ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, **11** (1963)

NAPRĘŻENIA W RURZE CYLINDRYCZNEJ OBRACAJĄCEJ SIĘ ZE ZMIENNĄ PRĘDKOŚCIĄ KĄTOWĄ

AVTAR SINGH i PRATAP PURI (KHARAGPUR)

1. Wstęp

Dobrze znane jest rozwiązanie problemu rozkładu naprężeń w rurze cylindrycznej obracającej się ze stałą prędkością kątową dookoła swej osi, [1]. Natomiast w przypadku, gdy prędkość kątowa jest funkcją czasu w równaniach zmian sprężystych, nie można pominąć wyrazów pochodzących od sił i momentów bezwładności, a powstające siły masowe działają nie tylko w kierunku normalnym, ale i w kierunku stycznym. Problem ma w tym przypadku charakter dynamiczny i jest bardziej skomplikowany pod względem matematycznym.

W niniejszej pracy rozpatrzymy jedynie bardzo prosty przypadek nieskończonej rury cylindrycznej obracającej się dookoła swej osi ze zmienną prędkością kątową $\overline{\omega}$. Szczegółowo przedyskutowane zostaną następujące przypadki szczególne

$$\overline{\omega} = \omega_0 \infty_0 \cos st, \tag{1.1}$$

$$\overline{\omega} = \omega_0 \cos^2 st, \tag{1.2}$$

$$\overline{\omega} = \omega_0 e^{-st}. \tag{1.3}$$

2. Równania problemu

Przyjmijmy cylindryczny układ współrzędnych r, θ, z i weźmy pod uwagę rurę cylindryczną nieskończoną, ograniczoną promieniami R_1 i R_2, obracającą się wokół swej osi z prędkością kątową $\overline{\omega}$. Przyjmijmy oś rury za oś z, a dowolny jej punkt za początek układu. Przemieszczenia u, v, w w kierunkach r, θ, z będą wynosiły

$$u = u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad w = w(r, t) = 0. \tag{2.1}$$

Składowe odkształcenia określone będą związkami

$$\begin{gathered} e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad e_{zz} = 0, \\ e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad e_{\theta z} = e_{rz} = 0; \end{gathered} \tag{2.2}$$

jest to zatem przypadek odkształceń płaskich, [1].

Związki między odkształceniami a naprężeniami określone są wzorami

$$\tau_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.3}$$

gdzie λ i μ są stałymi Lamégo, a Δ jest współczynnikiem dylatacji.

Równania ruchu, w których za funkcje niewiadome przyjęto przemieszczenia, będą miały postać

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\bar{\omega}^2\varrho r=\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

oraz

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t}\varrho r=\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Podstawiając

(2.4)
$$\frac{\varrho}{\lambda+2\mu}=\frac{1}{c^2},\qquad \frac{\varrho}{\mu}=\frac{1}{c_1^2},$$

otrzymamy równania ruchu w następującej postaci:

(2.5)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u+\frac{\bar{\omega}^2}{c^2}r=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

oraz

(2.6)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r^2}v+\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t}\frac{r}{c_1^2}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Warunkami brzegowymi są

(2.7)
$$\tau_{rr}=\tau_{r\theta}=0\quad \text{dla}\quad r=R_1\quad \text{i}\quad r=R_2.$$

Przejdziemy teraz do rozpatrzenia przypadków szczególnych.

3. Przypadek drgań z prędkością kątową $\bar{\omega}=\mathrm{Re}\,\omega_0 e^{ist}$

Podstawiając $\bar{\omega}=\omega_0 e^{ist}$ do równań (2.5) i (2.6) otrzymamy

(3.1)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{c^2}(r\,e^{2ist}+1)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

(3.2)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{is\omega_0}{c_1^2}re^{ist}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Rozwiązanie równania (3.1). Przyjmijmy, że

$$u=F_1(r)+F_2(r)\,e^{2ist}.$$

Porównując współczynniki przy wyrazie wykładniczym oraz wyrazy pozostałe po obu stronach równania (3.1) i mnożąc obie strony przez r^2 otrzymamy

(3.3)
$$r^2F_1''+rF_r'-F_1+\frac{\omega_0^2r^3}{2c^2}=0$$

oraz

(3.4)
$$r^2F_2''+rF_2'-F_2+\frac{4r^2s^2}{c^2}F_2+\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2r^3}{c^2}=0.$$

Rozwiązaniami równań (3.3) i (3.4) są

$$F_1 = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{\omega_0^2 r^3}{16 c^2}, \tag{3.5}$$

$$F_2 = A_2 J_1\left(\frac{2rs}{c}\right) + B_2 Y_1\left(\frac{2rs}{c}\right) - \frac{\omega_0^2 r}{8s^2}.$$

Rozwiązaniem równania (3.1) jest zatem

$$u = \left[A_2 J_1\left(\frac{2rs}{c}\right) + B_2 Y_1\left(\frac{2rs}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2} r\right] e^{2ist} + A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{\omega_0^2}{16c^2} r^3. \tag{3.6}$$

