

O WYTRZYMAŁOŚCI BELEK PROSTYCH. Cz 3.
BEŁKI PROSTE HIPERSTATYCZNE

P. P. TEODORESCU (BUKARESZT)

Rozważaliśmy dotychczas (por. cz. 1 — [16], cz. 2 — [17]) belki izostaticzne (reakcje ich wyznacza się za pomocą równań równowagi ciała sztywne). Zajmiemy się teraz belkami hiperstatycznymi, w przypadku których dla wyliczenia reakcji należy nałożyć warunki również na odkształcenie.

Z belek hiperstatycznych rozważymy tu belkę dwustronnie utwierdzoną, belkę podpartą swobodnie w jednym i utwierdzoną w drugim końcu oraz belkę ciągłą.

Metody elementarne teorii sprężystości mogą być stosowane na ogół do belek, w których stosunek λ dwu wymiarów belki jest nie mniejszy niż 2. Dla belek krótkich (belek-ścian na przykład), gdy $\lambda < 2$, należy wykorzystywać ściśle metody rachunkowe i nakładać dokładniejsze warunki na przekrojach utwierdzonych (np. warunki utwierdzenia doskonałego). Badania takie przeprowadzali w przypadku belek obustronnie utwierdzonych: W. A. LAZARIAN, [6], W. K. PROKOPOW, [8], A. S. KALMANOK, [3], [4], [5], M. I. DŁUGACZ, [1], oraz autor, [9], [11], [12]. W. W. WŁASOW, [13], [14], wskazał możliwość badania belek-ścian utwierdzonych doskonale wzdłuż przeciwnych krawędzi w oparciu o metodę funkcji początkowych, opracowaną przez niego w pracy [15].

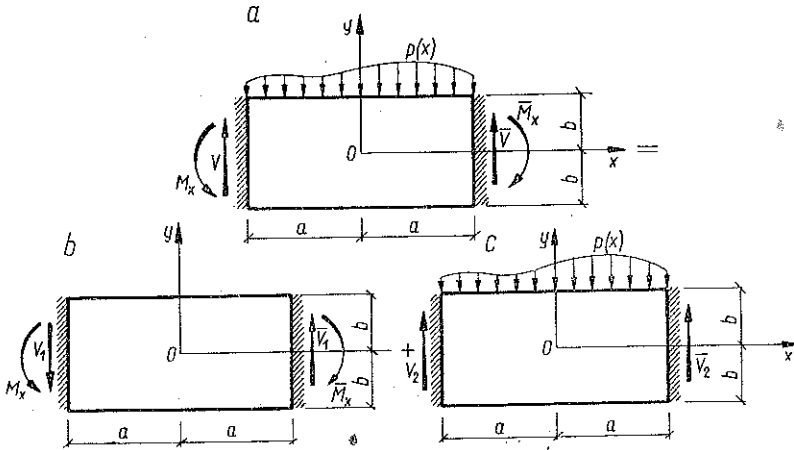
Dla $\lambda \geq 2$ siły i momenty hiperstatyczne wyznaczyć można metodami wytrzymałości materiałów lub elementarnymi metodami teorii sprężystości. Wykorzystując rezultaty uzyskane przez autora w pracy [10] użyjemy równolegle obydwu metod rachunku w celu wyznaczenia zakresu ich stosowalności praktycznej.

8. Belka prosta utwierdzona obustronnie

Wykażemy niżej, w jaki sposób można badać to zagadnienie w ogólnym przypadku obciążenia, takim jak na rys. 71a. Zagadnienie to można albo badać bezpośrednio, albo sprowadzić do zagadnień rozważonych poprzednio.

8.1. Omówienie problemu w ogólnym przypadku obciążenia. Przypadek obciążenia działającego z góry można rozłożyć na dwa proste przypadki: obciążenia siłami skupionymi V_1 i \bar{V}_1 działającymi na przekrojach końcowych (rys. 71b) i obciążenia rozłożonego $p(x)$ (rys. 71c). W obu tych przypadkach obciążenia możemy (jeśli chodzi o stan naprężenia) zakładać, że belka jest podparta swobodnie (naprężenia na przekrojach końcowych są określone) i możemy wykorzystać tu wyniki uzyskane wcześniej, w pierwszej części tej pracy.

Aby określić momenty utwierdzenia M_x i \bar{M}_x należy uważać belkę za element konstrukcji hiperstatycznej i nałożyć pewne warunki na odkształcenia. Warunki te nałożyć można w sposób przybliżony (przy wykorzystaniu metod wytrzymałości materiałów) przyjmując, że nie ma obrotu w przekrojach końcowych, oraz uwzględniając wpływ momentu zginającego jak również, ewentualnie, sił poprzecznych. Przy wykorzystaniu dokładniejszych metod teorii sprężystości wypisuje się składowe wektora przemieszczeń i nakłada się warunki utwierdzenia na przekrojach końcowych.



Rys. 71

Przyjmując, że $\bar{M}_x \geq M_x$ możemy wyliczyć, że

$$(8.1) \quad \bar{V}_1 = -V_1 = \frac{1}{2a}(\bar{M}_x - M_x),$$

wyznaczając tym samym obciążenie drugiego rodzaju.

Jeśli chodzi o stan odkształceń, to rezultaty uzyskane dla belki swobodnie podpartej mogą być również tu wykorzystane, jeśli uwzględni się ruch ciała sztywnego oraz zapewni spełnienie warunków utwierdzenia.

8.2. Rozwiązania przy pomocy wielomianów biharmonicznych. Wielomiany biharmoniczne wykorzystamy przede wszystkim w przypadku, gdy belka obustronnie utwierdzona poddana jest działaniu obciążenia rozłożonego równomiernie (rys. 72a). W innych przypadkach obciążenia postępowanie jest analogiczne.

Przyjmijmy za osie współrzędnych osie geometrycznej symetrii belki (stosunek jej wymiarów wynosi zatem $\lambda = a/b$).

