowanego kryterium.

Sformułowanie problemu aproksymacji optymalnej liczy już ponad sto lat, [3], i poświęcono szereg monografii lub rozdziałów zarówno teorii takiej aproksymacji (N. I. ACHIEZER, [1], D. JACKSON, [8], A. F. TIMAN, [16]), jak i metodom obliczeniowym (E. JA. REMIEZ, [15], I. S. BIEREZIN, N. P. ŻIDKOW, [2]). Ograniczono się przy tym z reguły do funkcji jednej zmiennej. W ostatnich latach poświęcono wiele uwagi zwłaszcza przybliżonej aproksymacji optymalnej (W. WALTER, [17], H. WERNER, [18], W. WETTERLING, [19]).

Aproksymacja Czebyszewa, oprócz zasadniczej zalety zredukowania do minimum błędów przybliżenia w określonym przedziale, wykazuje jednak — z punktu widzenia praktycznego — kilka wad. Wymienimy następujące:

1) Wartości funkcji na brzegach przedziału posiadają z reguły pewną ważną interpretację fizyczną, a czasem są określone warunkami brzegowymi. Z punktu widzenia zastosowań ważne jest zachowanie ścisłej wartości funkcji na brzegach przedziału, czasem nawet zależy nam na zgodności pochodnych, co zapewnia zwiększoną dokładność w pewnym otoczeniu punktów brzegowych. Tymczasem aproksymacja Czebyszewa nie tylko nie zapewnia zgodności wartości funkcji przybliżającej i przybliżanej na brzegach przedziału, lecz przeciwnie, na brzegach tych błęd aproksymacji jest największy.

2) Czasem wymagana jest możliwość pewnej ekstrapolacji poza rozpatrywany przedział; wtedy błąd aproksymacji Czebyszewa jest z reguły większy niż przy innych typach aproksymacji.

3) Dobranie współczynników w wielomianie (uogólnionym wielomianie) Czebyszewa przedstawia na ogół trudny problem, którego rozwiązanie (na przykład

metodą iteracji) wymaga dużego wkładu pracy. W ostatnich latach co prawda poświęcono wiele uwagi zastosowaniu do tego celu maszyn matematycznych (por. np. H. WERNER, [18]; prace w tym zakresie prowadzone są również w ośrodku dreźnieńskim), jednak nie wszystkie trudności obliczeniowe dają się na tej drodze wyeliminować.

4) Jeżeli funkcja aproksymowana zawiera jeden lub więcej parametrów, to dobór wielomianu aproksymującego ulega znacznej komplikacji i zazwyczaj nie udaje się znaleźć wzoru ogólnego, przedstawiającego współczynniki tego wielomianu jako funkcji parametrów. Praktycznie ogranicza to stosowalność aproksymacji Czebyszewa do funkcji, w których nie występują parametry.

Łatwo podać przykład aproksymacji, która nie posiada żadnej z wymienionych tu wad. Mamy na myśli aproksymację na drodze tzw. interpolacji brzegowej Hermite'a, która zakłada na brzegach rozpatrywanego przedziału zgodność wartości funkcji aproksymującej i aproksymowanej i zgodność kilku pierwszych pochodnych tych funkcji. Istotnie, wtedy w otoczeniu obu brzegów przedziału uzyskujemy z reguły dużą dokładność przybliżenia (co może być bardzo cenne z uwagi na interpretację fizyczną), a także możliwa jest pewna ekstrapolacja. Dobranie współczynników wielomianu aproksymującego jest bardzo łatwe — gotowe wzory na współczynniki (przy dowolnej liczbie warunków zgodności na jednym brzegu przedziału, a nie większej od czterech na drugim brzegu) podaje np. praca [21]. Wreszcie wprowadzenie jednego lub kilku parametrów nie przedstawia najmniejszego problemu; jeżeli określimy wartości pochodnych na brzegu przedziału jako funkcje tych parametrów, to wspomniane wzory określają wprost współczynniki interpolacyjne w ich funkcji. Posługiwanie się aproksymacją tego typu jest szczególnie dogodnie jako następstwo stosowania (zazwyczaj dwukrotnego) metody małego parametru lub metody szeregów potęgowych: rozwinięcia potęgowe na brzegach przedziału określają wartości kolejnych pochodnych poszukiwanej funkcji i «zeszycie» tych rozwiązań wielomianem interpolacyjnym Hermite'a nie następuje trudności. Aproksymacje tego typu były stosowane np. w pracach [13], [20] i [21].

Niestety, w ogólnym przypadku ciąg wielomianów tego typu nie jest zbieżny do aproksymowanej funkcji, a dokładność przybliżenia bywa często niedostateczna (odległość funkcji zbyt duża). Celem obecnej pracy jest zaproponowanie pewnego pośredniego typu aproksymacji, która wprawdzie nie wykazywałaby w całości zalet żadnej z obu wspomnianych metod, ale redukowałaby w znacznym stopniu ich wady. Wydaje się, że metoda ta jako dość prosta, a o dostatecznie dużej dla większości zastosowań dokładności, mogłaby znaleźć szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej. Technika obliczeniowa łączy się przy tym z szacowaniem, a właściwie efektywnym określeniem błędu, co również może być uznane za jej zaletę.

2. Aproksymacja jednokrotnie optymalna

Będziemy się zasadniczo zajmowali aproksymacją funkcji ciągłej w przedziale $a \leq x \leq b$ przez wielomian określonego stopnia $n - 1$, jakkolwiek uogólnienie na układy innych funkcji nie nastęczyłoby prawdopodobnie zasadniczych trudności. Na funkcję przybliżającą nałożymy następujące warunki: k -krotna zgodność

w punkcie $x = a$ (wraz z pochodną rzędu $k - 1$) oraz $(n - k - 1)$ -krotna zgodność w punkcie $x = b$, gdzie $k < n - 1$ jest pewną liczbą naturalną. O liczbie k na razie ponadto nic nie zakładamy; później podamy pewne wskazówki odnośnie najkorzystniejszego doboru tej liczby. Wymienione dotychczas warunki odpowiadają «interpolacji brzegowej» Hermite'a. Ponieważ jednak wielomian stopnia $n - 1$ posiada n współczynników, które należy określić, więc przy narzuconych warunkach pozostaje jeszcze jeden «swobodny» parametr; dobierzemy go tak, by odległość funkcji aproksymującej i aproksymowanej była możliwie najmniejsza. Ten ostatni warunek jest charakterystyczny dla aproksymacji optymalnej, stąd proponowana nazwa «aproksymacja jednokrotnie optymalna». Takie ujęcie pozwoli na znaczne zazwyczaj zmniejszenie błędów interpolacji brzegowej Hermite'a, przy zachowaniu zasadniczych jej zalet. Oczywiście, błąd aproksymacji pozostanie większy, niż w przypadku aproksymacji Czebyszewa, jednak — jak wspomnieliśmy — z reguły nie tylko kres górny tego błędu decyduje o wartości aproksymacji.

Dowiedzimy teraz istnienia i jednoznaczności tak określonego wielomianu aproksymacyjnego. W tym celu napiszemy najpierw wielomian stopnia $n - 2$, spełniający tylko narzucone warunki Hermite'a w punktach a i b :

$$(2.1) \quad P_H = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + a_1(x-a)^k + \\ + a_2(x-a)^{k+1} + \dots + a_{n-k-1}(x-a)^{n-2}.$$

Współczynniki a_i ($i = 1, 2, \dots, n - k - 1$) można obliczyć z warunków w punkcie $x = b$; odpowiednie wzory dla $n - k - 1 = 2, 3$ i 4 można znaleźć w pracy [21]. Żądanego wielomianu będziemy teraz poszukiwali pośród wielomianów typu

$$(2.2) \quad P = P_H + \beta (x-a)^k (x-b)^{n-k-1},$$

bowiem wielomian ten, stopnia $n - 1$, wykazuje wymagany stopień zgodności na brzegach przedziału i posiada «swobodny» parametr β . Zauważymy najpierw, że pochodna cząstkowa

$$(2.3) \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = (x-a)^k (x-b)^{n-k-1}$$

posiada wewnątrz całego przedziału $a < x < b$ stały znak, jest mianowicie dodatnia przy parzystej wartości $n - k - 1$ a ujemna przy nieparzystej. Poszukiwany wielomian określimy z warunku

$$(2.4) \quad \max_{a \leq x \leq b} [f(x) - P(x)] = - \min_{a \leq x \leq b} [f(x) - P(x)].$$

Wykażemy, że określony tym warunkiem wielomian istnieje, jest określony jednoznacznie i spełnia żądanie minimalnej odległości obu funkcji.

Przypuśćmy, dla ustalenia uwagi, że pochodna $\partial P / \partial \beta$, (2.3), jest dodatnia w całym przedziale $a < x < b$. Dobierając dostatecznie dużą wartość β możemy wtedy uzyskać to, że wewnątrz całego przedziału $a < x < b$ funkcja $f(x) - P(x) = f(x) - P_H(x) - \beta (x-a)^k (x-b)^{n-k-1}$ przybierze wartości ujemne, a przy

· dostatecznie małych β (ujemnych, dużych co do wartości bezwzględnej) — wartości dodatnie. Można więc zawsze dobrać $\beta = \beta^*$ tak, by warunek (2.4) był spełniony. Otrzymujemy wtedy minimum odległości funkcji $f(x)$ i $P(x)$. Oznaczmy odpowiednie punkty x , w których funkcja $f(x) - P(x)$ osiąga kres górny i dolny, przez x_1 i x_2 . Istotnie, dla $\beta > \beta^*$ kres dolny zmaleje (zwiększy się co do wartości bezwzględnej), więc odległość między funkcjami rośnie; dla $\beta < \beta^*$ kres górny rośnie, co również powoduje wzrost odległości. Tym samym dowiedliśmy również jednoznaczności poszukiwanego wielomianu.

Osobnym problemem — bardzo ważnym z punktu widzenia teoretycznego, a posiadającym również pewne znaczenie praktyczne — jest zbieżność ciągu tak zbudowanych wielomianów (przy liczbie k uzależnionej w pewien sposób od n) do funkcji aproksymowanej. W przeciwieństwie do aproksymacji Czebyszewa (por. np. J. ŁUKASZEWICZ i M. WARMUS, [9]) ciągłość funkcji aproksymowanej nie jest tu warunkiem wystarczającym. Zagadnieniu temu nie będziemy poświęcali specjalnej uwagi, w każdym razie zbieżność ta jest w sposób istotny zależna od promieni zbieżności rozwinięcia funkcji aproksymowanej w szeregi potęgowe o środkach w punktach a i b .