Składowe odkształcenia określone są następująco:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \left[\frac{2s}{c} A_2 J_1'\left(\frac{2rs}{c}\right) + \frac{2s}{c} B_2 Y_1'\left(\frac{2rs}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2}\right] e^{2ist} + A_1 - \frac{B_1}{r^2} - \frac{3\omega_0^2}{16c^2} r^2,$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \left[\frac{A_2}{r} J_1\left(\frac{2rs}{c}\right) + \frac{B_2}{r} Y\left(\frac{2rs}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2}\right] e^{2ist} + A_1 + \frac{B_1}{r^2} - \frac{\omega_0^2}{16c^2} r^2,$$

$$e_{zz} = 0,$$

a naprężenia wyznaczone ze związków (2.3) wynoszą

$$\tau_{rr} = \left\{A_2 \frac{2s}{c}\left[\lambda J_0\left(\frac{2rs}{c}\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2rs}{c}\right)\right] + B_2 \frac{2s}{c}\left[\lambda Y_0\left(\frac{2rs}{c}\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{2rs}{c}\right)\right] - \right. \tag{3.7}$$

$$\left. - \frac{\omega_0^2}{4s^2}(\lambda+\mu)\right\} e^{2ist} + 2(\lambda+\mu) A_1 - \frac{2\mu B_1}{r^2} - \frac{\omega_0^2}{8c^2}(2\lambda+3\mu) r^2,$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\left\{\left[\frac{2s}{c}\left(A_2 J_0\left(\frac{2rs}{c}\right) + B_2 Y_0\left(\frac{2rs}{c}\right)\right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{2ist} + 2A_1 - \frac{\omega_0^2}{4c^2} r^2\right\} + \tag{3.8}$$

$$+ 2\mu\left\{\left[\left(A_2 J_1\left(\frac{2rs}{c}\right) + B_2 Y_1\left(\frac{2rs}{c}\right)\right)\frac{1}{r} - \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{2ist} + A_1 + \frac{B_1}{r^2} - \frac{\omega_0^2}{16c^2} r^2\right\}$$

oraz

$$\tau_{zz} = \lambda\left\{\left[\frac{2s}{c}\left(A_2 J_0\left(\frac{2rs}{c}\right) + B_2 Y_0\left(\frac{2rs}{c}\right)\right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{2ist} + 2A_1 - \frac{\omega_0^2}{4c^2} r^2\right\}. \tag{3.9}$$

Nakładając warunki brzegowe (2.7) na τ_{rr} otrzymamy ze wzoru (3.7)

$$A_2\left[\lambda J_0\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right)\right] + B_2\left[\lambda Y_0\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\mu Y_1'\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right)\right] = (\lambda+\mu)\frac{\omega_0^2 c}{8s^3}$$

oraz

$$2(\lambda+\mu) A_1 R_{1,2}^2 - 2\mu B_1 - \frac{1}{8}(2\lambda+3\mu)\frac{\omega_0^2}{c^2} R_{1.2}^4 = 0.$$

Rozwiązując te równania otrzymamy

$$A_1 = \frac{1}{16}\frac{\omega_0^2}{c^2}\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(R_1^2+R_2^2),$$

$$B_1 = \frac{1}{16}\frac{\omega_0^2}{c^2}\frac{2\lambda+3\mu}{\mu}R_1^2+R_2^2,$$

$$A_2 = \frac{(\lambda+\mu)\,\omega_0^2 c}{8s^3 h}\left[\lambda Y_0\left(\frac{2sR_2}{c}\right)+2\mu Y_1'\left(\frac{2sR_2}{c}\right)-\lambda Y_0\left(\frac{2sR_1}{c}\right)-2\mu Y_1'\left(\frac{2sR_1}{c}\right)\right],$$

$$B_2 = \frac{(\lambda+\mu)\,\omega_0^2 c}{8s^3 h}\left[\lambda J_0\left(\frac{2sR_1}{c}\right)+2\mu J_1'\left(\frac{2sR_1}{c}\right)-\lambda J_0\left(\frac{2sR_2}{c}\right)-2\mu J_1'\left(\frac{2sR_2}{c}\right)\right],$$

gdzie

$$h = \left[\lambda J_0\left(\frac{2sR_1}{c}\right)+2\mu J_1'\left(\frac{2sR_1}{c}\right)\right]\left[\lambda Y_0\left(\frac{2sR_2}{c}\right)+2\mu Y_1'\left(\frac{2sR_2}{c}\right)\right]-$$
$$-\left[\lambda J_0\left(\frac{2sR_2}{c}\right)+2\mu J_1'\left(\frac{2sR_2}{c}\right)\right]\left[\lambda Y_0\left(\frac{2sR_1}{c}\right)+2\mu Y_1'\left(\frac{2sR_1}{c}\right)\right].$$

