

SPRĘŻYSTE FALE GIĘTNE W NIESKOŃCZONEJ RURZE
PRZY PRZEPLYWIE PŁYNU NIEŚCIŚLIWEGO

ANDRZEJ BOBESZKO (WARSZAWA)

1. Wstęp i oznaczenia

We współczesnej literaturze fachowej wiele prac poświęconych jest zagadnieniom rozprzestrzeniania się sprężystych fal giętnych w rurach przy przepływie czynnika, jak również zagadnieniom drgań swobodnych i wymuszonych. Problemy powyższe wyłoniły się, w związku z zaobserwowanymi drganiami rurociągu naftowego, eksploatowanego przez Trans-Arabian Pipe Line Company i zostały rozważone po raz pierwszy w pracy H. ASHLEYA i G. HAVILANDA, [1]. Wyprowadzono w niej przy założeniu nieściśliwości przepływającego płynu i w oparciu o elementarną teorię zginania równanie ruchu rury i wyznaczono częstości drgań własnych przez zastosowanie nieskończonego układu równań oraz podano związki dla prędkości fazowych sprężystych fal giętnych w nieskończonej rurze. Równanie ruchu wyprowadzone przez tych autorów zostało uściślone w pracy [2] i niezależnie w [3], gdzie podano inną metodę jego rozwiązania i rozważono drgania wymuszone. W pracy [4] uwzględniono wpływ ściśliwości przepływającego płynu i skończoności przekroju rury. Doświadczalne określenie częstości drgań własnych zawiera praca [5]. Uzyskane w niej wyniki w dużym stopniu pokrywają się z wynikami uzyskanymi na drodze rozważań teoretycznych. Szczegółową analizę postaci drgań własnych przy pominięciu sztywności zginania (np. dla przypadku węża gumowego) zawiera praca [8]. Należy zauważyć, iż w pracy tej błędnie określono zakres hiperboliczności równania ruchu, co jednak nie zmienia wyników końcowych. Praca [9] zawiera dość wyczerpującą analizę matematyczną zagadnień brzegowych rozważanego problemu i, co wydaje się najistotniejsze, uzasadnienie nieprawidłowości stosowania metod wariacyjnych, z uwagi na fakt, iż odpowiednie równanie różniczkowe dla funkcji kształtu ugięcia rury jest niesamosprężone. Dalsza część pracy zawiera rozwiązanie w postaci fal wędrujących dla rury nieskończonej i konstrukcję rozwiązania przy pomocy funkcji Greena dla rury skończonej.

We wszystkich powyższych pracach rozważano rurę o stałym przekroju w ramach elementarnej teorii zginania przy stacjonarnym przepływie płynu idealnego nieściśliwego (z wyjątkiem pracy [4]).

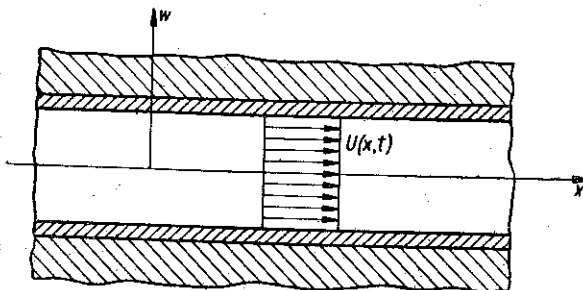
Rozważenie powyższego problemu w ramach teorii powłokowej, co stanowi odrębne zagadnienie, znajduje się w pracach [7], [10], [11], [12] i [13], gdzie uwzględniono tłumienie wewnętrzne materiału powłoki.

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest próba uwzględnienia zmienności przekroju rury i prędkości przepływu płynu w równaniu ruchu oraz przedyskutowania w ramach różnych teorii zginania (elementarnej, Rayleigha i Timoszenki) anizotropii i dyspersji sprężystych fal giętnych.