3. Technika obliczeniowa

Praktycznie biorąc określenie β^* możliwe jest jedynie na drodze iteracji (np. reguły fałsi), przy czym nie trzeba koniecznie przedstawiać funkcji aproksymującej w postaci (2.2). Można napisać wielomian w postaci «rozwinętej» i pozostawić dowolny parametr po uwzględnieniu założonych warunków Hermite'a. Na przykład można żądać k -krotnej zgodności w punkcie $x = a$ oraz $(n - k)$ -krotnej w punkcie $x = b$ i zastosować gotowe wzory z pracy [21], przy czym jednak pochodna rzędu $(n - k - 1)$ w punkcie $x = b$ pozostaje jako parametr do wyznaczenia. Iteracja jest prosta i szybka dzięki temu, że — w przeciwieństwie do aproksymacji Czebyszewa — poszukujemy wartości tylko jednego parametru.

Zastosowanie reguły fałsi wygląda tu następująco: przypuśćmy, że β jest parametrem, którego wartość chcemy wyznaczyć z warunku (2.4); nie musi to być koniecznie parametr występujący we wzorze (2.2). Niech dla $\beta = \beta_1$ kres górny funkcji $f(x) - P(x)$ wynosi A , kres dolny ($-B$), natomiast dla $\beta = \beta_2$ kres górny wynosi C , kres dolny ($-D$). Przeprowadzamy dwie linie proste

$$(3.1) \quad \frac{M - A}{C - A} = \frac{\beta - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}, \quad \frac{m + B}{-D + B} = \frac{\beta - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1},$$

gdzie M oznacza kres górny, m kres dolny. Z warunku $M = -m$ określamy przybliżoną wartość β^* , mianowicie

$$(3.2) \quad \beta^* \approx \beta_1 + \frac{A - B}{A - B - C + D} (\beta_2 - \beta_1),$$

oraz odpowiednią wspólną wartość kresów

$$(3.3) \quad M \approx -m \approx \frac{AD - BC}{A - B - C + D}.$$

Ponieważ określona wzorem (3.2) wartość parametru β^* jest tylko przybliżona, więc określone w sposób ścisły kresy M i m [a nie wzorem (3.3)] nie są na ogół równe co do wartości bezwzględnej i uzyskany w ten sposób wynik służy tylko jako następne przybliżenie.

Dla zastosowania wzorów (3.2) i (3.3) konieczna jest umiejętność określania kresów górnych i dolnych funkcji. Jeżeli $M > 0$ oraz $m < 0$, to są nimi maksimum i minimum lokalne wewnątrz przedziału $a < x < b$. Pewne wzory, pozwalające liczbowo określić ekstremum funkcji przy znajomości jej wartości w kilku punktach, wyprowadzimy w następnym rozdziale.

Przypomnimy jeszcze pewne uwagi, dotyczące doboru liczby warunków zgodności na obu brzegach przedziału przy budowaniu wielomianu P_H , zamieszczone w pracy [21]. W przypadku parzystej łącznej liczby warunków brzegowych $n - 1$ można przyjąć $k = n - 1/2$, czyli równy rząd zgodności na obu brzegach. Okazuje się jednak, że takie przyjęcie nie zawsze jest najkorzystniejsze (zapewnia najmniejsze błędy aproksymacji). Jeżeli stopień zbieżności szeregów potęgowych o środkach w punkcie $x = a$ i $x = b$ jest różny (co można ocenić znając kilka kolejnych pochodnych w tych punktach), to korzystniej jest przyjmować większą liczbę warunków zgodności w punkcie, w którym szereg potęgowy jest szybciej zbieżny niż w punkcie pozostałym (choć na pierwszy rzut oka można by sądzić przeciwnie). Kwestię tę zilustrujemy później na przykładach.

4. Określanie ekstremów funkcji na drodze numerycznej

Wyprowadzimy teraz pewne ogólne wzory, określające ekstremum funkcji na drodze numerycznej. Dadzą się one zastosować wtedy, gdy funkcja $f(x)$ posiada odpowiednią ilość ciągłych pochodnych wewnątrz przedziału $a < x < b$ (co najmniej dwie). W rozpatrywanym przez nas obecnie przypadku, gdy chcemy dokonać aproksymacji funkcji $f(x)$, zazwyczaj mamy do dyspozycji tylko jej wartości w pewnej ilości punktów x_i , bądź też funkcja ta dana jest wzorami analitycznymi na tyle skomplikowanymi, że metody analityczne określania ekstremów nie są przydatne.

Przybliżone wzory na pochodne funkcji, której wartości są dane w węzłach o równych odstępach można znaleźć w wielu monografiach (W. E. MILNE, [12], I. S. BIERZIN, N. P. ŻIDKOW, [2] i B. P. DEMIDOWICZ, I. A. MARON, [4]). Wyprowadzenie ich polega na zastosowaniu wielomianu Lagrange'a. Nas interesuje znalezienie punktu, w którym pierwsza pochodna równa jest zero, oraz wartości funkcji w tym punkcie. Najpierw wyrazimy tę wartość przez wartość i pochodne funkcji w pewnym obranym węźle, a następnie uzależnimy ją od różnic skończonych, czyli od wartości funkcji w kilku węzłach.

Przypuśćmy, że funkcję $f(x)$, której ekstremum chcemy znaleźć, można w pewnym punkcie (z uwagi na możliwość przesuwania układu osi można będzie bez ograniczenia ogólności przyjmować $x = 0$) rozwinąć na szereg potęgowy o promieniu zbieżności obejmującym poszukiwane ekstremum:

$$(4.1) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots$$

W dalszym ciągu wartości funkcji i pochodnych w punkcie $x = 0$ będziemy oznaczali przez f, f', f'', \dots bez wskaźników. Pochodna $f'(x)$ określona jest więc szeregiem

$$(4.2) \quad f'(x) = f' + f''x + \frac{1}{2}f'''x^2 + \frac{1}{6}f^{IV}x^3 + \dots$$

Dokonyamy teraz odwrócenia szeregu (4.2). Oznaczmy

$$(4.3) \quad u = f'(x) - f' = f''x + \frac{1}{2}f'''x^2 + \frac{1}{6}f^{IV}x^3 + \dots,$$

i przyjmijmy odwrócenie w postaci

$$(4.4) \quad x = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots$$

Podstawiając (4.4) do (4.3) przez podniesienie tego szeregu do odpowiedniej potęgi, [22], oraz korzystając z metody równych współczynników obliczamy a_k i ostatecznie

$$(4.5) \quad x = \frac{1}{f''}u - \frac{f'''}{2f''^3}u^2 + \left(\frac{f''''}{2f''^5} - \frac{f^{IV}}{6f''^4} \right)u^3 - \dots$$

Zbieżność tego szeregu zależy w sposób istotny od drugiej pochodnej f'' i pogarsza się ze zmniejszaniem się wartości bezwzględnej tej pochodnej. Zazwyczaj jednak w pobliżu ekstremum pochodna ta jest dostatecznie duża co do wartości bezwzględnej.

Oznaczmy ten punkt x , w którym wystąpi ekstremum, przez \tilde{x} . W punkcie tym mamy $f'(\tilde{x}) = 0$, zatem $u = -f'$ oraz

$$(4.6) \quad \tilde{x} = -\frac{f'}{f''} - \frac{f'''}{2f''^3}f'^2 - \left(\frac{f''''}{2f''^5} - \frac{f^{IV}}{6f''^4} \right)f'^3 - \dots,$$

a po podstawieniu do (4.1) poszukiwaną wartość ekstremalną $f(x) = f_m$ określimy wzorem

$$(4.7) \quad f_m = f - \frac{1}{2f''}f'^2 - \frac{f'''}{6f''^3}f'^3 - \left(\frac{f''''}{8f''^5} - \frac{f^{IV}}{24f''^4} \right)f'^4 - \dots$$

By korzystać z tego wzoru, praktycznie biorąc żadne przesuwanie początku układu nie jest potrzebne. Wystąpić ono musi natomiast w przypadku wzoru (4.6).

Stopień zbieżności uzyskanego szeregu zilustrujemy następującym przykładem. Znajdziemy maksimum funkcji $f(x) = \sin x$, przyjmując za znane wartości samej funkcji i jej pochodnych w punkcie $x = \arccos 0,1 = 84^\circ 15' 39''$. Mamy tu $f = 0,994\,988$, $f' = 0,1$, $f'' = -0,994\,988$, $f''' = -0,1$ itd. Rachunki numeryczne wyglądają następująco:

$$\begin{array}{r} f_m = 0,994\,988 \\ + 0,005\,025 \\ \hline 1,000\,013 \\ - 0,000\,017 \\ \hline 0,999\,996 \\ + 0,000\,004 \\ \hline 1,000\,000, \end{array}$$

zatem cztery wyrazy szeregu zapewniają dokładność sześciu miejsc po przecinku. Przesunięcie «punktu wyjściowego» od punktu \tilde{x} , w którym występuje ekstremum, pogarsza oczywiście zbieżność szeregu; gdybyśmy przyjęli za znane wartości funkcji i pochodnych w punkcie $x = 60^\circ$, to cztery wyrazy szeregu (4.7) dałyby wartość $f_m = 1,00235$, obarczoną błędem ponad 0,2%, jednak i tego rzędu błąd można czasem uznać za pomijalny.

Wzoru (4.7) zazwyczaj nie da się bezpośrednio stosować w interesującym nas przypadku aproksymacji jednokrotnie optymalnej, ponieważ punkty brzegowe $x = a$ i $x = b$ leżą zazwyczaj zbyt daleko od poszukiwanych ekstremów, a w innych punktach pochodne z reguły nie są znane. Wyrazimy teraz pochodne te przez różnice skończone, dzięki czemu do znalezienia ekstremum wystarczy znajomość wartości funkcji w pewnej ilości równomiernie rozłożonych punktów (wpływ pewnej nierównomierności jest tu nawet często pomijalny).

