

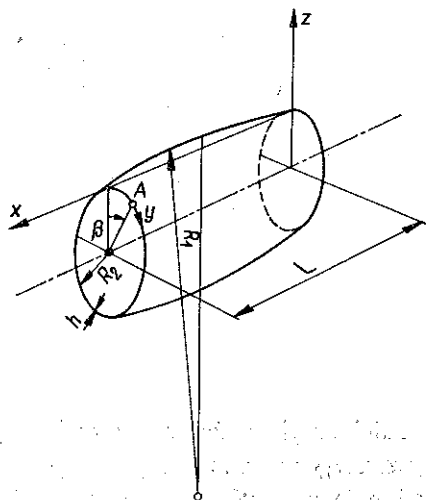
UZUPEŁNIENIE RÓWNAŃ TECHNICZNEJ TEORII POWŁOK

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Techniczna teoria powłok opracowana przez W. Z. WŁASOWA, [1], i M. MUSTARI, [2], jest bardzo często stosowana w rozwiązywaniu powłok o małej wyniosłości lub powłok walcowych. Teoria ta jest prosta w budowie i wygodna w zastosowaniach. Jednak w wyniku przyjęcia szeregu uproszczeń w trakcie wyprowadzania daje ona w niektórych przypadkach dość duże błędy. Błędy te są tym większe, im niższy jest rząd harmonicznej n szeregu Fouriera rozwinięcia obciążenia działającego na powłokę. Fakt ten spowodowany jest założeniem, że funkcje wchodzące w skład równań są szybko zmienne (a więc mają duże pochodne) i pominięciem w równaniach pochodnych niższych rzędów w porównaniu z wyższymi. Szczególnie duże różnice zauważa się porównując wyniki otrzymane dla powłok walcowych.

Wyniki obliczone na podstawie równań teorii ścisłej, na przykład równań Flüggego czy ścisłych równań Własowa lub Goldienweisiera, różnią się znacznie od wyników otrzymanych na podstawie równań teorii technicznej Własowa. Równania Własowa dla powłok walcowych można sprowadzić do równania Donnella, [3]. Zakres zastosowania tego równania zbadał HOFF, [5], biorąc za podstawę równania powłoki walcowej Flüggego, i stwierdził, że dla małych n dokładność równania Donnella jest niewystarczająca. Goldienweiser podał w swej pracy, [7], podobne uproszczone równania powłok walcowych i określił zakres ich stosowania w zależności od rzędu harmonicznej n obciążenia i innych parametrów powłoki. Równania te mają jednak dość wąskie zakresy zastosowania i np. dla powłoki obciążonej siłą skupioną, rozwiniętą w szereg Fouriera, obliczenia należy przeprowadzać stosując wszystkie rodzaje podanych równań, co jest dość kłopotliwe.



Rys. 1

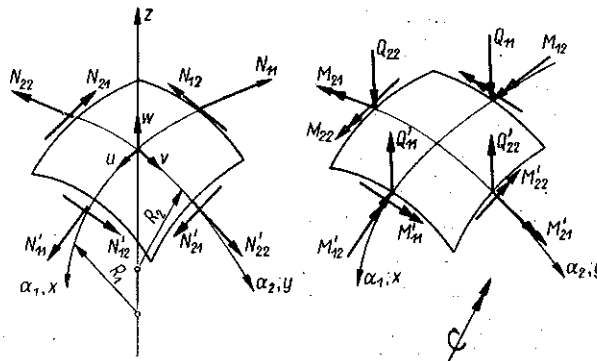
Duża niedokładność równań teorii technicznej Własowa w przypadku powłok walcowych wywołana jest tym, że wszystkie skreślone w trakcie wyprowadzania wyrazy zawierają parametry krzywizny powierzchni środkowej jako współczynniki. Gdy więc oba główne promienie krzywizny powłoki są stosunkowo duże, skreślone wyrazy są małe. W przypadku zaś gdy jeden z promieni krzywizny jest duży, a drugi mały (jak to ma miejsce w powłokach zbliżonych do pełnego walca, rys. 1), błędy mogą być większe.

Celem niniejszej pracy jest takie skorygowanie równań technicznej teorii Własowa, aby w rezultacie otrzymać równania stosujące się do każdego rodzaju obciążenia, o równie prostej budowie, dające jednak dokładniejsze wyniki. Sprawdzenia dokładności równań dokonano porównując wyniki otrzymane z wynikami równań ścisłych dla powłoki walcowej, [10].

W przypadku powłoki walcowej wyprowadzone równania sprowadzają się do równania ostatnio zaproponowanego przez MORLEYA, [4].

2. Zależności geometryczne i odkształcanie powierzchni środkowej

Na rysunku 2 przedstawiono element powłoki wraz z działającymi na niego siłami. Położenie punktu na powierzchni środkowej określono za pomocą współrzędnych α_1 i α_2 ; kierunek z pokrywa się z normalną do powierzchni środkowej, zaś kierunki α_1 i α_2 pokrywają się z kierunkami głównych krzywizn powłoki. Krzywizny powłoki oznaczono $1/R_1$ i $1/R_2$, założono przy tym, że krzywizny te nie zmieniają się w sposób zbyt szybki.



Rys. 2

Dalej przyjęto, że w przekroju $\alpha_1 = \text{const}$ działają: siła normalna N_{11} , siła styczna N_{12} , moment zginający M_{11} , moment skręcający M_{12} oraz siła poprzeczna Q_{11} . Podobnie w przekroju $\alpha_2 = \text{const}$ działają: siła normalna N_{22} , siła styczna N_{21} , moment zginający M_{22} , moment skręcający M_{21} oraz siła poprzeczna. Wszystkie siły wewnętrzne odniesione są do jednostki długości linii $\alpha_1 = \text{const}$ i $\alpha_2 = \text{const}$. Na rys. 2 podano ich dodatnie zwroty.

Pod wpływem sił zewnętrznych działających na powłokę jej powierzchnia środkowa doznaje odkształceń oraz przemieszczeń. Składowe stanu przemieszczenia

oznaczono przez u, v, w , a składowe stanu odkształcenia przez $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$. Dodatnie kierunki tych składowych przedstawiono na rys. 2.