Oznaczenia

- A pole przekroju poprzecznego rury,
 A_i pole prześwitu rury,
 E moduł Younga materiału rury,
 G moduł sprężystości poprzecznej materiału rury,
 I moment bezwładności przekroju poprzecznego rury,
 K stała sprężystości podłoża,
 S siła rozciągająca rurę,
 U prędkość niezaburzonego przepływu,
 W wydatek,
 $b = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ współczynnik charakteryzujący sztywność zginania rury,
 $c = \sqrt{\frac{S}{\rho A}}$ współczynnik charakteryzujący siłę rozciągającą rury, pokrywający się z prędkością fal poprzecznych w strunie,
 c_0 prędkość fal nieskończenie długich w przecie,
 c_1 prędkość fal podłużnych,
 c_2 prędkość fal poprzecznych,
 c_p prędkość fazowa fal giętnych,
 c_g prędkość grupowa fal giętnych,
 $d = \sqrt{\frac{K}{\rho A}}$ współczynnik charakteryzujący sprężystość podłoża,
 k liczba falowa,
 r promień bezwładności przekroju poprzecznego rury,
 ω częstość kołowa,
 $\varepsilon = \frac{\rho_i A_i}{\rho A}$ stosunek gęstości przepływającego płynu $\rho_i A_i$ do gęstości materiału rury ρA na jednostkę długości.

2. Równania ruchu



Rys. 1

Rozważa się nieskończoną sprężystą rurę o przekroju pierścieniowym, w ogólnym przypadku zmiennym wzdłuż osi rury, przy nieustalonym przepływie płynu (rys. 1).

Równanie ruchu rury wyrowadza się w oparciu o zasadę wariacyjną Hamiltona, [3], przy następujących założeniach:

1) Przyjmuje się elementarną teorię zginania, tzn. pomija się siły poprzeczne i bezwładność obrotową.

2) Zmiany pola przekroju uważa się za małe w celu zapewnienia stosowalności teorii jednowymiarowej przepływu.

3) Przepływający płyn traktuje się jako idealny (tj. nielepki i nieprzewodzący), nieściśliwy, co dla przypadku cieczy o małej lepkości (np. wody lub nafty) stanowi wystarczającą aproksymację.

Prędkość elementu płynu w kierunku prostopadłym do osi rury jest pochodną substancjalną ugięcia $w(x, t)$ względem czasu i wynosi

$$(2.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Energia kinetyczna elementu dx rury i płynu w danym momencie czasu będzie

$$(2.2) \quad dT = \left\{ \frac{1}{2} \rho A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_i A_i(x) \left[U^2(x, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx,$$

zaś energia potencjalna odkształceń sprężystych

$$(2.3) \quad dV = \left\{ \frac{1}{2} EI(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} S(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K(x) w^2 \right\} dx.$$

Stosując zasadę Hamiltona, mamy

$$(2.4) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_i A_i(x) \left[U^2(x, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} EI(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} S(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} K(x) w^2 \right\} dx dt = 0.$$

W rozważanym przypadku równanie Eulera, pokrywające się z równaniem ruchu, będzie miało postać

$$(2.5) \quad EI(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2E \frac{dI(x)}{dx} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[E \frac{d^2 I(x)}{dx^2} + \rho_i U^2(x, t) A_i(x) - S(x) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + 2\rho_i U(x, t) A_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + [\rho A(x) + \rho_i A_i(x)] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ + \left\{ \rho_i \left[\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} A_i(x) + 2U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} A_i(x) + U^2(x, t) \frac{dA_i(x)}{dx} \right] - \frac{dS(x)}{dx} \right\} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + \rho_i \left[\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} A_i(x) + U(x, t) \frac{dA_i(x)}{dx} \right] \frac{\partial w}{\partial t} + K(x) w = 0.$$

Po wykorzystaniu z równania ciągłości

$$(2.6) \quad \rho_i U(x, t) A_i(x) = W(t)$$

związku

$$(2.7) \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} A_i(x) + U(x, t) \frac{dA_i(x)}{dx} = 0,$$

ostateczna postać równania ruchu jest następująca:

$$(2.8) \quad EI(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2E \frac{dI(x)}{dx} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[E \frac{d^2 I(x)}{dx^2} + \rho_i U^2(x, t) A_i(x) - S(x) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ 2\rho_i U(x, t) A_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + [\rho A(x) + \rho_i A_i(x)] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \left\{ \rho_i \left[\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right] A_i(x) - \frac{dS(x)}{dx} \right\} \frac{\partial w}{\partial x} + K(x) w = 0.$$

3. Rozwiązanie w postaci fal wędrujących dla rury o stałym przekroju przy stałej prędkości przepływu płynu

W rozważanym przypadku równanie ruchu (2.8) upraszcza się tak, że po wprowadzeniu nowych współczynników jego ostateczna postać będzie następująca:

$$(3.1) \quad b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\varepsilon U^2 - c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\varepsilon U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + d^2 w = 0.$$