Wzory określające pochodne funkcji za pomocą różnic skończonych, można znaleźć w różnych monografiach, jednak w najdogodniejszej formie podaje je Sz. E. MIKIELADZE, [11]. Na stronie 276 podano tam wyrażenia pochodnych rzędu 1, 2, ..., 10 przez różnice do jedenastej lub dwunastej włącznie. Mamy mianowicie

$$(4.8) \quad \begin{aligned} hf' &= \mu\delta f - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f + \frac{1}{30}\mu\delta^5 f - \dots, \\ h^2 f'' &= \delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f + \dots, \\ h^3 f''' &= \mu\delta^3 f - \frac{1}{4}\mu\delta^5 f + \dots, \\ h^4 f^{IV} &= \delta^4 f - \dots, \end{aligned}$$

gdzie δf , $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, ... oznaczają kolejne różnice funkcji (nieparzyste obliczane wewnątrz węzłów, parzyste — w węzłach), μ oznacza operator średniej arytmetycznej, a mianowicie

$$(4.9) \quad \mu\delta f = \frac{\delta f_{\frac{1}{2}} + \delta f_{-\frac{1}{2}}}{2},$$

natomiast h — skok tablicy (odstęp między węzłami); wielkość tego skoku nie odgrywa tu roli o tyle, że po podstawieniu do (4.7) h ulega uproszczeniu.

Podstawienie (4.8) do (4.7) daje poszukiwany wzór ogólny, wyrażający ekstremalną wartość funkcji f_m przez jej różnice skończone, czyli przez wartości w równomiernie rozłożonych węzłach:

$$(4.10) \quad f_m = f - \frac{\left(\mu\delta f - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f + \dots\right)^2 (\mu\delta^3 f - \dots) \left(\mu\delta f - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f + \dots\right)^3}{2\left(\delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f + \dots\right) 6\left(\delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f + \dots\right)^3} - \frac{\left[3(\mu\delta^3 f - \dots)^2 - \left(\delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f + \dots\right)(\delta^4 f + \dots)\right] \left(\mu\delta f - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f + \dots\right)^4}{24\left(\delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f + \dots\right)^5} - \dots$$

Szczególnie prosty wzór otrzymamy aproksymując funkcję w otoczeniu ekstremum przez parabolę drugiego stopnia. Do (4.10) podstawimy $\delta^3 f = \delta^4 f = \dots = 0$ i otrzymamy wzór w postaci zamkniętej

$$(4.11) \quad f_m \approx f - \frac{(\mu\delta f)^2}{2\delta^2 f} = f_0 - \frac{(f_1 - f_1)^2}{8(f_{-1} - 2f_0 + f_{-1})},$$

gdzie f_{-1} , f_0 i f_1 oznaczają wartości funkcji w trzech sąsiednich węzłach; węzeł środkowy powinien być tak dobrany, by leżał najbliżej ekstremum, co zapewnia możliwie mały błąd przybliżenia.

Aproksymując funkcję parabolą wyższego stopnia otrzymujemy wzory końcowe już tylko w postaci szeregu. Tak np. przy pięciu węzłach interpolacji, umożliwiając obliczenie różnic aż do czwartej włącznie, czyli przy zastąpieniu funkcji wielomianem czwartego stopnia, otrzymujemy

$$(4.12) \quad f_m \approx f - \frac{\left(\mu\delta f - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f\right)^2}{2\left(\delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f\right)} - \frac{\mu\delta^3 f\left(\mu\delta f - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f\right)^3}{6\left(\delta^2 f - \frac{1}{12}\delta^4 f\right)^3} - \dots,$$

czyli, po wyrażeniu różnic przez wartości funkcji, które oznaczymy przez f_{-2} , f_{-1} , f_0 , f_1 i f_2 ,

$$(4.13) \quad f_m \approx f_0 - \frac{(-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2})^2}{24(-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2})} - \frac{(f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2})(-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2})^3}{12(-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2})^3} - \dots$$

Wzór (4.11) jest czasem zbyt mało dokładny, a wzór (4.12) lub (4.13) wymaga znajomości wartości funkcji aż w pięciu punktach. Często dogodnie jest posłużyć się parabolą trzeciego stopnia, którą można przeprowadzić przez cztery punkty. By uzyskać odpowiedni wzór należy za «punkt wyjścia» obrać środek jednego z przedziałów, co przy parzystej ilości węzłów zapewnia symetrię wzoru. Wartości funkcji $f(x)$ w czterech równo rozłożonych punktach oznaczymy teraz przez $f_{-\frac{3}{2}}$, $f_{-\frac{1}{2}}$, $f_{\frac{1}{2}}$ i $f_{\frac{3}{2}}$. Tym razem należy wyrazić przez różnice skończone wartości funkcji i jej pochodnych nie w węzle, lecz w środku przedziału. Zastosujemy więc wzory (D. R. HARTREE, [7], s. 62 i 127, L. FOX, [5], s. 11)

$$(4.14) \quad \begin{aligned} f_0 &= \mu f - \frac{1}{8}\mu\delta^2 f + \frac{3}{128}\mu\delta^4 f - \dots, \\ hf'_0 &= \delta f - \frac{1}{24}\delta^3 f + \frac{3}{640}\delta^5 f - \dots, \\ h^2 f''_0 &= \mu\delta^2 f - \frac{5}{24}\mu\delta^4 f + \dots, \\ h^3 f'''_0 &= \delta^3 f - \dots, \\ h^4 f^{IV}_0 &= \mu\delta^4 f - \dots, \end{aligned}$$

które można wyprowadzić na drodze formalnej przez pomnożenie (4.8) przez «operator identyczności» $\mu \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2\right)^{-1/2}$. Różnice nieparzyste są tu liczone wewnątrz środkowego przedziału, natomiast operator μ ma znaczenie analogiczne do (4.9). Wobec tego, po podstawieniu do (4.7),

$$(4.15) \quad f_m = \left(\mu f - \frac{1}{8} \mu \delta^2 f + \frac{3}{128} \mu \delta^4 f - \dots \right) \frac{\left(\delta f - \frac{1}{24} \delta^3 f + \dots \right)^2}{2 \left(\mu \delta^2 f - \frac{5}{24} \mu \delta^4 f + \dots \right)} - \frac{(\delta^3 f - \dots) \left(\delta f - \frac{1}{24} \delta^3 f + \dots \right)^3}{6 \left(\mu \delta^2 f - \frac{5}{24} \mu \delta^4 f + \dots \right)^3} \dots$$

Przeprowadzając przez cztery punkty parabolę trzeciego stopnia ($\delta^4 f = \delta^5 f = \dots = 0$) otrzymujemy wzory

$$(4.16) \quad \begin{aligned} f_0 &\approx \mu f - \frac{1}{8} \mu \delta^2 f = \frac{1}{16} (-f_{\frac{3}{2}} + 9f_{\frac{1}{2}} + 9f_{-\frac{1}{2}} - f_{-\frac{3}{2}}), \\ hf'_0 &\approx \delta f - \frac{1}{24} \delta^3 f = \frac{1}{24} (-f_{\frac{3}{2}} + 27f_{\frac{1}{2}} - 27f_{-\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}}), \\ h^2 f''_0 &\approx \mu \delta^2 f = \frac{1}{2} (f_{\frac{3}{2}} - f_{\frac{1}{2}} - f_{-\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}}), \\ h^3 f'''_0 &\approx \delta^3 f = f_{\frac{3}{2}} - 3f_{\frac{1}{2}} + 3f_{-\frac{1}{2}} - f_{-\frac{3}{2}}, \\ f_0^{IV} &= f_0^V = \dots = 0, \end{aligned}$$

oraz przybliżone wzory na ekstremalną wartość funkcji $f(x)$,

$$(4.17) \quad f_m \approx \left(\mu f - \frac{1}{8} \mu \delta^2 f \right) \frac{\left(\delta f - \frac{1}{24} \delta^3 f \right)^2}{2 \mu \delta^2 f} \frac{\delta^3 f \left(\delta f - \frac{1}{24} \delta^3 f \right)^3}{6 (\mu \delta^2 f)^3} - \frac{(\delta^3 f)^2 \left(\delta f - \frac{1}{24} \delta^3 f \right)^4}{8 (\mu \delta^2 f)^5} \dots$$

czyli

$$(4.18) \quad f_m \approx \frac{-f_{\frac{3}{2}} + 9f_{\frac{1}{2}} + 9f_{-\frac{1}{2}} - f_{-\frac{3}{2}}}{16} \frac{(-f_{\frac{3}{2}} + 27f_{\frac{1}{2}} - 27f_{-\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}})^2}{576 (f_{\frac{3}{2}} - f_{\frac{1}{2}} - f_{-\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}})} - \frac{(f_{\frac{3}{2}} - 3f_{\frac{1}{2}} + 3f_{-\frac{1}{2}} - f_{-\frac{3}{2}}) (-f_{\frac{3}{2}} + 27f_{\frac{1}{2}} - 27f_{-\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}})^3}{10386 (f_{\frac{3}{2}} - f_{\frac{1}{2}} - f_{-\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}})^3} \dots$$

Dokładność uzyskanych tu wzorów przybliżonych zilustrujemy następującym przykładem. Określimy maksimum funkcji $f(x) = -x \ln x$, przyjmując za znane wartości tej funkcji w punktach $x = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ i $0,6$ lub tylko w pierwszych czterech lub środkowych trzech punktach. Analitycznie łatwo stwierdzić, że maksimum to występuje w punkcie $\tilde{x} = 1/e = 0,367\ 879$ i wynosi $f_m = 1/e = 0,367\ 879$. Wartości funkcji i kolejnych różnic podaje tablica 1.

Tablica 1. Funkcja $f(x) = -x \ln x$ i jej kolejne różnice

x	$f(x)$	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$	$\delta^4 f(x)$
0,2	0,321888				
		39304			
0,3	0,361192		-33980		
		5324		8714	
0,4	0,366516		-25266		-3585
		-19942		5129	
0,5	0,346574		-20137		
		-40079			
0,6	0,306495				

Zastosujemy najpierw najprostszy wzór (4.11), biorąc pod uwagę trzy środkowe punkty i podstawiając $\mu\delta f = (0,005\ 324 - 0,019\ 942)/2 = -0,007\ 309$. Otrzymujemy

$$f_m \approx 0,366\ 516 + \frac{0,007\ 309^2}{2 \cdot 0,025\ 266} = 0,367\ 573,$$

zatem błąd wynosi 0,000 306 i nie przekracza 0,1%. W przypadku wielomianu czwartego stopnia, wzór (4.12), podstawimy $\mu\delta^3 f = 0,006\ 922$, a stopień zbieżności szeregu pokazuje rachunek:

$$\begin{array}{r} f_m \approx 0,366516 \\ + 0,001434 \\ \hline 0,367950 \\ - 0,000045 \\ \hline 0,367905 \\ - 0,000010 \\ \hline 0,367895 \end{array}$$

Szereg ten oczywiście nie jest zbieżny do wartości $1/e$, lecz do maksimum wielomianu interpolacyjnego czwartego stopnia. Błąd jest jednakże nieznaczny i przy wykorzystaniu czterech wyrazów szeregu wynosi tylko 0,000 016.