Rozwiązanie równania (3.2). Przyjmując $\overline{\omega} = \omega_0 e^{ist}$ oraz $v = F(r)\,e^{ist}$ otrzymamy ze związku (3.2)

$$F''' + \frac{1}{r}F' + \frac{s^2}{c_1^2}F - \frac{1}{r^2}F + \frac{\omega_0 s}{c_1^2}ir = 0.$$

Równanie to ma budowę podobną do równania (3.4), rozwiązaniem jego jest więc

$$F = AJ_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) + BY\left(\frac{sr}{c_1}\right) - i\frac{\omega_0}{s}r,$$

a wobec tego

$$v = \left[AJ_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) + BY_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) - i\frac{\omega_0 r}{s}\right]e^{ist}.$$

Odkształcenie przy ścinaniu $e_{r\theta}$ określone jest wzorem

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = -\frac{s}{c_1}\left[AJ_2\left(\frac{sr}{c_1}\right) + BY_2\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right]e^{ist},$$

a naprężenie ścinające $\tau_{r\theta}$ ma postać

$$\tau_{r\theta} = -\mu\frac{s}{c_1}\left[AJ_2\left(\frac{sr}{c_1}\right) + BY_2\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right]e^{ist}. \tag{3.10}$$

Z warunków brzegowych (2.7) na $\tau_{r\theta}$ i wzoru (3.10) otrzymujemy

$$-\mu\frac{s}{c_1}\left[AJ_2\left(\frac{s}{c_1}R_{1,2}\right) + BY_2\left(\frac{s}{{}_1c}R_{1,2}\right)\right] = 0.$$

Rozwiązując te równania ze względu na A i B otrzymamy

$$A = B = 0$$

i wobec tego

$$v = \operatorname{Re}\left(-\frac{i\omega_0}{s} r e^{ist}\right) = \frac{\omega_0 r}{s} \sin st.$$

4. Przypadek ubrotu z prędkością $\overline{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \omega_0 (1 + e^{2ist})$

Przy $\overline{\omega} = \frac{1}{2} \omega (1 + e^{2ist})$ równania (2.5) i (2.6) przyjmują postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{8} r \frac{\omega_0^2}{c^2}(3 + 4e^{2ist} + e^{4ist}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{i\omega_0}{s} r e^{2ist} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

Rozwiązanie równania (4.1). Niech

$$u = F_1(r) + F_2(r) e^{2ist} + F_3(r) e^{4ist}.$$

Podstawiając to wyrażenie do (4.1) i porównując współczynniki przy różnych potęgach liczby e po obu stronach równania otrzymamy

$$\tag{4.3} \begin{aligned} &F_1'' + \frac{1}{r}F_1' - \frac{1}{r^2}F_1 + \frac{3}{8}\frac{\omega_0^2}{c^2} r = 0, \\ &F_2'' + \frac{1}{r}F_2' - \frac{1}{r^2}F_2 + \frac{4s^2}{c^2}F_2 + \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{c^2} r = 0, \\ &F_3'' + \frac{1}{r}F_3' - \frac{1}{r^2}F_3 + \frac{16s^2}{c^2}F_3 + \frac{1}{8}\frac{\omega_0^2}{c^2} r = 0. \end{aligned}$$

Równanie $(4.3)_1$ jest analogiczne do równania (3.3) poprzedniego paragrafu, jego rozwiązaniem jest zatem

$$F_1 = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{3}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^3. \tag{4.4}$$

Równania $(4.3)_2$ i $(4.3)_3$ są podobne do równania (3.4) p. 3 i od razu możemy napisać, że ich rozwiązaniami są

$$F_2 = A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + B_2 Y_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{1}{8}\frac{\omega_0^2}{s^2} r \tag{4.5}$$

oraz

$$F_3 = A_3 J_1\left(\frac{4sr}{c}\right) + B_3 Y_1\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{1}{128}\frac{\omega_0^2}{s^2} r. \tag{4.6}$$

Funkcja u jest wobec tego określona wzorem

$$u = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{3}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^3 + \left[A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + B_2 Y_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{1}{8}\frac{\omega_0^2}{s^2} r\right] e^{2ist} + \\ + \left[A_3 J_1\left(\frac{4sr}{c}\right) + B_3 Y_1\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{1}{128}\frac{\omega_0^2}{s^2} r\right] e^{4ist},$$

a składowe odkształceń wynoszą

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = A_1 - \frac{B_1}{r^2} - \frac{9}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \left\{\frac{2s}{c}\left[A_2 J_1'\left(\frac{2sr}{c}\right) + B_2 Y_1'\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right\} e^{2ist} + \left\{\frac{4s}{c}\left[A_2 J_1'\left(\frac{4sr}{c}\right) + B_3 Y_1'\left(\frac{4sr}{c}\right)\right] - \frac{1}{128}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right\} e^{4ist},$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = A_1 + \frac{B_1}{r^2} - \frac{3}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \left\{\frac{1}{r}\left[A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + B_2 Y_1\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right\} e^{2ist} + \left\{\frac{1}{r}\left[A_3 J_1\left(\frac{4sr}{c}\right) + B_3 Y_1\left(\frac{4sr}{c}\right)\right] - \frac{1}{128}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right\} e^{4ist}.$$