Ze względu na symetrię względem osi Oy pierwszy przypadek obciążenia będzie czystym zginaniem (rys. 72b), przy czym

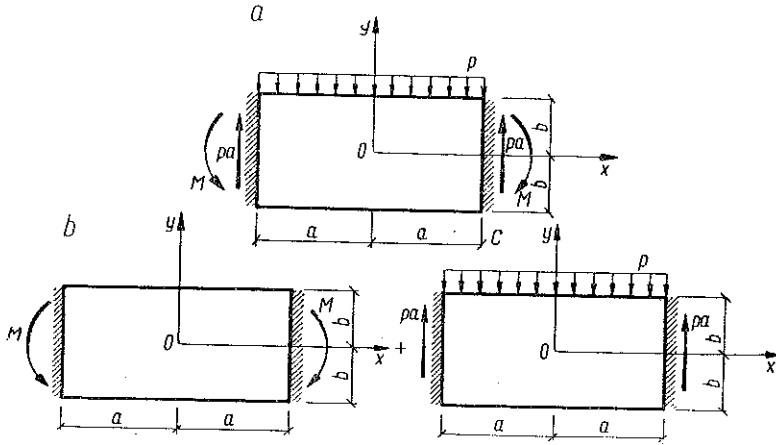
$$(8.2) \quad M_x = \bar{M}_x = M.$$

Otrzymujemy reakcje (rys. 72c)

$$(8.3) \quad V = V_2 = \bar{V} = \bar{V}_2 = pa.$$

Aby wyznaczyć momenty hiperstatyczne możemy — wykorzystując wzory (2.10) i (2.38') — napisać wyrażenie na przemieszczenie v (przy rozważanym obciążeniu) w postaci

$$(8.4) \quad E \frac{v_M}{b} = -\frac{\lambda^2}{4} (1 - \xi^2) \left[\frac{p\lambda^2}{4} (5 - \xi^2) + 3 \frac{M}{b^2} \right].$$



Rys. 72

W metodzie opartej na wytrzymałości materiałów wykorzystano jedynie wpływ momentu zginającego.

Warunki utwierdzenia

$$(8.5) \quad x = \pm a, \quad y = 0: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

prowadzą do

$$(8.6) \quad M = -\frac{pa^2}{3}.$$

Jeśli uwzględnić również wpływ sił poprzecznych, to należy dołączyć jeszcze przemieszczenie

$$(8.7) \quad E \frac{v_T}{b} = -0,6(1+\nu)p\lambda^2(1-\xi^2).$$

Warunki (8.5) prowadzą wtedy do

$$(8.6') \quad M' = -\frac{pa^2}{3} \left[1 + \frac{2,4(1+\nu)}{\lambda^2} \right].$$

Składowe wektora przemieszczeń wyrazić można przy użyciu metod teorii sprężystości w postaci

$$(8.8) \quad E[u - (-\omega_0 y + u_0)] = \frac{p}{4b^3} \left\{ 3 \left[\left(\frac{2}{5} + \nu \right) b^2 - a^2 \right] + x^2 - (2 + \nu) y^2 \right\} xy + \\ + \frac{\nu}{2} px - \frac{3}{2} \frac{M}{b^2} xy,$$

$$E[v - (\omega_0 x + v_0)] = \frac{p}{4b^3} \left\{ 3 \left[\frac{\nu}{2} (a^2 - x^2) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{5} \right) b^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \nu \right) y^2 \right\} y^2 - \frac{p}{2} y + \frac{3p}{8b^3} \left[a^2 + \left(\frac{8}{5} + \nu \right) b^2 - \frac{x^2}{6} \right] x^2 + \frac{3M}{4b^3} (x^2 + \nu y^2),$$

gdzie u_0, v_0, ω_0 są odpowiednio przemieszczeniami i obrotem belki uważanej za ciało sztywne.

Warunki symetrii mechanicznej względem osi Oy prowadzą do warunku

$$(8.9) \quad \omega_0 = 0.$$

Te same rozważania pozwalają napisać

$$(8.9') \quad u_0 = 0,$$

przy czym u nie może znikać jednocześnie w punktach $x = \pm a, y = 0$. Parcie boczne pomija się przyjmując, że belka może wydłużać się i kurczyć wzdłuż swej osi. W przeciwnym przypadku należy do rachunków wprowadzić również siłę osiową hiperstatyczną; stają się one wtedy dokładniejsze.

Warunki (8.5) prowadzą do

$$(8.6'') \quad M'' = -\frac{pa^2}{3} \left(1 + \frac{8 + 5\nu}{10 \lambda^2} \right),$$

a warunki

$$(8.5') \quad x = \pm a, \quad y = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

dają ..

$$(8.6''') \quad M''' = -\frac{pa^2}{3} \left(1 - \frac{2 + 5\nu}{10 \lambda^2} \right).$$

Nie można przyjąć warunków w postaci

$$(8.5'') \quad x = \pm a, \quad y = \pm b: \quad u = 0,$$

ponieważ nie są one nigdy spełnione jednocześnie.

Można zatem napisać

$$(8.10) \quad M = -\frac{pa^2}{3} K,$$

przy czym wartości współczynnika K dla różnych wartości λ i przy $\nu = 1/6$ (beton zbrojony) podane są w tablicy 22.

Tablica 22

λ	2	3	4	5	10
M	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
M'	1,700	1,333	1,175	1,112	1,028
M''	1,221	1,105	1,055	1,035	1,009
M'''	0,929	0,966	0,982	0,989	0,997

Zauważmy, że wpływ siły poprzecznej (w metodach wytrzymałościowych) prowadzi przy obliczaniu obrotu przy małych λ do wartości dość dalekich od rzeczywistych. Zauważmy również, że wartości współczynnika K układają się w pobliżu 1, a dla $\lambda > 3$ można praktycznie przyjmować $K = 1$. Rzeczywiste warunki utwierdzenia mogą zmieniać się pomiędzy dwoma zasadniczymi sposobami utwierdzenia odpowiadającymi warunkom (8.5) i (8.5'); dlatego też przyjmujemy (jako średnią) rozwiązanie uzyskane metodami teorii wytrzymałości materiałów, uwzględniające jedynie wpływ momentu zginającego, a więc wzór (8.6).