Rozwiązani powyższego równania poszukuje się w postaci

$$(3.2) \quad w(x, t) = \exp i(\omega t - kx).$$

Po podstawieniu (3.2) do (3.1) otrzymuje się równanie na ω

$$(3.3) \quad (1 + \varepsilon) \omega^2 - 2\varepsilon U k \omega - b^2 k^4 - c^2 k^2 - d^2 + \varepsilon U^2 k^2 = 0,$$

pierwiastki którego są

$$(3.4) \quad \omega_{1,2} = \frac{\varepsilon U k}{1 + \varepsilon} \pm \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon)(b^2 k^4 + c^2 k^2 + d^2) - \varepsilon U^2 k^2}}{1 + \varepsilon}.$$

Prędkości fazowe fal propagujących się wzdłuż rury będą

$$(3.5) \quad c_{p1,2} = \frac{\varepsilon U}{1 + \varepsilon} \pm \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon) \left(b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2} \right) - \varepsilon U^2}}{1 + \varepsilon},$$

zaś ich prędkości grupowe

$$(3.6) \quad c_{g1,2} = \frac{\varepsilon U}{1 + \varepsilon} \pm \frac{(1 + \varepsilon)(2b^2 k^2 + c^2) - \varepsilon U^2}{(1 + \varepsilon) \sqrt{(1 + \varepsilon) \left(b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2} \right) - \varepsilon U^2}}$$

Związek (3.6) uogólnia znaną zależność $c_g = 2c_p$ z elementarnej teorii zginania belek, którą można uzyskać z (3.6) przy podstawieniu $c = 0$, $d = 0$ i $\varepsilon = 0$.

Rozwiązanie (3.2) przedstawia fale wędrujące o stałej amplitudzie przy założeniu, że ω jest rzeczywiste. Przy ω zespolonym rozwiązanie (3.2) przedstawia fale wędrujące o amplitudzie narastającej wykładniczo z czasem. Zatem warunek nienarastania amplitudy fal wędrujących jest następujący:

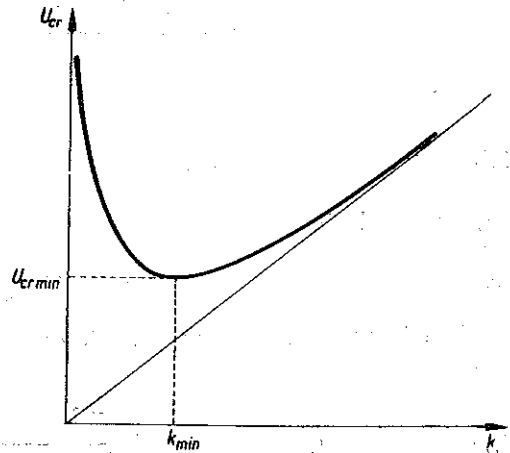
$$(3.7) \quad U < U_{cr},$$

gdzie

$$(3.8) \quad U_{cr} = \sqrt{\left(b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2}\right) \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Zależność U_{cr} od k przedstawiono na rys. 2. Krzywa powyższa posiada minimum przy $k = \sqrt{d/b}$. W interpretacji fizycznej oznacza to, iż przy

powyższej liczbie falowej prędkość grupowa pokrywa się z prędkością fazową, tzn., że energia przenosi się z tą samą prędkością co i fala.



Rys. 2

4. Rozwiązanie w postaci fal wędrujących dla rury o stałym przekroju przy zmiennej prędkości przepływu płynu

Rozważany przypadek jest interesujący ze względu na dość częste występowanie niustalonych przepływów w rurociągach, zmiennych w czasie zarówno monotonicznie (np. otwieranie lub zamykanie zaworów) jak i periodycznie (np. przy pompowaniu płynu).

Równanie ruchu rury przy przepływie niustalonym będzie

$$(4.1) \quad b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [\varepsilon U^2(t) - c^2] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\varepsilon U(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{dU(t)}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} + d^2 w = 0.$$

Rozwiązania (4.1) poszukuje się w postaci

$$(4.2) \quad w(x, t) = T(t) \exp i(-kx).$$

Po podstawieniu (4.2) do (4.1) otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne na $T(t)$ o zmiennych współczynnikach

$$(4.3) \quad (1 + \varepsilon) \ddot{T} - 2\varepsilon U(t) ik \dot{T} + [b^2 k^4 + c^2 k^2 + d^2 - \varepsilon U^2(t) k^2 - \varepsilon \dot{U}(t) ik] T = 0$$