Przy użyciu wzorów (2.3) naprężenia określimy następująco:

$$\tau_{rr} = 2A_1(\lambda+\mu) - 2\mu\frac{B_1}{r^2} - \frac{3}{32}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^2(2\lambda + 3\mu) + \\ + \frac{2s}{c} A\left[\lambda J_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] e^{2ist} + \frac{2s}{c} B_2\left[\lambda Y_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] e^{2ist} + \\ + \frac{4s}{c} A_3\left[\lambda J_0\left(\frac{4sr}{c}\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{4sr}{c}\right)\right] e^{4ist} + \frac{4s}{c} B_3\left[\lambda Y_0\left(\frac{4sr}{c}\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{4sr}{c}\right)\right] e^{4ist} - \\ - \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{s^2}(\lambda + \mu) e^{2ist} - \frac{1}{64}\frac{\omega_0^2}{s^2}(\lambda + \mu) e^{4ist},$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\left\{2A_1 - \frac{3}{16}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \left[\frac{2s}{c} A_2 J_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{2s}{c} B_2 Y_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right] e^{2ist} + \right. \\ \left. + \left[\frac{4s}{c} A_3 J_0\left(\frac{4sr}{c}\right) + \frac{4s}{c} B_3 Y_0\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{1}{64}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right] e^{4ist}\right\} + 2\mu\left\{A_1 + \frac{B_1}{r^2} - \frac{3}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \right. \\ + \left[\frac{1}{r} A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{1}{r} B_2 Y_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{1}{8}\frac{\omega_0^2}{c^2}\right] e^{2ist} + \\ \left. + \left[\frac{1}{r} A_3 J_1\left(\frac{4sr}{c}\right) + \frac{1}{r} B_3 Y_1\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{1}{128}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right] e^{4ist}\right\},$$

$$\tau_{zz} = \lambda\left\{2A_1 - \frac{3}{16}\frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \left[\frac{2s}{c} A_2 J_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{2s}{c} B_2 Y_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right] e^{2ist} + \left[\frac{4s}{c} A_3 J_0\left(\frac{4sr}{c}\right) + \frac{4s}{c} B_3 Y_0\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{1}{64}\frac{\omega_0^2}{s^2}\right] e^{4ist}\right\}.$$

Z warunków brzegowych (2.7) otrzymamy

$$\left[\tau_{rr}\right]_{r=R_1} = \left[\tau_{rr}\right]_{r=R_2} = 0.$$

Przyjmując $r = R_1$ i $r = R_2$ w wyrażeniu określającym τ_{rr} i przyrównując do zera otrzymamy

$$2(\lambda+\mu) A_1 R_{1,2}^2 - 2\mu B_1 - \frac{3}{32}\frac{\omega_0^2}{c^2}(2\lambda + 3\mu) R_{1,2}^4 = 0,$$

$$\frac{2s}{c} A_2\left[\lambda J_0\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right)\right] + \\ + \frac{2s}{c} B_2\left[\lambda Y_0\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{2s}{c} R_{1,2}\right)\right] - \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{s^2}(\lambda+\mu) = 0$$

oraz

$$\frac{4s}{c} A_3\left[\lambda J_0\left(\frac{4s}{c} R_{1,2}\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{4s}{c} R_{1,2}\right)\right] + \\ + \frac{4s}{c} B_3\left[\lambda Y_0\left(\frac{4s}{c} R_{1,2}\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{4s}{c} R_{1,2}\right)\right] - \frac{1}{64}\frac{\omega_0^2}{s^2}(\lambda+\mu) = 0.$$

Z równań tych znajdujemy

$$A_1 = \frac{3}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2}\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(R_1^2 + R_2^2),$$

$$B_1 = \frac{3}{64}\frac{\omega_0^2}{c^2}\frac{2\lambda+3\mu}{\mu} R_1^2 R_2^2,$$

$$A_2 = \frac{(\lambda+\mu)\,\omega_0^2 c}{8s^3 h_2}\left[\lambda Y_0\left(\frac{2s}{c} R_2\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{2s}{c} R_2\right) - \lambda Y_0\left(\frac{2s}{c} R_1\right) - 2\mu Y_1'\left(\frac{2s}{c} R_1\right)\right],$$

$$B_2 = \frac{(\lambda+\mu)\,\omega_0^2 c}{8s^3 h_2}\left[\lambda J_0\left(\frac{2s}{c} R_1\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c} R_1\right) - \lambda J_0\left(\frac{2s}{c} R_2\right) - 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c} R_2\right)\right],$$

$$A_3 = \frac{(\lambda+\mu)\,\omega_0^2 c}{256 s^3 h_3}\left[\lambda J_0\left(\frac{4s}{c} R_1\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{4s}{c} R_2\right) - \lambda Y_0\left(\frac{4s}{c} R_1\right) - 2\mu Y_1'\left(\frac{4s}{c} R_1\right)\right],$$