W przypadku utwierdzenia sprężystego moment hiperstatyczny jest proporcjonalny do obrotu w przekroju utwierdzenia (współczynnik proporcjonalności m jest momentem utwierdzenia odpowiadającym obrotowi równemu jedności). Uwzględniając jedynie wpływ momentu zginającego znajdujemy, że moment utwierdzenia jest określony wzorem (8.10), gdzie współczynnik K określony jest związkiem

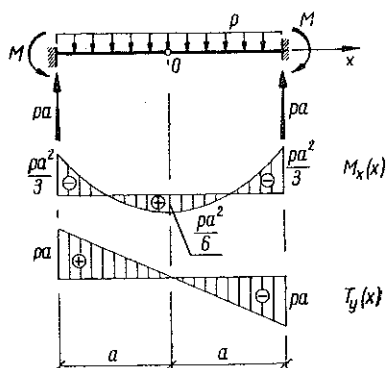
$$(8.10') \quad K = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \frac{Ea^2}{m\lambda^3}}$$

Rozważony przez nas przypadek utwierdzenia doskonałego ($K = 1$) odpowiada $m \rightarrow \infty$.

Stan naprężeń można przy wykorzystaniu wzorów (2.2) i (2.29) oraz zasady składania efektów zapisać w postaci (1.24), (1.24'), gdzie

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{p}{4} \lambda^2 (1 - 3\xi^2) \eta, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y &= \sigma_y^E = -\frac{p}{4} (1 + \eta)^2 (2 - \eta), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^R = \frac{3p}{4} \lambda (1 - \eta^2) \xi, & \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że poprawki, jakie wnosi teoria sprężystości, są takie same zarówno w przypadku belki podpartej swobodnie, jak w przypadku belki utwierdzonej w obu końcach. Zależą one jedynie od sposobu obciążenia.



Rys. 73

Wykorzystamy współrzędne zredukowane

$$(8.12) \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

Siły i momenty na przekroju bieżącym określone są wzorami (rys. 73)

$$(8.13) \quad \begin{aligned} M_x(x) &= \frac{pa^2}{6} (1 - 3\xi^2), \\ T_y(x) &= -pa\xi. \end{aligned}$$

Stan odkształceń podają związki

$$(8.14) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{a} &= \frac{p}{4} \left[3 \left(\frac{2}{5} + \nu \right) - \lambda^2 (1 - \xi^2) - (2 + \nu) \eta^2 \right] \xi \eta + \frac{\nu}{2} p \xi, \\ E \frac{v}{b} &= \frac{p}{4} \left[\frac{\nu}{2} \lambda^2 (1 - 3\xi^2) - 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \eta^2 \right] \eta^2 - \\ &\quad - \frac{p}{2} \eta - \frac{3p}{8} \lambda^2 (1 - \xi^2) \left[\frac{\lambda^2}{6} (1 - \xi^2) + \frac{8}{5} + \nu \right]. \end{aligned}$$

Równanie środkowej warstwy odkształconej będzie zatem określone następująco:

$$(8.15) \quad E \frac{v(x, 0)}{b} = -\frac{3p}{8} \lambda^2 (1 - \xi^2) \left[\frac{\lambda^2}{6} (1 - \xi^2) + \frac{8}{5} + \nu \right],$$

a ugięcie maksymalne (w środku długości belki) wyrazi się wzorem

$$(8.16) \quad f = \frac{1}{16} \lambda^3 \frac{pa}{E} \left(1 + \frac{9,6 + 6\nu}{\lambda^2} \right).$$

Metody wytrzymałości materiałów dają dla warstwy środkowej

$$(8.17) \quad E \frac{v_M}{b} = -\frac{p}{16} \lambda^4 (1 - \xi^2)^2,$$

zatem ugięcie maksymalne wyniesie tu

$$(8.18) \quad f_M = \frac{\lambda^3}{16} \frac{pa}{E}.$$

Uwzględniając również wpływ sił poprzecznych otrzymamy

$$(8.19) \quad E \frac{v_R}{b} = -\frac{p}{16} \lambda^2 (1 - \xi^2) [\lambda^2 (1 - \xi^2) + 9,6 (1 + \nu)],$$

skąd

$$(8.20) \quad f_R = \frac{\lambda^3}{16} \frac{pa}{E} \left[1 + \frac{9,6(1+\nu)}{\lambda^2} \right].$$

Obliczając stosunek

$$(8.21) \quad \frac{f_R - f}{f} = \frac{3,6\nu}{\lambda^2},$$

widzimy, że dla belek z betonu zbrojonego ($\nu = 1/6$) rezultaty uzyskane metodami wytrzymałości materiałów są praktycznie stosowalne dla $\lambda \geq 3$ (błąd maksymalny 6,5%); dla $\lambda = 2$ błąd osiąga 15% i należy wykorzystywać metody teorii sprężystości.

8.3. Rozwiązania przy zastosowaniu rozwinięć w szereg. W ogólnym przypadku obciążenia można wykorzystać rozwinięcia w szeregi Fouriera w rozważaniach analogicznych wyłożonych powyżej. Rozważymy tu jedynie przypadek obciążenia normalnego.

Można wyróżnić obciążenia symetryczne względem przekroju środkowego belki i obciążenia antysymetryczne względem tego przekroju.

Do wyznaczania momentów hiperstatycznych należy tak jak uprzednio wykorzystać metody wytrzymałości materiałów.

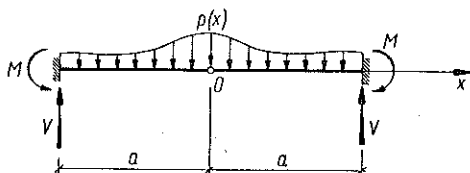
Obciążenie symetryczne (rys. 74) przedstawić można w postaci

$$(8.22) \quad p(x) = \sum_n b_n \cos a_n x,$$

gdzie

$$(8.23) \quad a_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

a okres L_x wynosi $4a$.



Rys. 74

Siła poprzeczna określona będzie wzorem

$$(8.24) \quad T_y(x) = \sum_n \frac{b_n}{a_n} \sin a_n x = \frac{2a}{\pi} \sum_n \frac{b_n}{n} \sin a_n x,$$

w którym stałą całkowania przyjęto równą zero, ponieważ $T_y(x)$ znika w przekroju środkowym.

Moment zginający określony jest wzorem

$$(8.25) \quad M_x(x) = - \sum_n \frac{b_n}{a_n^2} \cos a_n x + M,$$

gdzie $M = M_x = \bar{M}_x$ jest momentem utwierdzenia, który należy określić osobno.