Nab po wprowadzeniu oznaczeń

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \beta(t) &= -\frac{\varepsilon U(t) ik}{1+\varepsilon}, \\ \gamma(t) &= \frac{b^2 k^4 + c^2 k^2 + d^2 - \varepsilon U^2(t) k^2 - \varepsilon \dot{U}(t) ik}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

równanie

$$(4.5) \quad \ddot{T}(t) + 2\beta(t) \dot{T}(t) + \gamma(t) T(t) = 0.$$

Przy podstawieniu

$$(4.6) \quad T(t) = f(t) \exp \left[\int a(t) dt \right]$$

i spełnieniu warunku $a(t) = -\beta(t)$, zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania

$$(4.7) \quad \ddot{f}(t) + \left[b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} U^2(t) \right] \frac{k^2}{1+\varepsilon} f(t) = 0.$$

Jeśli $U(t)$ jest funkcją periodyczną, to (4.7) jest równaniem Hilla. Badania obszarów stateczności ostatniego można dokonać np. przez zastosowanie nieskończonego układu równań, [14].

Jako przykład rozważmy przypadek, w którym prędkość przepływu zmienia się z czasem sinusoidalnie

$$(4.8) \quad U(t) = U_0 + U_t \cos \theta t.$$

Równanie na $f(t)$ ma postać

$$(4.9) \quad \ddot{f}(t) + \Omega (1 - 2\mu_1 \cos \theta t - 2\mu_2 \cos 2\theta t) f(t) = 0,$$

gdzie

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \Omega &= \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon} \sqrt{U_{cr}^2 - \left(U_0^2 + \frac{U_t^2}{2} \right)}, \\ \mu_1 &= \frac{U_0 U_t}{U_{cr}^2 - \left(U_0^2 + \frac{U_t^2}{2} \right)}, \quad \mu_2 = \frac{\frac{U_t^2}{4}}{U_{cr}^2 - \left(U_0^2 + \frac{U_t^2}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie okresowe poszukujemy w postaci szeregu

$$(4.11) \quad f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\theta t}{2} + b_k \sin \frac{k\theta t}{2} \right).$$

Po podstawieniu (4.11) do (4.9) otrzymuje się następujące równanie częstości krytycznych:

$$(4.12) \quad \begin{vmatrix} 1 \pm \mu_1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_1 \pm \mu_2) & -\mu_2 & 0 & \dots \\ -(\mu_1 \pm \mu_2) & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu_1 & -\mu_2 & \dots \\ -\mu_2 & -\mu_1 & 1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu_1 & \dots \\ 0 & -\mu_2 & -\mu_1 & 1 - \frac{49\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwsze przybliżenie dla pierwszej harmonicznej wynosi

$$(4.13) \quad \theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu_1},$$

zaś drugie

$$(4.14) \quad \theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu_1 + \frac{(\mu_1 \pm \mu_2)^2}{8 \pm 9\mu_1}}.$$

5. Anizotropia i dyspersja fal

Rozważymy anizotropię i dyspersję, tj. zależność prędkości fazowej od kierunku rozprzestrzeniania się i długości fali, przy pominięciu siły osiowej i sprężystości podłoża.

A. Teoria elementarna. Równanie ruchu po wprowadzeniu nowych współczynników ma postać

$$(5.1) \quad c_0^2 r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varepsilon U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\varepsilon U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Dla rozwiązania w postaci (3.2) stosunek prędkości fazowych do prędkości c_0 jest określony przez związek

$$(5.2) \quad \frac{c_{p1,2}}{c_0} = \frac{\varepsilon \zeta}{1 + \varepsilon} \pm \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon)(kr)^2 - \varepsilon \zeta^2}}{1 + \varepsilon}, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \frac{U}{c_0}.$$

Z powyższego związku przy ustalonych ε i ζ można określić najmniejszą wartość liczby falowej (krytyczną), powyżej której rozwiązanie (3.2) przedstawia fale wędrujące o stałej amplitudzie, poniżej zaś amplituda fal wędrujących rośnie wykładniczo z czasem. Wyznaczenie wartości krytycznej liczby falowej fal giętnych w rurach ma duże znaczenie praktyczne. Mianowicie procesowi wymuszania drgań giętnych rury z określoną częstością ω w pewnym przekroju rury odpowiadają fale wędrujące

w kierunku przepływu i przeciwnym, o różnych długościach i różnych prędkościach fazowych. Przy zmniejszaniu ω maleje również k . Przy $kr = (kr)_{cr}$, gdzie

$$(5.3) \quad (kr)_{cr} = \zeta \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

znajdziemy

$$(5.4) \quad \omega_{cr} = \frac{c_0}{r} \zeta^2 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3}.$$