$$B_3 = \frac{(\lambda+\mu)\,\omega_0^2 c}{256 s^3 h_3}\left[\lambda J_0\left(\frac{4s}{c} R_1\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{4s}{c} R_2\right) - \lambda J_0\left(\frac{4s}{c} R_2\right) - 2\mu J_1'\left(\frac{4s}{c} R_1\right)\right],$$

gdzie

$$h_2 = \left[\lambda J_0\left(\frac{2s}{c} R_1\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c} R_1\right)\right]\left[\lambda Y_0\left(\frac{2s}{c} R_2\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{2s}{c} R_2\right)\right] - \\ - \left[\lambda J_0\left(\frac{2s}{c} R_2\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c} R_2\right)\right]\left[\lambda Y_0\left(\frac{2s}{c} R_1\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{2s}{c} R_1\right)\right]$$

oraz

$$h_3 = \left[\lambda J_0\left(\frac{4s}{c}R_1\right) + 2\mu J_2'\left(\frac{4s}{c}R_1\right)\right]\left[\lambda Y_0\left(\frac{4s}{c}R_2\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{4s}{c}R_2\right)\right] -$$
$$-\left[\lambda J_0\left(\frac{4s}{c}R_2\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{4s}{c}R_2\right)\right]\left[\lambda Y_0\left(\frac{4s}{c}R_1\right) + 2\mu Y_1'\left(\frac{4s}{c}R_1\right)\right].$$

Rozwiązanie równania (4.2). Niech $v = F(r)\, e^{2ist}$. Podstawiając to wyrażenie do równania (4.2) otrzymamy

$$F'' + \frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F + \frac{4s^2}{c_1^2}F + \frac{2i\omega_0 s}{c_1^2} r = 0.$$

Równanie to jest analogiczne do równania $(4.3)_2$. Rozwiązaniem jego jest więc

$$F = AJ_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + BY_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{2i\omega_0}{s} r.$$

Zatem

$$v = \left[AJ_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + BY_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{2i\omega_0}{s} r\right] e^{ist},$$

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = -\left[AJ_2\left(\frac{2sr}{c}\right) + BY_2\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] e^{2ist}$$

oraz

$$\tau_{r\theta} = \mu e_{r\theta} = -\mu\left[AJ_2\left(\frac{2sr}{c}\right) + BY_2\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] e^{2ist}.$$

Z warunków brzegowych mamy

$$\tau_{r\theta} = 0$$

przy $r = R_1$ i $r = R_2$, co daje

$$A = B = 0.$$

Zatem

$$v = -\operatorname{Re}\left(2i\frac{\omega_0^2}{s} r\, e^{2ist}\right) = \frac{2\omega_0}{s}\sin 2st.$$

5. Wykładniczo malejąca prędkość kątowa $\overline{\omega} = \omega_0\, e^{-st}$

Równania (2.5) i (2.6) przy $\overline{\omega} = \omega_0\, e^{-st}$ przyjmują postać

(5.1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u + \frac{\omega_0^2}{c^2} r\, e^{-2st} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

(5.2) $$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}v - \frac{\omega_0^2 s}{c_1^2} r\, e^{-st} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Postępując podobnie jak w poprzednich paragrafach otrzymamy rozwiązania równań (5.1) i (5.2) w postaci

$$u = \left[AI_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + BK_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{4s^2}r\right]e^{-2st},$$

$$v = \left[DI_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) + EK_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) - \frac{\omega_0}{s}r\right]e^{-st}.$$

Wobec tego składowe odkształceń określone są wzorami

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \left\{\frac{2s}{c}\left[AI_1'\left(\frac{2sr}{c}\right) + BK_1'\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] + \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right\}e^{-2st},$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \left\{\frac{1}{r}\left[AI_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + BK_1\left(\frac{2sr}{c}\right)\right] + \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right\}e^{-2st},$$

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \left[D\frac{s}{c_1}I_2\left(\frac{sr}{c_1}\right) - E\frac{s}{c_1}K_2\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right]e^{-st}$$

i ze wzoru (2.3) uzyskamy następujące wyrażenia dla naprężeń:

$$\tau_{rr} = \lambda\left[\frac{2s}{c}AI_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{2s}{c}BK_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{2s^2}\right]e^{-2st} +$$
$$+ 2\mu\left[\frac{2s}{c}AI_1'\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{2s}{c}BK_1'\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right]e^{-2st},$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\left[\frac{2s}{c}AI_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{2s}{c}BK_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{2s^2}\right]e^{-2st} +$$
$$+ 2\mu\left[\frac{1}{r}AI_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{1}{r}BK_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right]e^{-2st},$$

$$\tau_{zz} = \lambda\left[\frac{2s}{c}AI_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{2s}{c}BK_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{2s^2}\right]e^{-2st},$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[D\frac{s}{c_1}I_2\left(\frac{sr}{c_1}\right) - E\frac{s}{c_1}K_2\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right]e^{-st}.$$

