

## PODSTAWY TEORII BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI

CZESŁAW EIMER (KRAKÓW)

### 1. Ewolucja pojęć. Krytyka dotychczasowych teorii

**1.1. Metody tradycyjne.** Racjonalne kształtowanie konstrukcji wymaga wypełnienia szeregu postulatów, w szczególności: (1) nadania jej formy najdogodniejszej z punktu widzenia funkcjonalnego (do czego dołączają się ewentualnie względy estetyczne), (2) zapewnienia maksymalnego bezpieczeństwa budowli z uwagi na życie ludzkie i straty materialne oraz (3) realizacji przy minimalnym nakładzie kosztów, a więc możliwie małym zużyciu materiałów i małej robociznie.

Lepsze zaspokojenie potrzeb, np. bogatsze rozwiązanie funkcjonalne lub zwiększenie bezpieczeństwa, pociąga za sobą zwiększenie nakładów i w konsekwencji wzrost kosztów budowy (większa ilość pracy, większe wymiary, lepsze materiały, dokładniejsza kontrola). Każde rozwiązanie konstrukcyjne stanowi zawsze pewien kompromis w świetle tych sprzecznych postulatów.

Mówiąc o bezpieczeństwie konstrukcji mamy na myśli jedynie jej bezpieczeństwo w sensie «mechanicznym», tzn. związane z nośnością ustroju, czyli jej zdolnością przenoszenia obciążeń. Te ostatnie stanowią tylko jeden z czynników oddziaływania środowiska zewnętrznego na konstrukcję, mogących doprowadzić do niebezpiecznych następstw; innymi mogą być np. temperatury pożarowe, agresja chemiczna itp.; zamiast nośności wystąpi tu ognioodporność, odporność na korozję itd.

Zrozumienie czy też intuicyjne wyczucie tych związków było zapewne nieobce konstruktorom na długo przed stworzeniem odpowiednich teorii włącznie z pojęciem bezpieczeństwa budowli. To ostatnie wykrystalizowało się przy rozwiązywaniu zagadnień, w których problemy nośności wysuwały się na plan pierwszy i groźba ruiny konstrukcji stawała się realniejsza. Precyzowało się ono w miarę rozwoju teorii konstrukcji i wzbogacenia kryteriów nośności, co następowało głównie z wprowadzaniem nowych materiałów konstrukcyjnych i związanych z tym typów ustrojów nośnych i technologii wykonawstwa.

W średniowieczu ustrojami nośnymi były głównie mur, łuk i sklepienie układane z bloków kamiennych, pracujących na ściskanie. Dominującym obciążeniem był ciężar własny konstrukcji, a większość katastrof zdarzała się już w czasie wznoszenia budowli, zwłaszcza wskutek nierównomiernego osiadania podłoża i nieprawidłowego rozwiązania fundamentów. Decydującym sprawdzianem bezpieczeństwa konstrukcji był sam fakt pomyślnego ukończenia jej budowy, a problem bezpieczeństwa ogniskował się (używając współczesnej terminologii) na stateczności masywu muru.

Miara bezpieczeństwa *a priori* mogły być jedynie pewne tradycyjne formy i wymiary elementów budowli (co jest cechą charakterystyczną produkcji rzemieślniczej). Np. mury oporowe były przez długi czas wykonywane według doświadczalnych tablic wymiarów zestawionych przez Vaubana (budowniczego twierdzy i marszałka Ludwika XIV). Ten typ budownictwa przyczynił się do powstania zaczątków statyki<sup>1</sup>, natomiast nie wysunął problemu wytrzymałościowego, gdyż nie ten czynnik ograniczał nośność.

Podstawowym elementem zginanym była belka drewniana, decydującymi o bezpieczeństwie czynnikami były tu jednak połączenie ciesielskie i ognioodporność. Natomiast właśnie elementy zginane przyczyniły się głównie do rozwoju teorii konstrukcji<sup>2</sup>.

Zagadnienia wytrzymałościowe wysunęły się na czoło z chwilą wprowadzenia żeliwa (na przełomie XVIII i XIX wieku) w postaci elementów ściskanych (słupy, mosty łukowe) i zginanych (dźwigary w budynkach przemysłowych), które rozpowszechniły się dzięki swym większym możliwościom (rozpiętość, obciążenie) i ognioodporności, a także z przyczyn ekonomicznych. Nie obojętne było tu zainteresowanie odlewni w zbycie wyrobów po zakończeniu wojen napoleońskich, w czasie których pracowały dla potrzeb wojskowych. Istotnym krokiem był rozwój badań wytrzymałościowych, zapoczątkowanych już wcześniej<sup>3</sup>, spowodowany głównie szeregiem katastrof ustrojów żeliwnych. Równoległe (aczkolwiek nie zawsze łącznie, zwłaszcza w pierwszym okresie) postępował rozwój teorii<sup>4</sup> i w oparciu o tę podstawę rozwinęły się szczególnie ważne w zagadnieniach bezpieczeństwa hipotezy wytrzymałości i wyciężenia<sup>5</sup>. Katalizatorem postępu i zainteresowania problematyką bezpieczeństwa konstrukcji była dążność do oszczędności materiału i w ogólności powiązanie z czynnikiem ekonomicznym, co stanowiło element historycznie nowy, związany z rewolucją przemysłową kapitalizmu.

Zastosowanie żeliwa, wspomniane katastrofy i rozwój badań doświadczalnych postawiły na porządku dziennym kwestię ilościowej oceny «zapasu bezpieczeństwa» i jednolitego sposobu ujmowania wyników doświadczeń i doprowadziły do pojęcia współczynnika bezpieczeństwa (obciążeniowego), rozumianego jako stosunek obciążenia niszczącego (zniszczenie kruche żeliwa przez rozciąganie) do maksymalnego programowego (nominalnego). Przy tym pierwotnie miano na myśli tylko

<sup>1</sup> Zasadę równoległoboku sił sformułował G. GALILEI w r. 1638; pojęcie wieloboku sił i wieloboku sznurowego wprowadził P. LA HIRE, 1695.

<sup>2</sup> Zasadnicze zależności i pierwsza (błędna) hipoteza zginania pochodzi od GALILEUSZA; prawo proporcjonalności podał R. HOOKE w r. 1678; zasadę płaskich przekrojów sformułował J. BERNOULLI, 1705, zasadę momentów P. VARIGNON, 1, 1725.

<sup>3</sup> Rozciąganie badań P. MUSCHENBROEK, 1729; twardość przez nacinanie, R. F. RÉAUMUR, 1722. Belki żeliwne, W. FAIRBAIRN 1854, słupy W. J. M. RANKINE, 1858.

<sup>4</sup> Wyboczenie, L. EULER, 1757 i 1778; moment zginający, wskaźnik wytrzymałości i siły poprzeczne, C. A. COULOMB, 1776; oś obojętną i moduł sprężystości, T. YOUNG, 1807. Początki teorii sprężystości, C. L. M. NAVIER, 1821, A. L. CAUCHY, 1822, S. D. POISSON, 1829, G. LAMÉ, 1833.

<sup>5</sup> Maksymalne naprężenie główne, G. LAMÉ, 1852; maksymalne odkształcenie, B. SAINT VENANT, 1855; naprężenie ścinające, H. TRESKA, 1868.

obciążenie zewnętrzne, gdyż ciężar własny w aspekcie bezpieczeństwa nie interesował konstruktorów. Gdy w wyniku rozwoju teorii utorowało sobie drogę bardziej abstrakcyjne pojęcie naprężenia, zastąpiono go współczynnikiem naprężeniowym, tj. stosunkiem naprężenia niszczącego do użytkowego, ogólniejszym od poprzedniego w tym znaczeniu, że wartości liczbowe tych naprężeń nie zależały od konkretnych wymiarów ustroju. Ponieważ naprężenie niszczące związane jest z wytrzymałością materiału, spostrzeżono, że przyjęcie stałego współczynnika naprężeniowego prowadzi do określenia pewnego niezmiennego dla danego materiału naprężenia dopuszczalnego, mieszczącego już w sobie ilościową miarę bezpieczeństwa. Jest możliwe, że, jak chcą niektórzy autorzy, naprężenie dopuszczalne pojawiło się przy najprostszych badaniach (rozciąganie, ściskanie) od razu jako pewna stała materiałowa, niezależnie od naszkicowanej ewolucji współczynnika obciążeniowego.

Metoda naprężeń dopuszczalnych, polegająca na porównaniu z naprężeniem dopuszczalnym naprężenia obliczonego dla obciążenia nominalnego na zasadzie teorii liniowo-sprężystej i prawa superpozycji, panowała niemal niepodzielnie (zarówno w budownictwie, jak w budowie maszyn) do ostatniego okresu międzywojennego dzięki prostocie obliczeń i dość znacznej uniwersalności. Początkowo (jeszcze w drugiej połowie XIX wieku) nie różnicowano naprężeń dopuszczalnych ze względu na sposób obciążenia (przyjmowano te same wartości dla rozciągania, ściskania, zginania itd.), wiążąc je wyłącznie z określonym materiałem. Rozwój metody polegał na stopniowym podwyższaniu naprężeń dopuszczalnych oraz ich różnicowaniu w miarę poznawania nowych okoliczności pracy konstrukcji, przy równoczesnym doskonaleniu teorii liniowej. Te czynniki, które nie dały się opisać przez naprężenie dopuszczalne, uwzględniano wprowadzając odrębne kryteria obliczeniowe (np. sprawdzanie murów oporowych na stateczność przy 1,5-krotnym współczynniku bezpieczeństwa).

Metoda naprężeń dopuszczalnych osiągnęła szczytowy rozwój w związku z wprowadzeniem i rozpowszechnieniem konstrukcji stalowych (rozwój kolei żelaznej, mosty kolejowe). Zastosowanie materiału ciągliwego, jakim jest stal, doprowadziło do ustalenia niebezpiecznego stanu nadmiernych odkształceń trwałych (zamiast, jak przy żelwie, zniszczenia w sensie utraty spójności) i odniesienia naprężenia dopuszczalnego do granicy plastyczności; odkształcenia te wprowadzono równocześnie jako kryterium przy obciążeniu próbnym konstrukcji. Metoda ta była tak zakorzeniona, że stosowano ją w przypadkach jaskrawo nieodpowiednich. Tak np. problem wyboczenia (który pojawił się przy wprowadzeniu smukłych prętów walcowanych), gdzie nie wytrzymałość materiału lecz smukłość elementu określała jego nośność, dyskutowano zrazu również w terminologii naprężeń dopuszczalnych (rozważając obciążenia o pewnym wstępnym mimośrodzie, bądź nawiązując bezpośrednio do wyników doświadczalnych). By ograniczyć odkształcenie przy eksploatacji wprowadzono kryterium sztywności (dopuszczalnych ugięć) jako warunek dodatkowy. Kierunkowi temu towarzyszył znaczny rozwój teorii konstrukcji <sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Grafostatyka, G. A. D. RITTER, 1863, C. CULMANN, 1866, W. WINKLER, 1867, L. CREMONA, 1872, T. C. FIDLER, 1887. Metody energetyczne, J. C. MAXWELL, 1864, E. BETTI, 1872, A. CASTIGLIANO, 1879, H. MÜLLER-BRESLAU, 1885 i nast.

Żelbet i beton sprężony<sup>7</sup> oraz konstrukcje hiperstatyczne (stalowe, później żelbetowe) podcięły korzenie metody naprężeń dopuszczalnych. Pierwsze dwa oznaczały koncepcje rewolucyjne w świetle ówczesnych pojęć o bezpieczeństwie, żelbet przez dopuszczenie jako normalnego stanu po przekroczeniu wytrzymałości materiału (rysy po przekroczeniu wytrzymałości betonu na rozciąganie), ustroje sprężone przez świadome, bardzo intensywne, trwałe obciążenie (sprężenie wstępne).

Niedostatki metody naprężeń dopuszczalnych spowodowały powrót do koncepcji współczynnika bezpieczeństwa obciążeniowego głównie z dwóch przyczyn. Po pierwsze, stosunek naprężenia przy zniszczeniu do naprężenia dopuszczalnego przestaje być równy stosunkowi obciążenia niszczącego do programowego (a więc współczynnik naprężeniowy i naprężenie dopuszczalne przestają być dobrymi miarami bezpieczeństwa), gdy zawodzi prawo proporcjonalności, ściślej gdy naprężenie lub funkcja wyteżenia przestaje być funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem obciążenia<sup>8</sup>. Ma to miejsce w szczególności w dowolnym przekroju przęsłowym stalowej belki ciągłej przy obciążeniu wywołującym na podporach przeguby plastyczne, przenoszące stały (nie zaś proporcjonalny do sił) moment zginający<sup>9</sup>. To samo zachodzi w elemencie sprężonym ze względu na obecność stałych naprężeń wstępnych, a w przekroju żelbetowym (lub innym) w fazie sprężysto-plastycznej wobec nieliniowości związków między naprężeniem a obciążeniem. Mówiąc o obciążeniu mamy na myśli obciążenie całkowite  $P_{g+p}$ , tj. ciężar własny i użytkowy. Gdybyśmy współczynnik obciążeniowy odnosili tylko do obciążenia użytkowego  $P_p$ , to przejście do naprężeń dopuszczalnych byłoby uzasadnione jedynie w przypadku, gdy ciężar własny można pominąć w porównaniu z użytkowym.

Po drugie, osiągnięcie przez naprężenie w jednym punkcie naprężenia granicznego nie jest w ogólności dostatecznym warunkiem zniszczenia konstrukcji. Nie decydują tu własności materiału, lecz konstrukcji jako takiej, nie można więc wiązać naprężenia dopuszczalnego jedynie z wytrzymałością materiału lub granicą plastyczności. Powracamy więc do koncepcji obciążenia i współczynnika obciążeniowego, która prowadzi do korzystnego ekonomicznie wykorzystania rezerw wytrzymałościowych.

<sup>7</sup> Żelbet, J. MONNIER, 1867, A. CONSIDÈRE, ok. 1900; początki teorii, M. KOENEN, 1886, F. COIGNET, 1894. Konstrukcje sprężone, E. FREYSSINET: ściągi wstępnie naciągnięte, 1907, odkształcenia reologiczne i zastosowanie stali wysokowartościowej, 1928, nazwa *sprężenie* (fr. *précontrainte*), 1933.

<sup>8</sup> Np. funkcja wyteżenia Hubera-Misesa-Hencky'ego

$$f(P) = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

gdzie wszelkie naprężenia są, zgodnie z prawem superpozycji, proporcjonalne do obciążenia  $P$ , jest takąż funkcją  $P$ , gdyż  $f(nP) = nf(P)$ , tym samym  $n$ -krotnemu wzrostowi  $P$  odpowiada  $n$ -krotny wzrost  $f$ .

<sup>9</sup> Zasada zniszczenia z powstaniem «ostatniego przegubu», G. KAZINCZY, 1914; zastosowanie do kratownic, N. C. KIST, 1920, przy obciążeniu wielokrotnym ustrojów hiperstatycznych, M. GRÜNING, 1926.

Warto zwrócić uwagę, że do podobnego ujęcia doprowadził rozwój obliczeń wytrzymałościowych w lotnictwie (w pierwszym etapie rozwoju), gdzie współczynnik obciążeniowy wyrażał stosunek maksymalnego, prostopadłego do skrzydła samolotu obciążenia (zależnego od przyspieszenia w tym kierunku przy locie «manewrowym» krzywoliniowym lub przy porywach wiatru) do ciężaru samolotu (tj. obciążania skrzydła przy locie jednostajnym, liniowym) przy pewnych uschematyzowanych rozkładach obciążeń. Osobliwość ujęcia polega tu na tym, że rolę obciążenia programowego przyjmuje ciężar własny, nie zaś obciążenie maksymalne, które identyfikuje się z niszczącym; margines bezpieczeństwa ukryty jest w stosownym doborze tego ostatniego.

W ogólności naprężenia dopuszczalne i związane z nimi obliczenia wychodzące z obciążeń użytkowych utrzymały się w przypadkach, gdy obciążenia zewnętrzne są trudno uchwytnie, a badania na konstrukcjach w całości uciążliwe, oraz gdy wzrost naprężeń aż do stanu granicznego jest w przybliżeniu liniowy (budownictwo okrętowe, liczne działy budowy maszyn). W przypadkach przeciwnych przy obliczeniach bierze się za podstawę stan obciążenia granicznego i współczynnik bezpieczeństwa obciążeniowy (przykłady podaliśmy wyżej). Charakterystycznym przykładem konstrukcji, gdzie obliczenie naprężeń nie zwalnia od weryfikacji nośności i gdzie obie metody stosowane są równocześnie, są ustroje sprężone.

Ewolucja obu podstawowych metod szła w dwu kierunkach.

1) Wzbogacania i uogólniania, a jednocześnie uściślenia kryteriów wytrzymałościowych bezpieczeństwa, innymi słowy, poszukiwania odpowiedzi na pytanie, *co jest niebezpieczne dla konstrukcji*.

2) Dokonania analizy czynników określających wartości liczbowe miar bezpieczeństwa, tj. tych czynników, które nie dają się ściśle ująć w obliczeniu. W tym przypadku dążymy do ustalenia, *jak wielkie* mają być rezerwy wytrzymałościowe i *jaką* zastosować metodę obliczeń.

Pierwsze zagadnienie jest problemem *nośności*, drugie problemem *bezpieczeństwa* w ścisłym znaczeniu, obydwie one spletały się jednak silnie ze sobą i wyodrębnienie teorii bezpieczeństwa jako osobnej dyscypliny jest dopiero dziełem ostatnich dziesięcioleci.

Co się tyczy pierwszego zagadnienia, ograniczymy się do zanotowania dwu charakterystycznych kierunków rozwojowych, istotnych z punktu widzenia struktury warunku wytrzymałościowego, zapisywanego ogólnie w postaci

$$(1.1) \quad \sigma < R$$

w metodzie naprężeń dopuszczalnych oraz

$$(1.2) \quad R/P > 1$$

w metodzie współczynnika pewności. Tutaj  $\sigma$  i  $P$  oznaczają odpowiednio naprężenia i obciążenia, ogólnie efekt oddziaływania środowiska zewnętrznego,  $R$  własności wytrzymałościowe konstrukcji, a więc czynnik «wewnętrzny».

1. W miarę poznawania coraz subtelniejszych własności konstrukcji i współzależności różnych czynników zwiększała się liczba opisujących je parametrów, a postać relacji (1.1) stawała się uwikłana, co zapisujemy symbolicznie

$$(1.3) \quad f(\sigma, R) < 0.$$

Czynniki zewnętrzne przedstawiają w najprostszym ujęciu warunki brzegowe, dane w postaci obciążeń bądź przemieszczeń (np. osiadanie podpór), szerzej zaś również i temperaturę, wilgotność itp. Pierwotnym ich efektem są odpowiednie naprężenia lub dystorsje, zależne od własności materiału (moduł sprężystości, rozszerzalność cieplna itp.).

W ogólności zauważono, że efekt obciążenia (ogólniej czynników zewnętrznych) reprezentowanych przez lewą stronę nierówności (1.1) zależy od pewnych własności materiału i konstrukcji (a więc od czynników wewnętrznych występujących na stronie prawej) i na odwrót, wytrzymałość (tj. czynnik wewnętrzny) zależy od sposobu działania obciążeń (czynnika zewnętrznego). Przykładem mogą być obciążenia dynamiczne, których efekt zależy od własności materiału (tłumienie drgań) i konstrukcji (częstość drgań własnych), własności zaś wytrzymałościowe od liczby i amplitudy cykli (wytrzymałość zmęczeniowa). Zjawiska te uwzględniano w sposób przybliżony: w mostach przez wprowadzenie współczynnika dynamicznego<sup>10</sup>, przez który mnożymy obciążenie, traktowane nadal jako statyczne, a w budowie maszyn przez zróżnicowanie naprężeń dopuszczalnych w zależności od zjawisk zmęczeniowych<sup>11</sup>. Inny przykład, to zjawiska reologiczne, gdzie efekt obciążenia długotrwałego zależy od własności reologicznych materiału (np. naprężenia w ustrojach hiperstatycznych), z drugiej strony wytrzymałość zależy od czasu trwania i przebiegu obciążenia (np. dla betonu). Ponadto z chwilą gdy zawodzą kryteria lokalne, a więc gdy nierówność (1.1) nie może być rozumiana dosłownie, nie tylko lewa, lecz i prawa jej strona stają się zależne od formy i wymiarów konstrukcji.

2. Stwierdzono, że warunki wytrzymałościowe należy różnicować w zależności od powagi następstw ich przekroczenia i stosować odpowiednio różne miary bezpieczeństwa, a więc pewien element musi spełniać na ogół cały układ nierówności typu (1.1) lub (1.3). Ogólnie wyróżniono nośność graniczną (ang. ultimate load), inne stany graniczne (ang. limiting load), np. zarysowanie, obciążenie wywołujące odkształcenie trwałe (ang. proof load), związane z obciążeniem próbnym przy odbiorze, obciążenie ostrzegawcze, wskazujące na przeciążenie, np. poprzez rysy, nadmierne ugięcie itd. Poszczególne stany wiążą się z różnymi skutkami ekonomicznymi: im poważniejsze są te ostatnie, tym wyższe muszą być współczynniki bezpieczeństwa. Kwestia ekonomii wynikała, z drugiej strony, z ewolucji zagadnienia tzw. kształtowania wytrzymałościowego, zmierzającego do pełnego wykorzystania kryteriów wytrzymałościowych we wszystkich przekrojach (by np. belka osiągnęła w nich równocześnie nośność graniczną) oraz do równoległego wykorzystania szeregu kryteriów (by np. w słupie cienkościennym osiągnięto równocześnie siły

<sup>10</sup> C. C. SCHNEIDER, 1887.

<sup>11</sup> Głównie badania Fairbairna i Wöhlera, lata 1859-1870.

krytyczne wybożenia i zwichrzenia stopek). Warunki te spełniać może dla danego obciążenia w ogólności cały szereg konstrukcji różnie ukształtowanych; aby otrzymać konstrukcję optymalną dołączano kryterium np. minimum ciężaru lub minimum kosztów. Rozwiązanie takie mieści się w ramach określonego współczynnika bezpieczeństwa; stąd krok już tylko do takiego uogólnienia problemu, by sam ten współczynnik uzależnić od kryteriów ekonomicznych.

Co się tyczy drugiego problemu podstawowego, ilościowej oceny miar bezpieczeństwa, to zauważono, że te ostatnie powinny «pokrywać» to, co nie jest uwzględnione bezpośrednio w obliczeniu, tj. 1) wahania przypadkowe poszczególnych wielkości, 2) nieścisłości i uproszczenia teorii i rachunku (wywołujące odchylenia o charakterze systematycznym). Stąd postęp badań i metod obliczeniowych w kierunku maksymalnego uwzględnienia rzeczywistych rezerw wytrzymałościowych prowadził do redukcji współczynników bezpieczeństwa. Przykładem może być rozwój i zastosowanie w obliczeniach praktycznych teorii plastyczności.

Ewolucja następowała w kierunku różnicowania miar bezpieczeństwa w tym sensie, by były one bliżej związane z poszczególnymi czynnikami niepewności rachunku. Miary te (w postaci współczynników bezpieczeństwa lub zawarte bezpośrednio w wartości obciążeń obliczeniowych) różnicowano początkowo ze względu na obciążenie ruchome i ciężar własny. Metoda ta została wprowadzona przez GERBERA (r. 1856), który przyjmował obciążenie obliczeniowe  $g+3p$ , gdzie  $g$  oznacza ciężar własny (ogólniej stały) oraz  $p$  użytkowy. Inni autorzy proponowali jeszcze dalej idące zróżnicowanie, np. A. J. MOE, [50], stosuje

$$1,2 g + 1,8 p + 1,5 v + 1,2 t,$$

gdzie  $v$  jest obciążeniem od wiatru,  $t$  od temperatury, skurczu, osiadania podpór itp. Metody te rozwinął J. KORÁNYI, [38], wprowadzając współczynniki równoczesności redukujące obciążenia, jeśli uwzględnia się równoczesne mało prawdopodobne współdziałanie różnych obciążeń oraz współczynniki redukcyjne zależne od rodzaju obciążenia (np. docisk miejscowy itp.).

Jako przykład współczesnego (nieprobabilistycznego) ujęcia zagadnienia omówimy metody zaproponowane przez komisję angielską<sup>12</sup>, [118].

Rozróżnia się tam czynniki grupy I, odnoszące się do wspomnianych niepewności i grupy II, dotyczące powagi następstw katastrofy.

Do grupy I należą:

1) Rozrzuty wytrzymałości materiałów, rezerwy tkwiące w ich odkształcalności plastycznej, stopień kontroli ich własności, dokładność wykonawstwa, stopień kontroli na budowie i przy odbiorze.

2) Dokładność znajomości obciążenia użytkowego, jego rozrzuty, stopień kontroli warunków eksploatacji.

3) Dokładność obliczenia i wiarygodność przyjętych hipotez oraz danych liczbowych; stopień uwzględnienia takich czynników, jak osiadanie podpór, temperatura, działania dynamiczne itd.; rezerwy tkwiące w dodatkowych więzach (ustroje hiperstatyczne); zjawiska ostrzegające o katastrofie.

<sup>12</sup> Institution of Structural Engineers.

Do grupy II należą:

a) Niebezpieczeństwo dla życia i zdrowia personelu i osób postronnych.

b) Straty ekonomiczne w przypadku katastrofy lub uszkodzenia konstrukcji.