B. Teoria Rayleigha. Uwzględnienie poprawki na bezwładność obrotową prowadzi do równania, [15],

$$(5.5) \quad c_0^2 r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \varepsilon U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\varepsilon U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1+\varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Analogicznie

$$(5.6) \quad \frac{c_{p1,2}}{c_0} = \frac{\varepsilon \zeta}{1+\varepsilon+(kr)^2} \pm \frac{\sqrt{[1+\varepsilon+(kr)^2](kr)^2 - [1+(kr)^2] \varepsilon \zeta^2}}{1+\varepsilon+(kr)^2}$$

oraz

$$(5.7) \quad (kr)_{cr} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon(1-\zeta^2)}{2}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon \zeta^2}{[1+\varepsilon(1-\zeta^2)]^2}} - 1 \right\}.$$

Dla fal długich przy $kr \rightarrow 0$ związek (5.6) przechodzi w (5.2). Podobnie dla małych ζ (5.7) przechodzi w (5.3).

C. Teoria Timoszenki. Uwzględnienie poprawki na bezwładność obrotową i siłę poprzeczną prowadzi do równania, [15],

$$(5.8) \quad (c_0^2 - \varepsilon \varepsilon' U^2) r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\varepsilon \varepsilon' U r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} - \left(1 + \varepsilon' + \varepsilon \varepsilon' - \varepsilon \varepsilon' \frac{U^2}{c_0^2}\right) r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} +$$

$$+ 2\varepsilon \varepsilon' \frac{U}{c_0^2} r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial t^3} + (1+\varepsilon) \frac{\varepsilon'}{c_0^2} r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \varepsilon U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\varepsilon U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1+\varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $\varepsilon' = E/k'G$.

Po podstawieniu rozwiązania w postaci (3.2) i wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych otrzymuje się równanie na $\kappa = c_p/c_0$.

$$(5.9) \quad (1+\varepsilon) \varepsilon' (kr)^2 \kappa^4 - 2\varepsilon \varepsilon' \zeta (kr)^2 \kappa^3 - \{[1+(1+\varepsilon - \varepsilon \zeta^2) \varepsilon'] (kr)^2 + 1 + \varepsilon\} \kappa^2 +$$

$$+ 2\varepsilon \zeta [\varepsilon' (kr)^2 + 1] \kappa + (1 - \varepsilon \varepsilon' \zeta^2) (kr)^2 - \varepsilon \zeta^2 = 0.$$

Równanie to dla $kr \rightarrow 0$ przechodzi w równanie

$$(5.10) \quad (1+\varepsilon) \kappa^2 - 2\varepsilon \zeta \kappa + \varepsilon \zeta^2 = 0,$$

którego pierwiastki są

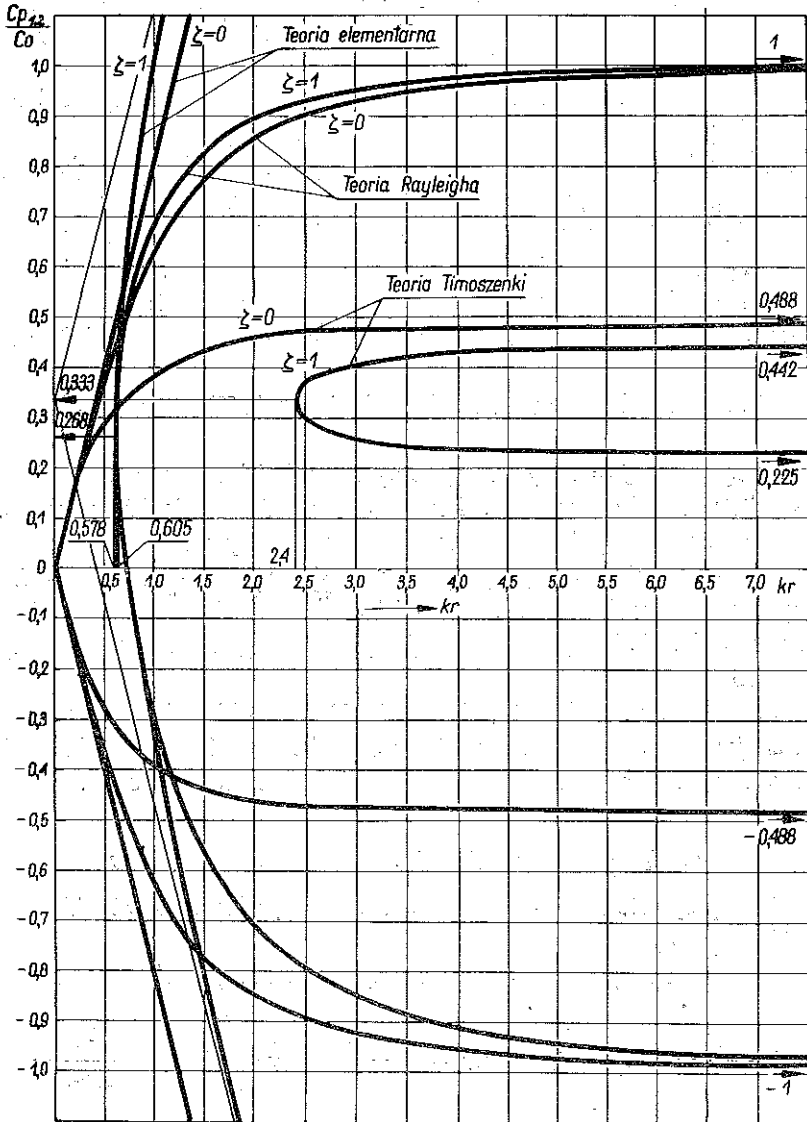
$$(5.11) \quad \kappa_{1,2} = \frac{\varepsilon \zeta}{1+\varepsilon} \pm i \frac{\sqrt{\varepsilon \zeta}}{1+\varepsilon}.$$