Pomiędzy stanem przemieszczenia i odkształcenia istnieją następujące związki, [6]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u}{A_1} \right). \end{aligned}$$

Przy odkształceniach powłoka doznaje zmian krzywizn κ_{11} i κ_{22} oraz skręcenia κ_{12} . Wielkości te związane są ze stanem przemieszczenia powłoki następującymi zależnościami:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \kappa_{11} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_2 A_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right), \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right), \\ \kappa_{12} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right). \end{aligned}$$

Związki (2.2) przyjęto w ich pełnej postaci, tzn. uwzględniono wpływ przemieszczeń u i v na krzywizny powierzchni środkowej. W teorii technicznej Własowa wpływ ten został pominięty.

Pomiędzy odkształceniami $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ i ε_{12} i zmianami krzywizn powierzchni środkowej powłoki κ_{11}, κ_{22} i κ_{12} istnieją trzy następujące równania geometrycznej zgodności:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &A_2 \frac{\partial \kappa_{22}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\kappa_{22} - \kappa_{11}) - A_1 \frac{\partial \kappa_{12}}{\partial \alpha_2} - 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \kappa_{12} + \\ &\quad + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_{12} + \frac{1}{R_1} \left[A_1 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_{12} - A_2 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \right] = 0, \\ &A_1 \frac{\partial \kappa_{11}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\kappa_{11} - \kappa_{22}) - A_2 \frac{\partial \kappa_{12}}{\partial \alpha_1} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \kappa_{12} + \\ &\quad + \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_{12} + \frac{1}{R_2} \left[A_2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_{12} - A_1 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \right] = 0, \\ &\frac{\kappa_{11}}{R_2} + \frac{\kappa_{22}}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[A_2 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) - \frac{A_1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_{12} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[A_1 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) - \frac{A_2}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_{12} \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

3. Naprężenia w powłoce, równania równowagi

Zależności pomiędzy odkształceniami i siłami wewnętrznymi przyjęto tak samo jak w technicznej teorii powłok Własowa:

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= K(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \\
 N_{22} &= K(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\
 N_{12} &= N_{21} = S = \frac{1}{2} K(1 - \nu)\varepsilon_{12}, \\
 M_{11} &= D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}), \\
 M_{22} &= D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}), \\
 M_{12} &= M_{21} = H = D(1 - \nu)\kappa_{12},
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

gdzie $K = Eh/(1 - \nu^2)$, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$, oraz h jest grubością powłoki, a ν współczynnikiem Poissona. Zależności te są bardzo często rozważane w teorii powłok. Budowa ich jest analogiczna do budowy odpowiednich wzorów z teorii płyt. Powodują one powstanie pewnych sprzeczności teorii, np. nie pozwalają na ścisłe spełnienie szóstego równania równowagi. Nie znane są jednak przykłady, w których niedokładności wywołane przez przyjęcie warunków (3.1) byłyby większe niż te, które wynikają z innych początkowych założeń teorii cienkich powłok (por. [6], str. 53). Przy wyprowadzaniu zależności (3.1) przyjęto, że grubość powłoki jest mała w porównaniu z promieniami krzywizny i pominięto wyrazy rzędu h/R w porównaniu z jednością.

Równania równowagi elementu powłoki ograniczonego przekrojami $a_1 = \text{const}$, $a_2 = \text{const}$ są następujące, [6]:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{11})}{\partial a_1} - N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial a_2} (A_1 S) + S \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \right] + \frac{Q_1}{R_1} + X_1 &= 0, \\
 \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_1 N_{22})}{\partial a_2} - N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{\partial}{\partial a_1} (A_2 S) + S \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \right] + \frac{Q_2}{R_2} + X_2 &= 0, \\
 \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial a_1} (A_2 Q_{11}) + \frac{\partial}{\partial a_2} (A_1 Q_{22}) \right] - \frac{N_{11}}{R_1} - \frac{N_{22}}{R_2} + X_3 &= 0, \\
 \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial a_1} (A_2 H) + H \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial a_2} (A_1 M_{22}) - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \right] - Q_{22} &= 0, \\
 \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial a_2} (A_1 H) + H \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{\partial}{\partial a_1} (A_2 M_{11}) - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \right] - Q_{11} &= 0, \\
 N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

W porównaniu z teorią techniczną Własowa w równaniach tych uwzględniono wszystkie wyrazy. W teorii Własowa pominięto wpływ rzutów sił Q_{11} i Q_{22} na osie styczne do a_1 i a_2 .

4. Funkcja naprężeń i ogólne równania

Pierwsze dwa równania równowagi można spełnić tożsamościowo, jeżeli siły N_{11} i N_{22} i S wyrazić za pomocą jednej funkcji naprężeń. Jeżeli siły wewnętrzne X_1 i $X_2 \neq 0$, to rozwiązanie w podanej postaci można uzyskać, gdy siły te mają potencjał U , [9]. Jeżeli założyć, że

$$X_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1}, \quad X_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial U}{\partial \alpha_2},$$

to siły N_{11} i N_{22} i S wyrażają się przez Φ i U w następujący sposób:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} N_{11} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} - \int \frac{A_1}{R_1} Q_{11} d\alpha_1 + U, \\ N_{22} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} - \int \frac{A_2}{R_2} Q_{22} d\alpha_1 + U, \\ N_{12} = N_{21} = S &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Jeżeli podstawić określone w ten sposób siły wewnętrzne do równań (3.2)₁, (3.2)₂, to równania te będą w przybliżeniu spełnione. Zaniehbuje się tu niektóre małe wyrazy zawierające niskie pochodne funkcji Φ .