Każdy z wymienionych czynników otrzymuje określony stopień (jeden spośród czterech): (++) warunki (z punktu widzenia bezpieczeństwa) bardzo dobre, (+) dobre, (0) wystarczające, (—) złe. Np. kryterium 1) oznaczmy przez (++) , jeśli materiał charakteryzuje się małymi rozrzutami wytrzymałości, wykonawstwo jest

Tablica 1. Wartości  $s_I$

(1)	(3)	(2)			
		++	+	0	—
++	++	1,1	1,3	1,5	1,7
	+	1,2	1,45	1,7	1,95
	0	1,3	1,6	1,9	2,2
	—	1,4	1,75	2,1	2,45
+	++	1,3	1,55	1,8	2,05
	+	1,45	1,75	2,05	2,35
	0	1,6	1,95	2,3	2,65
	—	1,75	2,15	2,55	2,95
0	++	1,5	1,8	2,1	2,4
	+	1,7	2,05	2,4	2,75
	0	1,9	2,3	2,7	3,1
	—	2,1	2,55	3,0	3,45
—	++	1,7	2,15	2,4	2,75
	+	1,95	2,35	2,75	3,15
	0	2,2	2,65	3,1	3,55
	—	2,45	2,95	3,45	3,95

Tablica 2. Wartości  $s_{II}$

(b)	(a)		
	0	—	—
0	1,0	1,2	1,4
—	1,1	1,3	1,5
—	1,2	1,4	1,6

staranne i ściśle kontrolowane itp., kryterium 2) przez (++) , jeśli obciążenie jest dokładnie znane (jak np. w zbiornikach na płyny) itd. Czynniki grupy II otrzymują trzy stopnie: (— —) następstwa katastrofy bardzo poważne, (—) poważne, (0) lekkie. Na podstawie grupy I znajdujemy z tablicy 1 współczynnik bezpieczeństwa cząstkowy  $s_I$ , na podstawie grupy II i tablicy 2 współczynnik  $s_{II}$ . Ostateczny współczynnik bezpieczeństwa obliczamy jako iloczyn  $s = s_I \cdot s_{II}$ . Np. dla zbiornika wody przyjmujemy (1) +, (2) ++, (3) +, (a) 0, (b) —. Stąd znajdujemy  $s = 1,45 \cdot 1,1 = 1,6$ .



Forma tablicowa nie jest bynajmniej jedynym sposobem ujęcia. Kolejnym wymienionym czynnikiem można np. przypisać pewne liczby  $a_1, a_2, a_3; \beta_a, \beta_b$ , i obliczać  $s$  z zależności

$$s = \frac{A}{\Sigma a + B \Sigma \beta},$$

gdzie  $A$  i  $B$  są stałymi empirycznymi. Jeszcze inny, popularny sposób, to mnożenie współczynników cząstkowych

$$s = s_1 s_2 s_3 s_a s_b.$$

Oczywiście dla każdej formy wartości liczbowe muszą być stosownie dobrane. Podane współczynniki cząstkowe mają oczywiście znaczenie uniwersalne (tj. dla dowolnych konstrukcji, materiałów itd.), bowiem nie zależą one od wartości liczbowych parametrów, a tylko od ich rozrzutów i niepewności rachunku. Rzecz jasna, w określonych okolicznościach pewne z nich mogą nie występować.

W powyższej metodzie wyznaczyliśmy jeden współczynnik bezpieczeństwa na podstawie wartości cząstkowych. Nie jest to bynajmniej regułą. Określony stopień bezpieczeństwa można zapewnić również np. przez mnożenie przez współczynniki cząstkowe oddzielnie poszczególnych wielkości we wzorach obliczeniowych. Tak zagadnienie zostało ujęte w rozpowszechnionej w ZSRR metodzie stanów granicznych, [4]. Wprowadza się trzy współczynniki: (1) współczynnik przeciążenia  $n$ , przez który mnoży się obciążenie normowe, zróżnicowane np. dla ciężaru własnego, obciążenia użytkowego, obciążenia wiatrem, śniegiem itd., (2) współczynnik jednorodności materiału,  $k$ , zależny od rozrzutów wytrzymałości, przez który mnoży się wytrzymałości normowe, (3) współczynnik warunków pracy konstrukcji,  $m$ , związany z dokładnością założeń obliczeniowych. Obliczeniowy warunek bezpieczeństwa ma postać

$$\Sigma nP \leq f(m, k_1 R_1, k_2 R_2, \dots, z),$$

gdzie  $P$  i  $R$  oznaczają odpowiednio normowe obciążenia i wytrzymałości,  $z$  parametry geometryczne. Elementy wymiarowane tą metodą nie wykazują rzecz jasna jednoznacznego współczynnika bezpieczeństwa obciążeniowego w sensie klasycznym.

Powyższa metoda zalicza się do rozwiniętych w ostatnim dziesięcioleciu teorii, które moglibyśmy nazwać ogólnie teoriami *wartości granicznych* i które wykorzystują rachunek prawdopodobieństwa, co nie oznacza, że są teoriami probabilistycznymi (por. p. 1.2), aczkolwiek stanowią do nich niewątpliwie etap przejściowy. Istota ich sprowadza się do tego, że zamiast oddzielnych i jednolitych miar (np. współczynników) bezpieczeństwa, zwiększają (resp. zmniejszają) one odpowiednio poszczególne wielkości nominalne wchodzące w obliczenie (nawiązują więc do metody naprężenia dopuszczalnego, które w pewnym sensie można uważać za «zredukowaną» wytrzymałość). Wychodzą one z zależności

$$(1.4) \quad \max \sigma \leq \min R,$$

gdzie  $\max \sigma$  oznacza ogólnie obciążenie programowe zwiększone w takiej mierze, by prawdopodobieństwo przekroczenia go w okresie eksploatacji było znikome,

min  $R$  zmniejszoną analogicznie wytrzymałość. Wartości te określa się często następująco:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \max \sigma &= \bar{\sigma} + \beta_{\sigma} \mu_{\sigma}, \\ \min R &= \bar{R} - \beta_R \mu_R, \end{aligned}$$

gdzie  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{R}$  oznaczają odnośne wartości przeciętne,  $\mu_{\sigma}$  i  $\mu_R$  odchylenia standardowe,  $\beta_{\sigma}$  i  $\beta_R$ , przyjęte z góry współczynniki określające (pośrednio) prawdopodobieństwo «przekroczenia» odpowiednio  $\max \sigma$  i  $\min R$  (np. przy rozkładzie normalnym wartości  $\beta = 3$  odpowiada prawdopodobieństwo przekroczenia ok. 1/750). Miarami bezpieczeństwa konstrukcji są więc tu same wielkości nominalne lub, w węższym znaczeniu, współczynniki  $\beta$ . Postępowość tego sposobu ujęcia polega na tym, że są one powiązane bezpośrednio ze statystycznymi charakterystykami rozrzutów (odchyleniami standardowymi).

Otóż w metodzie stanów granicznych współczynnik jednorodności oblicza się ze wzoru

$$k = 1 - \beta \frac{\mu_R}{\bar{R}},$$

tj. zgodnie z relacją (1.5)<sub>II</sub> (należy ją obustronnie podzielić przez  $\bar{R}$ ). Współczynniki przeciążenia są stabelaryzowane i również, chociaż nie tak bezpośrednio, oparte na danych statycznych.

Metoda wartości granicznych została ostatnio zaproponowana również przez komisję międzynarodową<sup>13</sup>, [94], w postaci nieco odmiennej:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \max \sigma &= \sigma_m \alpha (1 \pm \beta \mu_{\sigma}), \\ \min R &= \frac{\bar{R}(1 - \mu_R)}{\gamma}, \end{aligned}$$

liczby  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  są tu, podobnie jak  $\beta_{\sigma}$  i  $\beta_R$  we wzorach (1.5), bezpośrednimi miarami bezpieczeństwa,  $\sigma_m$  oznacza medianę obciążenia maksymalnego (wartość o prawdopodobieństwie przekroczenia 1/2). Poszczególne obciążenia oblicza się przy właściwych im współczynnikach i dodaje.

**1.2. Ujęcie probabilistyczne.** Metody opisane powyżej wyrosły z praktyki, która skłaniała do ujęcia w jakiś sposób wyników doświadczeń oraz «marginesu» bezpieczeństwa z uwagi na okoliczności nieprzewidziane. W miarę narastania obserwacji, zwłaszcza gdy dostrzeżono, że konstrukcja o danym współczynniku bezpieczeństwa zachowuje się dobrze przez dłuższy czas, obniżano tenże współczynnik intuicyjnie i kontynuowano obserwacje itd.

W latach trzydziestych zaczęto coraz wyraźniej odczuwać dysproporcję między rozwiniętymi teoriami wytrzymałościowymi, a w ten sposób niedokładnie określonymi współczynnikami bezpieczeństwa, i zdawać sobie sprawę z braku teoretycznego uzasadnienia dotychczasowych metod, wynikającego z następujących przyczyn:

(1) Miary bezpieczeństwa tradycyjne mają charakter konwencjonalny. Zamiast

<sup>13</sup> International Council for Building Research.

np. stosunku obciążenia niszczącego do programowego można by równie dobrze zdefiniować jakąś inną ich funkcję lub w ogóle inną wielkość, uzyskując, przy stosownym doborze wartości liczbowych, tę samą rezerwę bezpieczeństwa. Dotyczy to również współczynników  $\beta$ ,  $\gamma$  itd. w metodzie wartości granicznych [wzory (1.5), (1.6)]. (2) Brak metody pozwalającej wyznaczyć wartości liczbowe tychże miar, tym samym niemożność obiektywnego (nie zaś subiektywnego) ich doboru. Również w metodzie wartości granicznych współczynniki  $\beta$ ,  $\gamma$  itd. są z góry przyjmowane. (3) Brak jasnych kryteriów, co miary te powinny obejmować. W szczególności obejmowały one, jak widzieliśmy, z jednej strony niepewności o charakterze przypadkowym, z drugiej zaś pewne okoliczności nie uwzględnione w obliczeniu, prowadzące do odchyłeń systematycznych. (4) Brak powiązania z czynnikiem ekonomicznym w sensie możliwości określenia, o ile należy zwiększyć np. pewien współczynnik bezpieczeństwa, jeśli ruina konstrukcji prowadzi do  $n$ -krotnie większych strat. (5) Brak jednolitej, tj. uniwersalnej bazy porównawczej stopnia bezpieczeństwa<sup>14</sup> konstrukcji. Dwie konstrukcje mogą mieć np. ten sam współczynnik bezpieczeństwa obliczeniowy, wystarczy jednak, aby jedna z nich charakteryzowała się większymi rozrzutami wytrzymałości materiału, by faktyczne ich bezpieczeństwo było różne.

Uwolnienie się od tych braków wymagało zasadniczej rewizji dotychczasowego ujęcia. Krok ten został dokonany z chwilą przyjęcia jako miary bezpieczeństwa prawdopodobieństwa niezniszczenia konstrukcji  $p$ , zwanego stopniem bezpieczeństwa (resp. jej zniszczenia, tj. katastrofy). Prawdopodobieństwo to wyznacza procent konstrukcji zniszczonych w okresie eksploatacji (w dostatecznie licznym ich zbiorze), a tym samym oczekiwane straty ekonomiczne. Przedstawia ono obiektywną, jednoznaczną i uniwersalną miarę porównawczą stopnia bezpieczeństwa różnych konstrukcji, możliwość zaś określenia oczekiwanych strat pozwala ściśle uzależnić od nich (tzn. od czynnika ekonomicznego) stopień bezpieczeństwa<sup>15</sup>. Tak więc odzwierciedlenie rzeczywistości w obliczeniu następuje na dwóch drogach: ustalenia związków między wielkościami podstawowymi (wzory wytrzymałościowe) oraz uwzględnienia czynników nieprzewidzianych, przypadkowych i nie objętych wzorami wytrzymałościowymi (teoria bezpieczeństwa). I w tym przypadku, gdy mają one charakter odchyłeń systematycznych, muszą być ujęte aparatem teorii prawdopodobieństwa, ponieważ zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa katastrofy.

Czynników przypadkowych i nieprzewidzianych nie należy utożsamiać z nieznanymi; jedynie wiedzę o nich zdobywamy odmiennymi metodami, mianowicie za pomocą badań statystycznych, charakterystycznych dla teorii bezpieczeństwa. Ograniczenie do tych czynników zainteresowań teorii bezpieczeństwa nie powinno budzić wątpliwości, gdyby bowiem one nie występowały, bezpieczeństwo każdej konstrukcji byłoby absolutne, a teoria bezpieczeństwa zbędna.

<sup>14</sup> Podstawowe pojęcia zostaną ściśle zdefiniowane w następnych paragrafach. Zapoznanie się z nimi jest pożądane dla zrozumienia krytyki niektórych teorii, przeprowadzonej poniżej.

<sup>15</sup> Ściśle biorąc, sam dobór  $p$  jest jeszcze arbitralny, dopóki nie następuje na podstawie obliczenia ekonomicznego (por. p. 2 i 3); z tą chwilą odpada wszelka dowolność i subiektywność.

Linia podziału między teoriami probabilistycznymi i nieprobabilistycznymi przebiega tam, gdzie wyznacza się prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji, co najmniej w sposób przybliżony, tzn. pozwalający na oszacowanie błędu.

Metody wartości granicznych nie są więc teoriami probabilistycznymi, nawet gdyby współczynniki  $\beta$ ,  $\gamma$  itd. we wzorach (1.5) i (1.6) określano na podstawie obranych prawdopodobieństw nieprzekroczenia  $\sigma_{\max}$  i  $R_{\min}$ , gdyż nie wynika stąd jeszcze stopień bezpieczeństwa konstrukcji.

Teoria bezpieczeństwa probabilistyczna (w sensie określonym powyżej) została zapoczątkowana w r. 1936 pracami w Polsce W. WIERZBICKIEGO<sup>16</sup>, [99], we Francji M. PROTA, [62].

W. WIERZBICKI pierwszy zaproponował, aby stopień bezpieczeństwa charakteryzować prawdopodobieństwem niezniszczenia ustroju, traktując je jako uniwersalną miarę bezpieczeństwa i w tym znaczeniu może być uważany za twórcę probabilistycznej teorii bezpieczeństwa.

M. PROT<sup>17</sup> w pracy [62] obliczył prawdopodobieństwo zerwania elementu (drułu) rozciąganego, tj. niespełnienia nierówności (1.1), gdy naprężenia i wytrzymałość wykazują rozkłady normalne, dochodząc do podanego niżej wzoru typu (6.8), innymi słowy, wyznaczył stopień bezpieczeństwa w najprostszym przypadku nie definiując go wszakże wyraźnie jako miary bezpieczeństwa konstrukcji.

Teoria W. Wierzbickiego ([99]-[112]), której zasadnicza koncepcja jest już zarysowana w referacie [99], charakteryzuje się wprowadzeniem pewnego naprężenia granicznego  $\sigma_{gr}$  i przyjęciem, że katastrofa nie nastąpi, jeśli równocześnie  $\sigma < \sigma_{gr}$  oraz  $R > \sigma_{gr}$ . Za miarę bezpieczeństwa przyjmuje się iloczyn prawdopodobieństw zajścia równocześnie pierwszej i drugiej nierówności,  $p_{\sigma} p_R$ .

Na analogicznych nierównościach opiera się metoda N. S. Streleckiego, [88], który za miarę bezpieczeństwa przyjmuje wyrażenie  $1 - q_{\sigma} q_R$ , gdzie  $q_{\sigma}$  i  $q_R$  są prawdopodobieństwami przekroczenia odpowiednich z powyższych nierówności.

Ścisłe biorąc autor ten wychodzi z nierówności

$$k P^N (= \max P) \leq c R^N (= \min R),$$

gdzie  $p^N$  i  $R^N$  oznaczają ogólnie obciążenia i wytrzymałości (nośności) normowe, zaś  $k$  i  $c$  współczynniki zmienne losowo, uwzględniające odchylenia wielkości rzeczywistych od normowych. Ponieważ  $P^N$  i  $R^N$  są stałymi, nie zmienia to istoty rozważań.

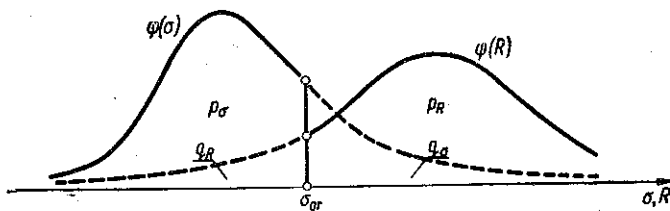
Miary bezpieczeństwa obu wymienionych autorów nie są równoważne, bowiem uwzględniając  $q = 1 - p$  otrzymujemy

$$p_{\sigma} p_R = 1 - q_{\sigma} - q_R + q_{\sigma} q_R \approx 1 - (q_{\sigma} + q_R) \neq 1 - q_{\sigma} q_R.$$

<sup>16</sup> Chodzi tu o sprawozdanie z referatu W. WIERZBICKIEGO wygłoszonego 14 listopada 1936 r. na posiedzeniu Wydziału Nauk Inżynierskich Akademii Nauk Technicznych.

<sup>17</sup> Omawiając w dalszym ciągu teorie różnych autorów, zawarte często w szeregu publikacji, ograniczamy się w każdym przypadku do istoty zagadnienia bez cytowania poszczególnych prac i przedstawiania szczegółów drugorzędnych, przy czym zgodnie z tematem niniejszego szkicu ograniczamy krytykę do strony teoretycznej poszczególnych ujęć i pomijamy analizę ew. wartości liczbowych uzyskanych przez autorów. Oznaczenia i formę zapisu zależności dostosowujemy do używanych w niniejszej pracy.

Obie wymienione miary mają charakter konwencjonalny, nie przedstawiają bowiem w ogólności (i nie pozwalają określić jednoznacznie) stopnia bezpieczeństwa, od którego mogą się różnić z dowolnym błędem względnym. Wynika to z pominięcia prawdopodobieństwa przypadków, gdy równocześnie  $\sigma_{gr} < \sigma < R$  lub  $\sigma < R < \sigma_{gr}$ , a więc również zniszczenie nie nastąpi (por. niżej p. 3). Innymi słowy, uwzględnia się tylko części rozkładów prawdopodobieństwa odcięte pionową w punkcie  $\sigma_{gr}$  i mnoży odnośne pola (rys. 1); np. w metodzie W. Wierzbickiego pomija się pola ograniczone linią kreskowaną.



Rys. 1

Na fakt, że iloczyn  $p_{\sigma} p_R$  nie może być określany jako prawdopodobieństwo bezpieczeństwa, zwrócił uwagę W. POGORZELSKI, [61]. Krytykę ujęcia N. S. Streleckiego pod kątem wprowadzonej przezeń miary przeprowadził R. A. MULLER, [55]. Jak widać, metody te nawiązują bezpośrednio do teorii wartości granicznych (gdzie  $\sigma_{gr} = \sigma_{max} = R_{min}$ ) wprowadzając dodatkową jednolitą miarę bezpieczeństwa. Przyjęcie tejże nie jest jednak tutaj wystarczające i wymaga arbitralnego ustalenia ponadto  $\sigma_{gr} = R_{min}$  dla określenia  $p_{\sigma}$  i stąd  $\sigma$  [por. (1.5)].

Omówione teorie łącznie z metodą stanów granicznych (p. 1.1), prowadzące do wymiarowania konstrukcji w ten sposób, by  $\sigma < \sigma_{max}$ ,  $R > R_{min}$ , biorą pod uwagę mało prawdopodobny przypadek osiągnięcia równocześnie określonych umownych wartości  $\sigma_{max}$  i  $R_{min}$ , co obniża ekonomiczność rozwiązania.

W metodzie N. S. Streleckiego prawdopodobieństwo  $p_{\sigma} = p(\sigma < \sigma_{gr})$ , oblicza się traktując  $\sigma$  jako zmienną przypadkową głównie wskutek zmienności obciążeń (ściśle biorąc chodzi tam o prawdopodobieństwo  $q$ , co nie zmienia istoty zagadnienia). W teorii W. Wierzbickiego czynnik ten pomija się (wychodzi się z obciążeń normowych) i przypisuje przyrosty naprężeń nieściśłościom hipotez obliczeniowych i parametrów (w rodzaju modułu sprężystości). Zakłada się, że  $\sigma_{gr}$  odpowiada sumie określonych przyrostów częściowych naprężenia (dopuszczalnego), wynikających z niespełnienia się poszczególnych hipotez. Wielkość względną (procentową) każdego z tych przyrostów przyjmuje się z góry mniej lub więcej dowolnie i każdemu z nich przypisuje się określone prawdopodobieństwo nieprzekroczenia przyjętej jego wartości. W szczególności przyjmuje się *a priori* rozkład normalny przyrostu względnego i określoną wielokrotność odchylenia standardowego, co wyznacza wielkość przyrostu i wspomniane prawdopodobieństwo [dowolność tkwi tutaj w ustaleniu tej wielokrotności analogicznie jak współczynników  $\beta$  we wzorach (1.5)]. Założenie to można traktować tylko w sposób przybliżony, gdyż przyrost

jest pewną funkcją zmiennych losowych i rozkład jego zależy w określony sposób od rozkładów tychże. Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia  $\sigma_{gr}$  oblicza się jako iloczyn tych (znanych) prawdopodobieństw «częściowych»,  $p_\sigma = p_1 p_2 \dots$ . Przyjąwszy miarę bezpieczeństwa  $p = p_\sigma p_R$ , można więc w myśl teorii wyznaczyć  $p_R = p/p_\sigma$  i na podstawie znanego rozkładu  $R$  znaleźć położenie  $\sigma_{gr}$  (punkt ten musi odcinać pole  $p_R$ ; por. rys. 1), a stąd znając łączny przyrost względny, tj. stosunek  $\sigma_{gr}/\sigma$  obliczyć  $\sigma_{dop}$  lub współczynnik bezpieczeństwa.

W dalszych pracach ([107], [110] i in.) autor teorii zauważa, że wspomniane przyrosty nie mają na ogół charakteru wielkości przypadkowych i na tej podstawie zakłada  $p_1 = p_2 = \dots = 1$ , pozostaje więc tylko prawdopodobieństwo  $p(R > \sigma_{gr})$ , które autor przyjmuje jako równe stopniowi bezpieczeństwa; metodę tę nazywa autor półprobabilistyczną.

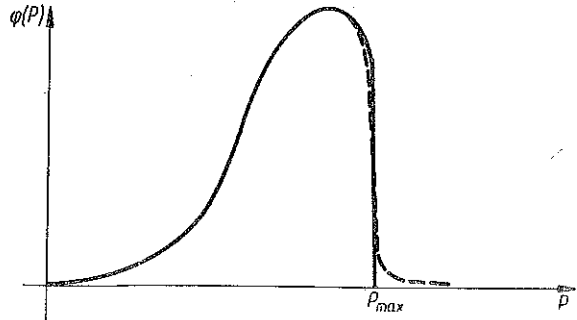
Przyjęcie w powyższej teorii postaci sumy przyrostów ma charakter konwencjonalny, co samo przez się nie stanowi przeszkody (por. p. 3 i 4); natomiast przyjmowanie określonych granicznych przyrostów względnych i mnożenie poszczególnych prawdopodobieństw ich nieprzekroczenia nie prowadzi do obliczenia poszukiwanego prawdopodobieństwa (tj. stopnia bezpieczeństwa). Przyrosty są bowiem zmiennymi przypadkowymi, a rozkład ich sumy musi być wyznaczony ze wzoru na rozkład sumy zmiennych losowych; dopiero znając dystrybuantę tejże, można m.in. obliczyć prawdopodobieństwo nieprzekroczenia określonej wartości sumy<sup>18</sup>. Schemat mnożenia prawdopodobieństw (właściwy dla zdarzeń elementarnych, którymi nie są przekroczenia przyrostów, tj. zachodzenie pewnych nierówności) nie daje tu, podobnie jak poprzednio, aproksymacji poszukiwanego prawdopodobieństwa  $p$  i wymaga arbitralnego ustalania wartości tych przyrostów, a przy nieznaności ich rozkładów — wprost przyjęcia odnośnych prawdopodobieństw nieprzekroczenia.

Co się tyczy metody półprobabilistycznej, to nie widać uzasadnienia identyfikowania prawdopodobieństwa  $p(R > \sigma_{gr})$  ze stopniem bezpieczeństwa, który zależy również od szeregu innych czynników, m.in. rezerw wprowadzonych za pomocą przyrostów naprężenia o wartości z góry przyjętej. Wprowadzenie tych przyrostów nie oznacza, że można im przypisywać prawdopodobieństwa  $p = 1$  jako wielkościom nielosowym. Zmiennym losowym o małych rozrzutach można w przybliżeniu przypisać rozkład jednopunktowy (tj. wartość o  $p = 1$ ), nie dotyczy to jednak przyrostów zmiennych, gdyż oznaczałoby to, że wartość zwiększona (z przyrostem o  $p = 1$ ) jest pewna, natomiast «obliczeniowa» (jak również wszelkie inne, o  $p = 0$ )

<sup>18</sup> Por. p. 3, w szczególności wzór (3.6) mający zastosowanie ogólnie dla dowolnej funkcji zmiennych przypadkowych. Przyjęcie określonych granicznych przyrostów względnych w myśl wzorów typu (1.5) nawiązuje do metody wartości granicznych (por. p. 1.1), gdzie ma swoje uzasadnienie (pewne jednolite kryterium doboru tychże wartości), nie ma go wszakże przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa bezpieczeństwa nawet i wówczas, gdyby np. zmienne przyrosty (a stąd ich suma) miały rozkłady ograniczone (rys. 2), gdyż wynik zależałby od przebiegu rozkładów poniżej wartości maksymalnych. Z faktu nieprzekroczenia określonej wartości sumy przyrostów nie wynika także, że poszczególne przyrosty nie mogą być przekroczone.

— niemożliwa, nie chodziłoby więc o problem bezpieczeństwa, lecz o wstawienie prawidłowych wartości w obliczenie.

Z sensu rozważań wynika, że chodzi tu tylko, w odróżnieniu od poprzedniej metody, o umowne przyjęcie przyrostów bez korzystania z zależności typu (1.5), a więc m.in. bez możliwości określenia prawdopodobieństwa nieprzekroczenia przyrostu. Może ono być bliskie, czy nawet równe 1 (rys. 2); nie należy tego utożsamiać z rozkładem jednopunktowym, tj. nielosowością. Przyjęcie «przyrostów» rzędu 5% (por. np. [110]) wskazuje, że chodzi o wielkości o rozrzutach dostatecznie zarysowanych, by wpływ ich odbijał się na stopniu bezpieczeństwa. Oczywiście nie ustalając ich rozkładów i parametrów tychże [czego wymagają wzory typu (1.5) i poprzednia metoda] nie mamy możliwości obliczenia tego stopnia.



Rys. 2

Na marginesie warto zauważyć, że ze względów teoretycznych «przyrosty» należy ujmować w sposób probabilistyczny. Wynikają one mianowicie z dwojakiego typu źródeł (por. np. [110]); odchyień argumentów przypadkowych (np. wymiarów geometrycznych, modułów sprężystości itp.) oraz nieścisłości wzorów (np. wskutek odstępstw od założenia płaskich przekrojów). W pierwszym przypadku można je uważać za różnice funkcji argumentu odpowiednio rzeczywistego i «obliczeniowego», są więc zmiennymi losowymi (jako funkcje argumentów przypadkowych). W drugim przypadku przyrost jest różnicą funkcji «ściślejszej» i «uproszczonej»; z chwilą gdy tej pierwszej nie znamy, lub nie wprowadzamy w rachunek (ze względu na zbyt skomplikowaną postać), musimy powiązać przyrost z funkcją «przybliżoną» związkiem korelacyjnym (temu samemu naprężeniu «przybliżonemu» mogą odpowiadać różne wartości «ściśle», zależnie od postaci funkcji «ściślejszej» i wielkości parametrów). Dochodzimy więc znowu do zmiennej losowej jako funkcji przypadkowej (choćby nielosowych argumentów).