Wykorzystując warunki brzegowe (2.3) otrzymamy

$$\frac{2s}{c}A\left[\lambda I_0\left(\frac{2s}{c}R_{1,2}\right) + 2\mu I_1'\left(\frac{2s}{c}R_{1,2}\right)\right] -$$
$$- \frac{2s}{c}B\left[\lambda K_0\left(\frac{2s}{c}R_{1,2}\right) - 2\mu K_1'\left(\frac{2s}{c}R_{1,2}\right)\right] + (\lambda+\mu)\frac{\omega_0^2}{2s^2} = 0$$

oraz

$$\mu\frac{s}{c_1}\left[DI_2\left(\frac{2s}{c_1}R_{1,2}\right) - EK_2\left(\frac{2s}{c}R_{1,2}\right)\right] = 0.$$

Rozwiązując te równania otrzymamy

$$A = -\frac{\omega_0^2 c}{4s^3 h}(\lambda+\mu)\left[\lambda K_0\left(\frac{2s}{c}R_2\right) - 2\mu K_1'\left(\frac{2s}{c}R_2\right) - \lambda K_0\left(\frac{2s}{c}R_1\right) + 2\mu K_1'\left(\frac{2s}{c}R_1\right)\right],$$

$$B = -\frac{\omega_0^2 c}{4s^3 h}(\lambda+\mu)\left[\lambda I_0\left(\frac{2s}{c}R_2\right) + 2\mu I_1'\left(\frac{2s}{c}R_2\right) - \lambda I_0\left(\frac{2s}{c}R_1\right) - 2\mu I_1'\left(\frac{2s}{c}R_1\right)\right],$$

$$D = E = 0,$$

gdzie

$$h = \left[\lambda I_0\left(\frac{2s}{c}R_1\right) + 2\mu I_1'\left(\frac{2s}{c}R_1\right)\right]\left[\lambda K_0\left(\frac{2s}{c}R_2\right) - 2\mu K_1'\left(\frac{2s}{c}R_2\right)\right] -$$
$$-\left[\lambda I_0\left(\frac{2s}{c}R_2\right) + 2\mu I_1'\left(\frac{2s}{c}R_2\right)\right]\left[\lambda K_0\left(\frac{2s}{c}R_1\right) - 2\mu K_1'\left(\frac{2s}{c}R_1\right)\right].$$

6. Przypadek walca

Wyników dotyczących walca nie można otrzymać z wyników dotyczących rury cylindrycznej poprzez podstawienie w nich $R_1 = 0$. Na wewnętrznej powierzchni rury, to jest dla $r = R_1$, muszą być spełnione warunki brzegowe $\tau_{r\theta} = \tau_{rr} = 0$. Warunki te nie są spełnione, gdy $R_1 = 0$, tj. gdy mamy do czynienia z walcem. W związku z tym przypadek walca badać będziemy osobno.

Równania tego zagadnienia są identyczne z równaniami obrotu rury cylindrycznej, jedynie warunki brzegowe dla $r = R_1$ muszą być zastąpione przez warunek, że τ_{rr} i $\tau_{r\theta}$ są skończone przy $r = 0$.

Rozpatrzymy teraz pokrótce te przypadki, które poprzednio rozważyliśmy dla rur.

6.1. Przypadek drgań: $\overline{\omega} = \omega_0 \cos st = \mathrm{Re}\, \omega_0 e^{ist}$. Jeżeli uwzględnimy właściwe warunki dla $r = 0$, to rozwiązania równań (3.1) i (3.2) zredukują się do

$$u = \left[A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2}r\right]e^{2ist} + A_1 r - \frac{\omega_0^2}{16c^2}r^3$$

oraz

$$v = \left[AJ_1\left(\frac{sr}{c_1}\right) - \frac{i\omega_0}{s}r\right]e^{ist}.$$

Składowe odkształcenia wynoszą zatem

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \left[\frac{2s}{c}A_2 J_1'\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2}\right]e^{2ist} + A_1 - \frac{3\omega_0^2}{16c^2}r^2,$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \left[\frac{1}{r}A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2}\right]e^{2ist} + A_1 - \frac{\omega_0^2}{16c^2}r^2,$$