Problem określenia sił wewnętrznych powłoki będzie rozwiązany, gdy spełnione będą pozostałe warunki równowagi (3.2) oraz trzy warunki geometryczne (2.3). Aby rozwiązanie powłoki sprowadzić do rozwiązania jedynie dwu równań różniczkowych, podane równania przekształcono w następujący sposób:

Czwarte i piąte równanie grupy (3.2) przepisano w odmiennej formie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (M_{11} + M_{22}) + \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+\nu}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] \right\}, \\ Q_{22} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (M_{11} + M_{22}) + \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+\nu}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (M_{22} - M_{11}) + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] \right\}. \end{aligned}$$

Jeżeli wyrazić momenty zginające i skręcające korzystając z zależności (3.1), to otrzymuje się następujące wzory na siły Q_{11} i Q_{22} :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} Q_{11} = D \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\kappa_{11} + \kappa_{22}) - \frac{1-\nu}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \kappa_{22}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \kappa_{11} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \kappa_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \kappa_{12} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad Q_{22} = D \left\{ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} (\kappa_{11} + \kappa_{22}) - \frac{1-\nu}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial a_2} (A_1 \kappa_{11}) - \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \kappa_{22} - \frac{\partial}{\partial a_1} (A_2 \kappa_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \kappa_{12} \right] \right\}.$$

Po podstawieniu do wyrażen (4.3) funkcji (2.2) otrzymuje się

$$(4.4) \quad Q_{11} = -D \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\Delta w + (1-\nu) \frac{w}{R_1 R_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \frac{u}{R_1} \right],$$

$$Q_{22} = -D \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left[\Delta w + (1-\nu) \frac{w}{R_1 R_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \frac{u}{R_1} \right],$$

gdzie

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \right) \right].$$

W powyższych wzorach występują pochodne przemieszczeń u i v . Pochodne te można wyrazić za pomocą funkcji w i Φ korzystając ze wzorów (2.1) oraz warunków geometrycznych Codazziego:

$$(4.5) \quad \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2}.$$

Jeżeli przemieszczenia ε_{11} i ε_{22} wyrazić przez siły wewnętrzne

$$(4.6) \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh} (N_{11} - \nu N_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh} (N_{22} - \nu N_{11}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{2}{Eh} (1+\nu) S,$$

to po uwzględnieniu zależności (4.6) i (4.5) we wzorach (4.4) otrzymuje się

$$(4.7) \quad Q_{11} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ D \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] - \frac{D}{Eh} \left[\frac{1}{R_1} (N_{11} - \nu N_{22}) + \frac{1}{R_2} (N_{22} - \nu N_{11}) \right] \right\},$$

$$Q_{22} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left\{ D \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] - \frac{D}{Eh} \left[\frac{1}{R_1} (N_{11} - \nu N_{22}) + \frac{1}{R_2} (N_{22} - \nu N_{11}) \right] \right\}.$$

W trakcie przekształceń pominięto niektóre małe wyrazy. Pominięto mianowicie wyrazy rzędu $(1/R^2)$ ($dR/d\alpha$) w porównaniu z $1/R$ zakładając, że w całym obszarze powłoki promienie krzywizny nie zmieniają się w sposób zbyt szybki. Jeżeli teraz określone w ten sposób siły Q_{11} i Q_{22} podstawić do wzorów (4.1), to otrzymuje się następujące wzory:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} N_{11} = & -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} + \\ & + \frac{D}{R_1} \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] - \\ & - \frac{D}{EhR_1} \left[\frac{1}{R_1} (N_{11} - \nu N_{22}) + \frac{1}{R_2} (N_{22} - \nu N_{11}) \right] + U, \\ N_{22} = & -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} + \\ & + \frac{D}{R_2} \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] - \\ & - \frac{D}{EhR_2} \left[\frac{1}{R_1} (N_{11} - \nu N_{22}) + \frac{1}{R_2} (N_{22} - \nu N_{11}) \right] + U. \end{aligned}$$

Wyrazy podkreślone we wzorach (4.8) są bardzo małe w porównaniu z pierwszymi wyrazami tych wzorów, gdyż mnożone są przez współczynnik

$$\frac{D}{EhR^2} = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} = \frac{1}{4\nu^4},$$

który dla powłok cienkościennych ma bardzo małą wartość. Hoff wykazał, [5], że liczbowa wartość parametru ν musi być większa niż 5, gdyż w przeciwnym razie nie są słuszne założenia teorii cienkich powłok. Błąd jaki się popełnia odrzucając wyrażenia podkreślone jest tego rzędu, co błąd powstały przy odrzuceniu $1/4\nu^4$ w porównaniu z jednością. Gdy wyrażenia te zostaną pominięte, siły błonowe N_{11} i N_{22} i N_{12} mają postać następującą:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} N_{11} = & -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} + \\ & + \frac{D}{R_1} \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] + U, \\ N_{22} = & -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} + \\ & + \frac{D}{R_2} \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] + U, \\ N_{12} = & \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Jeżeli siły błonowe we wzorach (4.7) wyrazić przez funkcję naprężeń, zachowując jedynie ich główne wartości, to otrzymuje się następujące wzory:

$$Q_{11} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ D \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] + \right. \\ \left. + \frac{D}{Eh} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta \Phi - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta_h \Phi \right\}, \quad (4.10)$$

$$Q_{22} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ D \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right] + \right. \\ \left. + \frac{D}{Eh} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta \Phi - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta_h \Phi \right\},$$

gdzie

$$\Delta_h = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right],$$

Uwzględnienie wszystkich składników daje dodatkowe małe wyrazy rzędu D/EhR^2 w porównaniu z jednością.

Podstawiając poprzednio obliczone wartości N_{11} i N_{22} , Q_{11} i Q_{22} do trzeciego równania równowagi, otrzymuje się po przekształceniach równanie

$$(4.11) \quad D \left[\Delta \Delta + 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \Delta + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right)^2 \right] w - \Delta_k \Phi + \frac{D}{Eh} \Delta \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta - \right. \\ \left. - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta_h \right] \Phi = X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U,$$

gdzie

$$\Delta_k = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{R_2} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{R_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right].$$

Równanie to można jeszcze przedstawić w innej prostszej postaci biorąc pod uwagę, że brakujący wyraz $(1-\nu)^2/4R_1^2 R_2^2$ jest bardzo mały:

$$(4.12) \quad D \left[\Delta + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{2R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right)^2 \right] w - \Delta_k \Phi + \\ + \frac{D}{Eh} \Delta \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta_h \right] \Phi = X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U.$$

Pozostało jeszcze do spełnienia trzecie równanie zgodności odkształceń. Jeżeli wyrazić w tym równaniu krzywizny przez przemieszczenia przy pomocy wzorów