W obu omówionych metodach pominięto zasadniczy — obok wytrzymałości — czynnik przypadkowy, jakim jest zmienność obciążeń, co również może prowadzić do istotnych nieścisłości w ocenie stopnia bezpieczeństwa. Byłoby to uzasadnione tylko w przypadku dwu ich kategorii, mianowicie obciążeń «określonych» lub «ograniczonych» (por. p. 5). Fakt, że w obliczeniach statycznych wstawiamy obciążenia normowe, ustalone na określonym poziomie, nie wpływa na bieg rozważań, gdyż przedmiotem analizy są wielkości *rzeczywiste* (przypadkowe) i rzeczywisty stopień bezpieczeństwa konstrukcji. Wskutek pominięcia rozrzutów obciążeń ujęcie ogranicza się do wyznaczenia dystrybuanty pojedynczej zmiennej losowej (wytrzymałości), nie rozważa się zaś funkcji argumentów przypadkowych.

Powyższe uwagi dotyczą rzecz jasna tylko kwestii wyznaczania stopnia (prawdopodobieństwa) bezpieczeństwa, jako kryterium ujęcia «probabilistycznego», jeśli natomiast metody powyższe będziemy rozpatrywać jako «konwencjonalne» (podobne do omówionych na końcu p. 1.1, wykorzystujących również rachunek prawdopodobieństwa), to kryteriami mogą być tylko racjonalność i użyteczność praktyczna. Z tego punktu widzenia odznaczają się one prostotą, ponieważ bezpośrednio określa się poszczególne przyrosty naprężenia. Z drugiej strony, przyrosty te zależą od postaci funkcji, w której występuje rozpatrywana zmienna, będąca ich źródłem (dotyczy to np. modułu sprężystości); wynika stąd niejednoznaczność, której można by uniknąć przez wprowadzenie np. wprost jakichś «granicznych» wartości tych zmiennych. Ponadto znaczna liczba «współczynników przyrostu» odzwierciedlających poszczególne nieścistości (do kilkunastu włącznie; por. np. [110]), powoduje kumulowanie się błędów przy ich ocenie, zwłaszcza wobec pewnej niejasności co do sposobu i kryteriów ustalania ich wartości liczbowych. Natomiast z uwagi na prostotę w zastosowaniu metody proponowane umożliwiają bezpośrednio wykorzystanie dotychczasowego doświadczenia w postaci różnych, praktycznie ustalonych współczynników bezpieczeństwa. Dzięki temu autor teorii był w stanie wyznaczyć konkretnie współczynniki bezpieczeństwa lub naprężenia dopuszczalne dla szeregu konstrukcji (żelbetowych, stalowych, lin nośnych, ustrojów hiperstatycznych itd.), gdzie często brak dotychczas wystarczających danych statystycznych, niezbędnych dla ujęcia konsekwentnie probabilistycznego. Co prawda proponowane wartości wymagałyby dopiero weryfikacji praktycznej.

W. WIERZBICKI w pracach swych prócz wprowadzenia probabilistycznej miary bezpieczeństwa, co jest sprawą zasadniczą, niezależnie od proponowanych metod obliczeń zdefiniował szereg istotnych pojęć, podał kilka sposobów doboru stopnia bezpieczeństwa (por. p. 2), wyświetlił ekonomiczny sens zagadnienia, przeprowadził szeroką pracę popularyzacyjną metod probabilistycznych.

F. V. COSTA, [14], oblicza prawdopodobieństwo katastrofy w postaci  $q = q_{\sigma} q_R$ , gdzie  $q_{\sigma}$  oznacza prawdopodobieństwo określonego rzadkiego obciążenia w okresie eksploatacji,  $q_R$  (cyt.) «prawdopodobieństwo, że element zniszczy się, gdy jest poddany temu obciążeniu». Jeśli pewne obciążenie, np. od wiatru, zdarza się przeciętnie np. w ciągu jednego dnia na 4000 dni, to prawdopodobieństwo, że pojawi się ono w 5-letnim okresie eksploatacji wynosi według autora  $q_{\sigma} = 5 \cdot 365 / 4000 \approx 1/2$ . Ujęcie to jest nieprawidłowe z wielu powodów. Nie można mówić o określonym obciążeniu lub określonej wytrzymałości, gdyż prawdopodobieństwo tychże jest nieskończenie małe<sup>19</sup> i można tu tylko operować nierównościami. Podany wzór w postaci iloczynu nie prowadzi do wyniku z przyczyn wyjaśnionych już poprzednio. To samo dotyczy sposobu obliczenia  $q_{\sigma}$  w okresie eksploatacji (w szczególności gdyby okres ten wynosił 4000 dni, otrzymalibyśmy licząc w ten sposób  $q_{\sigma} = 4000/4000 = 1$ ); szczegółowe wyjaśnienia w tej mierze podane są w p. 5. Autor podaje natomiast słuszną formułę dla  $p_R$  jako funkcji wymiaru elementu; np. dla

<sup>19</sup> Byłoby to uzasadnione w przypadku obciążeń «katastrofalnych» w sensie wyjaśnionym w p. 5; wówczas jednak zbędne jest wprowadzanie prawdopodobieństwa  $q_R$ , gdyż byłoby  $q = q_{\sigma}$ .



liny o  $n$ -krotnej długości próbki, dla której określono  $p'_R$  i  $q'_R = 1 - p'_R$  otrzymujemy

$$p_R = (p'_R)^n = (1 - q'_R)^n \approx 1 - nq'_R.$$

Przybliżona formuła z prawej strony jest ważna tylko dla małych  $q'_R$ , nie zaś dla znacznych, jak np. w powyższym przykładzie obciążeń. Analogiczne ujęcie tego problemu podał wcześniej M. DUMAS, [16].

W. POGORZELSKI, [61], wyznacza stopień bezpieczeństwa jako prawdopodobieństwo spełnienia się nierówności typu  $\sigma < R/a$ , gdzie  $\sigma$  jest funkcją parametrów (zmiennych przypadkowych) występujących w obliczeniu,  $a$  obranym z góry współczynnikiem bezpieczeństwa. Sposób ten również nie prowadzi do określenia stopnia bezpieczeństwa, gdyż zniszczenie nie nastąpi także przy  $R/a < \sigma < R$ . Nie dotyczy to przypadku szczególnego, gdy  $a = 1$ , co autor teorii nazywa prawdopodobieństwem bezwzględnym bezpieczeństwa.

Nierówności typu  $\sigma < R/a$  są warunkami obliczeniowymi (w zakresie wielkości nominalnych), nie mają jednak uzasadnienia w zakresie wartości rzeczywistych (przypadkowych).

Istota kwestii tkwi w tym, że nierówności podstawowe przedstawiają tu (jak również w metodach omówionych na początku) tylko warunek dostateczny, nie zaś konieczny, niezniszczenia konstrukcji, tym samym prawdopodobieństwo ich spełnienia nie jest równe  $1 - q$ , gdzie  $q$  jest prawdopodobieństwem katastrofy (lecz jest mniejsze od tej wartości), nie prowadzi więc do określenia faktycznych rezerw wytrzymałościowych.

Odmiennej kierunku rozwoju zrodził się w Anglii w latach ostatniej wojny w związku z rozwojem lotnictwa. A. D. PUGSLEY, [73] i [74], ujmuje zagadnienie od strony częstości katastrof samolotów (wywołanych przekroczeniem wytrzymałości skrzydła) i związanej z tym przeciętnej długości życia samolotu, tj. oczekiwanego okresu jego eksploatacji. Na podstawie przebiegu w czasie wskazań akcelerometru (proporcjonalnych do obciążeń) (por. rys. 5) można uzyskać częstość przekroczeń określonego przyśpieszenia (tj. ilość przekroczeń danego obciążenia skrzydła w rozpatrywanym okresie czasu) oraz, dzieląc tenże okres przez wskazaną ilość, przeciętny odstęp czasowy przekroczeń. Jeżeli badamy przekroczenia obciążenia równego nośności skrzydła, to otrzymamy w ten sposób przeciętny czas życia samolotu. Zaletą tego ujęcia jest zwrócenie uwagi na czynnik czasu, w sensie okresu eksploatacji, od którego zależą wszelkie prawdopodobieństwa i rozważania ekonomiczne.

Autor rozszerza teorię uważając nośność skrzydła za zmienną przypadkową. Rozważając zbiorowość, np. 100 samolotów, biorąc z nich liczbę samolotów o nośności mieszczącej się w danym przedziale i mnożąc ją przez ilość przekroczeń tego przedziału przez obciążenie (w założonym okresie eksploatacji) otrzymuje ilość katastrof; sumując ilości katastrof dla kolejnych przedziałów nośności dochodzi do łącznej liczby samolotów zniszczonych spośród 100. Ujęcie to budzi zastrzeżenia, bowiem mnożyć należałoby prawdopodobieństwo pojawienia się nośności w danym przedziale i przekroczenia jej *co najmniej raz* w rozważanym okresie, a to ostatnie bynajmniej nie jest proporcjonalne do ilości przekroczeń (por. p. 5).

Jeśli np. 2 samoloty spośród 100 posiadają nośność w przedziale, który w danym okresie jest przekroczony przeciętnie 10 razy przez obciążenie, to liczba zniszczonych samolotów nie wyniesie 20, jak podaje autor ([74], tabl. 1), lecz 2. Autor sugeruje, że przyjmuje się bez większego błędu, iż zniszczone samoloty są zastępowane przez nowe, tak by utrzymać stale ich liczbę 100 w eksploatacji, przeocza tu jednak dwa fakty: (1) zniszczone samoloty musiałyby być zastąpione przez inne, o takiej samej wytrzymałości rzeczywistej (będącej zmienną przypadkową), (2) zwiększyłyby się zbiór (100 elementów) o dodane samoloty, tym samym zmieniłaby się częstość względna katastrof (z dowolnym błędem względnym).

Teorie konsekwentnie probabilistyczne (w sensie powyżej sprecyzowanym) rozwijały się w kierunku wypracowania ogólnych metod obliczeniowych, zwłaszcza uproszczonych, przydatnych dla praktyki, z drugiej strony konkretyzowania obliczeń dla poszczególnych typów rozkładów prawdopodobieństwa. Niemal wszystkie te teorie nawiązują do miar bezpieczeństwa tradycyjnych starając się oprzeć ich obliczenie na bazie probabilistycznej. Równocześnie pogłębiono analizę podstaw teorii bezpieczeństwa (M. PROT, [63], F. CAMPUS, [11], E. TORROJA, [92] i [93], A. J. MOE, [50], J. DUTHEIL, [17], i in.). Liczne wysunięte wątpliwości pod adresem ujęcia probabilistycznego, można już dziś uważać za przewyżczone.

Należy ponadto wspomnieć o trzech kierunkach badań blisko związanych z teorią bezpieczeństwa; są to: (1) badania statystyczne, mające na celu uzyskanie rozkładów częstości<sup>20</sup> jako doświadczalnej podstawy teorii, (2) zagadnienia estymacyjne, zwłaszcza wpływ liczebności próby oraz doboru typu rozkładu prawdopodobieństwa na ścisłość wyników<sup>21</sup>, (3) zagadnienie wytrzymałości i analiza obciążeń jako problemy o charakterze stochastycznym, związane z zagadnieniem bezpieczeństwa w przestrzeni i w czasie<sup>22</sup> (np. wytrzymałość jako funkcja przypadkowa miejsca i zagadnienie rozmiarów elementu, obciążenie jako funkcja czasu itd.).

W dalszym ciągu ograniczymy się do zanotowania ważniejszych konkretnych osiągnięć teorii probabilistycznej.

Prawidłowe teoretyczne rozwiązanie, aczkolwiek tylko dla najprostszego przypadku, zostało podane przez M. PROTA, [62]-[72], w sensie zdefiniowania stopnia bezpieczeństwa jako prawdopodobieństwa spełnienia nierówności (1.1), gdzie obie strony są zmiennymi przypadkowymi. Autor ten powiązał również zagadnienie bezpieczeństwa i ekonomiczne ustawiając równanie minimum kosztów (por. p. 3) oraz poświęcił szereg prac kwestii statystycznego ujęcia badań wytrzymałościowych (źródła błędów i rozrzutów, ufność parametrów rozkładu w związku z liczebnością próby, m.in. z zastosowaniem rozkładu Studenta i in.).

<sup>20</sup> Np. dla stali M. CASSÉ, [13], M. JEŻEWSKI i J. ODERFELD, [31], dla betonu i stali zbrojenio-  
wej O. G. JULIAN, [34], dla betonu M. BONNET, [7] i [8], a przy obciążeniu zmęczeniowym J. T. Mc  
CALL, [12]; dla zaprawy M. PROT, [64], dla obciążeń ruchomych mostów S. O. ASPLUND, [2],  
i H. K. STEPHENSON, [84], dla różnych obciążeń i materiałów N. S. STRELECKI, [88], A. M. FREU-  
DENTHAL, [20], R. A. MULLER, [54], i szereg innych.

<sup>21</sup> M. PROT, [71], N. S. STRELECKI, [88], M. DUMAS, [15] i [16], W. PIEKARSKI, [59], GAEDE, [23]  
i [24], J. HEINHOLD, [29], H. RÜSCH, [79] i in.

<sup>22</sup> Podstawowe prace, W. WEIBULL, 1939, por. też [98], J. TUCKER, [96], i późniejsze.

A. M. FREUDENTHAL ([19]-[22], zwłaszcza [20]) zaproponował i wyznaczył współczynnik pewności (obliczeniowy, tj. nominalny, por. p. 4) w postaci

$$s = \frac{\bar{R}}{\bar{P}},$$

gdzie  $\bar{P}$  i  $\bar{R}$  są odpowiednio wartościami przeciętnymi dla określonego prawdopodobieństwa spełnienia nierówności (1.1) lub (1.2) przy rozkładach normalnych, logarytmonormalnych i ekstremalnych (por. p. 6). Zanalizował on wszechstronnie obciążenia, wpływ plastyczności materiału, rozróżnił kryteria nieprzydatności do eksoloatacji (ang. unserviceability) i zniszczenia, rozwinął warunek ekonomiczny (por. p. 2).

W. MOSZYŃSKI, [51]-[53], sformułował współczynnik bezpieczeństwa (nominalny) w sposób ogólniejszy,

$$s = \frac{R^N}{P^N},$$

gdzie  $P^N$  i  $R^N$  są ogólnie wielkościami nominalnymi (w szczególnym przypadku mogą być przeciętnymi) i rozwinął zastosowanie rozkładów logarytmonormalnych rozważając funkcje w postaci jednomianów, które po zlogarytmowaniu przechodzą w wyrażenia liniowe, oraz podjął próbę zdefiniowania klas konstrukcji według pożądanego stopnia bezpieczeństwa  $p$ , zróżnicowanego według ważności konstrukcji oraz trudności naprawy przy uszkodzeniu.

Szereg istotnych prac poświęcono opracowaniu ogólnych metod przybliżonych wyznaczania stopnia bezpieczeństwa.

A. R. RZANICYN, [80], wyprowadza podstawowe zależności dla rozkładów normalnych (por. p. 6.1) uwzględniając również związki korelacyjne między zmiennymi. W pracy [82] autor ten wychodzi z nierówności typu (1.3) rozważając ogólnie funkcję parametrów występujących w warunku wytrzymałościowym i stosuje jej linearyzację przez zatrzymanie wyrazów liniowych w rozwinięciu funkcji w szereg potęgowy w otoczeniu wartości przeciętnych poszczególnych zmiennych. Przyjmując rozkłady normalne tych ostatnich oblicza odchylenie standardowe powyższej funkcji liniowej i wymiaruje konstrukcję przy  $\gamma$ -krotności tego odchylenia. Liczba  $\gamma$  jest tu miarą bezpieczeństwa i odpowiada określonemu prawdopodobieństwu spełnienia nierówności (por. p. 7). Autor rozpatruje nadto inne zagadnienia, w szczególności obciążenia sumujące się; np. przy  $n$  kondygnacjach budynku odchylenie standardowe obciążenia łącznego rośnie proporcjonalnie tylko do  $\sqrt{n}$ , a więc przy zwiększającym się  $n$  współczynnik pewności należy odpowiednio obniżyć.

R. A. MULLER, [55], obliczył prawdopodobieństwo spełnienia nierówności typu (1.2), gdy obie zmienne wykazują rozkłady gamma (tj. Pearsona III rodzaju). W przypadku nierówności (1.1), tj. różnicy zmiennych, scharakteryzowanych statystycznie przez trzy parametry (wartość przeciętną, odchylenie standardowe i współczynnik asymetrii) autor wyznacza wskazane parametry dla różnicy i przyjmuje, że ma ona rozkład gamma, co pozwala określić prawdopodobieństwo  $p$ . W porównaniu ze sposobem A. R. Rżanicyna metoda ogranicza się do dwóch

zmiennych, natomiast uwzględnia asymetrię rozkładów. Autor rozpatruje ponadto pewne uogólnienie rozkładu gamma (podane przez KRICKIEGO-MENKELA) w węższym zagadnieniu obliczania współczynników niejednorodności i przeciążenia w metodzie stanów granicznych, [54].

R. LÉVI, [40]-[46] opracował metodę przybliżonego obliczania stopnia bezpieczeństwa opartą na (1) transformacji rozkładów prawdopodobieństwa oraz (2) linearyzacji warunku wytrzymałościowego (w obszarze przetransformowanym) w otoczeniu wartości krytycznych (por. p. 3). Transformację rozkładów (które muszą być znane) można uważać za uściślenie metody A. R. Rżanicyna, opierającej się tylko na znajomości momentów statystycznych (tj. odnośnych parametrów rozkładów), rozwinięcie zaś dla wartości krytycznych daje teoretycznie uzasadnione i lepsze przybliżenie niż dla przeciętnych. Jest to, jak się wydaje, najbardziej zaawansowana z dotychczasowych metod ogólnych, toteż będzie ona omówiona szczegółowo w p. 7., gdzie podamy również jej matematyczne uzasadnienie, pominięte przez autora, i sprostujemy pewną istotną nieścisłość popełnioną przez niego (por. p. 7). R. LÉVI wykorzystał szeroko rozkłady logarytmnormalne i w oparciu o swą metodę podał konkretne rozwiązania dla szeregu konstrukcji (żelbetowych, sprężonych, stalowych).

E. TORROJA i A. PÁEZ, [95], podali metodę wykreślnego wyznaczania  $p$  dla dowolnej funkcji dwóch zmiennych losowych, jeśli dystrybuanty tychże są znane empirycznie (analityczne ich wyrażenie nie jest konieczne).

M. TICHY i M. VORLIČEK, [91], zastosowali do obliczenia przekrojów zbrojonych rozkłady Pearsona III rodzaju wyznaczając ich parametry (na podstawie parametrów rozkładów zmiennych losowych) dla dowolnej funkcji w warunku wytrzymałościowym, rozkładając ją w szereg i zatrzymując również wyrazy nieliniowe.

Metoda linearyzacji z zastosowaniem rozkładów normalnych została wykorzystana dla konstrukcji stalowych i żelbetowych przez B. J. BIELAJEWA, [5] i [6], (wyznaczył on współczynnik bezpieczeństwa naprężeniowy) oraz przez H. S. SU, [90].

Na koniec należy wspomnieć o problematyce związanej z metodami stochastycznymi, zwłaszcza o ustrojach hiperstatycznych i o zagadnieniu obciążeń.

I. KONISHI i M. SHINOZUKA, [36], rozważają zniszczenie ustroju hiperstatycznego na podstawie teorii przegubów plastycznych na przykładzie belki jednostronnie utwierdzonej (z drugiej strony swobodnie podpartej) przy obciążeniu ruchomym przesuwającym się po belce, traktowanym jako zmienna przypadkowa. Prawdopodobieństwo katastrofy obejmuje przypadek zniszczenia «statycznego» gdy obciążenie rzeczywiste przekracza obciążenie niszczące, odpowiadające powstaniu dwóch przegubów plastycznych, i zniszczenia stopniowego, gdy kolejne przejścia obciążenia wywołują częściowe natanianie odkształceń w przegubie miarodajnym. Przyrosty te mają charakter przypadkowy (z uwagi na przypadkowość obciążeń), a zniszczenie wywołane jest przez ich sumę, gdy przekroczy ona wartość graniczną. Zagadnienie to, znamienne dla ustrojów hiperstatycznych (i w ogólności dla odkształceń plastycznych), ma charakter stochastyczny (wiąże się z teorią łańcuchów Markowa), bowiem naprężenie w danym przekroju zależy, prócz obciążenia, od

położenia i odkształcenia przegubów, a te wynikają m.in. z poprzedniego, przypadkowego przebiegu obciążeń.

H. K. STEPHENSON, [84], analizuje w oparciu o rozkład Poissona częstość pojawiania się pojazdów na mostach, mianowicie (1) prawdopodobieństwo pojawienia się liczby  $n$  pojazdów (bez względu na ciężar) równocześnie na odcinku o określonej długości, bądź w określonym przedziale czasu, oraz (2) prawdopodobieństwo równoczesnego pojawiania się pojazdów określonej kategorii (ciężaru) i podaje odnośne wartości liczbowe i wykresy dla warunków amerykańskich. W nieco węższym aspekcie rozważał to zagadnienie S. O. ASPLUND, [2], obliczając na podstawie rozkładu dwumiennego prawdopodobieństwo ustawienia ciężkich pojazdów na moście i wpływ długości tegoż na wielkość obciążenia. Do wyników tych autorów powrócimy w p. 5, gdzie podamy ogólniejsze sformułowanie zagadnień tego typu.

Powyższy krótki rys historyczny wskazuje, jak problematyka bezpieczeństwa, wychodząc z prymitywnych ujęć tradycyjnych, poprzez metody wartości granicznych, a następnie rozszerzenie tychże przez wprowadzenie opartych na rachunku prawdopodobieństwa, acz konwencjonalnych miar bezpieczeństwa, doprowadziła do współczesnej teorii probabilistycznej.

W dalszym ciągu przedstawimy systematycznie aparat pojęciowy i te wyniki teorii bezpieczeństwa, które tworzą jej trwały szkielet.

## 2. Zagadnienie ekonomiczne. Dobór stopnia bezpieczeństwa

Bezpieczeństwo jest pojęciem pierwotnym, którego treść wzbogaca się w miarę narastania wiedzy i przeciwnie, zwęża przy próbach definicji. Tym niemniej można i należy wprowadzić pewne zasadnicze rozróżnienia, w szczególności wyodrębnić:

(1) Bezpieczeństwo w sensie *subiektywnym*, będące pojęciem psychologicznym (poczucie bezpieczeństwa), nie dającym się ująć ilościowo. Nie wchodzi ono w zakres naszych rozważań.

(2) Bezpieczeństwo w sensie *obiektywnym*, oznaczające brak ryzyka określonych, niepożądanych zdarzeń przypadkowych (uważanych za «niebezpieczne»).

(3) Bezpieczeństwo w sensie *ekonomicznym*, oznaczające zabezpieczenie (ekonomiczne) przed ujemnymi skutkami ekonomicznymi, tzn. stratami, wywołanymi zdarzeniami przypadkowymi.

Zdarzenia przypadkowe prowadzące do pełnej lub częściowej utraty nośności konstrukcji nazwiemy umownie *katastrofami*.

Bezpieczeństwo (we wszystkich trzech znaczeniach) ma charakter *względny*, gdyż, jak uczy doświadczenie, bezpieczeństwo absolutne nie istnieje i możemy mieć tylko do czynienia z mniejszym lub większym ryzykiem zdarzeń mniej lub bardziej «niebezpiecznych». Pociąga to za sobą potrzebę ustalenia *miary* jego wielkości.

Miarą bezpieczeństwa w sensie obiektywnym jest prawdopodobieństwo zajścia określonej katastrofy (oznaczamy je przez  $q$ ), które nazywamy krótko *prawdopodobieństwem katastrofy*, resp. jej nie zajścia, zwane w dalszym ciągu *stopniem*

*bezpieczeństwa* konstrukcji<sup>23</sup> (oznaczamy go przez  $p$ ). Ponieważ chodzi o zdarzenia przeciwne, obowiązuje zależność

$$(2.1) \quad p + q = 1.$$

Realizacja bezpieczeństwa w sensie ekonomicznym, tzn. ekonomiczne uniezależnienie się od katastrof, wymaga pewnego nakładu pracy ludzkiej, czyli pociąga określone koszty, które są miarą tego bezpieczeństwa. Mogą one być skierowane (1) na zmniejszenie prawdopodobieństwa katastrofy  $q$ , (2) na usunięcie skutków katastrofy w założeniu, że ta ostatnia miała miejsce.

Stopień bezpieczeństwa związany jest ściśle z kosztem konstrukcji, zwiększenie  $p$  [czyli zmniejszenie  $q$ , por. (2.1)] wymaga np. zwiększenia wymiarów konstrukcji, zastosowania lepszych materiałów itp. Toteż nakłady grupy (1) występują przede wszystkim w postaci kosztu przedmiotowego, prócz tego zaś kosztu eksploatacji (środki zabezpieczające, remonty, rekonstrukcje itd.). Nakłady grupy (1) oznaczamy ogólnie przez  $K$ ; wielkość ta jest funkcją  $p$  lub  $q$ .

Nakłady grupy (2) zależą od kosztu przywrócenia pełnej wartości użytkowej obiektu oraz pokrycia strat wtórnych wywołanych katastrofą; koszt ten nazwiemy *kosztem katastrofy* i oznaczymy przez  $C$ . Gdyby np. zniszczenie było kompletne, lecz ograniczone do rozważanego elementu, wówczas byłoby  $C = K$  (z pominięciem drugorzędnych kosztów eksploatacji). Może ono jednak pociągnąć za sobą straty znacznie większe (np. zniszczenie słupa pierwszorzędnego może wywołać ruinę całego budynku); wówczas  $C > K$ . Może być wreszcie  $C < K$ , jeśli zniszczenie ma charakter ograniczony i da się naprawić niedużym kosztem w stosunku do kosztu elementu. Wartość  $C$  może obejmować także straty wtórne wywołane katastrofą, w postaci np. przestoju produkcji, wypłaty ubezpieczeń od kalectwa lub czasowej niezdolności do pracy osób poszkodowanych itd.