Podobnie dla $kr \rightarrow \infty$ równanie (5.9) przechodzi asymptotycznie w równanie

$$(5.12) \quad (1+\varepsilon) \varepsilon' \kappa^4 - 2\varepsilon \varepsilon' \zeta \kappa^3 - [1+(1+\varepsilon - \varepsilon \zeta^2) \varepsilon'] \kappa^2 + 2\varepsilon \varepsilon' \zeta \kappa + 1 - \varepsilon \varepsilon' \zeta^2 = 0,$$

którego pierwiastki są

$$(5.13) \quad \kappa_{1,2} = \frac{\varepsilon \zeta}{1+\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{(1+\varepsilon) \varepsilon' - \varepsilon \varepsilon'^2 \zeta^2}}{(1+\varepsilon) \varepsilon'}, \quad \kappa_{3,4} = \pm 1.$$



Rys. 3

Ze wzoru (5.13) uzyskać można wyrażenie na krytyczną wartość stosunku prędkości U do c_0 .

$$(5.14) \quad \zeta_{cr} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon'}},$$

po przekroczeniu którego, nawet fale bardzo krótkie będą niestacjonarne o narastającej amplitudzie.

W charakterze przykładu wyznaczono krzywe dyspersji dla $\varepsilon = 0,5$, $\varepsilon' = 2,8$, $\zeta = 0$ i $\zeta = 1$. Przypadek $\zeta = 0$ odpowiada rozprzestrzenianiu się fal w rurze przy spoczywającym płynie. Krzywe dyspersji odpowiadające temu przypadkowi położone są poniżej odpowiednich krzywych dla rury niezapełnionej płynem. Dla małych wartości ζ anizotropia fal jest nieznaczna, tak że w przypadku rur stalowych przy prędkościach przepływu rzędu kilku metrów na sekundę prędkości fazowe fal propagujących się w kierunku przepływu i przeciwnym można uważać za jednakowe. Natomiast dla dużych wartości ζ (przypadek taki występuje przy przepływie płynu przez rurę gumową), anizotropia fal jest znaczna i w sposób zasadniczy zmienia ich charakter rozprzestrzeniania się. W obydwu rozważanych przypadkach krzywe dyspersji mają postać przedstawioną na rys. 3. Porównując stosowane teorie zginania można wysnuć następujące wnioski:

1) Wszystkie teorie dają efekt anizotropii fal dla małych wartości ζ w zakresie fal długich.

2) Dla fal krótkich i dużych wartości ζ jedynie teoria Timoszenki daje poprawne wyniki.

3) Dla przypadku $\zeta = 1$ wynik uzyskany z teorii Timoszenki najbardziej różni się od wyników teorii elementarnej i Rayleigha, a mianowicie fale o kr zawartym od 2,4 do ∞ propagują się zawsze w kierunku przepływu, a stosunki prędkości tych fal do prędkości c_0 dążą asymptotycznie od 0,333 do 0,225 i 0,442.