(2.2), a następnie przemieszczenia przez siły wewnętrzne przy pomocy wzorów (4.6) i wreszcie siły przez wzory (4.1): to po podstawieniu do równania (2.33) otrzymujemy

$$(4.13) \quad \frac{1}{Eh} \left(\Delta \Delta \Phi + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \Phi \right) + \Delta_k w + \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w + \\ + \frac{D}{Eh} \Delta \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \Delta - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta_h \right] w = \frac{1-\nu}{Eh} \Delta U.$$

Biorąc pod uwagę założenie, że promienie krzywizny nie zmieniają się gwałtownie, możemy w równaniach (4.12) i (4.13) podstawić

$$(4.14) \quad \Delta_{kk} = \Delta_k - \frac{D}{Eh} \left[\frac{1-\nu}{2} \Delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta - \frac{1+\nu}{2} \Delta_h \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta \right],$$

wtedy otrzymamy

$$D \left[\Delta + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{2R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right]^2 w - \Delta_{kk} \Phi = X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U, \\ \frac{1}{Eh} \left[\Delta \Delta + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \right] \Phi + \Delta_{kk} w + \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w = \frac{1-\nu}{Eh} \Delta U.$$

Ponieważ współczynnik D/EhR^2 jest wielkością bardzo małą, możemy w obliczeniach odrzucić wyraz podkreślony w wyrażeniu (4.14) i wtedy operator Δ_{kk} przyjmuje postać identyczną jak w równaniach Własowa. Gdy rozpatrujemy powłoki o $R_1 \gg R_2$, równanie (4.13) można jeszcze dla ułatwienia dalszych obliczeń uprościć, pomijając małe wyrazy mnożone przez $1/R_1 R_2$. Otrzymuje się wtedy równanie takie samo jak w teorii Własowa

$$(4.15) \quad \frac{1}{Eh} \Delta \Delta \Phi + \Delta_k w + (1-\nu) \Delta U.$$

Gdy $R_1 \approx \text{const}$ i $R_2 \approx \text{const}$ równania (4.12) i (4.14) można sprowadzić do jednego równania. W tym celu dokonajmy operacji $\Delta \Delta$ na obu stronach równania (4.12):

$$(4.16) \quad \Delta \Delta \Delta \left[\Delta + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{2R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right]^2 w - \Delta \Delta \Delta_k \Phi = \\ = \Delta \Delta X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta \Delta U.$$

Jeżeli wziąć pod uwagę, że z równania (4.14) mamy

$$\Delta \Delta \Phi = Eh \left[-\Delta_k w + \frac{1-\nu}{Eh} \Delta U \right],$$

to po podstawieniu do równania (4.15) otrzymamy

$$(4.17) \quad D\Delta\Delta \left[\Delta + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{2R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right]^2 w + \\ + Eh \Delta_k \Delta_k w = \Delta\Delta \left[X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U + (1-\nu) \Delta_k \Delta U \right].$$

Ostatecznie proponuje się następujący układ równań do określania stanu naprężeń i odkształceń w powłoce o dużej wyniosłości i łagodnej zmianie promieni krzywizny (równania te niewiele odbiegając od równań Własowa niewiele również komplikują rozwiązanie):

$$(4.18) \quad D \left[\Delta + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{2R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right]^2 w - \Delta_k \Phi = X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi + \Delta_k w = \left(\frac{1-\nu}{Eh} \right) \Delta U.$$

Zamiast drugiego z równań (4.18) można również stosować w obliczeniach dokładniejsze równanie (4.13), pomijając w nim wyrazy mnożone przez współczynnik D/Eh .

Dla powłoki walcowej równanie (4.18) staje się po podstawieniu $1/R_1 = 0$ i $U = 0$ identyczne z równaniem opisanym w pracy [4] przez MORLEYA i otrzymanym na drodze przekształcenia równania Flüggego. MORLEY proponuje zastąpić tym równaniem równanie Donnella, [3], którego błędy wzrastają ze wzrostem okresu funkcji w . Jak wiadomo równanie Donnella można otrzymać bezpośrednio z równań technicznej teorii powłok W. Własowa, [1], podstawiając $R_1 = \infty$ i sprowadzając dwa równania określające funkcje w i Φ do jednego określającego ugięcia w .

Równania technicznej teorii Własowa otrzymuje się z równań (4.18) pomijając w pierwszym równaniu nawias zawierający funkcję promieni krzywizny powłoki. Dokładność równań (4.18) została w następnych rozdziałach sprawdzona przez porównanie wyników dla powłoki walcowej otrzymanych na podstawie równań teorii technicznej i równań ścisłej teorii Flüggego, [8]. Różnice zawierają się w ułamkach procentu.

Uproszczenia czynione w trakcie wyprowadzeń ograniczały się w zasadzie do odrzucania wyrazów małych w porównaniu z jednością, rzędu h/R i h/R^2 , i niektórych niskich pochodnych funkcji Φ . Uproszczenia w teorii technicznej Własowa są znacznie dalej idące, np. pominięty jest w wyrażeniach (2.2), określających zmiany krzywizny powierzchni środkowej powłoki, wpływ przemieszczeń u i v , wpływ sił tnących w równaniach równowagi (3.2)₁ i (3.2)₂ oraz odrzucone niskiego rzędu pochodne funkcji w i Φ . Wydaje się, że właśnie te uproszczenia są źródłem większych błędów.

Nowożyłow, ([6], s. 89) zwrócił uwagę na fakt, że techniczne równania Własowa napisane dla powłoki walcowej nie przekształcają się w równaniu pierścienia koło-

wego, gdy w i Φ są niezależne od a_1 . Jeżeli jednak punktem wyjścia są równania (4.18), to uzyskuje się ściśle równania pierścienia.

Równania (4.18) w powyższej postaci najwygodniej jest stosować w rozwiązywaniu problemów konstrukcyjnych. Zaletą ich jest stosunkowo duża dokładność oraz prosta forma rozwiązania. Ponieważ jednak i w tych równaniach skreślono niektóre wyrazy zawierające pochodne niskich rzędów, największe błędy mogą powstać wtedy, gdy funkcje w i Φ mają przebieg «łagodny» w całym obszarze powłoki.

Jak wykazano dalej, pierwiastki równania charakterystycznego podanych równań można uzyskać dla pewnego typu powłok w postaci zamkniętej.