Wielkość  $qC$  charakteryzuje ogólną, społecznie niezbędną sumę nakładów grupy (2), ujawniającą się przy dostatecznie dużej zbiorowości obiektów. W odniesieniu do indywidualnego obiektu nazwiemy ją *kosztem ubezpieczenia* lub *asekuracji*.

W istocie, aby nie ponieść straty  $C$ , należy na tę sumę ubezpieczyć element, płacąc (za pewien okres) kwotę  $qC$ , gdzie  $q$  oznacza prawdopodobieństwo katastrofy (w tym okresie) pociągającej za sobą straty  $C$ . Tym niemniej w naszym znaczeniu koszt asekuracji nie zależy od tego, czy konstrukcję faktycznie ubezpieczyliśmy. W gospodarce, która nie ma ulegać wstrząsom, środki grupy (2) powinny być wszakże oddzielnie akumulowane, np. w postaci funduszy rezerwowych, ubezpieczeniowych itp. Forma asekuracji, jako społecznego gromadzenia funduszy na pokrycie strat przypadkowych, wchodzi w rachubę, jeśli  $q$  jest małe, co wyklucza indywidualną akumulację środków (ponieważ indywidualnie należałoby dysponować, zamiast  $qC$ , znacznie większą kwotą  $C$ ).

Efektywność ekonomiczna mierzy się więc nie samym kosztem przedmiotowym, lecz sumą  $K + qC$ , zależną od stopnia bezpieczeństwa. Poniesienie tych kosztów zapewnia

<sup>23</sup> Odpowiada on w sensie pojęciowym *wskaźnikowi bezpieczeństwa* konstrukcji według terminologii W. Wierzbieckiego.

ciągłość eksploatacji obiektu, tj. niezależna ekonomicznie od katastrof. Rozwiązanie optymalne otrzymujemy, gdy suma ta stanowi minimum, a więc dla warunku

$$(2.2) \quad K + qC = K + (1 - p)C = \min.$$

Warunek powyższy można uogólniać w różny sposób. Gdy np. rozpatrujemy szereg katastrof pociągających różne koszty  $C$ , to przybiera on postać

$$(2.3) \quad K + \sum_i q_i C_i = \min.$$

Gdy katastrofa wywołuje uszkodzenie, z którego naprawy rezygnujemy, to koszt jej wyrazi się wartością  $C\Delta q$ , gdzie  $\Delta q$  oznacza zwiększenie prawdopodobieństwa katastrofy «pełnej», wywołane uszkodzeniem.

W powyższych wzorach  $q$  i  $p$  oznaczają prawdopodobieństwo zniszczenia resp. niezniszczenia w okresie eksploatacji konstrukcji. Rachunek ekonomiczny można rozwinąć uwzględniając «kapitalizację» nakładów: jeśli przez  $p$  i  $q$  będziemy rozumieli prawdopodobieństwa w czasie jednostkowym (np. jednego roku), to nakłady  $K$ , gdyby nie były zamrożone w konstrukcji, wzrosłyby po  $n$  latach na procencie składanym (tj. po okresie eksploatacji, gdyby były np. złożone w banku) do sumy  $Kr^n$ , gdzie  $r = 1 + \kappa/100$ , a  $\kappa$  oznacza stopę procentową, i analogicznie wpłacone corocznie w wysokości  $qC$  wkłady ubezpieczeniowe dałyby  $qC r(r^n - 1)/(r - 1)$ . Wobec tego warunek ekonomiczny ma postać:

$$(2.4) \quad Kr^n + qC \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} = \min.$$

Warunek ten uwzględnia okoliczność, że nakłady, które muszą być poniesione dopiero w czasie późniejszym, są ekonomicznie korzystniejsze (gdyż narastają w tym czasie na procesie składanym), innymi słowy, wyjaśnia kwestię «rentowności» zaangażowania pracy społecznej w konstrukcję i optymalnego okresu eksploatacji. Jeśli okres eksploatacji jest bardzo długi i można przyjąć  $n \rightarrow \infty$ , to z (2.4) otrzymujemy<sup>24</sup> (dzieląc obustronnie przez  $r^n \rightarrow \infty$ ).

$$(2.5) \quad K + qC \frac{r}{r - 1} = K + qC \frac{100 + \kappa}{\kappa} = \min.$$

Dalsze rozwinięcie tych zależności uzyskamy uwzględniając, że konstrukcja traci na wartości wskutek odpisów amortyzacyjnych i faktu, że staje się przestarzała, a koszty rekonstrukcji lub naprawy obniżają się w miarę postępów technologii, wobec czego kolejne wpłaty  $qC$  zmniejszają się.

Warunki typu (2.2)-(2.5) nazywamy *warunkami ekonomicznymi*. Mogą one mieć także postać odmienną, bardziej złożoną od podanych, zależną od polityki gospodarczej inwestora. Największą trudność sprawia w nich zazwyczaj określenie kosztu katastrofy  $C$ . Tym jednak, którzy chcieliby upatrywać w tej okoliczności nadmierną przeszkodę w stosowaniu teorii probabilistycznej, można odpowiedzieć, że zagadnienia tego rodzaju muszą być i są niemal codziennie rozwiązywane w praktyce ubezpieczeniowej i sądowej.

<sup>24</sup> Formułę tę podał A. M. FREUDENTHAL, [20].

Optymalna wartość stopnia bezpieczeństwa  $q$ , może być wyznaczona w każdym konkretnym przypadku z powyższych warunków ekonomicznych, co szczegółowo omówimy w p. 3. W praktyce jednak często z góry ustalamy  $p$  dla konstrukcji pewnego typu i projektujemy w ten sposób, by zapewnić jej ów ustalony stopień bezpieczeństwa. W tym przypadku zasadniczą sprawą jest jego właściwy dobór.

Dysponujemy w tej mierze kilkoma metodami, które poniżej omówimy:

1. Dobór oparty na przesłankach pozaekonomicznych przy uwzględnieniu takich np. niewymiernych wartości jak życie ludzkie lub skarby kultury; jest to dobór mniej lub więcej dowolny.

2. Dobór bezpośredni, oparty na ocenie prawdopodobieństwa  $p$  wykonanych budowli. Jeśli jakaś konstrukcja zachowuje się dobrze przez dłuższy czas, to można przyjąć, że wykazuje ona wystarczający stopień bezpieczeństwa i obliczywszy dla niej wartość *a priori*  $p$ , można tę samą wielkość przyjąć w projektowanych konstrukcjach analogicznych lub podobnych. Można przypuszczać, że w konstrukcjach o formie wypracowanej drogą długoletniego doświadczenia wartość  $p$  nie będzie odbiegała zbyt od optymalnej. Nie dotyczy to wszakże nowych typów konstrukcji.

3. Dobór przez porównanie prawdopodobieństwa katastrofy. Jeśli istnieją statystyki katastrof pewnego typu konstrukcji, to wartość  $q$  można z nich wziąć bezpośrednio albo, w ich braku, oprzeć się na statystykach katastrof odmiennego typu, lecz o podobnych następstwach (W. WIERZBICKI). Rozumujemy tu następująco: np. dla belki drewnianej nie ma celu żądać większego bezpieczeństwa niż ma je ona zapewnione ze względu na pożary, wobec czego prawdopodobieństwo  $q$  można przyjąć równe prawdopodobieństwu pożaru. Rozumowanie to jest w pewnej mierze arbitralne, możemy bowiem tylko stwierdzić, że prawdopodobieństwo zniszczenia równe jest sumie prawdopodobieństw pożaru i katastrofy o innej przyczynie, z czego nie wynika, iżby te ostatnie powinny być sobie równe. Sposób ten daje wszakże orientację co do rzędu wchodzących w rachubę wielkości. Odmianą tej metody jest porównanie ze statystykami wypadków drogowych<sup>25</sup> lub innych.

4. Dobór przez porównanie skutków ekonomicznych katastrof, stanowiący rozszerzenie metody porównania bezpośredniego (W. WIERZBICKI). Zamiast prawdopodobieństwa  $q$  porównuje się tu koszty  $qC$  i w ten sposób sprowadza się różne katastrofy do wspólnego ekonomicznego mianownika. Można się stąd zorientować, jakie ryzyko strat związane jest z różnymi zdarzeniami przypadkowymi i dostosować do tego  $qC$ , i na tej podstawie, znając  $C$ , wyznaczyć  $q$ . Uwagi krytyczne podane pod (3) pozostają w mocy.

5. Dobór przez porównanie kosztu asekuracji (M. PROT). Metoda ta polega na przyjęciu stosunku  $qC/K$  w wysokości spotykanej w praktyce ubezpieczeniowej. Np. przyjęcie  $qC/K = 1/1000$  prowadzi do następujących wartości  $q$ :

$$\begin{aligned} q &= 10^{-3}, & \text{jeśli } C &= K; \\ q &= 10^{-4}, & C &= 10K; \\ q &= 10^{-5}, & C &= 100K. \end{aligned}$$

<sup>25</sup> Np. ryzyko śmierci w wypadku kolejowym w czasie podróży wynosi we Francji  $0,83 \cdot 10^{-7}$  (S. O. ASPLUND, [3]).



W rzeczy samej, najczęściej obracamy się w ramach powyższych wartości  $q$ , albowiem już prawdopodobieństwo  $10^{-6}$  w życiu codziennym zazwyczaj zupełnie pomijamy.

6. Dobór z warunku ekonomicznego; obliczamy  $p$  w sposób, o którym będzie mowa poniżej (p. 3), i wartość tę stosujemy później dla konstrukcji podobnego typu bez ponawiania rachunków.

Takie szacunkowe obliczenie przeprowadził A. M. FREUDENTHAL, [20], przyjmując

$$(2.6) \quad \begin{aligned} K &= K_0 (1 - c \ln q), \\ C &= C_0 + mK = C_0 + mK_0 (1 - c \ln q), \end{aligned}$$

gdzie  $K_0$  oznacza część kosztu niezależną od  $q$ ,  $c$  współczynnik empiryczny określający koszt zależny od  $q$  (w stosunku do niezależnego),  $C_0$  część kosztu katastrofy niezależną od  $K$  (np. uszkodzenie częściowe, straty materialne wtórne itp.),  $m$  stosunek części zależnej od  $K$  do kosztu elementu  $K$ . Z warunku minimum kosztu (2.5)

$$\frac{dK}{dq} + \frac{qr}{r-1} \frac{dC}{dq} + \frac{Cr}{r-1} = 0$$

otrzymamy po podstawieniu zależności (2.6) i wyliczeniu równanie

$$\frac{r-1}{qr} + m(1 + \ln q) = \frac{C_0 + mK_0}{cK_0},$$

a pomijając drugi wyraz z lewej strony (mały w stosunku do pierwszego)

$$(2.7) \quad q = \frac{cK_0}{C_0 + mK_0} \frac{r-1}{r} = \frac{c}{\beta + m} \frac{r-1}{r},$$

gdzie  $\beta = C_0/K_0$ . Np. dla  $c = 0,0065$ ,  $m = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $r = 1,03$  otrzymamy  $q = 1,58 \cdot 10^{-5}$ .

Np. dla stropów żelbetowych znaleziono empirycznie  $c \approx 0,0075$ . W powyższych wzorach, w odróżnieniu od pracy [20], wprowadzono od razu logarytmy naturalne, a odnośne współczynniki odpowiednio przeliczono. Korzystając ze sposobności prostujemy nieścisłość we wzorze (15) w cytowanej pracy, gdzie mnożnik zamiast  $\log e$  powinien wynosić  $1/\log e$ .

Wprowadzenie bezpośrednich zależności funkcyjnych typu  $K(q)$  i  $C(q)$  nie jest w zasadzie słuszne, ponieważ np.  $K$  nie jest jednoznaczna funkcją  $q$ ; temu samemu  $p$  lub  $q$  odpowiadać bowiem może nieskończenie wiele konstrukcji różnie ukształtowanych o różnym  $K$ . Jeśli jednak zażądamy, by konstrukcja o danym  $p$  odpowiadała warunkowi minimum kosztu, to tenże koszt stanie się jednoznaczna funkcją  $p$  lub  $q$ . Takie więc ujęcie Freudenthala może być uważane tylko za przybliżone. Rozwiązanie ściśle podamy w p. 3.

Powyższe metody, nie oparte bezpośrednio na warunku ekonomicznym, wiążą wprawdzie wielkość  $p$  z prawdopodobieństwami spotykanymi w różnych dziedzinach działalności ludzkiej, nie odpowiadają jednak na pytanie, czy w konkretnym przypadku stopień bezpieczeństwa jest ekonomicznie optymalny (czy opłaci się ponieść większe koszty, by zmniejszyć ryzyko katastrofy lub na odwrót).

### 3. Pojęcia i zależności podstawowe. Warunek bezpieczeństwa

Koszt konstrukcji  $K$  i prawdopodobieństwo  $p$  lub  $q$  zależą od szeregu czynników, które możemy podzielić z grubsza na następujące grupy:

(1) Wielkości statyczne, charakteryzujące obciążenia i sposób ich działania (ciężar własny, obciążenia użytkowe, obciążenia wiatrem i śniegiem, współczynniki dynamiczne wyrażające nagłość obciążenia itd.).

(2) Wielkości charakteryzujące własności mechaniczne materiałów, mianowicie (a) ich własności wytrzymałościowe, (b) ich odkształcalność (stałe sprężystości, plastyczności, parametry reologiczne itp.).

(3) Wielkości geometryczne, charakteryzujące formę i wymiary konstrukcji.

(4) Wielkości charakteryzujące współpracę konstrukcji z podłożem lub pozostałymi elementami ustroju (warunki zamocowania, osiadania itd.).

Wielkości typu (2b) i (4) nie występują w ustrojach statycznie wyznaczalnych.

Warunkiem wytrzymałościowym będziemy nazywali warunek konieczny i dostateczny nie nastąpienia (resp. nastąpienia) katastrofy.

Z punktu widzenia ekonomicznego istota zagadnienia polega na określeniu kosztu katastrofy  $C$ , odpowiadającej właśnie danemu warunkowi wytrzymałościowemu (tzn. zachodzącej w razie jego przekroczenia).

Warunki wytrzymałościowe posiadają z reguły postać nierówności (lub układów nierówności), w których pojawiają się wielkości grup (1-4); w najprostszym ujęciu będą występowały pewne funkcje tych wielkości. Przykładami warunków wytrzymałościowych są nierówności (1.1)-(1.3), gdzie poszczególne symbole mogą oznaczać w ogólności funkcje wymienionych wielkości. Np. dla zależności (1.1) może być  $\sigma = M/W$ ;  $M = gl^2/8$ , a więc warunek wytrzymałościowy ma postać

$$(3.1) \quad \frac{gl^2}{8W} < R.$$

Warunki wytrzymałościowe dotyczą zazwyczaj stanów granicznych odpowiadających pewnym zmianom jakościowym (o charakterze fizycznym) w pracy konstrukcji.

Projektując konstrukcję nie znamy ściśle wielkości grup (1-4), które występują w rzeczywistości i pojawiają się w warunku wytrzymałościowym, zależą one bowiem od szeregu czynników przypadkowych, są więc, z matematycznego punktu widzenia, zmiennymi przypadkowymi. Uwzględniając to i oznaczając zmienne przypadkowe dużymi literami, a realizacje ich, tj. wartości możliwe małymi (jak zazwyczaj w teorii prawdopodobieństwa) zapisujemy warunek wytrzymałościowy ogólnie w postaci

$$(3.2) \quad f(X_1, X_2, \dots) < 0.$$

Niech np. w (3.1)  $X_1 = g$ ,  $X_2 = l$ ,  $X_3 = R$ , podczas gdy  $W$  nie uważamy za zmienną losową, to (3.2) przyjmie postać

$$\frac{X_1 X_2^2}{8W} - X_3 < 0.$$

Zakładamy natomiast, że znane są prawa rozkładu prawdopodobieństwa tych zmiennych, w szczególności prawa różniczkowe, tj. rozkłady gęstości prawdopodobieństwa, ogólnie

$$(3.3) \quad \varphi(x; a_1, a_2, \dots),$$

gdzie  $a_1, a_2, \dots$  oznaczają parametry rozkładu, np. elementarne charakterystyki probabilistyczne w postaci momentów statystycznych odpowiedniego rzędu (w najprostszym przypadku wartości przeciętne i wariancje). W dalszym ciągu będziemy zakładali dla uproszczenia (uogólnienie nie następuje trudności), że rozkłady charakteryzują się w zupełności przez wartość przeciętną  $\bar{X}$  i odchylenie standardowe  $\mu$ , czyli

$$(3.4) \quad \varphi(x; \bar{x}, \mu).$$

Rozkłady muszą być uzyskane na drodze statystycznej bądź w wyniku obliczenia (np. dla naprężenia  $\sigma$ ), bądź wreszcie przyjęte w sposób przybliżony.

Zazwyczaj mamy pewną swobodę w doborze rozkładu prawdopodobieństwa, którego postać może być przesądzona tylko przesłankami teoretycznymi, ponieważ do pewnej próby, tj. serii statystycznej (doświadczalnej), można w zasadzie dobrać różne rozkłady, aczkolwiek z różnym stopniem wiarygodności, co odbija się na wielkości współczynników bezpieczeństwa. Często dla ułatwienia obliczeń decydujemy się na rozkłady prostsze, mimo ekonomicznie mniej korzystnych wyników.

W praktyce (przynajmniej dotychczasowej) nie wprowadzamy w obliczenia bezpośrednio parametrów rozkładów, lecz związane z nimi wielkości *nominalne*, przez które rozumiemy wszelkie wielkości przyjmowane *a priori*, tj. w projekcie, określające rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych przypadkowych; przykładami mogą być marka betonu, wymiar nominalny, klasa tolerancji itp.

Podkreślamy, że przyjęcie wielkości nominalnej stanowi dyrektywę dla wykonawstwa i przesądza o rozkładzie prawdopodobieństwa. Np. każdy beton, wykonany w założeniu, że ma to być beton marki przewidzianej projektem, zaliczamy do jednej zbiorowości (o wspólnym rozkładzie prawdopodobieństwa), aczkolwiek jego faktyczna wytrzymałość może nawet znacznie odbiegać od zazwyczaj spotykanej dla tejże marki. Podobnie podając wymiar nominalny i klasę tolerancji definiujemy odnośny rozkład prawdopodobieństwa itd.

Z punktu widzenia matematycznego możemy rozpatrywać wielkości grup (1-4) jako funkcje przypadkowe odnośnych wielkości nominalnych, charakteryzujące się jednowymiarowymi prawami rozkładu prawdopodobieństwa<sup>26</sup>, innymi słowy, zamiast (3.4) mamy ogólnie

$$(3.5) \quad \varphi(x; x^N),$$

gdzie  $x^N$  oznacza wielkość nominalną. Wobec tego parametry rozkładu (3.4) są funkcjami wielkości nominalnej,  $\bar{x} = \bar{x}(x^N)$ ,  $\mu = \mu(x^N)$  lub ogólniej dwu lub więcej

<sup>26</sup> Jak wiadomo, oznacza to, że rozkłady dla różnych wartości nominalnych możemy rozpatrywać w sposób izolowany, czyli że wartości rzeczywiste zmiennej przypadkowej, odpowiadające różnym wartościom nominalnym są od siebie niezależne.

wielkości nominalnych (np. wymiar jest funkcją przypadkową wymiaru nominalnego i klasy tolerancji). Najczęściej, lecz nie zawsze, wielkość nominalna identyfikuje się z wartością przeciętną,  $x^N = \bar{x}$ . Dotyczy to np. wymiarów, które staramy się uczynić równymi nominalnym. Odchylenie wymiaru przeciętnego, uzyskanego z pomiarów statystycznych, od nominalnego oznacza istnienie źródła błędów systematycznych. Przeciwnie, np. marka betonu oznacza pewną dolną graniczną wytrzymałość, z reguły niższą od przeciętnej. Związek między marką  $R^N$ , a parametrami  $\bar{R}$  i  $\mu_R$  przyjmuje się niekiedy w postaci wzorów typu (1.5) o określonym  $\beta$ .

Możemy mieć do czynienia z czterema typami zależności w myśl następujących dwóch kryteriów: (1) argumenty funkcji przypadkowej, tj. wielkości nominalne zmieniają się w sposób ciągły lub dyskretny, tzn. skokowo, czyli przebiegają kontinuum lub zbiór skończony (ogólniej przeliczalny); (2) sama funkcja przypadkowa może być ciągła lub skokowa, tzn. parametry rozkładu mogą być funkcjami ciągłymi lub skokowymi wielkości nominalnych. Przykładem argumentu skokowego może być marka materiału (każdej marce odpowiada jeden rozkład prawdopodobieństwa wytrzymałości). Przykładem funkcji ciągłej argumentu ciągłego może być pewien wymiar geometryczny. Jego wartość przeciętna jest funkcją ciągłą jego wartości nominalnej. Ta ostatnia przebiega kontinuum lub zbiór przeliczalny, jeśli wprowadzamy tylko wartości zaokrąglone, np. do jednego centymetra. Natomiast odchylenie standardowe wymiaru może być rozważane jako funkcja ciągła bądź skokowa wymiaru nominalnego (jeśli dla wymiarów w pewnym przedziale przyjmuje się stałe  $\mu$ ). Jeśli wreszcie uzależnimy rozkład wymiaru również od klasy tolerancji  $t$ , zmiennej np. skokowo, to może być  $\bar{x} = x^N$ ,  $\mu = x(x^N, t)$ , gdzie  $x^N$  jest argumentem ciągłym,  $t$  skokowym, a  $\mu$  można rozpatrywać jako funkcję ciągłą bądź skokową poszczególnych argumentów. Wielkości zmienne skokowo prowadzą do tablic wartości (o skończonej liczbie elementów), zmienne w sposób ciągły — do odpowiednich wzorów obliczeniowych. Ustalenie powyższych zależności, pozwalających przejść od wielkości nominalnych do parametrów rozkładów, jest pierwszym krokiem przy wprowadzeniu metod probabilistycznych. Jeśli, jak często bywa w obecnej praktyce, zależności te nie są ustalone w sposób jasny lub też dostateczny, to nie ma przejścia od wzorów typu (3.8) do (3.7) (por. niżej), tym samym stopień bezpieczeństwa nie może być jednoznacznie określony.

Przy tych wyjaśnieniach i w założeniu niezależności zmiennych przypadkowych o rozkładach (3.4) lub (3.5) stopień bezpieczeństwa konstrukcji, tj. prawdopodobieństwo spełnienia nierówności (3.2), wyraża się, jak wiadomo z teorii prawdopodobieństwa, całką

$$(3.6) \quad p = \int_{\Omega} \dots \int \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots dx_1, dx_2, \dots,$$

gdzie obszar całkowania  $\Omega$  jest określony nierównością (3.2) lub ogólniej odpowiednim układem nierówności ( $f_1 < 0$ ,  $f_2 < 0$  ...). Po wyznaczeniu powyższej całki otrzymujemy ogólnie

$$(3.7) \quad p = p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots),$$

bądź też

$$(3.8) \quad p = p(x_1^N, x_2^N, \dots).$$

Wypisanie powyższych zależności przy większej liczbie parametrów lub wielkości nominalnych nie następuje trudności. Jeśli pewne zmienne można uważać za nieprzypadkowe, to odnośne  $\mu = 0$ , tj. rozkłady ich można rozważać jako jednopunktowe, innymi słowy zmienne pojawiają się jako parametry.

Jeżeli zmienne przypadkowe nie są niezależne, tj. gdy dopuszczamy ich związki korelacyjne, to gęstość prawdopodobieństwa zmiennej przypadkowej wektorowej  $(X_1, X_2, \dots)$ , np. w założeniu, że niezależne parametry rozkładu redukują się do momentów do rzędu drugiego włącznie, można przedstawić w postaci

$$(3.9) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots; \mu_1, \mu_2, \dots; r_{12}, r_{13}, \dots, r_{23}, \dots),$$

gdzie  $r_{ij}$  oznacza współczynnik korelacji zmiennych  $X_i$  i  $X_j$ . Zamiast (3.6) i (3.7) otrzymujemy więc

$$(3.10) \quad p = \int \dots \int_{\Omega} \varphi(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2, \dots = p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots; \mu_1, \mu_2, \dots; r_{12}, r_{13}, \dots).$$

Tutaj  $r_{ij}$  zależy w ogólności od  $x_i^N$  oraz  $x_j^N$ , tj.  $r_{ij} = r_{ij}(x_i^N, x_j^N)$  lub, najogólniej rozkład (3.9) jest określony przy ustaleniu zespołu wielkości nominalnych

$$(3.11) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots; x_1^N, x_2^N, \dots).$$

Warunki typu (3.7), (3.8), (3.10), określające związek funkcyjny między stopniem bezpieczeństwa i parametrami rozkładów bądź wielkościami nominalnymi, nazywamy *warunkami bezpieczeństwa*. Ustaliwszy z góry  $p$  możemy tak dobrać parametry lub wielkości nominalne [w szczególności, uważając jedną z nich za niewiadomą, przy przyjęciu z góry pozostałych, rozwiązać względem niej równanie typu (3.8)], by osiągnąć ów przewidziany stopień bezpieczeństwa. Zastępując równość np. (3.8) nierównością

$$(3.12) \quad p(x_1^N, x_2^N, \dots) \geq p,$$

otrzymujemy, jak to zwykle bywa w praktyce, warunek konieczny i dostateczny, by stopień bezpieczeństwa był niemniejszy od  $p$ .

Należy z naciskiem podkreślić, że przy projektowaniu operujemy wyłącznie wielkościami nominalnymi, gdyż nie znamy żadnych wartości rzeczywistych dla konstrukcji, której jeszcze nie ma. Dlatego obliczenie statyczne opiera się na warunkach bezpieczeństwa, stosowanych w zakresie wielkości nominalnych, mogących zapewnić bezpieczeństwo jedynie z określonym prawdopodobieństwem (projekt, tj. zespół wielkości nominalnych, jest tylko wytyczną dla realizacji, która mniej lub więcej od niego odbiega). Natomiast warunki wytrzymałościowe typu (3.2) dotyczą zmiennych przypadkowych, tj. obowiązują w zakresie wielkości faktycznych (rzeczywistych). Niejasności w tej mierze nierzadko prowadziły do nieporozumień.

W powyższy sposób można zaprojektować konstrukcję o danym stopniu bezpieczeństwa.