Obrót przekroju poprzecznego określony jest wzorem

$$(8.26) \quad EI\theta(x) = \sum_n \frac{b_n}{a_n^3} \sin a_n x - Mx,$$

przy czym stała całkowania jest zerem, ponieważ obrót w przekroju środkowym znika.

Nakładając warunek znikania obrotu na przekrojach utwierdzonych znajdujemy moment hiperstatyczny

$$(8.27) \quad M = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{b_n}{n^3}.$$

Moment zginający w dowolnym przekroju wynosi przeto

$$(8.25') \quad M_x(x) = \frac{4a^2}{\pi^2} \sum_n \frac{b_n}{n^2} \left[\frac{2}{\pi} (-1)^{(n-1)/2} n - \cos a_n x \right],$$

a obrót przekroju poprzecznego określony jest wzorem

$$(8.26') \quad E\theta(x) = -\frac{12}{\pi^3} \lambda^3 \sum_n \frac{b_n}{n^3} [(-1)^{(n-1)/2} \xi - \sin a_n x].$$

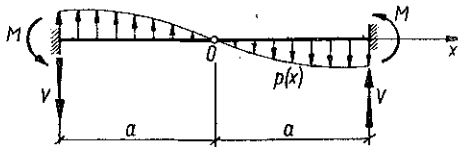
Po uwzględnieniu warunku, że przemieszczenie v znika w przekrojach podparcia, otrzymujemy

$$(8.28) \quad E \frac{v_M(x)}{b} = -\frac{24}{\pi^4} \lambda^4 \sum_n \frac{b_n}{n^4} \left[\frac{\pi}{4} (-1)^{(n-1)/2} n (1 - \xi^2) - \cos a_n x \right],$$

a ugięcie maksymalne ($\xi = 0$) wyniesie

$$(8.29) \quad f_M = \frac{24}{\pi^4} \lambda^3 \frac{a}{E} \sum_n \frac{b_n}{n^4} \left[\frac{\pi}{4} (-1)^{(n-1)/2} n - 1 \right].$$

Obciążenie antysymetryczne (rys. 75) przedstawimy w postaci



$$(8.30) \quad p(x) = \sum_n a_n \sin \gamma_n x,$$

gdzie

$$(8.31) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Rys. 75

a okres L_x wynosi $2a$. Również w tym przypadku wyznaczmy jedynie wielkości o charakterze hiperstatycznym.

Postępując w podobny sposób jak poprzednio i uwzględniając, że przemieszczenie $v_M(x)$ znika na podporach, obliczymy moment hiperstatyczny:

$$(8.32) \quad M = -\frac{3}{\pi^3} a^2 \sum_n (-1)^n \frac{a_n}{n^3}.$$

Siłę poprzeczną można zapisać następująco:

$$(8.33) \quad T_v(x) = -\frac{a}{\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \left[\frac{3}{\pi^2} (-1)^n \frac{1}{n^2} + \cos \gamma_n x \right],$$

a moment zginający będzie określony wzorem

$$(8.34) \quad M_x(x) = -\frac{a^2}{\pi^2} \sum_n \frac{a_n}{n^2} \left[\frac{3}{\pi} (-1)^n \frac{1}{n} \xi + \sin \gamma_n x \right].$$

Obrót przekroju poprzecznego wyniesie

$$(8.35) \quad E\theta(x) = -\frac{3}{2\pi^3} \lambda^3 \sum_n \frac{a_n}{n^3} \left[\frac{1}{2} (-1)^n (1 - 3\xi^2) + \cos \gamma_n x \right],$$

a równanie zdeformowanej warstwy środkowej belki będzie można zapisać w postaci

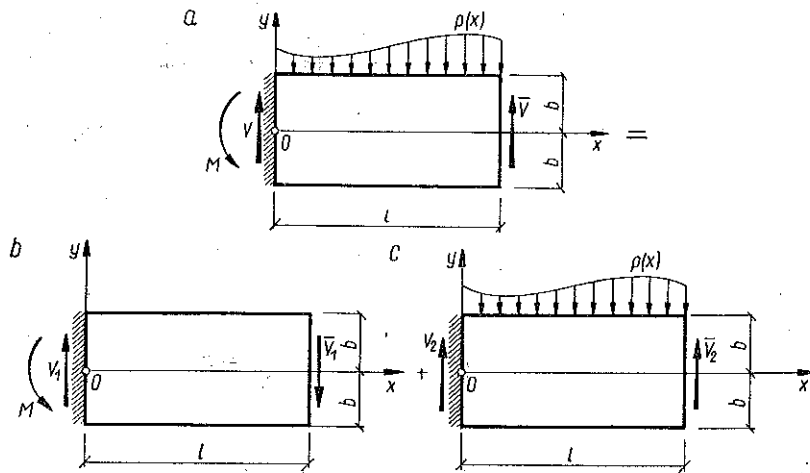
$$(8.36) \quad E \frac{v_M(x)}{b} = \frac{3}{2\pi^4} \lambda^4 \sum_n \frac{a_n}{n^4} \left[\frac{\pi}{4} (-1)^n n (1 - \xi^2) \xi + \sin \gamma_n x \right].$$

W oparciu o te rezultaty i o teorię sprężystości z łatwością znaleźć można stan naprężeń i odkształceń wewnątrz belki obustronnie utwierdzonej.

9. Belka prosta utwierdzona w jednym końcu i swobodnie podparta w drugim

W tej części pracy pokażemy sposób podejścia do zagadnienia w ogólnym przypadku obciążenia (rys. 76a); wykorzystamy układ współrzędnych pokazany na rysunku. Do zagadnienia można podejść bezpośrednio lub sprowadzić je do innych, uprzednio rozważonych problemów.

9.1. Omówienie problemu w ogólnym przypadku obciążenia. Można przyjąć, że rozważane obciążenie jest złożeniem obciążenia w przekroju utwierdzonym nieznanym momentem zginającym M_x (rys. 76b) oraz obciążenia ciągłego $p(x)$ (rys. 76c). Jeśli



Rys. 76

chodzi o stan naprężeń, to można przyjąć z kolei, że obciążenia te działają na belkę prostą podpartą swobodnie i można wykorzystać rezultaty uzyskane w pierwszej części niniejszej pracy.