5. Siły wewnętrzne

Rozwiązanie powłoki sprowadza się do rozwiązania dwu równań różniczkowych (4.18) lub równania (4.18) i znalezienia funkcji w i Φ przy danych warunkach brzegowych. Znajomość funkcji w pozwoli na określenie momentów zginających i skręcających ze wzorów (3.1) i (2.2). Otrzymuje się wtedy

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -D \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial a_1} \right) + \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right) + \frac{\nu}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial a_1} \right) + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu}{R_2^2} \right) w \right], \\
 (5.1) \quad M_{22} &= -D \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial a_1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial a_1} \right) + \frac{\nu}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right) + \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\nu}{R_1^2} \right) w \right], \\
 M_{12} &= -D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial a_1 \partial a_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \frac{\partial w}{\partial a_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right].
 \end{aligned}$$

W powyższych wyrażeniach pominięto małe wyrazy mnożone przez współczynnik D/EhR^2 .

Stosując konsekwentnie te same uproszczenia, siły poprzeczne obliczyć można ze wzorów (5.2):

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad Q_{11} &= -D \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right], \\
 Q_{22} &= -D \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left[\Delta w + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w \right].
 \end{aligned}$$

6. Rozwiązania równań

Dla pewnego typu powłok o podwójnej krzywiznie łatwo jest uzyskać rozwiązania podanych równań. Otóż wiele powłok rozwiązuje się w sposób przybliżony zakładając, że ich promienie krzywizny mają stałą średnią wartość, zaś forma kwa-

dratowa powierzchni środkowej powłoki jest identyczna z formą kwadratową pewnej powierzchni płaskiej lub walcowej, [1]. Sprowadza się to w rezultacie do założenia w rozwiązaniu, że $R_1 = \text{const}$ i $R_2 = \text{const}$ oraz współczynniki pierwszej formy kwadratowej $A_1 = \text{const}$ i $A_2 = \text{const}$. Jeżeli więc przyjąć, że $ds^2 = da_1^2 + da_2^2$, stąd wynika, że $A_1 = 1$ i $A_2 = 1$. Założenie to nie pozwala ściśle spełnić wszystkich warunków geometrycznych powłoki. Mianowicie warunek Gaussa wyrażający się równaniem

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \right) = - \frac{A_1 A_2}{R_1 R_2}$$

wymaga, wobec przyjęcia $A_1 = \text{const}$ i $A_2 = \text{const}$, znikania również prawej strony powyższego równania. Warunek ten spełniony jest jedynie w przybliżeniu, gdy przynajmniej jeden z promieni krzywizny powłoki jest duży w porównaniu z innymi wymiarami powłoki. Wynika stąd, że rozwiązanie uzyskane w ten sposób jest dokładne jedynie dla tego typu powłok. Dla walca kołowego warunek Gaussa jest spełniony ściśle, gdyż $R_2 = R$, $R_1 = \infty$ oraz $A_1 = \text{const}$ i $A_2 = \text{const}$.

6.1. Rozwiązanie równań jednorodnych. Rozwiązanie równań (4.18) można otrzymać przez podstawienie

$$(6.1) \quad w = \sum_n C_n e^{kx} \cos ny, \quad \Phi = \sum_n \varphi_n C_n e^{kx} \cos ny.$$

Rozwiązanie równań przeprowadzono we współrzędnych bezwymiarowych odniesionych do promienia R_2 :

$$x = \frac{\alpha_1}{R_2}, \quad y = \frac{\alpha_2}{R_2},$$

gdzie C_n oznaczają stałe całkowania, a φ_n nie znane na razie parametry.

Po podstawieniu do równań (4.18) i odrzuceniu prawej strony otrzymuje się następujące równania charakterystyczne:

$$(6.2) \quad \frac{D}{R_2^4} (k^2 - n^2 + \chi_R)^2 - \frac{\varphi_n}{R_2^3} (k^2 - \lambda n^2) = 0,$$

$$\frac{\varphi_n}{EhR_2^4} (k^2 - n^2)^2 + \frac{1}{R_2^3} (k^2 - \lambda n^2) = 0.$$

Założono przy tym $R_2 \neq 0$, $R_2 \neq \infty$, $R_1 > R_2$ oraz

$$(6.3) \quad \lambda = \frac{R_2}{R_1}, \quad \chi_R = 1 + \frac{1-\nu}{2} \lambda + \lambda^2.$$

Ponieważ promień R_1 mierzony jest w kierunku współrzędnej x , zaś promień R_2 w kierunku współrzędnej y , wyrażenia (6.1) dla powłok zbliżonych do walca

(rys. 1) odpowiadają rozwinięciu funkcji własnych w szereg trygonometryczny w kierunku obwodowym. Dla pełnego obwodu powłoki n jest liczbą całkowitą.

Rugując z równań (6.3) parametr φ_n otrzymuje się

$$(6.4) \quad \varphi_n = \frac{D(k^2 - n^2 + \chi_R)^2}{R_2(k^2 - \lambda n^2)} = -EhR_2 \frac{k^2 - \lambda n^2}{(k^2 - n^2)^2}.$$

Parametr φ_n można przedstawić w innej postaci:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \varphi_{1,2n} &= 2i\kappa^2 \frac{D}{R_2} \left(1 + \frac{\chi_R}{2\kappa^2} \frac{1}{\frac{2\delta_n}{1 \pm \sqrt{1-4\delta_n}} + i} \right), \\ \varphi_{3,4n} &= 2i\kappa^2 \frac{D}{R_1} \left(1 + \frac{\chi_R}{2\kappa^2} \frac{1}{\frac{2\delta_n}{1 \pm \sqrt{1-4\delta_n}} - i} \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(6.6) \quad \delta_n = \frac{2n^2(1-\lambda) - \chi_R}{4\kappa^2}.$$