Projektowanie konstrukcji o ekonomicznie *optymalnym* stopniu bezpieczeństwa polega na zastosowaniu warunku ekonomicznego (2.2) lub analogicznego, co wymaga wyrażenia kosztu  $K$  jako funkcji tych samych parametrów co  $p$  [zgodnie z (3.7) i (3.8) itp.]. Ustawiając warunek różniczkowy na ekstremum [np. dla (2.2)] ze względu na parametry bądź wielkości nominalne zmienne w sposób ciągły<sup>27</sup> i przyjmując na przykład, że  $C$  nie zależy od  $K$ , otrzymujemy układ równań

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x_1^N} - C \frac{\partial p}{\partial x_1^N} &= 0, \\ \frac{\partial K}{\partial x_2^N} - C \frac{\partial p}{\partial x_2^N} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy optymalne wartości  $x_1^N, x_2^N, \dots$  wyrażone jako funkcje parametrów (wielkości nominalnych) zmiennych skokowo, tzn. przedstawiających stałe w powyższych równaniach. Podstawiając te funkcje do (2.2) wyrażamy tenże warunek w postaci funkcji zmiennych skokowo i poszukujemy takiego układu tych ostatnich, dla którego osiąga ona minimum. Wstawiając wyznaczone wielkości do (3.8) znajdujemy optymalny stopień bezpieczeństwa (analogiczne równania można ustawić ze względu na parametry rozkładów). Zwracamy uwagę na ogólność metody, która pozwala wyznaczyć ekonomicznie optymalne wartości wszystkich tych wielkości, które nie są przesądzone warunkami zadania (jak np. klasa obciążenia), a więc nie tylko wymiarów, lecz np. marki materiału, optymalnych rozrzutów itd. Np. zmniejszenie rozrzutów wytrzymałości związane jest z polepszeniem jednorodności materiału, co wymaga pewnych nakładów pieniężnych; oczywiście zależność  $K$  od np. odnośnego  $\mu$  musi być znana.

Wywody dotychczasowe można uogólnić. Mianowicie warunek wytrzymałościowy nie zawsze można przedstawić w postaci funkcji (3.2), gdzie podanie rzeczywistych wartości zmiennych pozwala ściśle wyznaczyć wartość funkcji, ustalenie zaś ich rozkładów jest wystarczające dla obliczenia  $p$ . Może to wynikać stąd, że model teoretyczny, a więc sama zależność (nierówność) określająca warunek wytrzymałościowy jest nieściśła, tzn. jej spełnienie (w zakresie wartości rzeczywistych zmiennych) zabezpiecza przed katastrofą tylko z określonym prawdopodobieństwem. Np. warunek (3.1) jest nieściśły w świetle ogólniejszego kryterium wyteżenia uwzględniającego uplastycznienie itd. Ponadto w ramach danego modelu funkcja  $f$  jest niekiedy uproszczona ze względu na zbyt złożoną dla praktyki budowę, wobec czego jej wartość jest tylko przybliżeniem wartości rzeczywistej. Zdajemy sobie z tego sprawę wprowadzając funkcję przypadkową argumentów  $x_1, x_2, \dots$  (oznaczamy ją dużą literą, jak zwykle w teorii prawdopodobieństwa)

$$(3.14) \quad Y = Y(x_1, x_2, \dots),$$

<sup>27</sup> Rzecz jasna dotyczy to tylko tych parametrów, które nie są narzucone warunkami zadania, jak np. rozpiętość konstrukcji, którą przyjmujemy za stałą lub, ściślej, której wartość przeciętną przyjmujemy za stałą.

co oznacza, że dla określonych  $x_1, x_2, \dots$  może ona przybierać różne wartości, czyli jest zmienną przypadkową. Ponieważ  $X_1, X_2, \dots$  są zmiennymi przypadkowymi, mamy funkcję przypadkową zmiennych przypadkowych, określoną dla przyjętego zespołu wartości  $x_1^N, x_2^N, \dots$  dystrybuantą lub gęstością prawdopodobieństwa zmiennej łącznej  $(Y, X_1, X_2, \dots)$

$$(3.15) \quad \psi(y, x_1, x_2, \dots).$$

Rozkład ten możemy również wyrazić wprowadzając prawdopodobieństwo warunkowe zmiennej  $Y$  w założeniu określonych  $x_1, x_2, \dots$ ; np. jeśli te ostatnie są od siebie niezależne, to

$$(3.16) \quad \psi(y, x_1, x_2, \dots) = \varphi_y(y/x_1, x_2, \dots) \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots;$$

rozkład warunkowy  $\varphi_y$  jest łatwiejszy do określenia na drodze statystycznej.

Uwzględniając warunek wytrzymałościowy

$$(3.17) \quad Y < 0$$

otrzymujemy tu zatem

$$(3.18) \quad p = \int_{y < 0} \dots \int \psi(y, x_1, x_2, \dots) dy dx_1 dx_2 \dots = \int_{y = -\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y, x_1, x_2, \dots) dy dx_1 dx_2 \dots.$$

Tutaj  $p$  podobnie jak we wzorze (3.10) jest w ogólności funkcją odnośnych współczynników korelacji, w tym wiążących zmienną  $Y$  z pozostałymi zmiennymi.

Zamiast  $Y$  można wprowadzić nową zmienną przypadkową  $Z$ , połączoną dowolnym (tj. nie wynikającym z rozważań wytrzymałościowych) związkiem funkcyjnym z funkcją  $f$ , tzn. zamiast (3.2) wprowadzić warunek

$$(3.19) \quad y = g[z, f(x_1, x_2, \dots)] < 0,$$

gdzie  $g$  jest funkcją dowolną, z tym że zachodzi związek

$$(3.20) \quad \psi(y, x_1, x_2, \dots) \equiv \psi\{g[z, f(x_1, x_2, \dots)]; x_1, x_2, \dots\} \equiv \chi(z, x_1, x_2, \dots)$$

(jest to metoda matematycznie równoważna poprzedniej).

Najczęściej korzystamy z postaci sumy

$$(3.21) \quad y = f(x_1, x_2, \dots) + z$$

dla warunku (3.17) lub iloczynu

$$(3.22) \quad y = z f(x_1, x_2, \dots)$$

dla warunku o postaci  $Y > 1$ ; zmienne  $z$  przedstawiają tu odpowiednie składniki lub współczynniki poprawkowe.

Możemy zawsze przejść od warunku ściślejszego do uproszczonego, tzn. wyznaczyć drogą teoretyczną rozkład przybliżony  $Y'$  dany za pomocą funkcji (3.2) na podstawie ściślejszego,  $Y$ . Np. na

podstawie znanego rozkładu (3.15) możemy przejść od postaci korelacyjnej do prostszej, funkcyjnej (3.2) przez podanie dystrybuanty zmiennej łącznej  $(Y, Y')$

$$(3.23) \quad \theta(y, y') = \int_{y=-\infty}^y \int_{f(x_1, \dots) < y'} \dots \int \psi(y, x_1, x_2, \dots) dy dx_1 dx_2 \dots$$

lub odnośnej gęstości prawdopodobieństwa

$$(3.24) \quad \vartheta(y, y') = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \int_{f(x_1, \dots) < y'} \dots \int \psi(y, x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

Stąd możemy wyznaczyć np. rozkład korektury  $z = y - y'$  [por. (3.21)]

$$(3.25) \quad \zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(y' + z; y') dy'$$

lub w myśl (3.22) przy  $z = y/y'$

$$(3.26) \quad \zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(zy'; y') |y'| dy'$$

(stosujemy tu znane wzory odpowiednio na rozkład sumy i iloczynu zmiennych przypadkowych). Z kolei możemy obliczyć np. prawdopodobieństwo, że błąd będzie mieścił się w określonych granicach, np.  $|z| < z_0$ , dane całką  $\int_{-z_0}^{z_0} \zeta(z) dz$  lub wyznaczyć odchylenie standardowe  $\mu_z$  itp. Te charakterystyki ścisłości są funkcjami wielkości nominalnych i pozwalają np. ocenić, w jakim zakresie tych ostatnich dany warunek wytrzymałościowy może być stosowany z pożądaną dokładnością.

Bezpośredni rozkład zmiennej  $Y'$  otrzymamy jako odnośny rozkład brzegowy w (3.23).

Analogiczne wzory możemy wyprowadzić, jeśli obydwa warunki mają postać funkcyjną (funkcja  $y'$  może tu zawierać mniej argumentów  $x_1, x_2, \dots$  od funkcji  $y$ ). Zakładamy oczywiście, że znamy rozkład  $\varphi(x_1, x_2, \dots)$  wszystkich argumentów występujących w obu funkcjach. Mamy tu analogicznie do (3.23)

$$(3.27) \quad \theta(y, y') = \int_{\substack{f(x_1, \dots) < y \\ f'(x_1, \dots) < y'}} \dots \int \varphi(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

i stąd  $\vartheta(y, y') = \partial^2 \theta / \partial y \partial y'$ . Rozkład  $z$  możemy bezpośrednio wyznaczyć jako rozkład np. różnicy lub ilorazu funkcji, np. dla  $z = y - y' = f - f'$  mamy

$$(3.28) \quad \zeta(z) = \frac{d}{dz} \int_{f-f' < z} \dots \int \varphi(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

Rozważania powyższe możemy rozszerzyć bez trudności na większą ilość zmiennych  $Z$ , mogących odzwierciedlać różne źródła nieściłości i wprowadzić np. zamiast (3.21) i (3.22) odpowiednio

$$(3.29) \quad y = f(x_1, x_2, \dots) + z_1 + z_2 + \dots,$$

$$(3.30) \quad y = z_1, z_2 \dots f(x_1, x_2, \dots);$$

tutaj np.  $z_1$  może oznaczać poprawkę przy uściśleniu teorii,  $z_2$  przy zwiększeniu dokładności badań doświadczalnych itp. Zmienne  $Z$  mogą w szczególności mieć wartość przeciętną 0 bądź 1 odpo-



wiednio w (3.29) i (3.30), wówczas obejmują nie błędy systematyczne, lecz dodatkowe źródła rozrzutów. Staramy się je tak dobrać, by były w miarę możności nieskorelowane między sobą i z pozostałymi zmiennymi. Rozkład każdej z nich może być analizowany empirycznie na podstawie rozkładów częstości odpowiednio wartości  $y$  rzeczywistej i przybliżonej lub teoretycznie przez podanie kolejnych rozkładów wartości przybliżonej i «uściślonej» typu (3.23). Zmienne  $Z$  (połączone dowolnym związkiem funkcyjnym) wprowadzamy z reguły w tych przypadkach, gdy zależność funkcyjna od odnośnego czynnika nie jest wyraźna.

W oparciu o dotychczasowe wywody zdefiniujemy ważne przy obliczeniach praktycznych (por. p. 7) pojęcie *wielkości krytycznych*, przez które rozumiemy najprawdopodobniejsze w przypadku katastrofy wartości zmiennych przypadkowych. Odpowiadają one maksymalnej gęstości prawdopodobieństwa warunkowego danej zmiennej w założeniu, że katastrofa miała miejsce (tj. prawdopodobieństwa *a posteriori*), czyli identyfikują się z wartością modalną tegoż rozkładu gęstości. Wielkości krytyczne mogą być rozumiane dwojako w zależności od tego, czy rozważamy rozkłady brzegowe, czy też rozkłady zmiennej wielowymiarowej. Wyjaśnimy to na przykładzie warunku wytrzymałościowego (1.1).

Rozważmy dostatecznie liczny zbiór elementów o losowo zmiennej wytrzymałości. Najczęściej występują elementy o wytrzymałości bliskiej przeciętnej (ściślej modalnej), zniszczenie ich jest jednak mało prawdopodobne, gdyż może nastąpić tylko przy nadmiernym, rzadko zdarzającym się wzroście obciążenia. Z drugiej strony, rzadko napotkamy elementy o nadmiernie niskiej wytrzymałości, które mogłyby ulec zniszczeniu przy obciążeniu bliskim przeciętnemu. Najczęściej będą się niszczyły elementy o wytrzymałości niższej, lecz nie nadmiernie, od przeciętnej. Otóż biorąc pod uwagę zbiór elementów, które uległy katastrofie, i badając częstość pojawiania się elementów o pewnej wytrzymałości, dochodzimy do rozkładu brzegowego warunkowego o postaci z reguły skośnej i o wartości modalnej niższej niż w rozkładzie wytrzymałości *a priori* (tj. w rozkładzie odnoszącym się do pełnego zbioru elementów, zarówno tych, które uległy, jak i nie uległy katastrofie). Najczęściej napotkamy elementy o wytrzymałości bliskiej krytycznej  $R_{kr}$  (odchylenia są z reguły niewielkie) i w tym sensie można przepowiedzieć, że  $R_{kr}$  jest tą wytrzymałością, przy której najprawdopodobniej nastąpi zniszczenie.

Rozkład warunkowy (brzegowy) wytrzymałości wyraża się gęstością prawdopodobieństwa

$$(3.31) \quad \varphi'_R(R) = \frac{1}{q} \int_{\sigma > R} \varphi_\sigma(\sigma) \varphi_R(R) d\sigma = \frac{1}{q} \varphi_R(R) \int_R^{\infty} \varphi_\sigma(\sigma) d\sigma,$$

gdzie  $q = 1 - p$ . Przyrównując do zera pochodną względem  $R$  powyższej funkcji  $R$  wyznaczamy wartość krytyczną  $R_{kr}$ . Wartość przeciętna względna (tj. przeciętna wytrzymałość *a posteriori*) wyraża się wzorem

$$(3.32) \quad \bar{R}' = \frac{1}{q} \int_{\sigma > R} R \varphi_\sigma(\sigma) \varphi_R(R) d\sigma dR,$$

w odróżnieniu od wytrzymałości przeciętnej *a priori*

$$\bar{R} = \int R \varphi_R(R) dR.$$

Jak widzimy, wpływ na wartości względne  $R$  wywiera rozkład  $\sigma$ .

Zależności powyższe możemy bez trudności uogólnić i wypisać wzór na rozkład warunkowy (w założeniu katastrofy) zmiennej  $x_k$  (przy założeniu zmiennych niezależnych):

$$(3.33) \quad \varphi'_k(x_k) = \frac{1}{q} \int \dots \int \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n,$$

gdzie całkowanie następuje po obszarze  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ , w czym  $f$  jest funkcją (3.2). Z warunku  $d\varphi'_k/dx_k = 0$  wyznaczamy  $x_{k,kr}$ .

Rozważmy z kolei zbiorowość elementów, które uległy katastrofie i zbiór *par* wartości  $(\sigma, R)$ , z których każda określa punkt na płaszczyźnie i odpowiada pewnemu elementowi. Punkty te będą zagęszczały się wokół punktu o maksymalnej gęstości prawdopodobieństwa zmiennej łącznej dwuwymiarowej  $(\sigma, R)$ ; odnośna para wartości, określająca współrzędne tego punktu, przedstawia poszukiwaną wartość krytyczną  $(\sigma_{kr}, R_{kr})$  w drugim znaczeniu.

W ogólnym przypadku zmiennej wielowymiarowej wyznaczamy wartość krytyczną ustawiając warunek ekstremum dla funkcji podcałkowej we wzorze (3.6) lub analogicznym i uwzględniając te wartości, które leżą w obszarze  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ , tj. w obszarze dopełniającym obszar  $\Omega$ . Ekstremum absolutne funkcji będzie leżało z reguły w obszarze  $\Omega$  [gdyż konstrukcję projektujemy tak, by znajdowała się w obszarze bezpieczeństwa dla najczęściej zdarzających się, tj. najprawdopodobniejszych wartości  $(x_1, \dots, x_n)$ ], zaś poszukiwane ekstremum na brzegu obszaru, tzn. będzie chodziło o punkt brzegowy o największej gęstości prawdopodobieństwa. Odnośne wartości krytyczne  $(x_{1,kr}, \dots, x_{n,kr})$  wyznaczamy z warunku ekstremum dla funkcji podcałkowej (3.6) z uwzględnieniem warunku pobocznego

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Znaczenie wielkości krytycznych w tym drugim rozumieniu polega na tym, że zniszczenie następuje z reguły w ich bliskim sąsiedztwie, wobec czego wystarczy rozpatrywać (w szczególności aproksymować) funkcję rozkładu prawdopodobieństwa w ich otoczeniu.

Wielkości krytyczne są oczywiście funkcjami parametrów rozkładów prawdopodobieństwa bądź też wielkości nominalnych, a więc mogą być z góry obliczone. W odróżnieniu od tzw. wielkości granicznych spotykanych w niektórych teoriach bezpieczeństwa, są one ściśle zdefiniowane z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa, tzn. nie ma przy ich doborze elementu dowolności.

#### 4. Teoria konwencjonalnych miar bezpieczeństwa

Teoria probabilistyczna, której podstawy omówiliśmy w p. 3, w szczególności warunki bezpieczeństwa typu (3.8) lub (3.13) rozwiązują w pełni, w sposób obiektywny i jednoznaczny problem bezpieczeństwa konstrukcji. W tym świetle wprowa-

dzanie konwencjonalnych miar bezpieczeństwa w rodzaju współczynników bezpieczeństwa i naprężeń dopuszczalnych jest nie tylko zbędne, ale teoretycznie sztuczne i zaciemniające zagadnienie, co trzeba wyraźnie podkreślić. Wypływa to z faktu, że miary te wyrosły z pojęć mechaniki budowli, mimo iż celem ich jest ujęcie czynników przypadkowych, co może być prawidłowo rozwiązane tylko na gruncie teorii prawdopodobieństwa.

Miarami tymi wypadnie się nam wszakże zająć, gdyż jak dotąd dominują one w praktyce (m.in. w zaleceniach normatywnych), co wynika z nawyków tradycyjnych oraz mocnego ugruntowania doświadczalnego.

Dotyczy to w szczególności ustrojów typu tradycyjnego, gdzie wartości liczbowe tych miar są wynikiem długoletniego doświadczenia. Natomiast przy wprowadzeniu materiałów nowych (a następuje to w stale rosnącym tempie) ujęcie badań na bazie probabilistycznej (z wprowadzeniem parametrów bezpośrednio charakteryzujących rozrzuty) jest metodą nie tylko teoretycznie uzasadnioną, lecz prowadzącą do najefektywniejszego wykorzystania badań i najoszczędniejszych rozwiązań. Tak samo bezpośredni dobór np. współczynnika bezpieczeństwa wydaje się prostszy od ustalenia stopnia bezpieczeństwa  $p$ , tylko dopóki nie włączymy się w analizę niepewności i rozrzutów, które tenże współczynnik ma pokrywać oraz w rozważania ekonomiczne. Z chwilą gdybyśmy stracili oparcie w możliwości porównania z innymi dotychczasowymi współczynnikami, trudności te wyszłyby na jaw.

Tradycyjne miary nawiązują bezpośrednio do warunku wytrzymałościowego, tj. funkcji (3.2), podczas gdy postać warunków typu (3.8) może, wbrew przyzwyczajeniom konstruktorów, od niej odbiegać. W niniejszym punkcie nie będziemy rozważali tych miar w aspekcie ich historycznego czy nawet obecnego znaczenia, lecz zanalizujemy je na gruncie teorii probabilistycznej oraz podamy metody ich liczbowego, obiektywnego wyznaczania.

Przed wszystkim należy wyodrębnić dwa znaczenia miar bezpieczeństwa, które wyjaśnimy na przykładzie współczynnika bezpieczeństwa typu (1.2),

$$(4.1) \quad s = \frac{R}{P}.$$

Otóż jeśli  $R$  i  $P$  oznaczają wartości rzeczywiste odpowiednio wytrzymałości i obciążenia, to stosunek (4.1) przedstawia współczynnik bezpieczeństwa *rzeczywisty*. Może on być znany tylko po wykonaniu konstrukcji, jeśli pomierzmy jej wytrzymałość i aktualne obciążenie, innymi słowy, może być uważany za miarę bezpieczeństwa *a posteriori*. Natomiast w stadium projektu musimy uważać  $R$  i  $P$  za zmienne przypadkowe, tzn. możemy znać najwyżej ich rozkłady prawdopodobieństwa; tym samym współczynnik  $s$ , będący ich funkcją o postaci (4.1), jest *a priori* zmienną przypadkową o znanym rozkładzie. Tak samo będzie, jeśli współczynnik odniesiemy do obciążenia uważanego za ściśle znane, tj. nominalnego [czyli jeśli we wzorze (4.1) zamiast  $P$  wystąpi  $P^N$ ], gdyż pozostaje zmienna losowa  $R$ . W obu przypadkach warunek *wytrzymałościowy* przyjmuje postać

$$(4.2) \quad s > 1.$$

Jeżeli natomiast utworzymy stosunek

$$(4.3) \quad s^N = \frac{R^N}{P^N},$$

gdzie  $R^N$  i  $P^N$  są wielkościami nominalnymi (np. opartymi na normach), to  $s^N$  przedstawia określoną wartość liczbową, ma więc charakter współczynnika nominalnego. Jeżeli ustrój zaprojektujemy w ten sposób, by współczynnik nominalny był równy (lub ogólniej niemniejszy od) pewnej minimalnej wartości, którą nazwiemy współczynnikiem dopuszczalnym i oznaczymy wskaźnikiem  $s^d$ , to warunek

$$(4.4) \quad \frac{R^N}{P^N} \geq s^d$$

uzyska charakter warunku *bezpieczeństwa*, ponieważ przyjęcie pewnego  $s^d$  określa *a priori* bezpieczeństwo konstrukcji. Zamiast wprowadzać oddzielny współczynnik  $s^d$ , można zastąpić jedną z występujących wielkości nominalnych wielkością dopuszczalną, np. wytrzymałość nominalną naprężeniem dopuszczalnym  $\sigma^d = R^N/s^d$ , dochodząc zgodnie z (1.1) do warunku bezpieczeństwa

$$(4.5) \quad \sigma^N \leq \sigma^d.$$

Zamiast wielkościami nominalnymi można posługiwać się parametrami rozkładów prawdopodobieństwa i np. zdefiniować warunek bezpieczeństwa w postaci

$$(4.6) \quad \frac{\bar{R}}{\bar{P}} \geq s^d,$$

gdzie  $\bar{R}$  i  $\bar{P}$  są wartościami przeciętnymi;  $s^d$  ma tu na ogół wartość odmienną niż we wzorze (4.4).

W ogólności warunki obliczeniowe typu

$$(4.7) \quad f^N(x^d, x^N) \leq 0$$

o postaci umownej, nawiązującej ściśle do funkcji (3.2) (tj. warunku wytrzymałościowego), w których występują wielkości nominalne i dopuszczalne (najogólniej w dowolnej liczbie), nazwiemy warunkami bezpieczeństwa *konwencjonalnymi*. Np. dla warunku wytrzymałościowego (3.1) warunek bezpieczeństwa konwencjonalny może mieć postać

$$\frac{gl^2}{8W} \leq \sigma^d, \quad \text{czyli} \quad \frac{gl^2}{8W} - \sigma^d \leq 0 \quad \text{lub} \quad \frac{gl^2}{8W} \leq \frac{R^N}{s^d} \text{ itp.,}$$

gdzie  $\sigma^d$  może być uważane np. za funkcję skokową  $R^N$  (określoną przez podanie tablicy wartości  $\sigma^d$  dla odnośnych  $R^N$ ).

Podstawowym zadaniem jest taki dobór wielkości dopuszczalnych, by uzyskać założony stopień bezpieczeństwa  $p$ , tzn. spełnić warunek bezpieczeństwa (3.8) lub analogiczny. Ograniczając się dla uproszczenia do współczynnika  $s^d$  postulujemy więc, by spełnienie warunku konwencjonalnego (4.7), który zapiszemy w postaci

$$(4.8.1) \quad s^d = s(x_1^N, x_2^N, \dots)$$

(lub analogicznie z wprowadzeniem zamiast  $x^N$  parametrów rozkładów), pociągało za sobą spełnienie warunku obiektywnego (3.8)

$$(4.8.2) \quad p = p(x_1^N, x_2^N \dots).$$

Funkcje  $s$  i  $p$  są na ogół odmienne i rozwiązując układ równań (4.8) otrzymujemy  $s^d = g(p; x_1^N, x_2^N \dots)$ , tzn. wartość  $s^d$ , którą należy przyjąć dla danego  $p$ , zależy w ogólności od wielkości nominalnych  $x^N$  (np. od formy i wymiarów konstrukcji). Wynika stąd podstawowy wniosek, że wielkości dopuszczalne, czyli miary bezpieczeństwa konwencjonalne, *nie są jednoznaczne*, innymi słowy, zapewniając różnym konstrukcjom ten sam np. *współczynnik bezpieczeństwa*, bynajmniej nie zapewniamy im tego samego *stopnia bezpieczeństwa*.

Jest to zasadnicza, obok umownego określenia, wada miar konwencjonalnych. Wynika stąd pewien nieunikniony chaos, nie ma bowiem bodaj autora, który by nie definiował tych miar w sposób indywidualny (odnosząc je do wielkości nominalnych bądź też parametrów rozkładów prawdopodobieństwa).

Z powyższego widzimy, że wielkość dopuszczalna powinna być oddzielnie obliczana w każdym konkretnym przypadku, co sprowadza się w efekcie do zastosowania warunku (3.8) i niweczy korzyści posługiwania się warunkiem bezpieczeństwa o postaci warunku wytrzymałościowego. Aby tego uniknąć, idziemy w praktyce drogą przybliżoną, przyjmując stałe wartości np.  $s^d$  dla określonej klasy konstrukcji i obciążenia, marki materiału itp. i zestawiając tablicę takich wartości dla odnośnych marek. Od strony teoretycznej zadanie sprowadza się do tego, by  $s^d$  wyrazić jako funkcję wyłącznie wielkości (nominalnych lub parametrów układów) zmiennych skokowo, co pozwala ułożyć tablicę wartości o skończonej liczbie elementów. W tym celu parametry zmienne w sposób ciągły uważamy za zmienne przypadkowe o wspólnych rozkładach prawdopodobieństwa w ramach określonych klas. Rozkłady te wyznaczamy na podstawie częstości występowania konstrukcji o danych cechach nominalnych (np. wymiarach) określonych parametrami ciągłymi (np. wchodzące do wzorów wytrzymałościowych stosunki  $l/h$ ,  $b/h$  itp. występują z określoną częstością w ramach pewnej klasy konstrukcji). Klasy i ich granice określa się oczywiście mniej lub więcej umownie (np. przez podanie granicznych wielkości nominalnych).