Obliczenie momentu zginającego M_x wymaga zbadania belki traktowanej jak element hiperstatyczny i nałożenia pewnych warunków na odkształcenia. Warunki te nałożyć można, na przykład, w sposób przybliżony (przy wykorzystaniu metod teorii wytrzymałości materiałów). Należy wtedy uwzględnić wpływ momentu zginającego oraz ewentualnie wpływ sił poprzecznych oraz przyjmując, że obrót nie występuje w lewym końcowym przekroju belki. Można nałożyć również warunki dokładniejsze, obliczając przy użyciu teorii sprężystości składowe wektora przemieszczenia oraz nakładając warunki utwierdzenia w lewym końcu belki.

Z powodzeniem można tu stosować ogólne rezultaty uzyskane dla belki swobodnie podpartej. Należy ponadto wyznaczyć ruch ciała sztywnego, jak również uwzględnić warunki utwierdzenia.

9.2. Rozwiązania przy zastosowaniu wielomianów biharmonicznych. Wielomiany biharmoniczne wykorzystamy przede wszystkim w zastosowaniu do wyznaczania stanu naprężeń i odkształceń belki utwierdzonej w lewym końcu i podpartej swobodnie w prawym, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia o gęstości p . W innych przypadkach obciążenia można stosować analogiczne metody rachunku.

Przyjmując za niewiadomą hiperstatyczną moment pochodzący od utwierdzenia $M = M_x$ i postępując podobnie jak w przypadku rozważanym w p. 8.2 otrzymujemy przy użyciu metod teorii wytrzymałości

$$(9.1) \quad M = -\frac{pl^2}{8}.$$

Nie możemy tutaj uwzględnić wpływu sił poprzecznych, ponieważ nie możemy wyliczyć przemieszczenia v_T , będącego (w przypadku belki podpartej swobodnie) wynikiem działania stałej siły poprzecznej (działanie momentu zginającego na jednej z podpór wywołuje stałą siłę poprzeczną) — tu nie byłyby spełnione warunki podparcia.

Na gruncie teorii sprężystości przyjmujemy warunki swobodnego podparcia

$$(9.2) \quad \begin{array}{ll} x = 0, & y = 0: & u = 0, & v = 0, \\ & x = l: & v = 0. \end{array}$$

Warunek utwierdzenia

$$(9.3) \quad x = 0, \quad y = 0: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

daje

$$(9.1') \quad M' = -\frac{pl^2}{8} \left(1 + \frac{2,4 + 1,5\nu}{\lambda^2} \right).$$

Z warunku

$$(9.3') \quad x = 0, \quad y = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

wynika, że

$$(9.1'') \quad M'' = -\frac{pl^2}{8} \frac{1 - \frac{0,6 + 1,5\nu}{\lambda^2}}{1 + \frac{0,75(1+\nu)}{\lambda^2}}$$

a z warunku

$$(9.3'') \quad x = 0, \quad y = \pm b: \quad u = 0$$

uzyskujemy

$$(9.1''') \quad M''' = -\frac{pl^2}{8} \frac{1 + \frac{0,4 - \nu}{\lambda^2}}{1 + \frac{0,5 + 0,625\nu}{\lambda^2}}$$

W rezultacie mamy

$$(9.4) \quad M = -\frac{pl^2}{8} K,$$

gdzie wartości współczynnika K dla $\nu = 1/6$ i różnych wartości λ zestawione są w tabelicy 23.

Tablica 23

M \ λ	2	3	4	5	10
M	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
M'	1,664	1,294	1,166	1,106	1,027
M''	0,687	0,850	0,915	0,943	0,985
M'''	0,918	0,961	0,979	0,984	0,996

Zauważmy przy tym, że metody teorii wytrzymałości są najdokładniejsze przy trzecim sposobie nałożenia warunków utwierdzenia, przy czym występujące różnice można praktycznie pominąć dla $\lambda > 3$.

W występującym w rzeczywistości przypadku utwierdzenia sprężystego przyjmujemy $K = 1$ i wykorzystujemy również wzór (9.1) uzyskany na gruncie teorii wytrzymałości materiałów.

Stan naprężeń zapisać można w postaci (1.24), (1.24'), gdzie

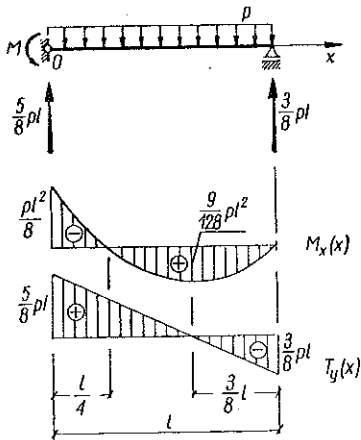
$$(9.5) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= \frac{3p}{4} \lambda^2 (1 - \xi) (1 - 4\xi) \eta, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left(\frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y &= \sigma_y^E = -\frac{p}{4} (1 + \eta)^2 (2 - \eta), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^R = -\frac{5p}{16} \lambda (1 - \eta^2) (5 - 8\xi), & \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Widzimy, że teoria sprężystości daje w tym przypadku poprawki takie same jak w przypadku belki swobodnie podpartej. Zależą one jedynie od obciążenia.

Sily i momenty (rys. 77) określają wzory

$$M_x(x) = -\frac{pl^2}{8}(1-\xi)(1-4\xi),$$

$$T_y(x) = \frac{pl}{8}(5-8\xi).$$



Rys. 77

Stan odkształceń znajdujemy w sposób analogiczny.

9.3. Rozwiązania przy zastosowaniu rozwinięć w szereg. Zbadamy teraz to samo zagadnienie wykorzystując rozkład obciążenia na przypadki pokazane na rys. 76. Wobec uzyskanych powyżej wyników moment hiperstatyczny M obliczymy wykorzystując teorię wytrzymałości.

Aby znaleźć moment hiperstatyczny M , rozważmy belkę przedstawioną na rys. 78, poddaną obciążeniu normalnemu

$$(9.7) \quad p(x) = \sum_n a_n \sin \gamma_n x,$$

gdzie

$$(9.8) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a okres L_x wynosi $2l$.