Ponieważ współczynnik $\chi_R/2\kappa^2$ jest dla cienkich powłok liczbą małą, powyższe wzory można uprościć odrzucając wyrazy mnożone przez ten współczynnik; w tym przypadku

$$(6.7) \quad \varphi_{1,2,3,4n} = \pm 2i\kappa^2 \frac{D}{R_2}.$$

Jak widać ze wzorów (6.5) wpływ parametru δ_n jest znaczny jedynie dla małych jego wartości, więc traktując go jako wielkość małą można wzory (6.5) przedstawić w prostszej postaci:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \varphi_{1n} &= 2i\kappa^2 \frac{D}{R_2} \left[1 + \frac{\chi_R}{2\kappa^2} (1 - 3i\delta_n) i \right], \\ \varphi_{2n} &= 2i\kappa^2 \frac{D}{R_2} \left(1 + \frac{\chi_R}{2\kappa^2} \cdot \frac{1}{2} i \right), \\ \varphi_{3n} &= -2i\kappa^2 \frac{D}{R_2} \left[1 - \frac{\chi_R}{2\kappa^2} (1 + 3i\delta_n) i \right], \\ \varphi_{4n} &= -2i\kappa^2 \frac{D}{R_2} \left(1 - \frac{\chi_R}{2\kappa^2} \cdot \frac{1}{2} i \right), \quad \delta_n < \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Podstawiając do równania (6.2)₂ wyrażenie (6.4) otrzymuje się równanie charakterystyczne

$$(6.9) \quad (k^2 - n^2)^2 (k^2 - n^2 + \chi_R)^2 + 4\kappa^4 (k^2 - \lambda n^2) = 0,$$

gdzie

$$4\kappa^4 = \frac{EhR_2^2}{D} = 12(1-\nu^2)\frac{R_2}{h}.$$

Równanie (6.5) ma następujące pierwiastki

$$(6.10) \quad \begin{aligned} k_{1,3}^2 &= n^2 - \frac{1}{2} \chi_R + i\kappa^2 \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{[2n^2(1-\lambda) - \chi_R] i}{\kappa^2} \right]^{1/2} \right\}, \\ k_{2,4}^2 &= n^2 - \frac{1}{2} \chi_R - i\kappa^2 \left\{ 1 \pm \left[1 + \frac{[2n^2(1-\lambda) - \chi_R] i}{\kappa^2} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Ugięcie powłoki w można przedstawić po przejściu na funkcje trygonometryczne w postaci (6.11). Jeżeli oznaczyć $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, to otrzymuje się

$$(6.11) \quad \begin{aligned} w_n = \cos ny [e^{\alpha_1 x} (A_n \cos \beta_1 x + B_n \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (C_n \cos \beta_2 x + D_n \sin \beta_2 x) + \\ + e^{-\alpha_1 x} (E_n \cos \beta_1 x + F_n \sin \beta_1 x) + e^{-\alpha_2 x} (G_n \cos \beta_2 x + H_n \sin \beta_2 x)]. \end{aligned}$$

Stałe całkowania funkcji naprężeń Φ nie są dowolne, lecz są związane ze stałymi $A_n - H_n$ współczynnikiem φ_n . Jeżeli skorzystać z zależności (6.7), to po podstawieniu i przekształceniach otrzymuje się funkcję naprężeń w postaci

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \Phi_n = 2\kappa^2 \frac{D}{R_2} \cos ny [e^{\alpha_1 x} (B_n \cos \beta_1 x - A_n \sin \beta_1 x) + \\ + e^{\alpha_2 x} (D_n \cos \beta_2 x - C_n \sin \beta_2 x) - e^{-\alpha_1 x} (F_n \cos \beta_1 x - E_n \sin \beta_1 x) - \\ - e^{-\alpha_2 x} (H_n \cos \beta_2 x - G_n \sin \beta_2 x)]. \end{aligned}$$

Należy zwrócić tu uwagę na to, że rozwiązując omawianą metodą otrzymuje się funkcję Φ bezpośrednio na podstawie funkcji w przez zwykłe przestawienie stałych całkowania i zmianę znaków. Metoda normalnie stosowana, polegająca na sprowadzeniu dwu równań (4.18) do jednego przez wprowadzenie nowej funkcji rozwiązującej, [1], jest tylko pozornie wygodna, gdyż wymaga znacznie większej ilości operacji różniczkowania przy obliczeniu ugięcia powłoki, funkcji naprężeń i sił wewnętrznych.

Pierwiastki równania charakterystycznego dla powłoki walcowej otrzymuje się podstawiając do wzorów (6.5) $\lambda = 0$ oraz $\chi_R = 1$.

Pierwiastki równań Własowa otrzymuje się zakładając $\chi_R = 0$. Jak wynika z powyższych wzorów wpływ parametru χ_R jest znaczny jedynie dla małych wartości n . Dla powłoki walcowej ($\lambda = 0$) zestawiono w tablicy 1 w celu porównania pierwiastki równań Donnella-Własowa, Morleya i równania Flüggego obliczone dla kilku wartości parametrów κ i n przy $\nu = 0,3$. Dane zaczerpnięto z pracy [4].

Jeżeli rozwiązanie równań (4.18) przedstawić w postaci

$$(6.13) \quad w = \sum_n C_n e^{ky} \cos nx, \quad \Phi = \sum_n \varphi_n C_n e^{ky} \cos nx,$$

gdzie $n = \pi R_0/L$ oraz L jest długością powłoki, to otrzymuje się równanie charakterystyczne (6.14). Dla powłok zbliżonych do pełnego walca (rys. 1) odpowiada to rozwinięciu funkcji w szereg Fouriera w kierunku tworzącej:

Tablica 1. ($w = e^{kx} \cos ny$)

	κ	n	k_1	k_2	k_3	k_4
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	0	4,9502+5,0502 i			
			4,9854+5,0154 i			
			5,0000+5,0000 i			
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	1	5,0502+4,9502 i		0	
			5,0848+4,9148 i		0	
			5,1019+4,9021 i		0,1019+0,0979 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	2	5,3700+4,6764 i		0,3669+0,3195 i	
			5,4026+4,6387 i		0,3646+0,3220 i	
			5,4261+4,6359 i		0,4261+0,3641 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	4	6,7075+3,9845 i		1,7072+1,0141 i	
			6,7354+3,9374 i		1,7001+1,0260 i	
			6,7605+3,9670 i		1,7605+1,0330 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	10	1	10,025 +9,9750 i		0	
			10,0425+9,9575 i		0	
			10,0502+9,9503 i		0,497 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	10	2	10,1779+9,8281 i		0,1761+0,1701 i	
			10,1950+9,8102 i		0,1758+0,1704 i	
			10,2038+9,8042 i		0,2038+0,1958 i	

$$(6.14) \quad (k^2 - n^2)^2 (k^2 - n^2 + \chi_R)^2 + 4\kappa^2 (\lambda k^2 - n^2)^2 = 0.$$