Ponumerujemy wielkości nominalne występujące w warunku (3.8) w ten sposób, by począwszy od  $m$ -tej przedstawiały one wielkości zmienne w sposób ciągły. Stałą wartość  $s^d$  dla danej klasy wyznaczmy w ten sposób, by uzyskać założony *przeciętny stopień bezpieczeństwa*

$$(4.9) \quad \bar{p} = \int \dots \int p(x_1^N, \dots; x_{m+1}^N, \dots) \beta(x_{m+1}^N, \dots) dx_{m+1} \dots$$

dla konstrukcji zaliczonych do tejże klasy, obliczanych na podstawie danego  $s^d$ ; tutaj więc całka rozciąga się na wszelkie wartości spełniające równanie (4.8.1);  $\beta$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa zmiennej łącznej  $(X_{m+1}^N, \dots, X_n^N)$ , tj. prawdopodobieństwa, że projekt konstrukcji będzie obejmował określony zespół wielkości nominalnych (zmiennych w sposób ciągły), w szczególności np. wymiarów. Te

ostatnie wykazują na ogół różnorodne związki korelacyjne, dlatego nie możemy ich traktować jako zmienne niezależne. Niekiedy związki te można ująć w postaci funkcyjnej; wówczas całka (4.9) rozciąga się na wartości spełniające odnośne równania, co prowadzi w ogólności do zmniejszenia ilości zmiennych, według których całkujemy.

Z (4.9) otrzymujemy zatem ogólnie

$$(4.10) \quad \bar{p} = \bar{p}(s^d; x_1^N, \dots, x_m^N; \text{par. } \beta);$$

$\bar{p}$  jest więc funkcją wypisanych argumentów i parametrów rozkładu  $\beta$  (w szczególności wartości nominalnych przeciętnych w danej klasie oraz parametrów charakteryzujących rozrzuty), a więc wyłącznie wielkości zmiennych skokowo. Z równania (4.10) można wyznaczyć poszukiwane  $s^d$  dla przyjętego  $\bar{p}$  jako funkcję tychże wielkości i jeśli kolejne wielkości nominalne mogą przyjmować odpowiednio  $n_1, \dots, n_m$  wartości, to wielkości dopuszczalne  $s^d$  można zestawić (dla tej klasy) w tablicę wartości o  $n_1 n_2 \dots n_m$  elementach.

W ten sposób w całej klasie konstrukcji możemy oczekiwać przewidzianej częstości katastrof (określonej prawdopodobieństwem  $1 - \bar{p}$ ), co nie dotyczy jednak konstrukcji indywidualnych (tj. zbioru konstrukcji identycznych w sensie wykonania ich według jednego projektu).

Wywody powyższe można przystosować bezpośrednio do warunku ekonomicznego, np. (2.2), który dla całej rozważanej klasy konstrukcji przyjmie postać

$$(4.11) \quad \int \dots \int (K + qC) \beta(x_{m+1}^N, \dots) dx_{m+1}^N \dots = \min,$$

gdzie  $K$  i  $q$  są funkcjami wielkości nominalnych, a całka przedstawiająca koszt przeciętny rozciąga się na wartości spełniające równanie (4.8.1). Wobec tego równanie

$$(4.12) \quad \frac{\partial}{\partial s^d} \int \dots \int (K + qC) \beta(x_{m+1}^N, \dots) dx_{m+1}^N \dots = 0$$

pozwala wyznaczyć optymalną z punktu widzenia ekonomicznego wartość dopuszczalną  $s^d$ , będącą funkcją parametrów charakteryzujących klasę (tj. rozkład  $\beta$ ) oraz wielkości nominalnych zmiennych skokowo.

Przedstawioną teorię można uogólnić również na wielkości zmienne skokowo, co znajduje zastosowanie, gdy chodzi o wprowadzenie obszerniejszych klas celem zmniejszenia ich ilości i tym samym ilości elementów w tablicy wartości dopuszczalnych. W tym celu całki we wzorach (4.9) i (4.11) należy zastąpić przez odpowiednie sumy wielokrotne, zaś (4.12) przez wyznaczenie (bezpośrednie) układu zmiennych dyskretnych, dla których funkcja (4.12) osiąga minimum. W odniesieniu do zmiennych skokowych wystąpią zamiast  $\beta$  prawdopodobieństwa pojawienia się ich możliwych zespołów w ramach pewnej klasy konstrukcji. W ten sposób w ramach danej klasy pozostanie zróżnicowanie tylko według tych zmiennych skokowych, po których nie całkujemy. W przypadku skrajnym, gdy całkujemy po wszystkich  $x^N$  otrzymujemy w myśl (4.10)  $\bar{p} = \bar{p}(s^d; \text{par. } \beta)$ , tzn. jeden współczynnik bezpieczeństwa dla całej klasy.

Zagadnienie to jak również problemy omówione poniżej można ująć ogólniej pozostawiając przedstawienie w postaci całek, z tym, że należy zastosować ogólniejsze całki Stieltjesa, bądź też wyrazić gęstość prawdopodobieństwa w postaci funkcji impulsowej. Dla zastosowań praktycznych nie jest to jednak potrzebne.

Również rozkład  $\beta$  można rozszerzyć uwzględniając w nim warunek (4.8.1) z możliwymi odchyłkami (jak wiadomo, w praktyce wartości wypadają zazwyczaj nieco niższe od dopuszczalnych); wówczas zmienne nie muszą spełniać oddzielnie równania (4.8.1).

W praktycznym zastosowaniu można uprościć obliczenia i przyjąć rozkład  $\beta$  jednopunktowy, kilkopunktowy lub prostokątny. W pierwszym przypadku zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia  $p$  dla określonej «przeciętnej» konstrukcji i przyjęcia obliczonej wartości dla całej klasy, w drugim zamiast całek wystąpią odpowiednie sumy, w trzecim  $\beta = \text{const}$ , co odpowiada założeniu, że wszelkie zespoły wartości  $x^N$  w ramach danej klasy są równie prawdopodobne.

Gdy projektujemy przy stałym, nie zaś ekonomicznie optymalnym stopniu bezpieczeństwa, dochodzi do zwiększenia kosztów. Do tego samego prowadzi przejście od stopnia bezpieczeństwa indywidualnego  $p$  do przeciętnego  $\bar{p}$  dla całej klasy. Wyłania się tu zagadnienie, jak obszerne mogą być wspomniane klasy, by nie zmniejszać nadmiernie indywidualnego stopnia bezpieczeństwa i nie zwiększać zbytnio kosztów; problemy te można rozwiązać w oparciu o pojęcie odpowiednio bezpieczeństwa w sensie obiektywnym i ekonomicznym (por. p. 2). Rozwiązanie w pierwszym z wymienionych ujęć polega na wyznaczeniu np. gęstości prawdopodobieństwa  $p$  dla danego  $s^d$

$$(4.13) \quad \alpha(p; s^d) = \frac{d}{dp} \int \dots \int \beta(x_{m+1}^N \dots) dx_{m+1}^N \dots,$$

gdzie całkowanie rozciąga się po obszarze określonym nierównością  $p(x_1^N, \dots, x_n^N) < p$  i równocześnie równaniem (4.8.1) bądź nieograniczonym, jeśli  $\beta$  spełnia ten warunek w postaci korelacyjnej. Rozkład  $\alpha$  jest zależny (prócz wypisanych argumentów) od wielkości nominalnych zmiennych skokowo i para metrów rozkładu  $\beta$ . Możemy tu postulować, by np. odchylenie standardowe  $\mu_p$  mieściło się w określonych granicach.

Rozwiązanie na podstawie kryterium ekonomicznego polega na obliczeniu wzrostu kosztów (tj. strat) przy przyjęciu  $p$  odmiennego od optymalnego. Wzrost ten określamy jako różnicę całki (4.11) wyznaczonej dla przyjętego  $s^d$  i sumy  $^{28} K+qC$  obliczonej dla optymalnych  $x^N$  i  $p$ , znalezionych z układu równań (3.13) oraz (3.8). Zakładamy tu, że każdemu zespołowi zmiennych skokowych  $x_1^N, \dots, x_n^N$ , których funkcjami są wymieniona całka oraz suma, odpowiada oddzielnie obliczona wartość  $s^d$ . Rozważania możemy rozszerzyć na zmienne skokowe w sposób wyjaśniony powyżej.

W analogiczny sposób można rozwiązać inne zagadnienie, mianowicie wpływu ścisłości warunku wytrzymałościowego na stopień bezpieczeństwa. Jeśli  $p'$  i  $p$  oznaczają stopień bezpieczeństwa obliczony odpowiednio z warunku przybliżonego i ściślejszego, to gęstość prawdopodobieństwa  $p$  dla danego  $p'$  wyraża się następująco:

$$(4.14) \quad \alpha(p; p') = \frac{d}{dp} \int \dots \int \beta(x_{m+1}^N, \dots) dx_{m+1}^N \dots,$$

gdzie całkujemy po obszarze określonym nierównością  $p(x_1^N, \dots) < p$  i równaniem  $p'(x_1^N, \dots) = p'$  (jeśli konstrukcję wymiarujemy na podstawie ostatniego warunku). Posługując się odpowiednio warunkiem ściślejszym i przybliżonym możemy na podstawie odnośnych układów typu (3.13)

<sup>28</sup> Ogólniej, jeśli całka (4.11) rozciąga się również na zmienne, według których nie różniczkujemy w (3.13) (jak np. na rozpiętość konstrukcji), to jako odjemna pojawi się zamiast sumy całka typu (4.11) po tychże zmiennych.

(względem zmiennych  $x_{m+1}^N$ ) wyznaczyć optymalne  $x_i^N$  w jednym i drugim przypadku, przy czym suma  $K+qC$  wyznaczona w oparciu o warunek ściślejszy uzyskuje dla odnośnych  $x^N$  rzeczywiste minimum. Podstawiając do tejże sumy z kolei  $x^N$  wyznaczone na podstawie warunku przybliżonego otrzymamy wartość większą, a różnica obu wartości będzie miarą strat.

Poniesienie wyższych kosztów wskutek mniej dokładnych obliczeń lub rezygnacji z indywidualnego określenia  $p$  jest uzasadnione, gdy straty zostają skompensowane mniejszym kosztem projektu (wskutek mniej pracochłonnych obliczeń).

Powyższe rozważania nie ulegną zmianie, gdy współczynnik  $s^d$  zastąpimy inną wielkością dopuszczalną (np. naprężeniem dopuszczalnym). Jeśli liczba wielkości dopuszczalnych przekracza 1 — jak np. w metodzie stanów granicznych (por. p. 1.1), gdzie występują współczynniki jednorodności, przeciążenia i warunków ogólnych — to jak widać z układu (4.8), wszystkie one z wyjątkiem jednej mogą być w zasadzie dowolnie przyjęte [por. np. wzory (1.5) i (1.6)], ta jedna natomiast będzie w ogólności funkcją  $p$  i wielkości dopuszczalnych pozostałych. Tak więc wielkości dopuszczalne (np. w metodach wartości granicznych) nie mogą być uważane za niezależne, co potwierdza wadliwość ujęć konwencjonalnych.

Rozwiązanie w oparciu o kryterium ekonomiczne polega na zastosowaniu zależności typu (4.11), gdzie całkowanie rozciąga się na wielkości nominalne lub parametry spełniające warunek konwencjonalny bezpieczeństwa, po czym wyznaczamy optymalne wartości wszystkich  $x^d$  z układu równań typu (4.12), określających pochodne według kolejnych  $x^d$ . Do warunku bezpieczeństwa należy dołączyć ewentualne dalsze równania [w rodzaju (1.5) lub (1.6)], które spełniają wielkości dopuszczalne.

Wywody powyższe wskazują, że jeśli posługujemy się konwencjonalnymi warunkami bezpieczeństwa (nawiązującymi do warunku wytrzymałościowego), to powinniśmy w ogólnym przypadku każdorazowo wyznaczyć  $s^d$  (lub inną konwencjonalną miarę bezpieczeństwa) lub co najmniej różnicować tę wartość, po pierwsze w ramach danej klasy konstrukcji według wartości nominalnych zmiennych skokowo (marek materiału, klas obciążenia itp.), po drugie dla różnych klas konstrukcji, dla których żądamy zazwyczaj odmiennych (ekonomicznie optymalnych) wartości  $p$ . Jeśli stosujemy warunek (4.8.2), to oczywiście różnicowanie pierwsze odpada. Miara konwencjonalna, np.  $s^d$ , stałaby się wszakże jednoznaczną miarą stopnia bezpieczeństwa również przy pewnych szczególnych postaciach funkcji (4.8), gdyby mianowicie  $p = p[s(x_1^N, x_2^N, \dots)] = p(s^d)$ , a więc  $s^d = s(p)$ . Możliwość uzyskania takiej funkcji zależy od typów przyjętych rozkładów prawdopodobieństwa i od postaci warunku wytrzymałościowego. Niech np. warunek ma postać [por. (4.2)]

$$(4.15) \quad s(x_1, x_2, \dots) > 1.$$

Ustalmy  $x_1, x_2, \dots$  na poziomie wartości przeciętnych lub nominalnych i wprowadźmy nowe zmienne przypadkowe  $u_1, u_2, \dots$  zdające sprawę z rozrzutów poszczególnych  $x$  (lub  $z$ , por. p. 3), o stałych, tj. niezależnych od  $\bar{x}$ , wartościach przeciętnych [np.  $\bar{u} = 1$ , lub  $\bar{u} = 0$  w warunkach typu (4.5)] i nadajmy warunkowi wytrzymałościowemu postać

$$(4.16) \quad g[u_1, u_2, \dots, s(x_1^N, x_2^N, \dots)] = g(u_1, u_2, \dots; s^N) > 1,$$



gdzie funkcja  $g(u_1, u_2, \dots)$ , w zasadzie dowolna, jest dobrana z punktu widzenia ułatwiania obliczeń probabilistycznych, nie zaś z rozważań wytrzymałościowych, np.

$$(4.17) \quad u_1 u_2 \dots s(s_1^N \dots) > 1$$

lub

$$(4.18) \quad u_1 + u_2 + \dots f(x_1^N \dots) > 0,$$

gdzie  $f$  jest funkcją (3.2) itp.

Obliczając  $p$  według wzoru (3.6) lub (3.10), gdzie pod całkami występują znane rozkłady zmiennych  $u$ , a obszar całkowania określa nierówność (4.16), otrzymujemy

$$(4.19) \quad p = p(s^N; \mu_1, \mu_2 \dots)$$

(wartości przeciętne  $\bar{u}$ , jako stałe, zgodnie z założeniem, nie pojawiają się). Otrzymujemy tu postulowany jednoznaczny związek  $p$  i  $s^N$  i dla danego  $p$  możemy wyznaczyć  $s^d = s(p)$ ; różnicowanie nastąpi tylko według klas o różnych odchyleniach standardowych  $\mu$ .

Sposób ten, spotykany dość często w literaturze, prowadzi w pewnych przypadkach do prostych wyników, lecz na ogół jest daleki od ścisłości. Mianowicie przyjmuje się tu proste rozkłady zmiennych  $u$ , o stałych  $\bar{u}$ , podczas gdy w istocie są one zależne od rozkładów  $x$  i są funkcjami przypadkowymi zespołu argumentów  $x_1^N, x_2^N, \dots$ .

Możemy wyznaczyć rozkłady zmiennych  $U$ , jeśli poczynimy pewne założenia co do ich związku ze zmiennymi  $x$ . Np. przyjmując, że  $u_k$  odzwierciedla wpływ rozrzutów zmiennej  $x_k$  możemy postulować, zgodnie z postacią (4.18), następujące równości zachodzące w zakresie wszelkich wartości rzeczywistych  $u_k, x_k$  ( $k = 1, 2 \dots$ ):

$$(4.20) \quad f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^N, x_{k+1}, \dots, x_n) + u_k = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n),$$

gdzie  $f$  są funkcjami w warunku wytrzymałościowym (3.2)

lub

$$(4.21) \quad f(x_1^N, \dots, x_k^N, x_{k+1}, \dots, x_n) + u_k = f(x_1^N, \dots, x_{k-1}^N, x_k, \dots, x_n)$$

( $u_k$  odnosi się więc tutaj niejako do  $(k-1)$ -go przybliżenia funkcji  $f$ ) lub jeszcze inaczej

$$(4.22) \quad f(x_1^N, \dots, x_n^N) + u_k = f(x_1^N, \dots, x_{k-1}^N, x_k, x_{k+1}^N, \dots, x_n^N).$$

Analogiczne zależności w postaci iloczynów można napisać dla (4.17). Wyliczając  $u_k$  jako różnicę funkcji z prawej i z lewej strony widzimy, że w pierwszym przypadku  $u_k = u_k(x_1, \dots, x_n)$ , w drugim mamy  $u_k(x_k, \dots, x_n)$ , a w trzecim  $u_k(x_k)$ . Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej łącznej ( $U_1, U_2 \dots$ ) wyznaczamy z zależności

$$(4.23) \quad \vartheta(u_1, u_2, \dots) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \partial u_2 \dots} \int \dots \int_{\substack{u_k(x) < u_k \\ (k=1, 2, \dots)}} \varphi(x_1, x_2, \dots) dx_1, dx_2, \dots$$

Jeśli w szczególności zmienne  $x$  są niezależne, to przy związku (4.22) otrzymujemy również niezależne zmienne  $u$ .

Konkretne zastosowania metod omówionych w niniejszym punkcie zostaną podane w p. 6.

### 5. Zagadnienie obciążeń

W punktach 3 i 4 wyjaśniliśmy w sposób ogólny strukturę teorii bezpieczeństwa. Przejście do konkretnych obliczeń wymaga przyjęcia stosownych rozkładów prawdopodobieństwa i, jako pierwszy krok, ustalenia przesłanek teoretycznych, którym te rozkłady powinny czynić zadość. Przesłanki te są odmienne dla każdej z 4 grup wielkości wymienionych na początku p. 3. Dla wielkości geometrycznych wystarczy przyjąć z reguły rozkłady normalne odpowiadające założeniu, że odchylenia wymiarów są całkowicie przypadkowe; często odchylenia te można w ogóle pominąć, jako nieznaczące w stosunku do innych źródeł rozrzutów. Niekiedy wszakże prowadzą one do rozrzutów tego samego rzędu wielkości (np. odchylenia w usytuowaniu zbrojenia w belkach żelbetowych o niezbyt wielkiej wysokości przekroju).

Rozkłady wielkości wytrzymałościowych ustalamy zazwyczaj drogą doświadczalną w warunkach odbiegających jednak często od rzeczywistych, z którymi staramy się uzgodnić wyniki drogą korelacji. Np. rozkłady wytrzymałości betonu uzyskujemy z reguły z badań na walcach próbnym, mimo iż warunki obciążenia tychże różnią się zwykle od sposobu wyęźnienia betonu w konstrukcji. Są to rozkłady z natury rzeczy asymetryczne (gdyż np. wytrzymałość na ściskanie nie może być ujemna), np. logarytmnormalne lub Pearsona typu III, aczkolwiek niekiedy aproksymuje się je również rozkładami normalnymi.

Teoretyczne określenie tych rozkładów musiałoby wychodzić z analizy zjawisk «lokalnych» i oprzeć się na teorii procesów stochastycznych; doprowadziłoby ono do ujęcia wytrzymałości jako funkcji przypadkowej miejsca (położenia punktu, przekroju itp.) o wielowymiarowym prawie rozkładu i pozwoliłoby uzależnić własności wytrzymałościowe od rozmiarów i formy elementu oraz sposobu obciążenia. Zagadnienia te są zaledwie zapoczątkowane (zagadnienie rozmiarów, teoria ośrodków stochastycznie niejednorodnych) i wchodzą w zakres problematyki wytrzymałościowej, chociaż związek ich z teorią bezpieczeństwa jest bliski, gdyż prowadzą do rozkładów prawdopodobieństwa wytrzymałości.

Ustalenie rozkładów obciążeń, naprężeń, innymi słowy analiza sposobu, intensywności i efektu oddziaływania (mechanicznego) środowiska zewnętrznego<sup>29</sup> wymaga bardziej wszechstronnych rozważań, toteż poświęcamy jej niniejszy rozdział. Jest to zagadnienie niezmiernie istotne, bowiem dokładność obliczenia, chociażby opartego na skomplikowanych teoriach wytrzymałościowych, nie może być większa niż pozwala na to ścisłość analizy obciążeń, o czym zbyt często zwykło się zapominać.

Należy wyodrębnić przynajmniej 4 grupy obciążeń:

(1) Obciążenia o wielkości *określonej*, np. ciężar własny konstrukcji. Odchylenia od wielkości nominalnej mają podobny charakter jak przy wymiarach geometrycznych i mogą być pominięte bądź aproksymowane rozkładem normalnym.

(2) Obciążenia o wielkości *ograniczonej* bądź to z racji przeznaczenia obiektu (np. zbiornik na płyn), bądź reglamentacji urzędowej (dopuszczalne obciążenie

<sup>29</sup> Zaliczają się tu również wielkości grupy (4) (p. 3); oddziaływanie środowiska może bowiem przejawiać się dwojako: w postaci aktywnej, tj. sił (obciążeń) i biernej, tj. przemieszczeń (np. osiadania podpór), wywołujących wtórne reakcje podłoża.

w magazynie, ograniczenie ciężaru pojazdów na moście itp.). Rozkład takiego obciążenia ma postać jak na rys. 2 (linia pełna). Prawdopodobieństwo wystąpienia wielkości bliskiej granicznej,  $P_{\max}$ , jest tu z reguły na tyle znaczne, że pojawienie się jej co najmniej raz w okresie eksploatacji konstrukcji można uważać za pewne. Ściśle biorąc i tu należałoby stosować rozkład nieograniczony (linia kreskowana), odzwierciedlający możliwość użytkowania obiektu niezgodnie z jego przeznaczeniem bądź przekroczenia obciążenia dozwolonego (por. rys. 2 na str. 67).

(3) Obciążenia o wielkości *nieprzewidzianej*, do których prowadzą wszelkie zjawiska meteorologiczne (wiatr, śnieg, temperatura itp.). Charakteryzują się one rozkładami asymetrycznymi (narastającymi od zera wzwyż), nieograniczonymi, gdyż nie jesteśmy w możności ustalić największej wartości zmiennej.

(4) Obciążenia *katastrofalne*, w następstwie klęsk naturalnych (np. wielkie trzęsienia ziemi), których wielkości nie znamy, lecz zakładamy, że powodują one nieuchronnie ruinę konstrukcji. Tutaj więc nie interesuje nas rozkład *wielkości* obciążenia, lecz tylko *pojawienia się* danego zjawiska.

W bardziej zaawansowanej analizie (co prawda dotąd niemal nie rozwiniętej w aspekcie bezpieczeństwa), określenie wielkości obciążenia nie jest wystarczające i trzeba uwzględnić rozkłady innych jeszcze parametrów, charakteryzujących sposób jego działania. Należą do nich w szczególności: w zagadnieniach reologicznych — czas trwania obciążenia, w dynamicznych — szybkość jego ruchu, w zmęczeniowych — liczba cykli, ich amplituda i częstotliwość, w udarowych — energia kinetyczna itd.

Przesłanki teoretyczne rozkładów prawdopodobieństwa obciążeń [z wyjątkiem obciążeń określonych typu (1), których odchylenia są sprawą dokładności wykonawstwa, obliczenia i kontroli] wynikają z analizy ich przebiegu w przestrzeni i czasie i na tych właśnie problemach wypadnie się zatrzymać.

Obciążenia, które mogą się różnić tylko intensywnością (w których wystarczy więc podanie rozkładu tejże) nazywamy za A. M. FREUDENTHALEM, [20], *prostymi*. Przykładami mogą być obciążenie słupa ściskanego, ciągną rozciąganego, siła odśrodkowa w kole zamachowym, naprężenia od temperatury (przy jej równomiernej zmianie) itp. Obciążenia charakteryzujące się, prócz intensywności, takim lub innym rozmieszczeniem w przestrzeni nazywamy *złożonymi*. Należy tu większość obciążeń użytkowych, ruchomych, meteorologicznych itd. Aby uwolnić się od zbyt złożonej analizy zastępujemy obciążenia złożone o rozmieszczeniu przypadkowym umownymi obciążeniami *standardowymi* (z reguły określonymi normatywnie), mianowicie: (a) *Prostymi*; są to obciążenia najczęściej równomierne. (b) *Złożonymi*, lecz zlokalizowanymi w przestrzeni, tj. jak gdyby szeregiem obciążeń prostych. Charakterystycznym przykładem jest obciążenie belki ciągłej wieloprzęsłowej, gdzie ustawiamy obciążenie równomierne o tej samej intensywności w niektórych przęsłach, tzn. w każdym przęsle możliwe są tylko dwa przypadki: albo obciążenie w nim się znajduje, albo nie. (c) *Uproszczonymi* obciążeniami ruchomymi, najczęściej w postaci siły skupionej, odzwierciedlającej np. ruch pojazdu (niekiedy, zwłaszcza w dawniejszych normach, również grupy takich sił lub odcinków obciążenia równomiernego). Elementy stałe (np. określone, ściśle zlokalizowane maszyny) zaliczają

się do obciążeń «określonych», tj. nie podlegają takiej analizie, bądź też, jeśli intensywność obciążenia uważamy za przypadkową, wchodzą do grupy (b). Obciążenia meteorologiczne mogą, w zależności od sposobu ujęcia, wchodzić w każdą z tych grup (najczęściej zastępujemy je obciążeniami prostymi).

Zasadniczym zadaniem staje się tu określenie sposobu zamiany obciążenia rzeczywistego na standardowe i tym samym uwolnienie się od wszelkich czynników przypadkowych prócz intensywności obciążenia. Możliwe są tu dwa sposoby podejścia w zależności od typu danych statystycznych: (1) Wychodzimy z bezpośredniej obserwacji obciążeń, ustalamy pewne (mniej lub więcej umowne) jednostki obciążenia (np. standardowe typy pojazdów) i analizujemy ich sposób rozmieszczenia i przebieg w czasie. Sposób ten znalazł zastosowanie głównie dla obciążeń ruchomych mostów w krajach o dużym ruchu drogowym (zwłaszcza USA). (2) Opieramy się na pomiarach «integralnych», w szczególności przemieszczeń np. ugięć belek, i przypisując je pewnemu typowi obciążenia standardowego, najczęściej prostego, ustalamy zmienność w czasie jego intensywności. Omówimy pokrótce obydwa sposoby ujęcia, przy czym od razu zwracamy uwagę na ich przybliżony charakter wynikający ze sztucznego rozdzielania problemu przestrzennego i czasowego. Teoretycznie prawidłowe rozwiązanie musiałoby bowiem ujmować obciążenia jako funkcje przypadkowe (o wielowymiarowych prawach rozkładu) kilku argumentów określających czas i położenie obciążenia w przestrzeni (przy siłach objętościowych łącznie cztery argumenty, mianowicie czas i trzy współrzędne punktu, przy działających tylko na powierzchnię konstrukcji trzy argumenty).