4) Krytyczna wartość stosunku prędkości przepływu U do c_0 , po przekroczeniu którego wszystkie fale będą mieć narastającą amplitudę, w rozważonym przypadku wynosi 1,035.

Na stwierdzenie, w jakim stopniu teoria Timoszenki daje poprawne wyniki, pozwoli znajomość ścisłego rozwiązania w oparciu o ogólne równania teorii sprężystości dla wydrążonego grubościennego cylindra z wewnętrznym przepływem płynu.

6. Wpływ rozkładu prędkości w poprzecznym przekroju rury

Rozważany przypadek ma zastosowanie dla przepływów płynów lepkich (np. gęstych olejów, rys. 4).

Równanie ruchu rury w rozważanym przypadku ma postać

$$(6.1) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2\pi q_i \int_0^{r_i} U^2(r) r dr - S \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4\pi q_i \int_0^{r_i} U(r) r dr \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\rho A + q_i A_i) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = 0.$$

Dla przepływu laminalnego rozkład prędkości ma postać

$$(6.2) \quad U(r) = U_m \left(1 - \frac{r^2}{r_i^2}\right).$$

Równanie ruchu będzie

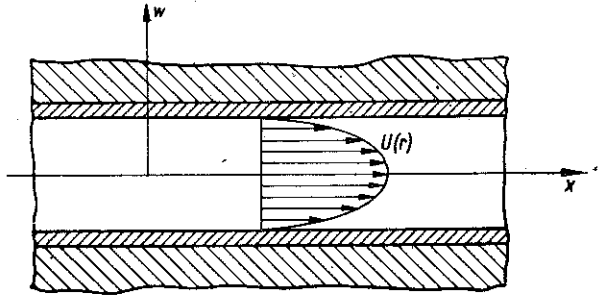
$$(6.3) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{4}{3} \rho_i \bar{U}^2 A_i - S\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho_i \bar{U} A_i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\rho A + \rho_i A_i) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = 0,$$

gdzie

$$\bar{U} = \frac{2}{r_i^2} \int_0^{r_i} U(r) r dr$$

oznacza prędkość średnią przepływu laminarnego.

Po podstawieniu (3.2) do (6.3) i wprowadzeniu nowych współczynników otrzymuje się

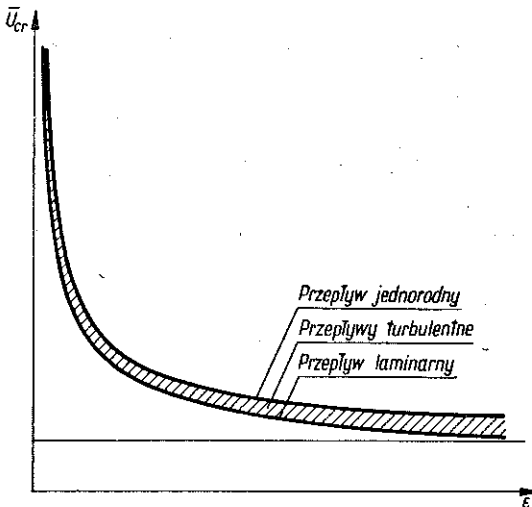


Rys. 4

$$(6.4) \quad c_{p1,2} = \frac{\varepsilon \bar{U}}{1 + \varepsilon} \pm \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon) \left(b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2}\right) - \frac{\varepsilon(\varepsilon + 4)}{3} \bar{U}^2}}{1 + \varepsilon}$$

Prędkość średnia krytyczna będzie

$$(6.5) \quad \bar{U}_{cr} = \sqrt{\left(b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2}\right) \frac{3(1 + \varepsilon)}{\varepsilon(4 + \varepsilon)}}.$$



Rys. 5

Z uwagi na fakt, iż w przepływie laminarnym występuje najbardziej niewyrównany rozkład prędkości, przepływ ten jest najbardziej niekorzystny z punktu widzenia utraty stateczności rury. W miarę wzrostu liczby Reynoldsa maleje stosunek U_m/\bar{U} prędkości maksymalnej do prędkości średniej, [16], (np. przy $Re = 5000$, $U_m/\bar{U} = 1,3$, a przy $Re = 3\,000\,000$, $U_m/\bar{U} = 1,15$). Tak więc dla przepływów turbulentnych krzywe $\bar{U}_{cr}(\varepsilon)$ zawarte będą pomiędzy (3.8) i (6.5). Zależność \bar{U}_{cr} od ε przedstawia rys. 5.