Postępując tak jak w 8.3 znajdujemy niewiadomą hiperstatyczną

$$(9.9) \quad M = \frac{3l^2}{\pi^3} \sum_n \frac{a_n}{n^3}.$$

Siła poprzeczna wynosi

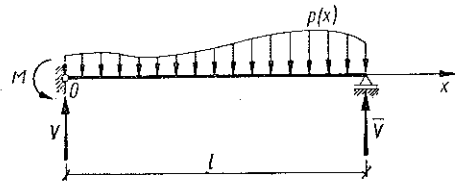
$$(9.10) \quad T_y(x) = -\frac{l}{\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \left(\frac{3}{\pi^2} \frac{1}{n^2} + \cos \gamma_n x \right),$$

a moment zginający będzie równy

$$(9.11) \quad M_x(x) = \frac{l^2}{\pi^2} \sum_n \frac{a_n}{n^2} \left[\frac{3}{\pi} \frac{1}{n} (1-\xi) - \sin \gamma_n x \right].$$

Obrót przekroju poprzecznego określony będzie więc równaniem

$$(9.12) \quad E\theta(x) = \frac{12}{\pi^3} \lambda^3 \sum_n \frac{a_n}{n^3} \left[\frac{1}{2} (3\xi^2 - 6\xi + 2) - \cos \gamma_n x \right],$$



Rys. 78

a równanie zdeformowanej warstwy środkowej przyjmie postać

$$(9.13) \quad E \frac{v_M(x)}{b} = - \frac{24}{\pi^4} \lambda^4 \sum_n \frac{a_n}{n^4} \left[\frac{\pi}{2} n \xi (1 - \xi) (2 - \xi) - \sin \gamma_n x \right];$$

Stan naprężeń i odkształceń z łatwością wyznaczyć można w oparciu o te i poprzednie rezultaty.

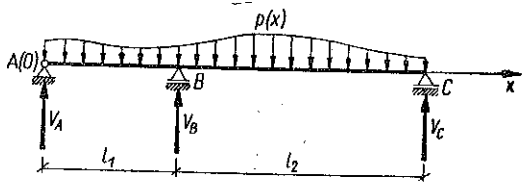
10. Belka prosta na trzech podporach. Belka ciągła

Inną kategorię belek często stosowanych w praktyce stanowią belki ciągłe. Omówimy tu szczególnie ważny przypadek belki na trzech podporach.

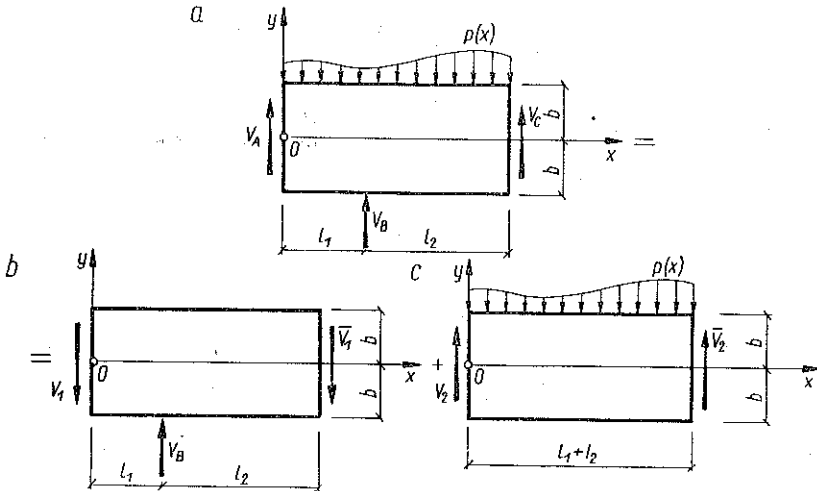
10.1. Omówienie problemu w przypadku belki na trzech podporach. Belki ciągłe na trzech podporach (dwie długości) są belkami hiperstatycznymi. Za wielkość hiperstatyczną przyjąć można albo jedną z reakcji, np. V_B , albo moment zginający, odpowiadający podporze B (rys. 79).

Jeśli przyjmiemy, że reakcja V_B została już określona, to należy zbadać przypadek obciążenia taki jak na rysunku 80a.

Obciążenie takie rozłożyć można na dwa inne: obciążenie siłą skoncentrowaną V_B belki prostej o długości $l_1 + l_2$, rys. 80b, i obciążenie $p(x)$ rozłożone w sposób ciągły wzdłuż



Rys. 79



Rys. 80

belki o tej samej długości (rys. 80c). Można tu zatem wykorzystać rezultaty uzyskane w pierwszej części pracy do określenia stanu naprężeń i odkształceń. Ruch ciała sztywnego określony jest przez warunki podparcia.

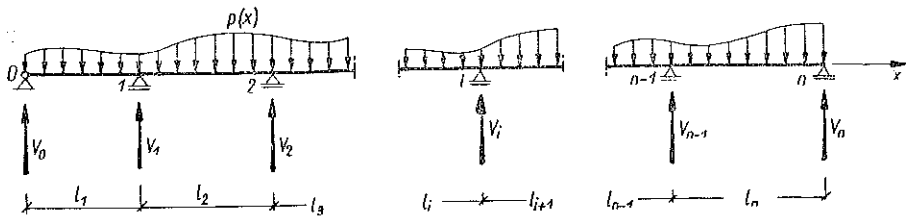
Wyznaczenie niewiadomej hiperstatycznej wymaga nałożenia pewnych warunków na odkształcenia. Nałożyć je można w sposób przybliżony (metodami teorii wy-

trzymałości) przy uwzględnieniu działania momentu zginającego i ewentualnie siły poprzecznej oraz przy założeniu, że przemieszczenie pionowe na rozważanej podporze jest zerem. Można przyjąć warunki dokładniejsze przy zastosowaniu teorii sprężystości, obliczając składowe przemieszczenia i zakładając, że przemieszczenie w kierunku Oy w punkcie $(l_1, -b)$ jest zerem.

Zagadnienie badać można bądź przy zastosowaniu wielomianów biharmonicznych, bądź też wykorzystując rozwinięcie w szereg Fouriera, tak jak w poprzednich przypadkach.