W przypadku wzoru (4.17) dokonujemy innego obliczenia średnich. Mamy tu $\mu f = 0,363\ 854$ (średnia arytmetyczna wartości $f(0,3)$ i $f(0,4)$), $\delta f = 0,005\ 324$, $\mu\delta^2 f = -0,029\ 623$, $\delta^3 f = 0,008\ 714$ oraz

$$\begin{aligned}
 f_m &\approx 0,363854 \\
 &+ 0,003703 \\
 &\hline
 &0,367557 \\
 &+ 0,000415 \\
 &\hline
 &0,367972 \\
 &+ 0,000007 \\
 &\hline
 &0,367979
 \end{aligned}$$

i błąd przy czterech wyrazach szeregu wynosi 0,000 100.

5. W sprawie szacowania błędów aproksymacji jednokrotnie optymalnej

Klasyczne szacowanie błędu aproksymacji danej funkcji $f(x)$ przez wielomian $P_{n-1}(x)$ w przedziale $a \leq x \leq b$ wygląda następująco: zapisujemy błąd aproksymacji $B(x)$ w postaci

$$(5.1) \quad B(x) = f(x) - P_{n-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) S(x),$$

gdzie x_i odpowiadają węzłom interpolacji; mogą to być węzły wielokrotne. Tworzymy funkcję zmiennej z przy pewnej ustalonej wartości x

$$(5.2) \quad F(z) = f(z) - P_{n-1}(z) - (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n) S(x).$$

Ta funkcja jest równa zero w $n+1$ punktach $z = x_1, x_2, \dots, x_n$ oraz $z = x$. Stosując kolejno twierdzenie Rolle'a dowodzimy, że pochodna rzędu n funkcji $F(z)$ jest wewnątrz przedziału $a < x < b$ co najmniej raz równa zero (w pewnym punkcie $z = \bar{x}$), czyli

$$(5.3) \quad F^{(n)}(\bar{x}) = 0 = f^{(n)}(\bar{x}) - n! S(x),$$

skąd

$$(5.4) \quad S(x) = \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}.$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie

$$(5.5) \quad |B(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(\bar{x})|}{n!} \max_{a \leq x \leq b} |(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)|.$$

Stosując transformację

$$(5.6) \quad x = \frac{(a+b) + (b-a)t}{2}, \quad t = \frac{2x - (a+b)}{b-a},$$

otrzymujemy

$$(5.7) \quad |B(x)| \leq \frac{1}{2^n n!} (b-a)^n |f^{(n)}(\bar{x})| \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)|,$$

gdzie

$$(5.8) \quad \varphi(t) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n)$$

i oszacowanie uzależnione jest w pierwszym rzędzie od doboru punktów t_i . Przy przyjęciu, że t_i odpowiadają pierwiastkom wielomianu Czebyszewa stopnia n , otrzymujemy najlepsze oszacowanie

$$(5.9) \quad |(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

oraz

$$(5.10) \quad |B(x)| \leq \frac{1}{2^{2n-1} n!} (b-a)^n |f^{(n)}(\bar{x})|.$$

Przy takim rozkładzie węzłów interpolacji mówimy o optymalnej aproksymacji interpolacyjnej (J. ŁUKASZEWICZ, M. WARMUS, [9]).

Wzory typu (5.7) lub (5.10), dające się łatwo zastosować przy prostej postaci funkcji aproksymowanej i posiadające pewne walory dydaktyczne, są niemal bezwartościowe w zastosowaniach praktycznych. Zazwyczaj aproksymujemy funkcje o skomplikowanej budowie, często daną np. w postaci uwikłanej lub parametrycznej; wzory na wyższe pochodne takiej funkcji są długie i nieraz bardzo żmudne do uzyskania. Jeżeli nawet znajdziemy poszukiwaną pochodną, to przy złożonej budowie tego wzoru określenie kresu górnego wartości bezwzględnej tej pochodnej jest jeszcze bardziej żmudnym zadaniem. Wreszcie często napotyka się tu na trudność zasadniczą: wartość bezwzględna badanej pochodnej nie posiada kresu górnego (zmierza on do nieskończoności), co uniemożliwia w ogóle zastosowanie wzoru typu (5.7), chociaż błędy aproksymacji wielomianem mogą być bardzo nieznaczne.

Zaproponowana w obecnej pracy aproksymacja jednokrotnie optymalna nie wymaga oszacowania tego typu. W samej technice obliczeniowej kryje się możliwość określenia kresu górnego błędu, tak że oszacowanie jest jak gdyby «automatyczne» (z dokładnością do oszacowania błędu wzorów (4.11), (4.12) i podobnych, błąd ten jest jednak z reguły pomijalnie mały w stosunku do błędu samej aproksymacji). Tym niemniej dla porównania przeprowadzimy oszacowanie błędu wzorem typu (5.7) i zestawimy je z oszacowaniem aproksymacji Czebyszewa (5.10) i aproksymacji brzegowej Hermite'a.

Zajmiemy się najpierw aproksymacją brzegową Hermite'a przy parzystej wartości n . Nakładając wtedy równe ilości warunków zgodności na obu brzegach przedziału, $n/2$, mamy

$$(5.11) \quad |(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)| = |(t+1)^{\frac{n}{2}}(t-1)^{\frac{n}{2}}| = |(t^2-1)^{\frac{n}{2}}| \leq 1$$

oraz

$$(5.12) \quad |B(x)| \leq \frac{1}{2^n n!} (b-a)^n |f^{(n)}(\bar{x})|.$$

W przypadku nieparzystej wartości n lub tylko nierównomiernego rozmieszczenia warunków zgodności (k na lewym brzegu przedziału, $n-k$ na prawym)

$$(5.13) \quad (t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n) = (t+1)^k (t-1)^{n-k}.$$

Wartość bezwzględna tej funkcji osiąga maksimum w punkcie

$$(5.14) \quad t = \frac{2k-n}{n}$$

oraz

$$(5.15) \quad |\varphi|_{\max}(t) = \left(\frac{2}{n}\right)^n k^k (n-k)^{n-k},$$

$$(5.16) \quad |B(x)| \leq \frac{k^k (n-k)^{n-k}}{n^n n!} (b-a)^n |f^{(n)}(\bar{x})|.$$

Wartości $\max |\varphi(t)|$ zestawione są w tablicy 2. Są one większe od jedności, zatem niesymetryczna aproksymacja brzegowa Hermite'a posiada gorsze oszacowanie od symetrycznej.

Tablica 2. Wartości $\max |\varphi(t)|$ dla aproksymacji brzegowej Hermite'a

$k \backslash n$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-4}{2}$	$\frac{n-5}{2}$	$\frac{n-6}{2}$	$\frac{n-7}{2}$
1		2						
2	1		4					
3		$\frac{32}{27} \approx 1,185$		8				
4	1		$\frac{27}{16} = 1,6875$		16			
5		$\frac{3456}{3125} \approx 1,102$		$\frac{8192}{3125} \approx 2,621$		32		
6	1		$\frac{1024}{729} \approx 1,405$		$\frac{3125}{729} \approx 4,287$		64	
7		$\frac{884736}{823543} \approx 1,071$		$\frac{1600000}{823543} \approx 1,943$		$\frac{5971968}{823543} \approx 7,251$		128
	Symetryczna aproksymacja brzegowa	Niesymetryczna aproksymacja brzegowa						

Aproksymacja wg wzoru Taylora

Przejdziemy do aproksymacji jednokrotnie optymalnej. Najprostsze oszacowanie otrzymujemy tu dla n nieparzystych przy równomiernym rozmieszczeniu warunków zgodności na obu brzegach, $(n-1)/2$. Wtedy z uwagi na symetrię najlepsze oszacowanie otrzymujemy przyjmując dodatkowy węzeł interpolacji w punkcie $t=0$, mianowicie wtedy

$$(5.17) \quad \varphi(t) = (t+1)^{\frac{n-1}{2}} (t-1)^{-\frac{n-1}{2}} t = (t^2-1)^{\frac{n-1}{2}} t.$$

Wartość bezwzględna tej funkcji osiąga maksimum dla $t = \sqrt{1/n}$ i otrzymujemy

$$(5.18) \quad \max |\varphi(t)| = \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}},$$

$$(5.19) \quad |B(x)| \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n n^{\frac{n}{2}} n!} (b-a)^n |f^{(n)}(\bar{x})|.$$

Wartości $\max |\varphi(t)|$ zestawione są w tablicy 3. Są one mniejsze od jedności, co charakteryzuje zmniejszenie błędu w stosunku do aproksymacji brzegowej Hermite'a.

Tablica 3. Wartości $\max |\varphi(t)|$ dla symetrycznej aproksymacji jednokrotnie optymalnej

n	$\max \varphi(t) $
3	$\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0,3849$
5	$\frac{16}{25\sqrt{5}} \approx 0,2862$
7	$\frac{216}{343\sqrt{7}} \approx 0,2380$
9	$\frac{4096}{19683} \approx 0,2081$

W przypadku parzystych wartości n równomierny rozkład warunków zgodności na obu brzegach przedziału nie jest możliwy. Podobnie jak poprzednio przyjmujemy, że na lewym brzegu żądamy spełnienia k warunków zgodności, a na prawym $(n-k-1)$ warunków. Wtedy

$$(5.20) \quad \varphi(t) = (t+1)^k (t-1)^{n-k-1} (t-\tau),$$

gdzie τ jest parametrem, który należy dobrać tak, by kres wartości bezwzględnej $|\varphi(t)|$ był w przedziale $-1 \leq t \leq 1$ możliwie najmniejszy. W tym celu znajdziemy

maksimum i minimum funkcji $\varphi(t)$ i wykorzystamy warunek typu (2.4). Przyrównanie do zera pochodnej $\varphi'(t)$ daje równanie kwadratowe

$$(5.21) \quad nt^2 - [(2k - n + 1) + (n - 1)\tau]t + [-1 + (2k - n + 1)\tau] = 0$$

o pierwiastkach

$$(5.22) \quad t_{1,2} = \frac{(2k - n + 1) + (n - 1)\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2n},$$

gdzie

$$(5.23) \quad \Delta = (n - 1)^2 \tau^2 - 2(2k - n + 1)(n + 1)\tau + [(2k - n + 1)^2 + 4n].$$

Warunek

$$(5.24) \quad \varphi(t_1) + \varphi(t_2) = 0$$

prorowadzi do równania

$$(5.25) \quad (t_1 + 1)^k (t_1 - 1)^{n-k-1} (t_1 - \tau) + (t_2 + 1)^k (t_2 - 1)^{n-k-1} (t_2 - \tau) = 0.$$