Równanie (6.14) ma następujące pierwiastki

$$(6.15) \quad k_{1,3}^2 = n^2 - \frac{1}{2} \chi_R + i\kappa^2 \left\{ \lambda \pm \left[\left(\lambda + \frac{\chi_R}{2\kappa^2} i \right)^2 + \frac{2n^2(1-\lambda)i}{\kappa^2} \right]^{1/2} \right\},$$

$$k_{2,4}^2 = n^2 - \frac{1}{2} \chi_R - i\kappa^2 \left\{ \lambda \pm \left[\left(\lambda - \frac{\chi_R}{2\kappa^2} i \right)^2 - \frac{2n^2(1-\lambda)i}{\kappa^2} \right]^{1/2} \right\}.$$

Pierwiastki równań Własowa otrzyma się podstawiając we wzorach (6.15) $\chi_R = 0$, zaś pierwiastki równania Morleya podstawiając $\chi_R = 1$ i $\lambda = 0$.

Znowu dla porównania zestawiono w tablicy 2 kilka wartości liczbowych pierwiastków równania (6.8) dla powłoki walcowej ($\lambda = 0$, $\chi_R = 1$).

Jak widać z tablic 1 i 2 dla wszystkich wartości n wartości liczbowe pierwiastków równania Morleya są o wiele bardziej zbliżone do pierwiastków dokładnego rów-

nania Flüggego niż pierwiastki równań Donnella-Własowa. Błąd pierwiastków równań teorii technicznej Własowa rośnie znacznie dla małych wartości n .

Tablica 2. ($w = e^{ky} \cos nx$)

	α	n	k_1	k_2	k_3	k_4
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	0,01	0,0506+0,0494 i 0,0510+0,0490 i 0,2458+0,1017 i		0,0025+1,0000 i 0,0025+1,0000 i 0,1018+0,2455 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	0,10	0,5316+0,3696 i 0,5330+0,3662 i 0,7824+0,3195 i		0,1825+1,0767 i 0,1812+1,0783 i 0,3241+0,7714 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	5	1,00	2,5441+0,9801 i 2,5469+0,9694 i 2,6278+0,9514 i		1,0520+2,3704 i 1,0455+2,3749 i 1,0962+2,2807 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	10	0,10	0,9153+0,5133 i 0,9157+0,5121 i 1,1026+0,4535 i		0,3619+1,2982 i 0,3611+1,2987 i 0,4567+1,0948 i	
MORLEY FLÜGGE DONNELL-WŁASOW	10	1,00	3,5360+1,4131 i 3,5371+1,4097 i 3,5963+1,3903 i		1,4640+3,4131 i 1,4613+3,4146 i 1,4923+3,3506 i	

7. Rozwiązanie równań niejednorodnych

Gdy na powłokę działają siły powierzchniowe i objętościowe, rozwiązanie szczególne równań (4.18) można otrzymać rozwijając obciążenie w podwójne szeregi Fouriera. Jeżeli prawe strony równań przedstawić w postaci szeregów

$$(7.1) \quad X_3 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U = \sum_m \sum_n a_{mn} \cos sx \cos ny,$$

$$\frac{1-\nu}{Eh} \Delta U = \sum_m \sum_n b_{mn} \cos sx \cos ny,$$

gdzie $s = (\pi R_2 / l) m$, to rozwiązania równań mają postać:

$$(7.2) \quad w = \sum_m \sum_n w_{mn} \cos sx \cos ny,$$

$$\Phi = \sum_m \sum_n \Phi_{mn} \cos sx \cos ny,$$

gdzie

$$(7.3) \quad w_{mn} = \frac{a_{mn} \frac{R_2^4}{D} (s^2 + n^2)^2 - b_{mn} R_2^3 (s^2 + \lambda n^2) 4\kappa^4}{(s^2 + n^2 - \chi_R)^2 (s^2 + n^2)^2 + 4\kappa^4 (s^2 + \lambda n^2)^2},$$

$$\Phi_{mn} = \frac{a_{mn} R_2^3 (s^2 + \lambda n^2) 4\kappa^4 + b_{mn} R_2^4 Eh (s^2 + n^2 - \chi_R)^2}{(s^2 + n^2 - \chi_R)^2 (s^2 + n^2)^2 + 4\kappa^4 (s^2 + \lambda n^2)^2}.$$

Podstawiając we wzorach $\chi_R = 1$, $\lambda = 0$ oraz $b_{mn} = 0$ otrzymuje się współczynniki W_{mn}^M podane w pracy [4]. Prowadząc obliczenia według technicznej teorii Własowa otrzyma się współczynniki W_{mn}^W po podstawieniu $\chi_R = 0$ oraz $b_{mn} = 0$. W celu porównania zestawiono w tablicy 3 dla kilku wielkości m i n ($b_{mn} = 0$) wartości współczynników W_{mn}^F/W_{mn}^W i W_{mn}^F/W_{mn}^{W-D} dla powłoki walcowej ($\lambda = 0$) oraz współczynniki W_{mn}/W_{mn}^W dla powłoki o podwójnej krzywiznie. W powyższych wzorach W_{mn}^W oznacza współczynnik rozwinięcia otrzymany na podstawie technicznej teorii Własowa, W_{mn}^F współczynnik otrzymany z równania Flüggego, [8], współczynnik W_{mn}^M z równania Morleya, zaś W_{mn} współczynnik obliczony na podstawie równań (4.18).