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \left[A\frac{s}{c_1}J_1'\left(\frac{sr}{c_1}\right) - \frac{1}{r}AJ_1\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right]e^{ist},$$

a naprężenia określone ze wzoru (2.3) przyjmą postać

$$\tau_{rr} = \lambda \left\{ \left[\frac{2s}{c} A_2 J_0 \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2} \right] e^{2ist} + 2A_1 - \frac{\omega_0^2}{4c^2} r^2 \right\} +$$

$$+ 2\mu \left\{ \left[\frac{2s}{c} A_2 J_1' \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2} \right] e^{2ist} + A_1 - \frac{3\omega_0^2}{16c^2} r^2 \right\},$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda \left\{ \left[\frac{2s}{c} A_2 J_0 \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2} \right] e^{2ist} + 2A_1 - \frac{\omega_0^2}{4c^2} r^2 \right\} +$$

$$+ 2\mu \left\{ \left[\frac{2s}{c} A_2 J_1' \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2} \right] e^{2ist} + A_1 - \frac{\omega_0^2}{16c^2} r^2 \right\},$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left\{ \left[\frac{2s}{c} A_2 J_0 \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2} \right] e^{2ist} + 2A_1 - \frac{\omega_0^2}{4c^2} r^2 \right\},$$

$$\tau_{r\theta} = \mu A \frac{s}{c_1} J_2 \left(\frac{2sr}{c} \right) e^{ist}.$$

Wykorzystując warunki brzegowe znajdziemy następujące wartości stałych

$$A_1 = \frac{\omega_0^2 R^2 (2\lambda + 3\mu)}{16c^2 (\lambda + \mu)},$$

$$A_2 = \frac{\omega_0^2 c (\lambda + \mu)}{8s^3 \lambda J_0 \left(\frac{2sR}{c} \right) + 2\mu J_1' \left(\frac{2sr}{c} \right)},$$

$$A = 0,$$

gdzie R jest promieniem walca.

6.2. Obrót $\overline{\omega} = \omega_0 \cos^2 st = \operatorname{Re} \frac{1}{2} (e^{2ist} + 1)$. W przypadku tym otrzymujemy

$$u = \left(A_1 r - \frac{3}{64} \frac{\omega_0^2}{c^2} r^3 \right) + \left[A_2 J_1 \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2} r \right] e^{2ist} +$$

$$+ \left[A_3 J_1 \left(\frac{4sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{128s^2} r \right] e^{4ist},$$

$$v = \left[A J_1 \left(\frac{2sr}{c_1} \right) - i \frac{\omega_0}{s} r \right] e^{2ist},$$

$$\tau_{rr} = \lambda \left\{ 2A_1 - \frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \left[\frac{2s}{c} A_2 J_0 \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2} \right] e^{2ist} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2s}{c} A_3 J_0 \left(\frac{4sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{64s^2} \right] e^{4ist} \right\} + 2\mu \left\{ A_1 - \frac{9}{64} \frac{\omega_0^2}{c^2} r^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2s}{c} A_2 \left(\frac{2sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{8s^2} \right] e^{2ist} + \left[\frac{4s}{c} A_3 J_1' \left(\frac{4sr}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{128s^2} \right] e^{4ist} \right\},$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\left\{\left[\frac{2s}{c} A_2 J_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{2ist} + 2A_1 - \frac{3\omega_0^2}{16c^2} r^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{4s}{c} A_3 J_0\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{64s^2}\right] e^{4ist}\right\} + 2\mu\left\{\left[\frac{1}{r} A_2 J_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_2^2}{8s^2}\right] e^{2ist} + \right.$$

$$\left. + A_1 - \frac{3\omega_0^2}{64c^2} r^2 + \left[\frac{1}{r} A_3 J_1\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{128s^2}\right] e^{4ist}\right\},$$

$$\tau_{zz} = \lambda\left\{\left[\frac{2s}{c} A_2 J_0\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{2ist} + \right.$$

$$\left. + 2A_1 - \frac{3\omega_0^2}{16c^2} r^2 + \left[\frac{4s}{c} A_3 J_0\left(\frac{4sr}{c}\right) - \frac{\omega_0^2}{64s^2}\right] e^{4ist}\right\},$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu A \frac{2s}{c_1} J_2\left(\frac{2sr}{c}\right) e^{2ist},$$

gdzie

$$A_1 = \frac{3\omega_0^2 (2\lambda + 3\mu) R^2}{64c^2(\lambda+\mu)},$$

$$A_2 = \frac{\omega_0^2 c}{8s^3} \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda J_0\left(\frac{2s}{c}R\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{2s}{c}R\right)},$$

$$A_3 = \frac{\omega_0^2 c}{256s^3} \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda J_0\left(\frac{4s}{c}R\right) + 2\mu J_1'\left(\frac{4s}{c}R\right)},$$

$$A = 0.$$

6.3. Obrót z prędkością malejącą wykładniczo: $\overline{\omega} = \omega_0 e^{-st}$. W tym przypadku uzyskamy

$$u = \left[A I_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{4s^2} r\right] e^{-2st},$$

$$v = \left[B I_1\left(\frac{2sr}{c}\right) - \frac{\omega_0}{s} r\right] e^{-st},$$

$$\tau_{rr} = \lambda\left[\frac{2s}{c} A I_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{2s^2}\right] e^{-2st} + 2\mu\left[\frac{2s}{c} A I_1'\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{-2st},$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda\left[\frac{2s}{c} A I_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{2s^2}\right] e^{-2st} + 2\mu\left[\frac{A}{r} I_1\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{4s^2}\right] e^{-2st},$$