Zagadnienie belek-ścian na trzech podporach badał H. PARKUS, [7]. Wykorzystał on metody rachunkowe podane przez K. GIRKMANA, [2].

10.2. Omówienie problemu belki ciągłej. Belka ciągła na $(n+1)$ podporach jest $(n-1)$ -krotnie hiperstatyczna (rys. 81). Badanie takiego zagadnienia wymaga.



Rys. 81

wyznaczenia $(n-1)$ niewiadomych hiperstatycznych, które mogą być reakcjami lub, częściej, momentami zginającymi na przekrojach 1, 2, ..., $(n-1)$. Niewiadome hiperstatyczne wyznacza się na ogół przy wykorzystaniu metod wytrzymałości materiałów, ponieważ rachunek oparty na teorii sprężystości byłby zbyt żmudny.

Z belkami ciągłymi związana jest duża ilość problemów, którymi zajmuje się przede wszystkim teoria konstrukcji.

Zwróćmy tu jedynie uwagę na fakt, że, w ramach teorii wytrzymałości materiałów, momenty zginania na trzech kolejnych podporach sztywnych związane są równaniem Clapeyrona (równanie trzech momentów, algebraiczne równanie liniowe), przy pomocy którego można wyznaczać te wielkości hiperstatyczne wykorzystując wpływ momentu zginającego. W przypadku podpór sprężystych (dla których przemieszczenie pionowe jest wprost proporcjonalne do odpowiedniej reakcji) otrzymujemy równanie pięciu momentów przy wykorzystaniu jedynie wpływu momentu zginającego.

W przypadku belek ciągłych o równych długościach odcinków i poddanych na każdym z nich działaniu analogicznych obciążeń (szczególnie w przypadku belek-ścian) wygodnie jest również zastosować metody teorii sprężystości. Tak samo jest w przypadku belki na nieskończonej ilości podpór, poddanej obciążeniu o rozkładzie okresowym. Otrzymane rezultaty mają znaczenie praktyczne dla środkowych odcinków belki, natomiast w odcinkach krańcowych nie otrzymuje się wystarczająco dobrych przybliżeń.

11. Wnioski

Uzyskane powyżej rezultaty pozwalają na wyciągnięcie pewnych wniosków dotyczących możliwości stosowania metod rachunkowych wytrzymałości materiałów oraz poprawek, jakie do tych wyników wnosi teoria sprężystości — w całej pracy przeprowadzaliśmy porównania tych dwu metod.

Ogólnie można stwierdzić, że w przypadku belek prostych o przekroju prostokątnym, przy $\lambda \geq 2$ ¹ wystarczająco dokładne z technicznego punktu widzenia są rachunki oparte na teorii wytrzymałości materiałów i to zarówno dotyczące stanu naprężeń, jak i stanu odkształceń.

Jeśli chodzi o belki z betonu zbrojonego, to błąd jest mniejszy, gdy są one niejednorodne. Tej niejednorodności nie można wprowadzić do rachunków (można co najwyżej w sposób przybliżony, za pomocą określania przekroju uzbrojenia). Błąd wynikający z traktowania takich belek jako ciał jednorodnych jest tego samego rzędu, co błąd powstający przy stosowaniu metod teorii wytrzymałości materiałów.

Wyniki uzyskane powyżej są tym bardziej interesujące, że, w przypadku belek o przekroju poprzecznym różnym od prostokątnego, rachunki dokładne są praktycznie bardzo trudne. Rezultaty te bowiem można wykorzystać dla belek o przekroju poprzecznym dowolnym (jednakże bez możliwości dokładnej oceny uzyskanego przybliżenia) z wyłączeniem przypadku belek cienkościennych. Ocena uzyskanych w ten sposób przybliżeń wymaga przeprowadzenia odrębnych badań.

Można postawić zagadnienie znalezienia takiej wartości stosunku λ , powyżej której można nie uwzględniać wpływu sił poprzecznych. Wartością taką mogłoby być ewentualnie $\lambda = 5$.

Na ogół dobrze jest rezultaty uzyskane metodami teorii wytrzymałości materiałów sprawdzić przy pomocy teorii sprężystości wtedy, gdy nie jesteśmy pewni tych rezultatów, a jest to praktycznie możliwe. Jednocześnie zaleca się wykorzystywać możliwie proste metody rachunkowe (o ile nie wnoszą one zbyt dużych błędów) przede wszystkim dlatego, że są one bliższe fizycznej interpretacji zjawiska.

Jednocześnie należy do każdego zagadnienia stosować odpowiednio dobrane metody. Tak więc np. do zagadnień związanych z lokalnymi naprężeniami lub trajektoriami naprężeń, w których interweniuje gęstość naprężenia normalnego σ_{yy} , należy stosować metody teorii sprężystości. To samo w przypadku, gdy musimy badać odkształcalność całej belki, gdy obliczamy przemieszczenia wzdłuż osi belki itp. Rezultaty uzyskane na gruncie teorii sprężystości są zatem niezbędne w niektórych problemach specjalnych w ustalonym powyżej zakresie wymiarów belki.

Jeśli $\lambda < 2$, to należy wykorzystywać dokładniejsze metody rachunkowe. Może co prawda okazać się, że rezultaty uzyskane przy bardziej elementarnym podejściu do zagadnienia są wystarczająco dokładne, ale należy to sprawdzać w każdym przypadku osobno i nie można przewidzieć tego z góry.

W rezultacie trudno jest ustalić dokładną klasyfikację belek według ich sposobów zachowania się, ustalając jednocześnie metody rachunkowe, które należy wykorzystywać.

¹ W pewnych przypadkach granica ta może być wyższa; wielokrotnie podawaliśmy takie przykłady.

Методы теории выtrzymałości и теории sprężystości oraz их zakresy stosowalności są w organiczny sposób ze sobą związane i nie można ich rozdzielać w sposób dowolny. Ogólnie można stwierdzić jednak, że mamy do czynienia z belkami krótkimi lub z belkami długimi. W pewnym przypadku można stosować do wyznaczania stanu naprężeń i odkształceń metody теории выtrzymałości materiałów z błędem nie większym niż 5%. W drugim przypadku wykorzystuje się metody теории sprężystości dla obliczenia naprężeń oraz dla określenia odkształceń całej belki.