Oba pierwiastki t_i ($i = 1, 2$) występują tu w potęgze n , jednak potęgę tę można zredukować do pierwszej. Wobec (5.21) mamy

$$(5.26) \quad t_i^2 = \frac{(2k - n + 1) + (n - 1)\tau}{n} t_i + \frac{1 - (2k - n + 1)\tau}{n} = A_2 t_i + B_2,$$

gdzie współczynniki A_2 i B_2 są określone tym równaniem; dalej

$$(5.27) \quad \begin{aligned} t_i^3 &= t_i^2 t_i = A_2 (A_2 t_i + B_2) + B_2 t_i = (A_2^2 + B_2) t_i + A_2 B_2, \\ t_i^4 &= t_i^3 t_i = (A_2^2 + B_2) (A_2 t_i + B_2) + A_2 B_2 t_i = (A_2^3 + 2A_2 B_2) t_i + (A_2^2 + B_2) B_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ogólnie można napisać

$$(5.28) \quad t_i^s = A_s t_i + B_s.$$

Wyprowadzimy teraz wzory na A_s i B_s . Mamy mianowicie

$$(5.29) \quad t_i^s = t_i^{s-1} t_i = (A_{s-1} t_i + B_{s-1}) t_i = (A_{s-1} A_2 + B_{s-1}) t_i + A_{s-1} B_2,$$

skąd wynikają wzory rekurencyjne

$$(5.30) \quad A_s = A_{s-1} A_2 + B_{s-1}, \quad B_s = A_{s-1} B_2.$$

Indukcyjnie można teraz wykazać słuszność wzorów

$$(5.31) \quad \begin{aligned} A_s &= A_2^{s-1} + \frac{(s-2)}{1!} A_2^{s-3} B_2 + \frac{(s-3)(s-4)}{2!} A_2^{s-5} B_2^2 + \\ &\quad + \frac{(s-4)(s-5)(s-6)}{3!} A_2^{s-7} B_2^3 + \dots, \\ B_s &= A_2^{s-2} B_2 + \frac{(s-3)}{1!} A_2^{s-4} B_2^2 + \frac{(s-4)(s-5)}{2!} A_2^{s-6} B_2^3 + \\ &\quad + \frac{(s-5)(s-6)(s-7)}{3!} A_2^{s-8} B_2^4 + \dots \end{aligned}$$

Ponieważ wyprowadzone tu wzory pozwalają zredukować wszystkie potęgi t_i do pierwszej, więc ostatecznie otrzymujemy równanie typu

$$(5.32) \quad C(t_1+t_2)+D=0$$

(współczynniki przy poszczególnych potęgach t_1 i t_2 w równaniu (5.25) są równe). Jest to równanie stopnia n ze względu na parametr τ ; niewymierność ulega tu redukcji, ponieważ w sumie t_1+t_2 nie występuje pierwiastek. Tylko jeden z pierwiastków τ spełnia warunek minimum wartości bezwzględnej $|\varphi(t)|$; znajdując ten pierwiastek obliczamy kolejno t_1 i t_2 za pomocą wzorów (5.22) oraz $\max |\varphi(t)|$, co umożliwia oszacowanie wzorem (5.7).

Najprostszym przykładem będzie $n=2$, $k=1$. Aproksymujemy wtedy daną funkcję linią prostą, nakładając tylko jeden warunek zgodności na lewym końcu przedziału; drugi parametr określamy z warunku minimum odchylenia. Wtedy

$$(5.33) \quad \varphi(t) = (t+1)(t-\tau),$$

$t_1 = (\tau-1)/2$, $t_2 = 1$ (ten drugi pierwiastek nie jest tu określony wzorem (5.22); znajdziemy go biorąc pod uwagę fakt, że nie nałożyliśmy żadnego warunku na prawym brzegu przedziału). Porównując kres górny funkcji $\varphi(t)$ z bezwzględną wartością kresu dolnego otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(5.34) \quad \tau^2 - 10\tau - 7 = 0,$$

skąd $\tau = 4\sqrt{2} - 5 = 0,6568$ (drugi pierwiastek nie leży wewnątrz przedziału $(-1, 1)$, więc nie może być brany pod uwagę) i ostatecznie

$$(5.35) \quad \max |\varphi(t)| = 12 - 8\sqrt{2} = 0,6863.$$

W przypadku aproksymacji Czebyszewa mielibyśmy tu $\max |\varphi(t)| = 0,5$, natomiast w przypadku aproksymacji brzegowej Hermite'a (w tym przypadku Lagrange'a), $\max |\varphi(t)| = 1$.

Podamy jeszcze wyniki dla $n=4$, $k=2$ (aproksymacja parabolą trzeciego stopnia, zgodność wartości funkcji i pochodnej na lewym brzegu przedziału, a samej funkcji na prawym). Wtedy

$$(5.36) \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= (t+1)^2(t-1)(t-\tau), \\ t_{1,2} &= \frac{1}{8}(1+3\tau \pm \sqrt{9\tau^2 - 10\tau + 17}), \\ t_i^2 &= \frac{1}{4}[(1+3\tau)t_i + (1-\tau)], \\ t_i^3 &= \frac{1}{16}[(5+2\tau+9\tau^2)t_i + (1+2\tau-3\tau^2)], \\ t_i^4 &= \frac{1}{64}[(9+25\tau+3\tau^2+27\tau^3)t_i + (5-3\tau+7\tau^2-9\tau^3)], \\ \varphi(t_i) &= \frac{1}{64}[(-51+13\tau-17\tau^2-9\tau^3)t_i + (-7+65+3\tau^2+3\tau^3)]. \end{aligned}$$

Równanie (5.32) przybiera postać

$$(5.37) \quad 27\tau^4 + 36\tau^3 - 46\tau^2 - 380\tau + 107 = 0,$$

skąd $\tau = 0,275$, $t_1 = -0,254$, $t_2 = 0,711$ oraz $\max |\varphi(t)| = 0,369$,

$$(5.38) \quad |B(x)| \leq \frac{0,369}{384} (b-a)^4 |f^{IV}(\bar{x})|.$$

Poświęcimy jeszcze chwilę uwagi oszacowaniu ekstrapolacji poza przedział $a < x < b$. Rozważymy mianowicie przedział $b \leq x \leq b + \psi(b-a)$. Wtedy wzory (5.1) i (5.2) nie ulegają zmianie, a we wzorze (5.4) zamiast \bar{x} wystąpi $\bar{\bar{x}}$ jako pewna wartość zawarta w przedziale $a \leq \bar{\bar{x}} \leq b + \psi(b-a)$. Jeżeli ograniczymy się do przedziału ekstrapolacji $b \leq x \leq b + \psi(b-a)$, czyli, wobec (5.6), do przedziału $1 \leq t \leq 1 + 2\psi$, to $\max |\varphi(t)| = |\varphi(1 + 2\psi)|$ oraz

$$(5.39) \quad |B(x)| \leq \frac{1}{2^n n!} (b-a)^n |f^n(\bar{\bar{x}})| |\varphi(1 + 2\psi)|.$$

Wartości $|\varphi(1 + 2\psi)|$ dla $\psi = 0,1$ dla różnych typów aproksymacji zestawione są w tablicy 4. W przypadkach niesymetrycznych podano dwie wartości: mniejsza

Tablica 4. Wartości $|\varphi(1, 2)|$ dla oszacowania ekstrapolacji

n	2	3	4	5
Aproksymacja Czebyszewa	0,940	0,828	0,883	0,698
Aproksymacja jednokrotnie optymalna	0,371; 1,193	0,528	0,130; 0,895	0,233
Aproksymacja brzegowa Hermite'a	0,440	0,088; 0,968	0,194	0,039; 0,426

odpowiada aproksymacji przy większej ilości warunków zgodności na rozpatrywanym (prawym) brzegu przedziału i na odwrót. Jak było do przewidzenia, aproksymacja Czebyszewa ma tu oszacowania najgorsze, aproksymacja brzegowa Hermite'a — na ogół najlepsze. Aproksymacja jednokrotnie optymalna ma oszacowania pośrednie, jednak na ogół dość wyraźnie lepsze od oszacowań aproksymacji Czebyszewa.

Musimy jednak jeszcze raz podkreślić, że oszacowania tego typu nie są potrzebne (może z wyjątkiem ekstrapolacji), ponieważ oszacowanie błędu aproksymacji jednokrotnie optymalnej związane jest z samą techniką obliczania współczynników wielomianu aproksymacyjnego.

6. Przykład zastosowania aproksymacji jednokrotnie optymalnej w teorii stateczności

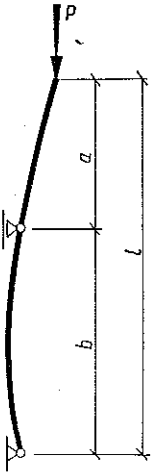
Weźmiemy pod uwagę pręt dwuprzęsłowy podparty dwuprzegubowo jak na rys. 1. Taki sposób zamocowania występuje często, zwłaszcza w niektórych konstrukcjach maszynowych. Celem naszym będzie określenie siły krytycznej P w zależności od stosunku $b/l = \psi$.

Stateczność prętów wieloprzęsłowych była badana przez wielu badaczy. Szczególnie wiele uwagi prętom dwuprzęsłowym poświęcili W. M. MAKUSZIN i L. A. KORIEŁKOW, [10], wyprowadzając równania przestępne, określające siłę krytyczną, i zestawiając ich wyniki w tablice, cytowane w monografii S. D. PONOMARIEWA, [14]. Siła krytyczna dla rozpatrywanego pręta określona jest (w zakresie liniowo-sprężystym) równaniem przestępnym

$$(6.1) \quad kb \sin kl = \sin kb \sin k(l - b),$$

gdzie

$$(6.2) \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad P = k^2 EI.$$



Rys. 1

Tablicowe przedstawienie funkcji $k = k(b/l)$ nie zawsze jest dogodnie dla zastosowań. Zajmiemy się wyprowadzeniem możliwie prostego a dokładnego wzoru, aproksymującego tę zależność. Przypadki $b/l = 0$ i $b/l = 1$ mają tu ważną interpretację fizyczną, mianowicie pierwszy odpowiada prętowi jednostronnie utwierdzonemu, a drugi — zamocowanemu dwuprzegubowo na końcach. Zażądamy, by funkcja aproksymująca dawała wartości ścisłe w obu tych przypadkach.