Ujęcie typu (1) prowadzi przy dostatecznie uproszczonych założeniach do rozkładów dwumiennych (S. O. ASPLUND, [2]) lub rozkładów Poissona (H. K. STEPHENSON, [84]). Przyjmijmy, że obciążenie pasma jezdni na moście składa się z sił skupionych (przedstawiających działanie pojazdów lub ich osi) i zbadajmy rozmieszczenie ich wzdłuż pasma, przy czym na razie nie interesuje nas wielkość samych sił, lecz tylko ich ilość. Przypuśćmy, że najmniejszy odstęp sąsiednich sił (wynikający z długości pojazdów, przyjętej za stałą), wynosi  $s$  i że siły mogą (lecz nie muszą) zaczepiać tylko w punktach odległych od siebie o  $s, 2s, 3s, \dots$  itd. Na paśmie o długości  $l$  może więc zmieścić się najwyżej  $n = l/s$  sił (z zaokrągleniem do liczby całkowitej), w szczególności może ich być  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ . Załóżmy, że prawdopodobieństwo, iż w pewnym momencie na odcinku o długości  $s$  będzie znajdowała się siła, jest znane i wynosi  $p$  oraz oznaczmy  $q = 1 - p$ . Wówczas prawdopodobieństwo  $p_m$ , że na pasmie znajdzie się ściśle  $m$  sił wyrazi się rozkładem dwumiennym

$$(5.1) \quad p_m = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}.$$

Mianowicie prawdopodobieństwo ustawienia lub braku elementu w kolejnych punktach w ściśle określonym następstwie wynosi, jak wykazuje się w teorii prawdopodobieństwa,  $p^m q^{n-m}$ , zaś w dowolnym następstwie wyraża się wzorem (5.1). Jest to zadanie analogiczne do wyciągania z urny kul białych i czarnych (prawdopodobieństwo wyciągnięcia  $m$  kul czarnych z urny o proporcji kul czarnych  $p$ , w serii  $n$  doświadczeń, polegających na wyciągnięciu jednej kuli i wrzuceniu jej

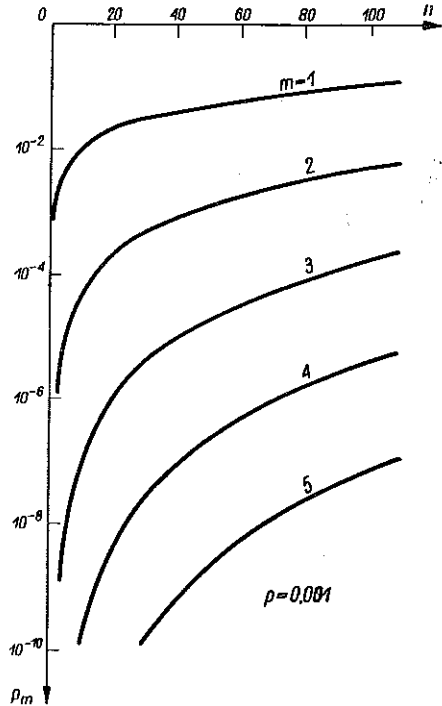
z powrotem). Równoczesne obciążenie kilku, np.  $k$  pasm jezdni (bez względu na kierunek ruchu) można sprowadzić do obciążenia jednego pasma wprowadzając odcinek jednostkowy o długości  $s/k$ .

Prawdopodobieństwo, że na tymże paśmie będzie co najmniej  $m$ , sił, wyniesie

$$(5.2) \quad Q_m = \sum_{r=m}^n p_r = \sum_{r=m}^n \binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

Funkcja skokowa  $p_m(m)$  daje obraz zbliżony do rozkładu normalnego (por. niżej rys. 6), lecz o pewnej asymetrii. W szczególności prawdopodobieństwo obciążenia wszystkich bez wyjątku odcinków ( $m = n$ ) jest przy większej ich liczbie znikome w stosunku do innych rozmieszczeń i wynosi  $p^n$ . Wzoram powyższym można nadać również nieco odmienny sens, jak to czyni S. O. ASPLUND, [2], rozważając niezależnie obciążenie równomiernie rozłożone dla normalnego potoku pojazdów (co jest uzasadnione dla warunków amerykańskich) oraz obciążenie wyjątkowe (ciężkie pojazdy) o rozmieszczeniu określonym powyżej. Te «ciężkie» pojazdy mogą być określone umownie jako pojawiające się z założonym prawdopodobieństwem  $p$ , np.  $p = 1/1000$ , co oznacza, że zbadawszy np. ruch 100 000 pojazdów wybieramy z nich 100 najcięższych i rozważamy ich średni ciężar. Zależność  $p_m$  od  $n$  (będącego miarą długości mostu) przy kolejnych  $m$ , zgodnie z (5.1), przedstawia dla  $p = 0,001$ , według tegoż autora, rys. 3 ( $p_m$  jest naniesione w skali logarytmicznej). Jak widać, we wzorze (5.2) praktycznie tylko pierwszy składnik sumy gra rolę (przy dostatecznie małym  $p$ ), ponieważ dla rosnących  $r$  (przy danym  $n$ ) prawdopodobieństwa  $p_r$  silnie maleją. Zależność stosunku  $m/n$  (będącego miarą średniego obciążenia równomiernego jezdni) od  $n$  dla określonych  $Q_m$  przedstawia rys. 4. Widać z niego, że dla dłuższych mostów obciążenie standardowe należy zredukować, co też czyni się w praktyce.

Związki powyższe możemy ująć nieco ogólniej, w przypadku gdy pojawienie się pojazdu (resp. pojazdu ciężkiego) jest zjawiskiem rzadkim, rezygnując z przyjęcia minimalnej odległości pojazdów  $s$  i rozmieszczenia sił tylko w punktach o tych (stałych) odstępach, zakładając  $s \rightarrow 0$  (a więc  $p \rightarrow 0$ ),  $n \rightarrow \infty$ , przy czym średnia liczba pojazdów na moście  $m$  nie ulega zmianie, tj.  $np = \bar{m} = \text{const}$ . Jak



Rys. 3

wiadomo, wówczas rozkład dwumienny (5.1) dąży do rozkładu Poissona i otrzymujemy

$$(5.3) \quad p_m = \frac{\bar{m}^m e^{-\bar{m}}}{m!}.$$

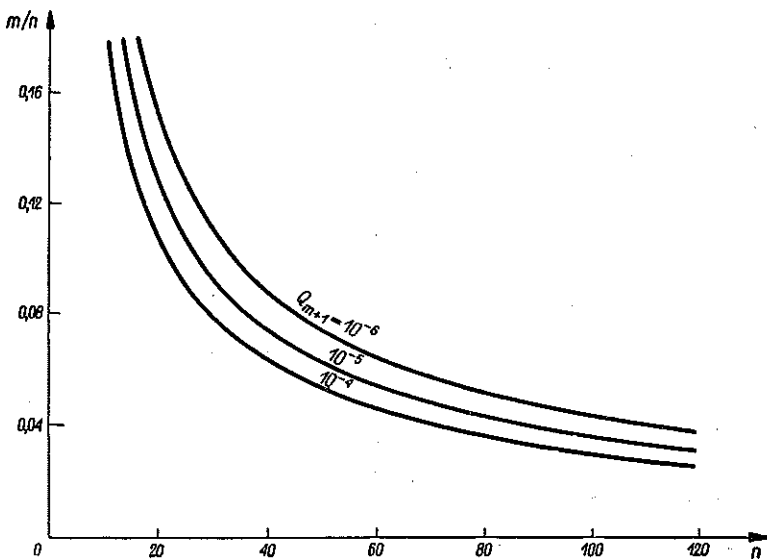
Ową średnią  $\bar{m}$  możemy wyrazić w postaci  $\bar{m} = vl$ , gdzie  $v$  jest średnią liczbą pojazdów na długości jednostkowej (np. 1 km),  $l$  długością pasma, wobec czego

$$(5.4) \quad p_m = \frac{(vl)^m e^{-vl}}{m!}$$

i podobnie jak poprzednio

$$(5.5) \quad Q_m = \sum_{r=m}^{\infty} \frac{(vl)^r e^{-vl}}{r!}.$$

Jeśli w ciągu godziny stanowisko obserwacyjne minęło  $N$  pojazdów z szybkością przeciętną  $v$  km/godz., to  $\mu \approx N/v$  (ściśła wartość odpowiadałaby nieskończenie długiemu czasokresowi).



Rys. 4

Wielkość  $g = m G/l$ , gdzie  $G$  jest średnim ciężarem jednego pojazdu, określa obciążenie standardowe, wobec czego prawdopodobieństwo nieprzekroczenia określonego obciążenia  $g$  przy przejściu od  $r$  naturalnych do dodatnich rzeczywistych, tj. dystrybuanta  $g$  przedstawiona w postaci funkcji ciągłej wyrazi się wzorem

$$(5.6) \quad \Phi(g) = \int_0^{\frac{gl}{G}} \frac{l(vl)^{\frac{gl}{G}} e^{-vl}}{G\Gamma\left(\frac{gl}{G} + 1\right)} dg,$$

a odnośna gęstość prawdopodobieństwa

$$(5.7) \quad \varphi(g) = \frac{l (vl)^{\frac{gl}{G}} e^{-vl}}{G \Gamma\left(\frac{gl}{G} + 1\right)}$$

Wymaga to zastąpienia funkcji  $r!$  funkcją  $\Gamma(r+1) = r!$  ciągłą, określoną również dla  $r$  niecałkowitych. Przy takim uogólnieniu rozkłady Poissona przechodzą w rozkłady gamma, tj. Pearsona III rodzaju (por. p. 6.3) i stąd wypływa ważne znaczenie tych ostatnich w teorii bezpieczeństwa.

Można na odwrót ustalić zależność  $g(l)$  dla danego prawdopodobieństwa  $\Phi$  podobnie jak na rys. 4.

Powyższa analiza dotyczyła w zasadzie wyłącznie ilości pojazdów, a przejście do obciążenia w myśl wzorów (5.6) i (5.7) jest niekiedy zbyt uproszczone. Zachodzi to zwłaszcza, gdy rozważamy wszelkie pojazdy, nie tylko zaś ciężkie, których ciężar z uwagi na standaryzowane typy i maksymalną ładowność pojazdów można względnie dokładnie określić. W ogólności znamy tylko rozkład częstości ciężarów pojazdów, tj. możemy uważać za znaną gęstość prawdopodobieństwa  $\varphi(G)$  ciężaru pojazdu, rozważaną jako funkcję ciągłą. Jeśli na paśmie znajduje się  $m$  pojazdów, to ich łączny ciężar, równy wielkości  $gl$ , gdzie  $g$  jest obciążeniem standardowym (równomiernym), będzie sumą ciężarów przypadkowych  $G_1 + \dots + G_m$ , a więc jego dystrybuanta wyrazi się wzorem

$$\int \dots \int \varphi(G_1) \varphi(G_2) \dots \varphi(G_m) dG_1 dG_2 \dots dG_m.$$

$$\sum_{k=1}^m G_k < gl$$

Ponieważ liczba pojazdów  $m$  jest również zmienną przypadkową o rozkładzie (5.4), niezależną od ich ciężaru, zatem prawdopodobieństwo nieprzekroczenia obciążenia  $g$  (tj. dystrybuantę tegoż jako funkcję  $l$ ) określa zależność

$$(5.8) \quad \Phi(g, l) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(vl)^r e^{-vl}}{r!} \int \dots \int \varphi(G_1) \dots \varphi(G_r) dG_1 \dots dG_r.$$

$$\sum_{k=1}^r G_k < gl$$

Obliczenia można uprościć standaryzując pojazdy i obciążenia, tj. rozważając skończoną liczbę możliwych ciężarów  $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(\omega)}$  pojawiających się z prawdopodobieństwami odpowiednio  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(\omega)}$ . Wówczas całki w powyższych wzorach zostaną zastąpione przez sumy wielokrotne  $\sum \dots \sum p_1 p_2 \dots p_r$ , gdzie  $p_k$  może przybierać  $\omega$  wartości, a sumowanie rozciąga się na te wszystkie iloczyny, dla których  $\sum_{k=1}^r G_k < gl$ . Natomiast uwzględnienie, jak to przyjmuje H. K. STEPHENSON,

[84], wyłącznie równoczesnej obecności na moście  $m$  ciężarów maksymalnych o prawdopodobieństwie  $p_0$  i mnożenie (5.4) przez  $p_0^m$  nie jest ściśle, gdyż ten sam ciężar łączny otrzymamy również przy obciążeniu większą ilością pojazdów lżejszych.

Metoda zamiany obciążenia rzeczywistego na standardowe przez porównanie ciężaru łącznego jest tylko jedną z możliwych. Inną, często stosowaną, jest przyjęcie jako równoważnych obciążeń wywołujących te same momenty zginające maksymalne. Te ostatnie zależą od rozmieszczenia ciężarów wzdłuż pasma i rozwiązanie staje się bardziej skomplikowane, toteż tutaj je pomijamy. Rozważania powyższe dotyczą mostów średniej i dużej rozpiętości. Jeśli długość  $l$  mieści niewiele odstępów jednostkowych  $s$ , to wpływu ich nie można pomijać, tj. należy stosować wzory (5.1), (5.2). Jeśli  $l \leq s$  (a także gdy  $l$  jest niewiele większe od  $s$ ) i w grę wchodzi obciążenia od poszczególnych osi pojazdów, to bardziej racjonalne staje się kryterium momentów, uwzględniające działanie sił skupionych; występuje tu tylko prawdopodobieństwo pojawienia się (jednego) pojazdu o danym ciężarze. Same odstępki  $s$  rosną z szybkością pojazdów  $v$  i dla  $v = 0$  (tj. w postoju) stają się w przybliżeniu równe długości pojazdów. Z drugiej strony, gdy szybkość maleje, zmniejsza się współczynnik dynamiczny, przez który należy mnożyć obciążenie i przy maksymalnym zagęszczeniu (dla  $v = 0$ ) efekt dynamiczny zanika. Wynika stąd potrzeba obliczeń porównawczych, dla różnych  $s$  i różnych współczynników dynamicznych i ustalenia warunków najniekorzystniejszych. Podobnie efekt dynamiczny obciążenia zależy od długości mostu. Jeśli np.  $l \leq s$ , to wjazd pojazdu oznacza od razu pełne (maksymalne) obciążenie, gdy zaś  $l \geq s$ , to obciążenie narasta stopniowo aż do wjazdu wszystkich pojazdów i wymaga (przy stałej szybkości) czasu proporcjonalnego do długości mostu.

Przejdźcie od liczby pojazdów do obciążenia nie pozwala jeszcze odpowiedzieć na zasadnicze pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo nie przekroczenia danego obciążenia ani razu w okresie eksploatacji (resp. prawdopodobieństwo przeciwne, przekroczenia go *co najmniej raz* w tym okresie, czyli jeden lub więcej razy). W tym celu obliczone prawdopodobieństwa trzeba powiązać z *czasem* przez podanie czasu trwania próby elementarnej, tj. czasu przejazdu odcinka jednostkowego  $s$ . W przykładzie z urną jest to czas wyjęcia, stwierdzenia koloru kuli i wrzucenia jej z powrotem, z którego wynika czas trwania serii  $n$  prób, do którego odnosi się prawdopodobieństwo  $p_m$  dane wzorem (5.1). Jeśli czas ten oznaczymy przez  $t_s$ , to prawdopodobieństwo  $p_m$  (5.1) odnosi się do czasu  $t_l = nt_s$ , tj. przeciętnego czasu przejazdu mostu. Przy przejściu do rozkładu Poissona  $s \rightarrow 0$ ,  $t_s \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , lecz  $\lim_{s \rightarrow 0} (s/t_s) = v$

oznacza stałą średnią szybkość pojazdów. Należy wyobrazić sobie, że nieskończenie długie pasmo z określonym rozmieszczeniem unieruchomionych na nim pojazdów (którym rządzą wyprowadzone powyżej prawa prawdopodobieństwa), przesuwa się po moście ze stałą szybkością  $v$ . Łatwo jest określić  $v$  i prawdopodobieństwo (5.4) odnosi się do czasu  $t_l = l/v$ . Analogicznie dystrybuanta (5.8) przedstawia prawdopodobieństwo nie przekroczenia  $g$  w czasie  $t_l$ . Jeśli okres eksploatacji wynosi  $T$ , to  $T/t_l$  przedstawia liczbę mieszczących się w nim odcinków czasowych i prawdopodobieństwo, że w żadnym z nich nie nastąpi przekroczenie  $g$  (tzn. że nie nastąpi ono w okresie eksploatacji), określi wzór

$$(5.9) \quad p = \Phi [(g; l)]^{\frac{T}{t_l}},$$



gdzie  $\Phi$  jest funkcją (5.8). Prawdopodobieństwo elementarne we wzorze (5.1) bądź też  $\nu$  w zależności (5.4) może być rozważane jako funkcja czasu, jeśli bierzemy pod uwagę np. odmienne nasilenie ruchu w różnych porach dnia. Otóż logarytmując obustronnie (5.9) otrzymamy

$$\ln p = \frac{T}{t_i} \ln \Phi,$$

uogólniając zaś ten wynik na  $\Phi$  jako na funkcję czasu  $t$ ,

$$\ln p = \frac{1}{t_i} \int_0^T \ln \Phi(t; g, l) dt,$$

skąd

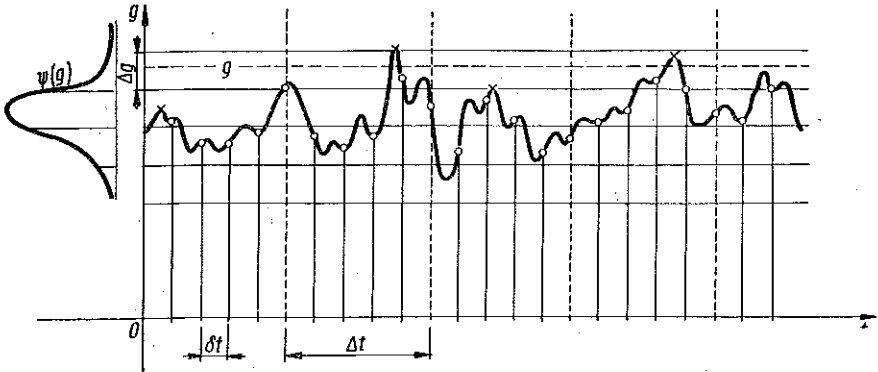
$$(5.10) \quad p = \exp \left[ \frac{1}{t_i} \int_0^T \ln \Phi(t; g, l) dt \right].$$

Wzór ten dla  $\Phi = \text{const}(t)$  przechodzi w (5.9).

Powyższe wywody opierają się na analizie ruchomych (ogólniej, występujących przypadkowo) elementarnych jednostek obciążenia, dotyczą więc tylko pewnych kategorii obciążeń użytkowych, z którymi składają się inne rodzaje obciążeń (np. od śniegu, wiatru itp.). Rozkład prawdopodobieństwa obciążenia wypadkowego należy więc obliczać jako rozkład sumy odnośnych funkcji lub zmiennych przypadkowych, co komplikuje rachunki. Druga podstawowa metoda, «integralna», jest wolna od tych niedogodności, mierząc bowiem np. ugięcia i przypisując je obciążeniu równomiernemu, uwzględniamy w tym ostatnim automatycznie efekt współdziałania wszystkich obciążeń składowych (z którego możemy wyodrębnić tylko obciążenia określone, tj. nieprzypadkowe) i jako jedyna zmienna pozostaje jego intensywność, będąca funkcją przypadkową czasu. Metoda ta wykazuje inną niedogodność, mianowicie pomiary należy powtarzać dla konstrukcji różnego typu i wielkości, wyników nie można bowiem ekstrapolować. Można tu zastosować metodę kombinowaną ustalając powyższą drogą dla danego stopnia bezpieczeństwa  $p$  i danej rozpiętości  $l$  intensywność obciążenia standardowego  $g$  i przechodząc do  $g$  dla innych rozpiętości z równania  $p = \Phi(g, l)$ , gdzie  $\Phi$  jest funkcją (5.8). Oczywiście jest to sposób przybliżony, wymagający znajomości jednostek obciążenia, oparty na hipotezie porównania ciężaru łącznego i ograniczający się w zasadzie do obciążeń ruchomych.

Wyniki pomiarów (np. ugięć) mogą w zależności od typu przyrządów pomiarowych być dane w trojkiej postaci: (1) wykresu ciągłego (przyrządy samorejestrujące, rys. 5); (2) odczytów periodycznych w odstępach czasu  $\delta t$  (punkty oznaczone kółeczkami); (3) wartości maksymalnych w określonych odstępach  $\Delta t$  zazwyczaj związanych z cyklicznością obciążeń, a więc np. w ciągu jednej doby, jednego roku itp. (przyrządy notujące wielkości maksymalne, punkty oznaczone krzyżykami). W dalszych rozważaniach założymy, że rzędne wykresu naniesione są od razu w skali obciążenia  $g$  (np. dla belki wolnopodpartej  $g = 384 EI f/SI^4$ , gdzie  $f$  jest strzałką ugięcia).

Tworząc stosunki liczby punktów (oznaczonych kółeczkami) w kolejnych przedziałach  $\Delta g$  (tj. mieszczących się w kolejnych równoległych pasmach poziomych) do ich liczby całkowitej dla dostatecznie długiego odcinka czasu  $t$  (tzn. do liczby odcinków  $\delta t$  w czasie  $t$ ) dochodzimy do rozkładu częstości, a dla  $t \rightarrow \infty$  gęstości prawdopodobieństwa obciążenia w pewnej chwili  $\psi(g)$ , pokazanego z lewej strony rys. 5. Przy zapisie ciągłym można brać dowolne (dla celów praktycznych dostatecznie małe) odcinki czasu  $\delta t$  i rozważać odnośne punkty wykresu.



Rys. 5

Biorąc pod uwagę interesujący nas przedział czasu  $\Delta t$  i dostatecznie długi okres  $n\Delta t$  i ustalając wartość  $g$ , znajdujemy liczbę  $m$  odcinków  $\Delta t$ , w których nie została ona przekroczona. Stosunek  $m/n$  jest miarą (przybliżoną, ścisłą zaś dla  $n \rightarrow \infty$ ) prawdopodobieństwa nieprzekroczenia  $g$  w okresie  $\Delta t$ . Prawdopodobieństwo to jest funkcją obciążenia  $p = p(g)$ , którą można znaleźć empirycznie powtarzając powyższe postępowanie dla kolejnych wartości  $g$ . Przedstawia ona jednocześnie dystrybuantę obciążenia maksymalnego  $\max g$  w czasie  $\Delta t$ , ponieważ nieprzekroczenie  $g$  (przez żadną wartość obciążenia) jest równoważne nieprzekroczeniu go przez obciążenie maksymalne. Gęstość prawdopodobieństwa  $\pi(g)$  obciążenia maksymalnego w okresie  $\Delta t$  może być otrzymana jako pochodna  $\pi(g) = dp(g)/dg$  bądź też (prościej) bezpośrednio z wykresu (rys. 5) na podstawie częstości pojawiania się punktów «maksymalnych» (oznaczonych krzyżykami) w kolejnych przedziałach  $\Delta g$  czyli w odnośnych pasmach równoległych [w sposób analogiczny jak powyżej znaleźliśmy rozkład  $\psi(g)$ ].

Gdyby  $\Delta t$  było równe okresowi eksploatacji, to funkcja  $p(g)$ , znaleziona np. przez badanie największych w tym okresie obciążeń na obiektach pracujących w analogicznych warunkach, przedstawiałaby bezpośrednio poszukiwaną dystrybuantę.

Dla celów praktycznych ważne jednak jest wnioskowanie o rozkładzie obciążenia maksymalnego w okresie eksploatacji  $T$  na podstawie rozkładu  $\max g$  w okresie  $\Delta t$  z reguły krótszym. Otóż określone powyżej prawdopodobieństwo  $p(g)$  ma analogiczne znaczenie co prawdopodobieństwo elementarne ( $p$  lub  $q$ ) we wzorach (5.1) i (5.2), z tym że problem przestrzenny zostaje zastąpiony czasowym. W szcze-

gólności wzór (5.1) określa prawdopodobieństwo nieprzekroczenia  $g$  w  $m$  odcinkach  $\Delta t$  w ciągu czasu  $T = n\Delta t$ , a wyrażenie

$$(5.11) \quad \Phi(g) = p^n(g)$$

określa, że  $g$  nie zostanie przekroczone w żadnym z  $n$  odcinków  $\Delta t$ , czyli w czasie  $T$ , jest więc dystrybuatną poszukiwanego obciążenia maksymalnego. Zakładamy tu, że odcinki  $\Delta t$  są na tyle długie, że obciążenia w kolejnych interwałach można uważać za niezależne od siebie (gdy więc  $\Delta t$  przedstawia np. dobę lub rok). Nie jest to ściśle, gdyż w pobliżu końców odcinków  $\Delta t$  znajdują się punkty z sąsiednich interwałów dostatecznie bliskie od siebie, by to założenie się nie sprawdzało i należałoby w ogólności rozważać obciążenie jako funkcję przypadkową czasu o wielowymiarowym prawie rozkładu. Dla obliczeń praktycznych podane wzory wystarczają wszakże w zupełności.

Gęstość prawdopodobieństwa obciążenia maksymalnego znajdujemy tworząc pochodną

$$(5.12) \quad \varphi(g) = np^{n-1}(g) \pi(g).$$

Wzór ten można też otrzymać bezpośrednio biorąc pod uwagę, że  $np^{n-1}$  przedstawia prawdopodobieństwo nie przekroczenia  $g$  w  $n-1$  odcinkach  $\Delta t$ , zaś  $\pi(g) dg$  prawdopodobieństwo, że w pozostałym (jednym) przedziale  $\Delta t$  obciążenie maksymalne wynosi  $g$ .

Prawdopodobieństwo, o którym mowa, wynika ze wzoru (5.1), gdzie nie mnożymy przez  $q$ , gdyż nie zakładamy z góry nic o wielkości  $g$  w  $n$ -tym odcinku. Ten sam wynik otrzymamy mnożąc przez  $q$  i wprowadzając prawdopodobieństwo warunkowe  $\pi(g) dg/q$  (w założeniu przekroczenia  $g$  w  $n$ -tym przedziale).