Tablica 3

κ	n	s	$\lambda = 0$		$\lambda = 0,1$	$\lambda = -0,1$
			W^F/W^M	W^F/W^W	W/W^W	W/W^W
5	1	0	—	—	1,0400	1,0400
5	2	0	1,0000	1,7778	1,2059	1,2059
5	3	0	1,0000	1,2656	1,1910	1,1910
5	1	0,5	0,9999	1,0148	1,0076	1,0416
5	2	0,5	1,0157	1,4520	1,1086	1,5484
5	3	0,5	1,0020	1,2557	1,1640	1,2176
5	1	1,0	0,9999	1,0042	1,0040	1,0059
5	2	1,0	1,0053	1,0833	1,04242	1,1731
5	3	1,0	1,0095	1,1904	1,1109	1,2615
5	10	1,0	1,0001	1,0202	1,0195	1,0200
10	1	0	—	—	1,0025	1,0025
10	2	0	1,0000	1,7778	1,0171	1,0171
10	3	0	1,0000	1,2656	1,0366	1,0366
10	1	0,5	1,0000	1,0010	1,0005	1,0016
10	2	0,5	1,0020	1,0561	1,0079	1,1242
10	3	0,5	1,0030	1,1835	1,0255	1,0659
10	1	1,0	1,0000	1,0003	1,0002	1,0004
10	2	1,0	1,0004	1,0060	1,0028	1,0152
10	3	1,0	1,0020	1,0417	1,0124	1,2235
10	10	1,0	1,0001	1,0202	1,0192	1,0195

Jak widać z tablicy 3, dla powłoki walcowej ($\lambda = 0$) błąd jest bardzo niewielki, jeżeli zamiast równania Flüggego przyjęte jest równanie (4.18).

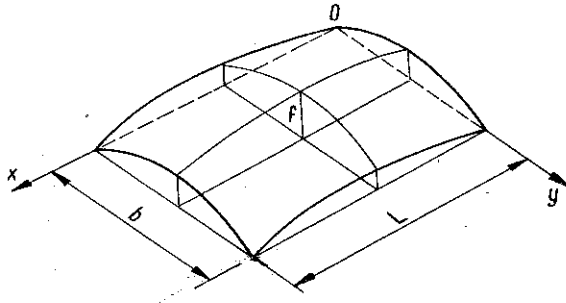
Równania technicznej teorii Własowa dają duże odchylenia, które jednak maleją w miarę wzrostu promieni krzywizn powłoki. Dla powłok o małej wypukłości (rys. 3) Własow podał warunek, by wypukłość powłoki była mniejsza niż 1/5 mniejszego z boków powłoki. Rozwiązanie przyjmuje wtedy postać

$$(7.4) \quad w = w_{mn} \cos \frac{m\pi R_2}{l} x \cos \frac{n\pi R_2}{b} y.$$

Warunek aby $f \leq b/5$ wymaga, by $b \sim \leq \pi R_2/2$ przy $R_1 \gg R_2$. Podstawiając $b = \pi R_2/2$ do wyrażenia (7.4) i przyjmując $y = \beta$ otrzymuje się

$$(7.5) \quad w = w_{mn} \cos sx \cos 2n\beta, \quad s = \frac{\pi m R_2}{l}.$$

Stąd wynika, że rozwiązanie dla wycinka o wyniosłości $b/5$ jest równie dokładne jak dla pełnej powłoki walcowej obciążonej obciążeniem o około dwukrotnie wyższej harmonicznej n . Ponieważ z tablicy 3 wynika, że dokładność równań technicznej teorii Własowa rośnie wraz z wzrostem n , błędy maleją również wraz ze wzrostem promieni krzywizny w porównaniu z wymiarami powłoki.



Rys. 3

Jednak dla małych n oraz dla bardziej zakrzywionych powłok błędy te mogą być znaczne.

Literatura cytowana w tekście

- [1] В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва-Ленинград 1949.
- [2] X. Муштари, *Некоторые обобщения теории тонких оболочек*, Известия Физ. Мат. О-Ва при Казанском Универс., Т. 11, Сер. 8, 1938.
- [3] L. H. DONNELL, *Stability of thin Walled Tubes under Tortion*, N.A.C.A., Report No. 479 (1933).
- [4] L. S. D. MORLEY, *An Improvement on Donnell's Aproximation for Thin-Walled Circular Cylinders*, J. Mech. App. Math., 12 (1959), 89.
- [5] N. J. HOFF, *The Accuracy of Donnell's Equations*, J. App. Math., 22 (1955), s. 329.
- [6] V. V. NOVOZHILOV, *The Theory of Thin Shells*, Groningen, English translation, 1959.
- [7] А. М. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Москва 1953.
- [8] W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Scholen*, Berlin 1957.
- [9] S. ŁUKASIEWICZ, *Uproszczone rozwiązanie powłok pierścieniowych o podwójnej krzywiznie*, Arch. Bud. Maszyn, 4 (1961), s. 427.
- [10] D. S. HOUGHTON, D. J. JOHNS, *A Compasison of the Characteristic Equations in the Theory of Circular Cylindrical Shells*, Aeronautical quart. 12 (1961), s. 228-236.

Резюме

ДОПОЛНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Выводятся более точные уравнения технической теории оболочек.

Решение оболочки сводится к решению системы двух уравнений (4.18), структура которых похожа на структуру технической теории оболочек Власова.

Для цилиндрических оболочек кругового сечения представленные уравнения сводятся к уравнению предложенному Морлейем, [4]. Точность этого уравнения проверена путем сравнения с уравнением Флюгге для цилиндрической оболочки, получая очень хорошее согласие. Для оболочек с двойной кривизной, сравниваются результаты полученные с помощью предлагаемых уравнений и уравнений технической теории Власова. Замечаются большие разницы, которые однако уменьшаются с ростом радиуса кривизны оболочки, как и с величиной n разложения в ряд Фурье внешней нагрузки.

Summary

A COMPLEMENT TO THE EQUATIONS OF VLASOV
ENGINEER'S THEORY FOR SHELLS

This paper is devoted to the derivation of more accurate equations of the theory of non-shallow shells.

The solution of the shell is reduced to that of a set of two equations (4.18) of which the form resembles those of Vlasov engineer's theory of shells.

For circularly cylindrical shells these equations reduce to the equation proposed by Morley, [4]. The accuracy of this equation is verified by comparing it with Flügge's equation for the Cylindrical shell, very good agreement being found. For shells with double curvature the results obtained by means of the equations proposed are confronted with those of the Vlasov engineer's theory. Relatively large differences are observed. However, they decrease with increasing curvature radius and with increasing quantity n of the Fourier expansion of the external load.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 marca 1962 r.