Krzywa odpowiadająca stałemu rozkładowi prędkości przy $\varepsilon \rightarrow \infty$ posiada asymptotę

$$(6.6) \quad \bar{U}_{cr} = \sqrt{b^2 k^2 + c^2 + \frac{d^2}{k^2}},$$

dla krzywej zaś odpowiadającej przepływowi laminarnemu asymptotą tą jest oś ε .

7. Zakończenie

Przedstawione w pracy wyniki mają ograniczony zakres zastosowań z uwagi na nieskończoność rury oraz jednowymiarowe potraktowanie problemu. O ile założenie nieściśliwości płynu dla przypadku cieczy jest dopuszczalne i technicznie uzasadnione (prędkości przepływu cieczy w rurociągach są rzędu 5 m/sek), to dla przypadku gazów znacznie ogranicza zakres zastosowań. W związku z powyższym jako zagadnienia otwarte pozostają: trójwymiarowy problem rozprzestrzeniania się fal sprężystych wzdłuż grubościennnej rury przy przepływie płynu idealnego ściśliwego oraz zagadnienie drgań w analogicznym problemie dla rury o skończonej długości.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. ASHLEY, G. HAVILAND, *Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid*, J. Appl. Mech., 3, 17 (1950).
- [2] В. И. ФЕОДОСЬЕВ, *О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости*, Инж. Сб., 10, 1951.
- [3] G. W. HOUSNER, *Bending Vibrations of a Pipe Line Ccntainking Flowing Fluid*, J. Appl. Mech., 2, 19 (1952).
- [4] F. I. N. NIORDSON, *Vibrations of a Cylindrical Tube Containing Flowing Fluid*, Trans. Royal Inst. Technol., 73, Stockholm, 1953.
- [5] R. H. LONG, Jr., *Experimental and Theoretical Study of Transverse Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid*, J. Appl. Mech., 1, 22 (1955).
- [6] G. H. HANDELMAN, *Bending Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid*, Quart. Appl. Math., 3, 13 (1955).
- [7] CHENG CHE-MIN, *Problems in Hydro-elasticity*, Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels 1956.
- [8] G. HEINRICH, *Schwingungen durchströmter Rohre*, Z. Angew. Math. Mech., 11/12, 36 (1956).
- [9] HŪ HAI-CHANG, TSOON WAN-SHIA, *On the Flexural Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid*, Proc. 3-rd Congr. Theor. Appl. Mech., Bangalore 1957.
- [10] CHENG CHE-MIN, *Vibration of Panel in the Presence of a Fluid*, Acta Mech. Sinica, 1, 2 (1958).
- [11] CHENG CHE-MIN, *Vibration of Pipe Line*, Acta Mech. Sinica, 2, 2 (1958).
- [12] В. В. БОЛОТИН, *Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости*, Инж. Сб., 24, 1956.
- [13] J. NESYŤTO, Z. ŠEP, *The Vibration of a Cylindrical Shell of Finite Length with a Supersonic Inside Flow*, Proc. Vibr. Probl., 3, 2 (1961).
- [14] В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Москва 1956.
- [15] С. П. ТИМОШЕНКО, *Колебания в инженерном деле*, Москва 1959.
- [16] Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ, *Механика жидкости и газа*, Москва 1959.

Резюме

УПРУГИЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРУБЕ ПРИ
ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НЕЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются несколько аспектов распространения упругих изгибных волн в бесконечной трубе при протекании через нее несжимаемой жидкости. Формулируются уравнения движения трубы переменного сечения при нестационарном потоке жидкости, рассматривается влияние различных теорий изгиба (элементарной, Рэлея и Тимошенко) на форму кривых дисперсии и исследуется, в рамках элементарной теории, влияние распределения скорости в поперечном сечении трубы на величину критической скорости течения.

Summary

FLEXURAL ELASTIC WAVES IN AN INFINITE TUBE CONTAINING FLOWING
INCOMPRESSIBLE FLUID

This paper contains a discussion of several aspects of the propagation problem of flexural elastic waves in an infinite tube containing flowing incompressible fluid. The equations of motion of the tube are derived assuming variable cross-sectional area and non-steady-state flow. Various bending theories (elementary, Rayleigh and Timoshenko) are used to discuss the form of the dispersion curves. On the grounds of the elementary theory the influence of the type of velocity distribution in the cross section on the value of the critical flow velocity is considered.

INSTYTUT LOTNICTWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1962 r.