Rozwińmy najpierw poszukiwaną funkcję w szeregi potęgowe o środkach w punktach $\psi = 0$ i $\psi = 1$, by uzyskać potrzebne wartości pochodnych na brzegach przedziału. Wprowadzimy bezwymiarową siłę krytyczną

$$(6.3) \quad p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI},$$

zatem $p = 0,25$ dla $\psi = 0$ oraz $p = 1$ dla $\psi = 1$; równanie, określające funkcję $p = p(\psi)$ przybierze postać

$$(6.4) \quad \pi\psi\sqrt{p} \sin(\pi p) = \sin(\pi\psi\sqrt{p})\sin[\pi(1-\psi)\sqrt{p}].$$

Założymy najpierw postać rozwinięcia

$$(6.5) \quad \sqrt{p} = \frac{1}{2} + a_1\psi + a_2\psi^2 + a_3\psi^3 + \dots;$$

po podstawieniu, wykonaniu zaznaczonych działań i zastosowaniu metody równych współczynników otrzymamy $a_1 = 1/3$, $a_2 = 2/9$, $a_3 = 2/27 - 43\pi^2/77760$, ... oraz

$$(6.6) \quad \sqrt{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\psi + \frac{2}{9}\psi^2 + \left(\frac{2}{27} - \frac{43}{77760}\pi^2\right)\psi^3 + \dots,$$

$$(6.7) \quad p = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\psi + \frac{1}{3}\psi^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{43}{77760}\pi^2\right)\psi^3 + \dots.$$

Przejdziemy do drugiego rozwinięcia. By je uzyskać, wygodniej jest podstawić $1 - \psi = \varphi$, $1 - \sqrt{p} = z$; otrzymamy wtedy równanie

$$(6.8) \quad \pi(1 - \varphi)(1 - z) \sin \pi z = \sin [\pi(\varphi + z - \varphi z)] \sin [\pi\varphi(1 - z)].$$

Dla $\varphi = 0$ mamy $z = 0$, więc założymy rozwinięcie

$$(6.9) \quad z = a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + a_3 \varphi^3 + \dots$$

Podobnie jak poprzednio obliczamy $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2, \dots$, zatem

$$(6.10) \quad \sqrt{p} = 1 - \varphi^2 - 2\varphi^3 - \dots,$$

$$(6.11) \quad p = 1 - 2\varphi^2 - 4\varphi^3 - \dots$$

Dysponujemy teraz dostateczną ilością pochodnych w punktach $\psi = 0$ i $\psi = 1$ (na brzegach przedziału), by zastosować aproksymację brzegową Hermite'a lub aproksymację jednokrotnie optymalną. Można w tym celu wykorzystać wzory, podane w pracy [21]. Żądając zgodności wartości funkcji i pierwszej pochodnej na obu brzegach przedziału otrzymujemy wielomian aproksymacyjny Hermite'a

$$(6.12) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + \frac{19}{12} \psi^2 - \frac{7}{6} \psi^3.$$

Żądając zgodności typu 3+2 (trzy warunki na lewym brzegu, dwa na prawym) otrzymujemy wielomian czwartego stopnia

$$(6.13) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + \frac{1}{3} \psi^2 + \frac{4}{3} \psi^3 - \frac{5}{4} \psi^4,$$

a przy zgodności typu 2+3 wielomian

$$(6.14) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + \frac{3}{2} \psi^2 - \psi^3 - \frac{1}{12} \psi^4.$$

Aby określić kres górny wartości bezwzględnej błędu należy dysponować tablicą funkcji $p = p(\psi)$. Tablica podana w pracy [10] wydaje się zbyt mało dokładna; dokładniejszą uzyskamy nie przez zwiększenie dokładności rozwiązywania odpowiednich równań przestępnych dla danych wartości ψ (co wymagałoby dość dużego nakładu pracy) lecz przez parametryzację równania (6.4). Potraktujemy jako parametr wielkość

$$(6.15) \quad u = kb = \psi kl = \pi\psi \sqrt{p}.$$

Parametr ten zmienia się w granicach $0 \leq \pi\psi \sqrt{p} \leq \pi$. Rozkładając sinus sumy po prawej stronie równania (6.4) i obliczając $\pi \sqrt{p}$, otrzymujemy

$$\pi \sqrt{p} = \arctg \left(\frac{1 - \cos 2u}{2u - \sin 2u} \right),$$

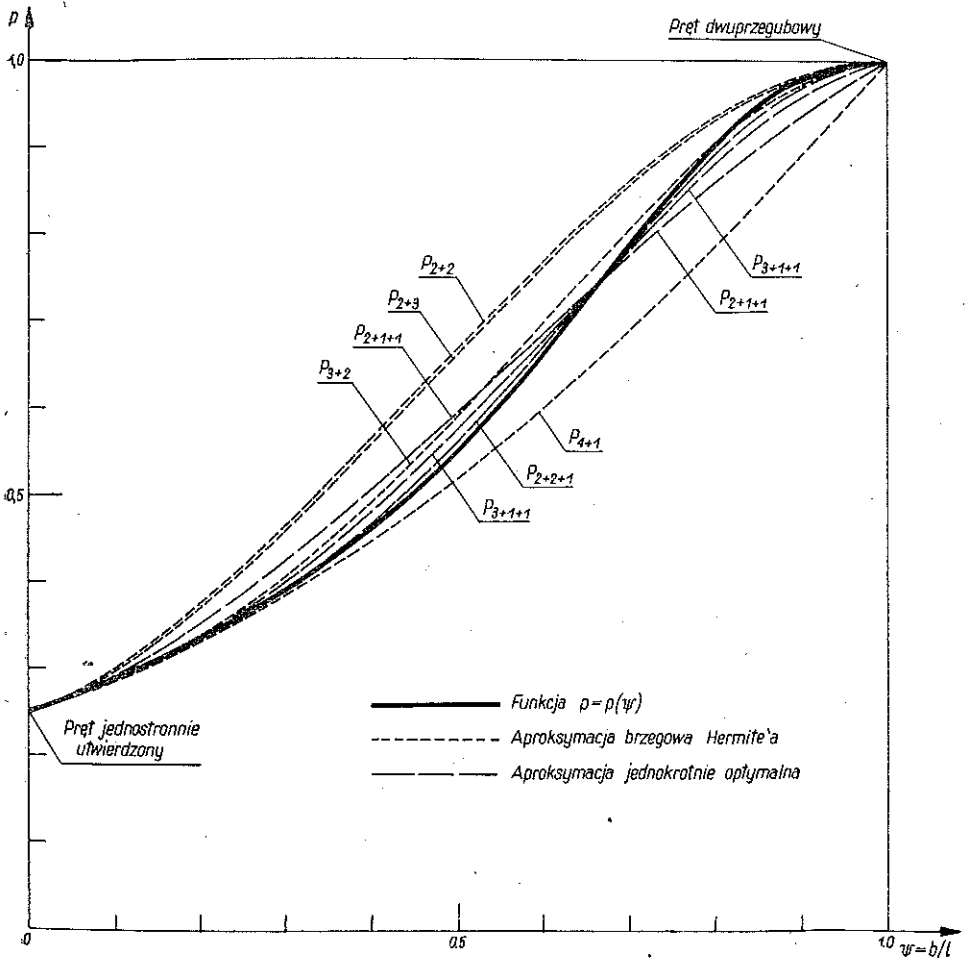
skąd wynika parametryzacja

$$(6.16) \quad \psi = \frac{\pi\psi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}} = \frac{u}{\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1-\cos 2u}{2u-\sin 2u}\right)},$$

$$p = \frac{1}{\pi^2} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1-\cos 2u}{2u-\sin 2u}\right) \right]^2.$$

Wartości funkcji $\psi = \psi(u)$ i $p = p(u)$, a zatem $p = p(\psi)$, zestawione są w tabelicy 5. Wprowadzie skok tabelicy $\Delta\psi$ nie jest równy, jednak wyprowadzone w p. 4 wzory na ekstremum mogą być stosowane, bowiem można za pomocą tych wzorów obliczać ekstrema funkcji zmiennej u , a ekstrema te są oczywiście równe.

Wykres funkcji aproksymowanej, określonej równaniem uwikłanym (6.4) lub równaniami parametrycznymi (6.16), podany jest na rysunku 2 linią ciągłą, a wykresy



Rys. 2

Tablica 5. Wartości sparametryzowanej funkcji $p = p(b/l)$, określającej siłę krytyczną dla pręta dwuprzęsłowego

$u = \psi kl = kb$	$\psi = \frac{b}{l}$	$p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}$
$0^\circ = 0$	0	0,25000
$18^\circ = 0,31416$	0,17650	0,32100
$36^\circ = 0,62832$	0,31619	0,40011
$54^\circ = 0,94248$	0,43026	0,48616
$72^\circ = 1,25664$	0,52637	0,57748
$90^\circ = 1,57080$	0,61010	0,67165
$108^\circ = 1,88495$	0,68591	0,76519
$126^\circ = 2,19911$	0,75790	0,85305
$144^\circ = 2,51327$	0,83042	0,92808
$162^\circ = 2,82743$	0,90885	0,98063
$180^\circ = 3,14159$	1,00000	1,00000

aproksymacji brzegowej Hermite'a (6.12), (6.13) i (6.14) — liniami gęsto przerywanymi, oznaczonymi P_{2+2} , P_{3+2} i P_{2+3} . Największe co do wartości bezwzględnej błędy przybliżenia zestawione są w tablicy 6. Wielomian (6.13) jest wyraźnie

Tablica 6. Największe błędy różnych typów aproksymacji funkcji $p = p(\psi)$

Stopień wielomianu	Aproksymacja brzegowa Hermite'a		Aproksymacja jednokrotnie optymalna	
	typ	kres górny błędu	typ	kres górny błędu
3	2+2	0,1165	2+1+1	0,0464
	3+1	0,1276		
4	3+2	0,0390	2+2+1	0,0112
	2+3	0,1114	3+1+1	0,0240
	4+1	0,1138		

lepszy od wielomianu (6.14). Pozostaje to w związku z lepszą zbieżnością szeregu o środku w punkcie $\psi = 0$ niż o środku w punkcie $\psi = 1$ (czyli $\varphi = 0$); w punkcie $\psi = 0$ należy przyjmować więcej warunków zgodności niż w punkcie $\psi = 1$, o czym pisaliśmy już wcześniej. Oczywiście, nie należy iść w tym kierunku zbyt daleko, np. wielomian o zgodności typu 4+1, mianowicie

$$(6.17) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + \frac{1}{3} \psi^2 + 0,21676 \psi^3 - 0,13343 \psi^4,$$

(odpowiedni wykres na rys. 2 oznaczono przez P_{4+1}) wykazuje już większy błąd niż wielomian typu 3+2.