Literatura cytowana w tekście

- [1] М. И. Длугач, *Расчет защемленных балок-стенок*, Вопр. прочн. и устойч. строит. констр., Киев, 21 (1956), 81.
- [2] K. GIRKMAN, *Flächentragwerke*, Springer-Verlag, Wien 1946.
- [3] А. С. Калманок, *К решению задач по плоскому напряженному состоянию прямоугольной пластинки*, Констр. и мат. в городском строительстве, 6 (1950), 70.
- [4] А. С. Калманок, *Строительная механика пластинок*, Мапстройиздат, Москва 1950.
- [5] А. С. Калманок, *Расчет балок стенок*, Гостехиздат, Москва 1959.
- [6] В. А. Лазарян, *Об одном случае плоского изгиба короткой балки*, Тр. Киевского Инж. строит. инст., 3 (1936), 289.
- [7] H. PARKUS, *Der wandartige Träger auf drei Stützen (Dissertation)* Oesterr. Ing. Arch., 3,2 (1948), 185.
- [8] В. К. Прокопов, *Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области*, Прикл. мат. и мех., 6, 16 (1952), 739.
- [9] P. P. TEODORESCU, *Calculul grinzilor pereți cu o singură deschidere în caz general de rezemare și încărcare*, Ed. Min. înv., București, 1955.
- [10] P. P. TEODORESCU, *Asupra calculului unor grinzi drepte static nedeterminate*, Bul. Mat. al. Soc. de șt. Mat. și Fiz. din R. P. R., 1, 4 (1960); *Sur le calcul de quelques poutres droites hyperstatiques*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., 1, 4 (52) (1960), 99.
- [11] P. P. TEODORESCU, *Sur le calcul des poutre-parois encastrees. I. Le rectangle plan élastique*, Bull. Acad. Polon. Sci, Série Sci. Tech. 9 (1961), 391.
- [12] P. P. TEODORESCU, *Asupra calculului grinzilor pereți încastrate*, An. Univ. «С.І. Parhon», s. științele, naturii, Mat.-Fizică, 29, 10 (1961), 281.
- [13] В. В. Власов, *Метод начальных функций в плоской задаче теории упругости*, Изв. М. В. О., Строительство и архитектура, 2 (1958).
- [14] В. В. Власов, *Применение метода начальных функций к плоской задаче теории упругости для прямоугольной области*, Изв. Акад. Наук СССР., О. Т. Н. Механика и машиностр., 3 (1959).
- [15] В. В. Власов, *Метод начальных функций в задаче теории упругости*, Изв. Акад. Наук СССР., О. Т. Н., 7 (1955).
- [15] P. P. TEODORESCU, *O wytrzymałości belek prostych. Cz. 1. Rozważanie ogólne. Belka prosta podparta swobodnie*, Rozpr. Inżyn. 4, 10 (1962).
- [16] P. P. TEODORESCU, *O wytrzymałości belek prostych. Cz. 2. Wsporniki i belki wspornikowe. Zasada wzajemności dla belek prostych*, Rozpr. Inżyn., 1, 11 (1963).

Резюме

ПРОЧНОСТЬ ПРЯМЫХ БАЛОК. Ч. 3. ПРЯМЫЕ ГИПЕРСТАТИЧЕСКИЕ БАЛКИ

В третьей части работы рассматриваются прямые балки, защемленные двухсторонне. Проводится дискуссия задачи в общем случае нагрузки, применяя затем метод бигармонических полиномов, при чем главное внимание обращается на случай равномерно распределенной нагрузки. Рассматриваются различные возможности определения гиперстатических

ческой неизвестной. Делается заключение, что методы сопротивления материалов вполне пригодны для практических целей. Общий метод определения гиперстатической неизвестной в случае произвольной нагрузки был получен, применяя разложение в ряды Фурье.

Задача для прямой балки, защемленной на одном конце и свободно опертой на другом, исследуется аналогичным способом, путем применения бигармонических полиномов и разложения в ряды Фурье. Заключение касающиеся методов сопротивления материалов носят тот же самый характер, что и раньше.

Приводятся некоторые решения, касающиеся сплошных балок, а в особенности балок на трех опорах.

В результате дается классификация типов балок, обращая внимание на длинные и короткие балки. В случае длинных балок можно для определения напряженного и деформированного состояний применять методы сопротивления материалов, которые дают максимальную ошибку порядка 5%. В случае коротких балок правильность исчисления напряжений и возможность определения деформаций всей балки обеспечивают методы теории упругости.

R é s u m é

SUR LE CALCUL DE RESISTANCE DES POUTRES DROITES. 3. LES POUTRES DROITES HYPERSTATIQUES

Dans la troisième partie du travail on considère les poutres droites doublement encastées. Après une étude du problème pour un cas général de chargement, on utilise les polynômes biharmoniques, en insistant sur un cas de chargement avec une charge uniformément répartie. A cette occasion on entreprend une étude des différentes possibilités de déterminer l'inconnue hyperstatique, arrivant à la conclusion que les méthodes de la résistance des matériaux sont suffisamment bonnes du point de vue pratique. En utilisant les développements en série de Fourier, on donne une méthode générale de déterminer l'inconnue hyperstatique pour un cas de chargement quelconque.

La poutre droite encastée à un bout et simplement appuyée à l'autre bout est ensuite étudiée d'une manière analogue, à l'aide des polynômes biharmoniques et des développements en série de Fourier. On aboutit à des conclusions analogues en ce qui concerne les méthodes de la résistance des matériaux.

On fait ensuite quelques considérations sur le problème de la poutres droites continues et sur le problème de la poutre droite sur trois appuis.

En conclusion on observe qu'on a à faire généralement avec des poutres longues et des poutres courtes. C'est dans le premier cas qu'on peut utiliser les méthodes de la résistance des matériaux pour déterminer l'état de sollicitation de la poutre avec une erreur maximum de 5%; dans le second cas on doit utiliser les méthodes de la théorie de l'élasticité pour le calcul des tensions et, surtout, pour pouvoir apprécier la déformabilité de la poutre entière.

ACADEMIA R. P. R.
INSTITUTUL DE MATEMATICA
BUCUREȘTI

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 czerwca 1961 r.