$$\tau_{zz} = \lambda\left[\frac{2s}{c} A I_0\left(\frac{2sr}{c}\right) + \frac{\omega_0^2}{2s^2}\right] e^{-2st},$$

$$\tau_{r\theta} = B\left[\frac{s}{c_1} I_1'\left(\frac{sr}{c_1}\right) - \frac{1}{r} I_1\left(\frac{sr}{c_1}\right)\right] e^{-st},$$

gdzie

$$A = -\frac{\omega_0 c (\lambda + \mu)}{4s^3 \left[\lambda I_0 \left(\frac{2s}{c} R\right) + 2\mu I_1' \left(\frac{2s}{c} R\right)\right]},$$

$$B = 0.$$

7. Wnioski

Zwrócić należy uwagę na fakt, że wyrażenia określające naprężenia i przemieszczenia składają się z dwu części, jednej zawierającej czynnik zależny od czasu i drugiej nie zawierającej takiego czynnika. Pozwala to stwierdzić, jaki jest wpływ zależnych od czasu zmian prędkości kątowej obrotu na naprężenia i przemieszczenia. W przypadku 3 (przypadek drgań), jeśli zmiany $\bar{\omega}$ są małe, to w małych przedziałach czasu zmiany stanu naprężeń (w stosunku do stanu ustalonego) są małe. Podobne wyniki obserwujemy również w innych przypadkach. Ilościowe omówienie tych zjawisk (przy zastosowaniu obliczeń numerycznych) dokonane zostanie w późniejszej pracy.

Z drugiej strony, jeśli zmiany $\bar{\omega}$ w zależności od czasu są duże, to naprężenia i przemieszczenia wykazują znaczne i bardzo istotne różnice w porównaniu z naprężeniami i przemieszczeniami stanu ustalonego. Istotną rolę w rozkładzie naprężeń i przemieszczeń zaczynają odgrywać zjawiska o charakterze falowym.

Innym istotnym faktem jest występowanie wielkości $\bar{\omega}^2$ w równaniu ruchu o niewiadomej u. Uniemożliwia to stosowanie zasady superpozycji wyników. Zjawisko to nie występuje w innego typu zagadnieniach związanych z małymi odkształceniami.

Łatwo również zauważyć, że, podobnie jak dla stanu ustalonego, naprężenie styczne $\tau_{r\theta}$ znika we wszystkich punktach ciała. Wynika to z założenia, że naprężenia styczne nie występują na powierzchniach. Gdyby przyjąć, że na powierzchni naprężenie styczne jest proporcjonalne do $\bar{\omega}$, to łatwo stwierdzimy, że nie znika ono również i wewnątrz ośrodka. Tak na przykład będzie w przypadku rury obracającej się w cieczy lepkiej.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. E. H. LOVE. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, wyd. 4, Dover publications, New York 1944.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ

В работе рассматривается вопрос распределения напряжений в цилиндрической трубе, вращающейся вокруг своей оси с переменной угловой скоростью. Рассматриваются особые случаи, в которых угловая скорость $\bar{\omega}$, пропорциональна (1) $\cos st$, (2) $\cos^2 st$ и (3) e^{-ot}, где s—постоянная, а t—время. В случаях (1) и (2) угловая скорость исчезает в первый раз для $t = \pi/2s$, но в первом случае в этот момент наступает изменение

направления оборота, тогда как по втором случае, после истечения этого времени, направление оборота сохраняется. Решение для случая (2) нельзя получить из случая (1) обыкновенным путем суперпозиции, что является результатом наличия выражений $\tilde{\omega}^2$ в первом уравнении движения. В случае (3) угловая скорость исчезает экспоненциально. Напряжения и перемещения определяются во всех случаях в замкнутом виде.

Насколько авторам известно, обсуждаемый вопрос является вопросом нового типа (в уравнениях движения находятся выражения происходящие из сил инерции).

Summary

STRESSES IN A CYLINDER ROTATING WITH VARIABLE ANGULAR VELOCITY

This paper is concerned with the problem of stress distribution in an infinite circular cylinder rotating about its axis with variable angular velocity. The particular cases considered are those when $\bar{\omega}$ the angular velocity, is proportional to (1) cos st (2) $\cos^2 st$ and (3) e^{-st}, where s is a given constant and t is the time. In cases (1) and (2) the angular velocity becomes zero first at $t = \pi/2s$, but whereas the direction of rotation is reversed in former case, the latter preserves the same direction after the lapse of this time. This cycle is then repeated. The solution for case (2) can not be obtained from case (1) by simple superposition because of the occurance of $\bar{\omega}^2$ in the first equation of motion. In case (3) the angular velocity is taken to vanish exponentially with time. The stresses and displacements are found in all cases in closed form.

As far as the author's knowledge is concerned the problems treated are of new type where the inertia terms in equations of motion are also included.

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
KHARAGPUR, INDIA

Praca zostala złożona w Redakcji dn. 26 czerwca 1962 r.