Przejdziemy do aproksymacji jednokrotnie optymalnej. Ograniczając się do wielomianów trzeciego stopnia możemy przyjąć zgodność typu 2+1+1 (dwa warunki na lewym brzegu, jeden na prawym, jeden parametr swobodny, wyznaczany z warunku minimum odchylenia) lub zgodność typu 1+2+1. Ze względu na lepszą zbieżność szeregu o środku w punkcie $\psi = 0$ zajmiemy się tylko pierwszym z tych typów. Będziemy więc poszukiwali rozwiązania pośród wielomianów

$$(6.18) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + a\psi^2 + \left(\frac{5}{12} - a \right) \psi^3.$$

Przyjmując $a = 1/3$ otrzymalibyśmy aproksymację brzegową Hermite'a typu 3+1, dla której, jak podano w tablicy 6, kres górny błędu B wynosi $M = 0,1276$, kres dolny $m = 0$ (krzywej P_{3+1} nie wykreślono na rys. 2; odbiega ona tylko nieznacznie od krzywej P_{4+1}). Przyjmując natomiast $a = 19/12$ otrzymalibyśmy aproksymację brzegową typu 2+2, wzór (6.12); mamy tu $M = 0$, $m = -0,1165$. Należy więc dobrać pewną pośrednią wartość a . Przyjmując $a = 1$ obliczamy [np. wzorem (4.11)] $M = 0,0468$, $m = -0,0460$, więc spełnienie warunku (2.4) jest już bardzo bliskie. Należy zwiększyć parametr a ; przyjmijmy na próbę, $a = 1,005$, uzyskując $M = 0,0462$, $m = -0,0466$. Stosując wreszcie regułę fałsi (3.2), otrzymamy $a = 1,0035$ przy $M = -m = 0,0464$. Poszukiwanym wielomianem aproksymacyjnym jest więc

$$(6.19) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + 1,0035 \psi^2 - 0,5868 \psi^3.$$

W stosunku do wielomianu (6.12) błąd został zmniejszony o ponad 60%, co ma oczywiście zasadnicze znaczenie.

Jeżeli dokładność przybliżenia (6.19) jest zbyt mała, to można ją zwiększyć przez podniesienie stopnia wielomianu aproksymacyjnego. Możemy przypuszczać, że spośród wielomianów czwartego stopnia wielomian typu 2+2+1 będzie lepszy od wielomianu typu 3+1+1, ponieważ aproksymacja brzegowa Hermite'a typu 2+2 dała mniejszy błąd przybliżenia, niż 3+1. Zajmiemy się więc zasadniczo pierwszą z tych możliwości, jednak dla porównania podamy również wyniki drugiej.

Żądając w przypadku wielomianu czwartego stopnia zgodności samej funkcji i pierwszej pochodnej na obu brzegach przedziału, otrzymujemy

$$(6.20) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + a\psi^2 + 2(1-a)\psi^3 + \left(a - \frac{19}{12} \right) \psi^4,$$

gdzie a jest parametrem, który należy wyznaczyć z warunku minimum odchylenia. By dobrać stosowną wartość a zauważymy, że dla $a = 1/3$ otrzymujemy aproksymację brzegową Hermite'a typu 3+2, (6.13), dla której $M = 0,0044$, $m = -0,0390$, natomiast dla $a = 3/2$ otrzymujemy aproksymację typu 2+3, (6.14), dla której

$M = 0$, $m = -0,1114$. Zastosujemy regułę fałsi (3.2) otrzymując przybliżoną wartość a ,

$$(6.21) \quad a \approx \frac{1}{3} + \frac{0,0044 - 0,0390}{0,0044 - 0,0390 - 0 + 0,1114} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) = -0,193.$$

Dla tej wartości a otrzymujemy $M = 0,0126$, $m = -0,0067$ (wystarczy obliczyć przybliżoną wartość p dla trójek wartości $\psi = 0,43026$; $0,52637$; $0,61010$ oraz $\psi = 0,75790$; $0,83042$; $0,90885$ i zastosować wzór (4.11) dla obliczenia ekstremum), więc różnica między M i $-m$ jest jeszcze dość duża. Wynika to z faktu, iż regułą fałsi posługiwaliśmy się tu nie do interpolacji, lecz do ekstrapolacji. Zastosujemy ją teraz do interpolacji pomiędzy $a = 0,333$ i $a = -0,193$, uzyskując następane przybliżenie $a = -0,116$. Przy tej wartości a mamy $M = 0,0111$, $m = -0,0113$ i ostatecznie po następnej iteracji $a = -0,1194$

$$(6.22) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi - 0,1194 \psi^2 + 2,2388 \psi^3 - 1,7027 \psi^4$$

oraz $|B| \leq 0,0112$. W stosunku do najlepszej z aproksymacji brzegowych Hermite'a wielomianami czwartego stopnia, mianowicie (6.13), błąd zmniejszyliśmy ponad trzykrotnie, co ma zasadnicze znaczenie przy stosowaniu wzoru.

Wielomian aproksymacyjny typu 3+1+1 posiada postać

$$(6.23) \quad p \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + \frac{1}{3} \psi^2 + 1,1117 \psi^3 - 1,0284 \psi^4,$$

przy czym $|B| \leq 0,0241$, jest więc zgodnie z przewidywaniami mniej dokładny od (6.22). Wykresy funkcji (6.19), (6.22) i (6.23) (aproksymacja jednokrotnie optymalna) zaznaczono na rysunku 2 liniami rzadko przerywanymi.

Ostatecznie siłę krytyczną dla rozpatrywanego pręta określimy do godnymi wzorami przybliżonymi

$$(6.24) \quad P_k = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi + 1,0035 \psi^2 - 0,5868 \psi^3 \right) \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

lub

$$(6.25) \quad P_k = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \psi - 0,1194 \psi^2 + 2,2388 \psi^3 - 1,7027 \psi^4 \right) \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

zależnie od wymaganej dokładności; w pierwszym przypadku błąd współczynnika nie przekracza 0,0464, natomiast w drugim nie przekracza 0,0112. Oczywiście, gdy aproksymowana funkcja jest w całym przedziale dodatnia lub w całym przedziale ujemna, to można by zażądać, aby względny (procentowy) błąd aproksymacji był możliwie najmniejszy. Wtedy musielibyśmy zwiększyć dokładność w pobliżu $\psi = 0$ (ponieważ wartość bezwzględna aproksymowanej funkcji osiąga w tym punkcie swój kres dolny), zmniejszając ją w pobliżu $\psi = 1$. Metody obliczeniowe nie uległyby zmianie, jedynie warunek (2.4) zostałby zastąpiony przez

$$(6.26) \quad \max_{a \leq x \leq b} \frac{f(x) - P(x)}{f(x)} = - \min_{a \leq x \leq b} \frac{f(x) - P(x)}{f(x)}.$$

Przy tym założeniu wielomian typu 3+1+1 mógłby być lepszy od wielomianu typu 2+2+1. Wyników obliczeń nie będziemy tu jednak przytaczali.

7. Przykład zastosowania aproksymacji jednokrotnie optymalnej w teorii plastyczności

Typowym przykładem zastosowania aproksymacji jednokrotnie optymalnej może być formułowanie równań krzywych granicznych w teorii plastyczności. Weźmy pod uwagę nośność graniczną przekroju pręta, wykonanego z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, poddanego jednoczesnemu zginaniu i rozciąganiu lub ściskaniu. W przypadku przekroju prostokątnego zginanego w płaszczyźnie głównej krzywa graniczna jest parabolą (właściwie składa się z dwóch łuków paraboli) i wyprowadzenie równania tej krzywej nie stwarza najmniejszych trudności. Jednak już np. w przypadku przekroju kołowego problem komplikuje się znacznie: dysponujemy tylko równaniami parametrycznymi o dość złożonej budowie. W tym przypadku zastosowanie aproksymacji jednokrotnie optymalnej jest szczególnie korzystne, bowiem dla dalszych zastosowań (np. dla przybliżonego obliczania ugięć sprężysto-plastycznych lub dla rozwiązywania układów prętowych) posiadanie prostego a możliwie dokładnego wzoru aproksymacyjnego jest bardzo ważne.

W pracy [23] określono krzywe graniczne $m = m(n)$ uogólnionymi szeregami potęgowymi o środkach w punkcie $n = 0$ i $n = 1$. Przez m oznaczono tu bezwymiarowy moment zginający, przez n bezwymiarową siłę podłużną, mianowicie

$$(7.1) \quad m = \frac{1}{W_g Q} M_g, \quad n = \frac{1}{FQ} N,$$

gdzie W_g jest sprężystym wskaźnikiem zginania, F polem powierzchni przekroju, Q granicą plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu. Pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych (w sensie ciała idealnie sprężysto-plastycznego) przy czystym zginaniu lub przy czystym rozciąganiu odpowiada więc kolejno $m = 1$ lub $n = 1$.

Szeregi potęgowe określające funkcję $m = m(n)$ dla przekroju kołowego posiadają postać

$$(7.2) \quad m = \frac{16}{3\pi} - \frac{\pi}{2} n^2 - \frac{\pi^3}{384} n^4 - \frac{13\pi^5}{184\,320} n^6 - \dots,$$

$$m = 1,69765 - 1,57080 n^2 - 0,08075 n^4 - 0,02158 n^6 - \dots,$$

$$(7.3) \quad m = 4(1-n) - \frac{3^{5/3} \pi^{2/3}}{2^{1/3} 5} (1-n)^{5/3} - \frac{3^{7/3} \pi^{4/3}}{2^{1/3} 35} (1-n)^{7/3} - \frac{33\pi^2}{11\,200} (1-n)^3 - \dots,$$

$$m = 4(1-n) - 2,12482(1-n)^{5/3} - 0,13437(1-n)^{7/3} - 0,02908(1-n)^3 - \dots$$

Będziemy poszukiwali wielomianu aproksymującego funkcję $m = m(n)$ typu

$$(7.4) \quad m = a + bn^2 + cn^4,$$

gdyż ze względu na symetrię przekroju funkcja ta musi być parzysta. Zauważymy, przede wszystkim, że w punkcie $n = 1$ możemy uzyskać zgodność nie większą, niż samej funkcji i pierwszej pochodnej, bowiem — jak widać ze wzoru (7.3) — druga pochodna w tym punkcie nie istnieje (jest nieograniczenie wielka). Wyklucza to również możliwość stosowania oszacowań klasycznych wzorem typu (5.7), tym niemniej rzeczywista dokładność aproksymacji wielomianem (7.4) będzie stosunkowo wysoka. Zastosujemy aproksymację jednokrotnie optymalną typu $1+1+1$ (zgodność jedynie samej funkcji na brzegach przedziału $0 \leq n \leq 1$ i jeden parametr swobodny); w rzeczywistości uzyskamy typ $2+1+1$, ponieważ wielomian (7.4) zapewnia automatycznie zgodność pierwszej pochodnej w punkcie $n = 0$.

Tok postępowania pozostaje podobny jak w poprzednim przykładzie; tablicę wartości funkcji $m = m(n)$ otrzymujemy dzięki parametrycznemu przedstawieniu tej funkcji lub dzięki szeregom (7.2) i (7.3). Ostatecznie uzyskujemy

$$(7.5) \quad m \approx 1,6977 - 1,5294 n^2 - 0,1683 n^4,$$

przy czym $|B| \leq 0,0053$, zatem istotnie błąd jest zupełnie pomijalny dla większości zastosowań. Jeszcze raz należy podkreślić, że oszacowanie tego błędu tkwi w samej technice doboru współczynników wielomianu aproksymacyjnego, natomiast oszacowanie wzorem typu (5.7) jest tu bezwartościowe.

8. Uwagi końcowe

Dla uzyskania ogólności rozważań możnaby wprowadzić pojęcie aproksymacji m -krotnie optymalnej wielomianem o n parametrach podlegających wyznaczeniu (m parametrów wyznaczanych z warunku minimum odchylenia). Wtedy $m = 0$ odpowiada aproksymacji brzegowej Hermite'a, $m = n$ — aproksymacji Czebyszewa. Wydaje się jednak, że praktycznie tylko przypadek $m = 1$ zasługuje na uwagę, bowiem przy $m > 1$ zasadnicza zaleta, mianowicie prostota określania współczynników wielomianu, zanika.

Zaproponowana metoda aproksymacji jednokrotnie optymalnej nadaje się stosunkowo dobrze do budowy wzorów przybliżonych, zdalnych do bezpośredniego zastosowania w praktyce inżynierskiej w tych przypadkach, gdy zależność dana jest w sposób skomplikowany, np. uwikłany lub parametryczny. Nakład pracy przy znajomości wartości funkcji w kilkunastu punktach i odpowiedniej ilości pochodnych na brzegach przedziału wymaga 1-2 godzin rachunków dla określenia liczbowej wartości współczynników wielomianu, jest więc wielokrotnie mniejszy niż przy aproksymacji Czebyszewa, choć większy niż przy aproksymacji brzegowej Hermite'a. Pewną trudność — podobnie, jak w przypadku aproksymacji Czebyszewa — stanowi aproksymowanie funkcji, zawierających jeden lub kilka parametrów. Trudność tę można pokonać ustalając jeden z węzłów interpolacji w punkcie dającym najlepsze oszacowanie (wyznaczanie τ , p. 5); odpowiednia aproksymacja ma się tak do aproksymacji jednokrotnie optymalnej, jak optymalna aproksymacja interpolacyjna do aproksymacji Czebyszewa, [9]. Unikamy wtedy niedogodnego warunku (2.4), choć błąd aproksymacji ulega z reguły pewnemu zwiększeniu.

Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. АСНIEЗЕР, *Teoria aproksymacji* (tłum. z ros.), PWN, Warszawa 1957.
- [2] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, Т. I. Физматгиз, Москва 1959.
- [3] П. Л. Чебышев, *Теория механизмов, известных под названием параллелограмов* (1854), Сочин. т. II, 23—51; *Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций* (1859), Сочин. т. II, 151—235.
- [4] Б. П. Демидович, И. А. Марон, *Основы вычислительной математики*, Физматгиз, Москва 1960.
- [5] L. FOX, *The numerical solution of two-point boundary problems*, Clarendon Press, Oxford 1957.
- [6] В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*, Гостехиздат, Москва 1954.
- [7] D. R. HARTREE, *Numerical analysis*, Clarendon Press, Oxford 1958.
- [8] D. JACKSON, *The theory of approximation*, Am. Math. Soc. Colloquium Publ., Vol. 11, 1930.
- [9] J. ŁUKASZEWICZ, M. WARMUS, *Metody numeryczne i graficzne*, t. 1, PWN, Warszawa 1956.
- [10] В. М. Макушин, Л. А. Корелков, *Расчет на устойчивость стоек с промежуточными опорами*, Труды Моск. Мех.-Машиностр. Института им. Баумана, вып. 56/3, Машгиз, Москва 1939 (сут. wg. [14]).
- [11] Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*, Гостехиздат, Москва 1953.
- [12] W. E. MILNE, *Numerical Calculus*, Princeton UP 1949 (tłum. ros., Moskwa 1952).
- [13] ST. PIĘCHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the plastic interaction-curve for bending and torsion of a circular bar*, Arch. Mech. Stos. 5, 13 (1961), 669-692.
- [14] S. D. PONOMARIEW i inni, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, t. II, PWN, Warszawa 1958 (tłum. z ros.).
- [15] Е. Я. Ремез, *Общие вычислительные методы чебышевского приближения*, Изд. АН УССР.
- [16] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, Москва 1960.
- [17] W. WALTER, *Über Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer Funktionen*, GAMM-Tagung Würzburg, April 1961.
- [18] H. WERNER, *Bemerkungen zur Tschebyscheffschen Approximation mit rationalen Funktionen*, GAMM-Tagung Würzburg, April 1961.
- [19] W. WETTERLING, *Zur Anwendung des Newtonschen Iterationsverfahrens bei der numerischen Behandlung des Tschebyscheff-Approximation*, GAMM-Tagung Würzburg, April 1961.
- [20] M. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcanego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., 3, 10 (1962).
- [21] M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inżyn., 3, 4 (1956), 367-412.
- [22] M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Z. angew. Math. Physik, 6, 12 (1961), 572-576.
- [23] M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe graniczne dla belek jednocześnie rozciąganych i zginanych o dowolnym przekroju* (w druku).

Резюме

«ОДНОКРАТНО ОПТИМАЛЬНАЯ» АПРОКСИМАЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Апроксимация Чебышева, называемая также наилучшей или оптимальной, кроме главного достоинства, которым является уменьшение до минимума ошибки приближения в определенном интервале, проявляет однако с практической точки зрения несколько недостатков.

На краях интервала, погрешность приближения достигает наибольшего значения, тогда как красивые значения имеют, часто, важную физическую интерпретацию и поэтому желательно сохранить в этих точках точные значения; ошибка экстраполяции является здесь, как правило, больше, чем при других типах приближений. Наконец самый подбор коэффициентов аппроксимационного полинома является трудной и трудоемкой задачей. Упомянутых ошибок не исключает напр. «краевая аппроксимация» Гермита, использующая условия согласованности функций и несколько первых производных на краях интервала; однако ошибка этого приближения внутри интервала бывает, как правило, довольно большая. Предложенный тип «однократно оптимальной» аппроксимации представляет некоторый промежуточный тип приближения, так как в данном случае используется на краю интервала в общем ($n-1$) условий согласованности Гермита, тогда как один параметр следует определить из условия минимума отклонения. Итерационный подбор значений этого параметра не встречается с большими затруднениями; в п. 2 формулируется условие подбора (2. 4), а в п. 3 обсуждается применение способа линейной интерполяции (метод секущих), (3.2).

В разделе 4 определяются численно экстремумы функций, необходимые для применения раньше выведенных формул. Экстремальное значение f_m определяется сперва с помощью ряда (4.7), а затем при помощи конечных разностей, аппроксимируя функцию полиномом второй степени (4.11), третьей степени (4.17) и (4.18) и четвертой степени (4.12) и (4.13); в качестве примера определяется, с помощью этих формул, экстремум функции, $f(x) = -x \ln x$.

В разделе 5 определяется погрешность однократно оптимальной аппроксимации классическим методом, используя общую формулу (5.7). Эта оценка приводится здесь только для проведения сравнений, ибо более точная оценка состоит, в данном случае, в технике подбора коэффициентов аппроксимационного полинома, основываясь при этом на условии (2.4).

Даются также примеры применения предлагаемой аппроксимации к теории устойчивости и теории пластичности, обсуждая при этом подробно выведение приближенных формул для критической силы для стержня закрепленного и нагруженного способом показанным на рис. 1. Результаты вычислений приводятся на рис. 2 и табл. 6 при чем в качестве окончательных формул предлагаются формулы (6.24) и (6.25).

Summary

ON THE SO-CALLED ONEFOLD OPTIMUM APPROXIMATION AND SOME OF ITS APPLICATIONS IN THE DOMAIN OF MECHANICS

The Tchebyshev approximation called also the best or optimum approximation shows, in addition to the principal advantage of minimizing the approximation error in a certain interval, a few drawbacks from the practical viewpoint. The approximation error becomes maximum at the ends of the interval, where the boundary values have often an important physical interpretation it being therefore desirable to preserve the accurate values at these points; The extrapolation error is, with this method as a rule higher than for other approximation types. Finally, the selection of the coefficients of the approximation polynomial is a difficult problem and requires considerable labour. These drawbacks can be avoided, for instance, if the Hermite boundary approximation is used in which the agreement of the function itself and a few of its derivatives at the ends of the interval is made use of; however, the error of this approximation inside the interval is, as a rule, relatively large. The «onefold optimum» approximation proposed in the present paper constitutes a certain intermediate type. $n-1$ Hermite's conditions of onefold are used one parameter remaining to be determined from the condition of minimum deviation. The iteration procedure of obtaining the value of this parameter presents no major difficulties. In Sec. 2 a condition is established for this procedure while Sec. 3 is concerned with the application of falsi rule (3.2).

Sec. 4 is devoted to a numerical determination of the extremum values of the function, necessary for the application of the equations derived. The extremum value f_m is determined first by means of the series (4.7) and then by means of finite differences the function being approximated by means of a polynomial of the second (4.11), third (4.18) and fourth order polynomial (4.12) and (4.13). As an example the equations obtained are used to calculate the extremum of the function $f(x) = -x \ln x$.

Section 5 brings an estimate of the error of the «onefold optimum» approximation by means of the classical method consisting of making use of the general formula (5.7). This estimate is quoted merely for comparison purposes, a more accurate estimate being concerned with the technique of obtaining the coefficients of the approximating polynomial by means of the condition (2.4).

Some examples are also given concerning the application of the approximation method proposed to the theory of stability and the theory of plasticity; the derivation of approximate equations for the critical force are discussed in detail for a clamped bar loaded as shown by Fig. 1.

Figure 2 and Table 6 represent the results. The equations (6.24) and (6.25) are proposed as final formulae.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lipca 1962 r.