Jeśli obciążenie  $\max g$  ustalimy na dostatecznie wysokim poziomie, tak że przekroczenie go można uważać za zjawisko rzadkie (zdarzające się np. raz na kilka miesięcy lub lat), to przedział  $\Delta t$  można zmniejszyć na tyle, że nie naruszając założenia niezależności obciążeń w kolejnych  $\Delta t$ , dochodzi się do bardzo wysokich  $p$  (resp. małych  $q = 1 - p$ ). Rozkład (5.11) zdąży wówczas do rozkładu Poissona (5.4) dla  $m = 0$  i z zastąpieniem  $l$  przez okres eksploatacji  $T$ , mamy więc

$$(5.13) \quad \Phi(g) = e^{-\nu(g)T},$$

gdzie  $\nu(g)$  oznacza w tym przypadku średnią liczbę przekroczeń  $g$  w czasie jednostkowym ( $\nu = 1/t_0$ , gdzie  $t_0$  jest średnim odstępem czasowym przekroczeń), zależną od ustalonego  $g$ . Funkcję  $\nu(g)$  znajdujemy doświadczalnie obliczając np.  $t_0$  dla kolejnych  $g$  (na wykresie typu rys. 5).

Zagadnienie powyższe można również rozwiązać inną drogą nie wymagającą doświadczalnego określania funkcji  $\nu(g)$  lub  $p(g)$ , opierając się na asymptotycznych rozkładach ekstremalnych (Fishera-Tippetta), przedstawiających rozkłady największej (resp. najmniejszej) wartości w próbie, której liczebność rośnie nieograniczenie. Chodzi więc o rozkład graniczny dla  $n \rightarrow \infty$  największej spośród  $n$  losowo wybranych rzędnych punktów oznaczonych kółeczkami na rys. 5, przy czym wartość  $\delta t$  jest ustalona (tak by zachować niezależność obciążeń), a  $t \rightarrow \infty$ .

Zakładamy oczywiście, że rozkład taki istnieje, co w rozważanych zagadnieniach z reguły zachodzi. Do tej samej postaci dąży rozkład  $\max g$  dla  $t \rightarrow \infty$ , ponieważ próba o nieskończonej liczebności staje się ściśle reprezentatywną. Dla  $n$  skończonego otrzymamy tu zależności (5.11) i (5.12), z tym że  $p(g)$  i  $\pi(g)$  należy zastąpić odpowiednio przez  $\Psi(g)$  i  $\psi(g)$  (por. rys. 5), tzn. przez prawdopodobieństwa  $g$  w pewnej chwili (w określonym doświadczeniu). Wprowadzając kolejno nowe zmienne

$$(5.14) \quad z = n [1 - \Psi(g)],$$

$$(5.15) \quad -u = \ln z = \ln n + \ln \int_g^{\infty} \psi(g) dg,$$

otrzymujemy

$$(5.16) \quad \varphi(g) dg = n \Psi^{n-1} \psi dg = n \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} \psi dg \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n e^{-z} \psi dg = n e^{-z} \psi \frac{1}{dz/dg} dz = \\ = -e^{-z} dz = -e^{-e^{-u}} (-e^{-u}) du,$$

a więc zmienna  $u$  posiada rozkład gęstości asymptotyczny

$$(5.17) \quad \omega(u) = \exp(-u - e^{-u}).$$

Ze wzoru (5.15) widać, że jeśli funkcja  $\psi(g)$  ma charakter wykładniczy, to  $u$  jest liniowo związane z  $g$ , a więc w myśl (5.16)  $\varphi(g)$  można prosto otrzymać z (5.17). W statystyce matematycznej wykazuje się, że rozkład ekstremalny asymptotyczny (5.17) obowiązuje również dla rozkładu normalnego  $\psi(g)$ . Jest to oczywiście rachunek przybliżony, bowiem środek rozkładu przesuwają się, jak widać z (5.15) proporcjonalnie do  $\ln n$ , gdzie  $n = T/\delta t$  jest skończone, natomiast sama postać rozkładu (5.17) jest ścisła tylko dla  $n \rightarrow \infty$  i nie zależy od  $n$ . Jest to zrozumiałe, gdyż przy rozkładzie nieograniczonym  $\psi(g)$  ze wzrastającą liczebnością próby rosną nieograniczenie ekstremalne wartości w próbie, a więc położenie rozkładu  $\varphi(g)$  przesuwają się, natomiast sama postać krzywych gęstości i dystrybucji zdąża do pewnej stałej formy asymptotycznej.

Z braku miejsca pomijamy tu szczegółowe wywody dla różnych typów funkcji  $\psi(g)$ , które Czytelnik znajdzie w bardziej zaawansowanych podręcznikach statystyki matematycznej (w szczególności H. CRAMER, *Mathematical methods of statistics*, 1946; tłumaczona też na język polski).

Wywody powyższe wykazują, że ustalenie miarodajnego rozkładu obciążenia wymaga dość subtelnych rozważań, toteż można tu spotkać ujęcia błędne.

## 6. Obliczenia praktyczne przy jednorodnych rozkładach prawdopodobieństwa

Obliczenia naszkicowane w p. 3 i 4 (w szczególności wyznaczanie  $p$  w myśl wzorów typu (3.6)) dają się łatwo przeprowadzić i prowadzą do czytelnych wyników tylko w niewielu przypadkach, w szczególności gdy (1) wszystkie zmienne przypadkowe mają rozkłady tego samego, możliwie prostego typu (tzn. jednorodne); (2) postać

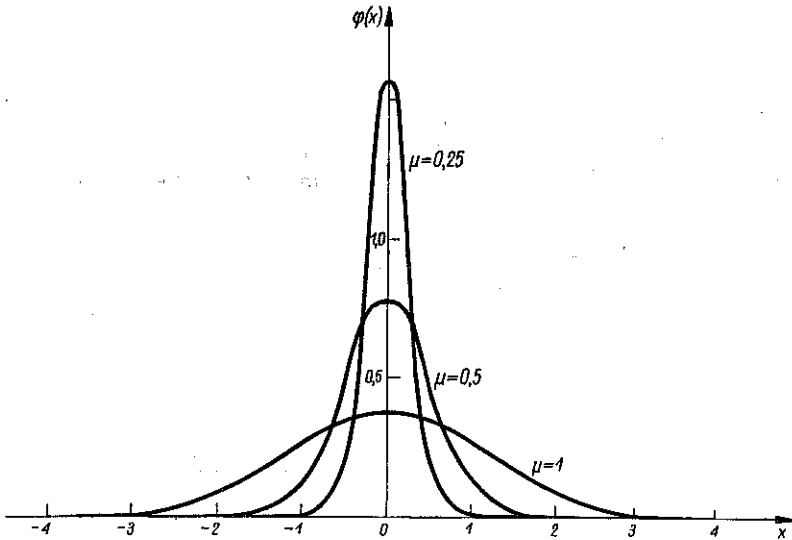
warunku wytrzymałościowego (3.2), tj. funkcji określającej obszar całkowania w (3.6), jest dostosowana do typu rozkładu. Chodzi więc o przypadki, gdy rozkład zmiennej  $Y$  będącej funkcją (3.2) zmiennych  $X$  wyraża się prostą zależnością; wówczas  $p$  można obliczyć bezpośrednio jako prawdopodobieństwo nierówności (3.17). Jeśli tak nie jest, to, jak zobaczymy w p. 7, staramy się wypełnić powyższe postulaty drogą stosownej transformacji rozkładów i zastąpienia warunku wytrzymałościowego ścisłego warunkiem przybliżonym.

Przede wszystkim musimy więc zapoznać się z praktycznymi typami rozkładów i stosownymi dla nich warunkami wytrzymałościowymi oraz wyprowadzić rozkłady odnośnych zmiennych zależnych  $Y$ . Rozpatrzmy kolejno, jako najczęściej stosowane, rozkłady normalne, logarytmnormalne i rozkłady gamma (Pearsona III rodzaju). Pierwszy z nich okazuje się zwłaszcza przydatny w metodzie naprężeń dopuszczalnych, drugi w metodzie współczynników bezpieczeństwa.

**6.1. Rozkład normalny. Metoda naprężeń dopuszczalnych.** Rozkład normalny określa się, jak wiadomo, gęstością prawdopodobieństwa

$$(6.1) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\mu^2} \right],$$

gdzie  $\bar{x}$  oznacza wartość przeciętną zmiennej przypadkowej  $X$ , zaś  $\mu$  odchylenie średnie kwadratowe (standardowe), rys. 6.



Rys. 6

Zwróćmy uwagę, że na podstawie próby o liczebności  $N$  obliczamy te parametry następująco:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}.$$

Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia określonej wartości  $x_0$  wyraża się całką

$$(6.2) \quad p(x < x_0) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\mu^2}\right] dx.$$

Podstawiając nową zmienną

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\mu}$$

otrzymujemy

$$(6.3) \quad p(x < x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(\lambda),$$

gdzie

$$(6.4) \quad \lambda = \frac{x_0 - \bar{x}}{\mu}.$$

Funkcja  $\Phi(\lambda)$  jest funkcją Laplace'a znaną z rachunku prawdopodobieństwa, dla której sporządzono liczne tablice; oto kilka z jej wartości:

$\lambda$	0	1	2	3	4
$p = \Phi(\lambda)$	0,5	0,84134	0,97725	0,99865	0,99997

Posługując się tablicami można na odwrót znaleźć wartość  $\lambda$  odpowiadającą określonemu  $p = \Phi(\lambda)$ :

$$(6.5) \quad \lambda = \lambda_p = \lambda(p).$$

Wielkość  $\lambda_p$  odcina na krzywej Gaussa pole o wielkości  $p$ , innymi słowy, prawdopodobieństwo nie przekroczenia  $\lambda_p$  przy rozkładzie normalnym o parametrach  $\bar{x} = 0$ ,  $\mu = 1$ , (por. rys. 6) wynosi  $p$  (w myśl terminologii teorii prawdopodobieństwa  $\lambda_p$  jest kwantylem rzędu  $p$ ).

Założmy, że wszystkie zmienne przypadkowe występujące w warunku wytrzymałościowym są niezależne i charakteryzują się rozkładami normalnymi. Wówczas wzór (3.6) przybierze na podstawie (6.1) postać

$$(6.6) \quad p = \frac{1}{\mu_1 \dots \mu_n (\sqrt{2\pi})^n} \int_{\Omega} \dots \int \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \bar{x}_k)^2}{2\mu_k^2}\right] dx_1 \dots dx_n.$$

W szczególności, jak wiadomo z teorii prawdopodobieństwa, suma  $n$  zmiennych przypadkowych o rozkładach normalnych wykazuje również rozkład normalny o wartości przeciętnej  $\bar{x} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k$  i odchyleniu standardowym

$$\mu = \sqrt{\sum_{k=1}^n \mu_k^2}.$$

Ogólniej, jeśli mamy funkcję liniową  $x = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k$ , gdzie  $\beta_k$  są stałymi współczynnikami, to  $\bar{x} = \sum_{k=1}^n \beta_k \bar{x}_k$ ,  $\mu = \sqrt{\sum_{k=1}^n \beta_k^2 \mu_k^2}$ . Jeśli więc warunek (3.2), określający obszar  $\Omega$ , ma postać

$$(6.7) \quad \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n < x_0,$$

to przy rozkładach normalnych  $p$  wyraża się wzorem (6.3) z uwzględnieniem wyżej podanych parametrów  $\bar{x}, \mu$  we wzorze (6.4).

Zastosujmy powyższe wywody do warunku  $\sigma - R < 0$  i przyjmijmy, że obie zmienne wykazują rozkłady normalne. Wówczas korzystając z zależności (3.3) i (3.4) dla  $x_0 = 0$  otrzymujemy  $\bar{x} = -\lambda\mu$ . Wobec tego, opierając się na podanym wyżej twierdzeniu o rozkładzie sumy, dochodzimy do zależności

$$\bar{\sigma} - \bar{R} = -\lambda_p \sqrt{\mu_\sigma^2 + \mu_R^2}.$$

Wartość nominalną naprężenia, wyznaczoną w obliczeniu statycznym, przyjmujemy za wartość przeciętną  $\sigma^N = \bar{\sigma}$ , zatem wzór na naprężenie dopuszczalne ma postać

$$(6.8) \quad \sigma^d = \bar{R} - \lambda_p \sqrt{\mu_\sigma^2 + \mu_R^2}$$

i tę wartość należy wstawić do warunku bezpieczeństwa

$$\sigma^N \leq \sigma^d.$$

Zgodnie z wywodami w p. 4, wzorowi (6.8) nie należy przypisywać innego znaczenia niż pewnej definicji naprężenia dopuszczalnego (nominalnego); racjonalność jej polega na ścisłym powiązaniu ze stopniem bezpieczeństwa, czego nie można powiedzieć o określeniach tradycyjnych.

Powyższe wzory stanowią najprostsze rozwiązanie w metodzie naprężeń dopuszczalnych. Jeśli  $\mu_\sigma \ll \mu_R$ , to możemy korzystać z zależności przybliżonej

$$(6.9) \quad \sigma^d = \bar{R} - \lambda_p \mu_R.$$

Przyjmując np. zgodnie z R. Lévi, [45], ostrożnie prawdopodobieństwo katastrofy  $q = 1 - p = 0,5 \cdot 10^{-6}$ , czemu odpowiada  $\lambda_p = 4,89$ , otrzymamy

$$(6.10) \quad \sigma^d = \bar{R} - 4,89 \mu_R.$$

Wartości liczbowe wprowadzamy tylko tytułem przykładu i nie należy ich rozumieć jako zalecenia dla zastosowań praktycznych.

W najprostszym ujęciu pomijamy rozruty wielkości geometrycznych i zakładamy stosowalność prawa superpozycji, jeśli więc obciążenia maksymalne (w okresie eksploatacji, por. p. 5) wykazują rozkłady normalne, to taki sam rozkład posiada naprężenie, będące ich funkcją liniową. Na tym właśnie polega przydatność rozkładów normalnych w metodzie naprężeń dopuszczalnych, ograniczająca się wszakże do zakresu stosowalności prawa superpozycji i kryterium naprężeniowego (1.1), tj. lokalnego. Zazwyczaj  $R$  oznacza  $Q_r$ , tzn. chodzi o osiągnięcie granicy plastyczności

we włóknie skrajnym. W najprostszym przypadku proporcjonalności naprężenia do obciążenia  $P$  otrzymamy  $\mu_\sigma = \alpha \mu_p = (\sigma^d / \bar{P}) \mu_p$  (zakładamy tu, że naprężenie nominalne równe jest ściśle dopuszczalnemu), wobec czego z góry nieznaną wartość  $\sigma^d$  wyznaczamy z uzyskanego równania (6.8).

W przypadku ogólniejszym obciążenie różnicujemy na ciężar stały  $g$  i obciążenie ruchome  $P$  (co najczęściej wystarczy) i uwzględniamy

$$(6.11) \quad \sigma = \sigma_g + \sigma_p = a_g g + a_p p,$$

gdzie  $a$  są współczynnikami zależnymi tylko od wymiarów geometrycznych. Wówczas rozwijamy wzór (6.8) do postaci

$$(6.12) \quad \sigma^d = \bar{R} - \lambda_p \sqrt{\alpha_g^2 \mu_g^2 + \alpha_p^2 \mu_p^2 + \mu_R^2}.$$

Obciążenia  $g$  i  $P$  można traktować jako niezależne zmienne przypadkowe (tj. bez uwzględnienia ich przebiegu w czasie), ponieważ  $g$  ma wartość stałą, niezależną od czasu.

Jak widzimy, w tym przypadku otrzymujemy już nie stałe wartości, lecz wzór na naprężenie dopuszczalne (z uwagi na zmienne współczynniki  $\alpha$ ), które musi być w każdym przypadku wyznaczone, co nie nasręcza zresztą żadnych trudności. Stabelaryzowane muszą być tylko odchylenia  $\mu$  (według klas obciążeń i marek materiałów). Współczynniki  $\alpha$  są funkcjami przede wszystkim stosunku  $l/h$ , np. dla belki prostokątnej mamy  $\sigma = M/W$ , gdzie np.  $M = gl^2/8$  oraz  $W = h^2/6$  (dla  $b = 1$ ), wobec czego  $\sigma = \frac{3}{4} g \left(\frac{l}{h}\right)^2$ ,  $a_g = \frac{3}{4} \left(\frac{l}{h}\right)$  i podobnie dla  $a_p$ .

We wzorze (6.12) wszystkie parametry z wyjątkiem  $a_g$  i  $a_p$  są zmienne skokowo:  $\bar{R}$ ,  $\mu_R$  zmieniają się wraz z marką materiału,  $\mu_g$ ,  $\mu_p$  z klasami obciążenia,  $p$ ,  $\lambda_p$  z klasą konstrukcji. Chcąc więc stabelaryzować  $\sigma^d$  otrzymujemy w myśl wzoru (4.9) z uwzględnieniem (6.3) i (6.12)

$$(6.13) \quad \bar{p} = \iint \Phi \left[ \frac{\bar{R} - \sigma^d}{\sqrt{\alpha_g^2 \mu_g^2 + \alpha_p^2 \mu_p^2 + \mu_R^2}} \right] \beta(a_g, a_p) da_g da_p,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na obszar zmienności  $\alpha$  z uwzględnieniem (6.11), w którym  $\sigma$  zastąpiono przez  $\sigma^d$  a  $g$  i  $P$  przez  $\bar{g}$  i  $\bar{P}$ . Rozwiązując powyższe równanie  $\bar{p} = \bar{p}(\sigma^d)$  względem  $\sigma^d$  (dla założonego  $\bar{p}$ ) otrzymujemy naprężenie dopuszczalne jako funkcję wyłącznie wielkości zmiennych skokowo, tj. uniezależniamy w ten sposób  $\sigma^d$  od wymiarów geometrycznych. Zwracamy uwagę, że przez wprowadzenie współczynników  $\alpha$  uniezależniamy się od rozpiętości  $l$ ; w przeciwnym razie musielibyśmy wprowadzić klasy rozpiętości i w każdej z nich przyjąć rozkład prostokątny tejże. Ponieważ stosunek  $l/h$  zmienia się niewiele w ramach danej klasy konstrukcji, można współczynniki  $\alpha$  przyjąć za stałe, co jest równoważne przyjęciu dla nich rozkładu jednopunktowego, i otrzymać bezpośrednio [zamiast wzoru (6.13)] stałe wartości  $\sigma^d$ . Postępując ostrońie (lecz nieekonomicznie) wybieramy dla każdej z klas takie  $\alpha$ , by otrzymać możliwie niskie  $\sigma^d$ . W przypadku rozkładu



kilkopunktowego (przyjętego na podstawie histogramu częstości występowania np. danej wartości  $l/h$ ) otrzymamy zamiast (6.13)

$$(6.14) \quad \bar{p} = \sum_i \Phi(a_{gi}, a_{pi}) p_i(a_{gi}, a_{pi});$$

sumujemy tu po kilku reprezentatywnych parach wartości  $a$  i rozwiązujemy równanie względem  $\sigma^d$ . Dojdziemy tu jednak najprościej do wyniku bez rozwiązywania równania obliczając wyrażenia pod pierwiastkiem (6.12) dla ustalonych wartości  $a$  oraz przyjmując kilka kolejnych wartości  $\sigma^d$  i na tej podstawie wyznaczając odpowiednie  $\lambda_p$  i stąd  $p$ . Mnożąc znalezione  $p$  przez odnośne prawdopodobieństwo  $p_i$  i sumując otrzymamy wartość przeciętną  $\bar{p}$  (dla danego  $\sigma^d$ ) i wybieramy to  $\sigma^d$ , dla którego jest ona najbliższa obranej. Możemy też na podstawie znalezionych punktów sporządzić wykres  $\bar{p}(\sigma^d)$  i stąd znaleźć  $\sigma^d$  dla przyjętego  $\bar{p}$ .

W literaturze spotykamy często sposób zapisu polegający na wprowadzeniu współczynników zmienności  $\nu_g = \mu_g/\bar{g}$ ,  $\nu_p = \mu_p/P$ ,  $\nu_R = \mu_R/\bar{R}$ . Jeśli współczynniki te, tj. stosunki uważa się za stałe (co jest założeniem ograniczającym), to uwzględniając (6.11) można napisać wzór (6.12) w postaci dogodnej dla obliczeń praktycznych:

$$\sigma^d = \frac{\bar{R}}{\sigma^d} = \frac{1}{1 - \sqrt{\nu_g^2 \left(\frac{\bar{\sigma}_g}{\bar{R}}\right)^2 + \nu_p^2 \left(\frac{\bar{\sigma}_p}{\bar{R}}\right)^2 + \nu_R^2}}.$$

Jak widać, współczynnik bezpieczeństwa naprężeniowy staje się przy takim założeniu zależny tylko od wzajemnego stosunku  $\bar{\sigma}_g : \bar{\sigma}_p : \bar{R}$ , według którego musi być różnicowany. Chcąc stabelaryzować wyniki według kilku wartości tych stosunków postępujemy analogicznie jak wyjaśniliśmy powyżej.

Podsumowując widzimy, że metoda naprężeń dopuszczalnych wymaga dla otrzymania praktycznie przydatnych rozwiązań (1) przyjęcia rozkładów normalnych, (2) zastosowania warunku wytrzymałościowego naprężeniowego (lokalnego), (3) stosowalności prawa superpozycji, (4) określenia obciążeń normowych jako przeciętnych maksymalnych oraz (5) pominięcia rozrzutów wielkości geometrycznych (a także modułów sprężystości w ustrojach hiperstatycznych).

**6.2. Rozkład logarytmnormalny. Metoda współczynników pewności.** Rozkład logarytmnormalny wynika z założenia, że logarytm zmiennej przypadkowej (nie zaś sama zmienna) wykazuje rozkład normalny. Postulujemy więc, że prawdopodobieństwo elementarne wyraża się wzorem

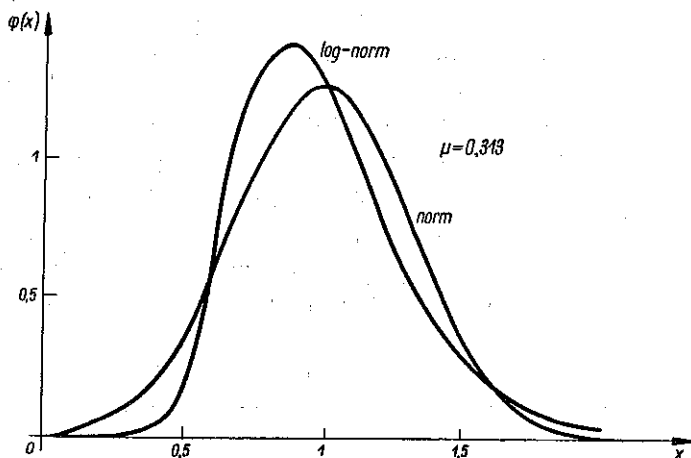
$$\varphi(x) dx = \frac{1}{\tilde{\mu}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \ln \tilde{x})^2}{2\tilde{\mu}^2}\right] d(\ln x),$$

skąd otrzymujemy następujące wyrażenie na gęstość prawdopodobieństwa:

$$(6.15) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\tilde{\mu}x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\ln^2(x/\tilde{x})}{2\tilde{\mu}^2}\right].$$

W powyższym  $\tilde{x}$  oznacza parametr rozkładu logarytmnormalnego o tej własności, że  $\ln \tilde{x}$  jest wartością przeciętną zmiennej  $\ln x$ ;  $\tilde{\mu}$  oznacza odchylenie standardowe zmiennej  $\ln x$ . Parametry powyższe dla odróżnienia od odpowiednich parametrów dotyczących zmiennej  $x$  oznaczono u góry wężykami.

W układzie współrzędnych, w którym odcięte naniesione są w skali logarytmicznej, funkcja powyższa przedstawia krzywą Gaussa, natomiast w zwyczajnym układzie współrzędnych prostokątnych krzywą asymetryczną o wartości modalnej  $\tilde{x}$  (nie



Rys. 7

pokrywającej się z wartością przeciętną), nie wykazującą odciętych ujemnych. Rysunek 7 pokazuje krzywą rozkładu logarytmnormalnego w porównaniu z odpowiadającą jej krzywą rozkładu normalnego.

Przypomnimy pokrótce metody wyznaczania parametrów rozkładu logarytmnormalnego. Mając próbę (tj. pewną serię eksperymentalną) wielkości  $x_1, \dots, x_N$  tworzymy ciąg  $y_1, \dots, y_N$ , gdzie  $y_k = \ln x_k$  i poszukujemy wartości przeciętnej

$$\bar{y} = \ln \tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln x_k = \frac{1}{N} \ln (x_1 x_2 \dots x_N),$$

czyli

$$(6.16) \quad \tilde{x} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \dots x_N},$$

oraz odchylenie standardowe tego szeregu wtórnego

$$(6.17) \quad \tilde{\mu}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \ln^2 \left( \frac{x_k}{\tilde{x}} \right).$$

Obie te wielkości stanowią parametry rozkładu (6.15). Można również określić parametry rozkładu logarytmnormalnego w zwykły sposób, tj. przez momenty statystyczne odpowiednich rzędów. W szczególności moment pierwszego rzędu,  $m_1$ , tj. wartość przeciętną, obliczamy następująco:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\tilde{\mu} \tilde{x} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln x - \ln \tilde{x})^2}{2\tilde{\mu}^2} \right] dx.$$

Podstawiając kolejno nowe zmienne  $y = \ln x$  oraz  $t = (y - \bar{y})/\tilde{\mu}$ , otrzymujemy

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\mu} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ y - \frac{(y - \bar{y})^2}{2\tilde{\mu}^2} \right] dy = \frac{e^{\bar{y}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( \tilde{\mu} t - \frac{t^2}{2} \right) dt = \frac{e^{\bar{y}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} e^{\frac{\tilde{\mu}^2}{2}} = e^{\ln \tilde{x}} e^{\frac{\tilde{\mu}^2}{2}},$$

a stąd ostatecznie

$$m_1 = \tilde{x} e^{\tilde{\mu}^2/2}.$$

Ponieważ  $e^{\tilde{\mu}^2/2} > 1$ , zatem wartość przeciętna jest przesunięta w prawo względem wartości modalnej, co charakteryzuje asymetrię rozkładu, rosnącą wraz z parametrem  $\tilde{\mu}$ .

W analogiczny sposób obliczamy moment centralny stopnia drugiego,  $m_2$ :

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\tilde{\mu} x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln x - \ln \tilde{x})^2}{2\tilde{\mu}^2} \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\mu} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ 2y - \frac{(y - \bar{y})^2}{2\tilde{\mu}^2} \right] dy = \frac{e^{2\bar{y}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( 2\tilde{\mu} t - \frac{t^2}{2} \right) dt = \\ &= e^{2\bar{y}} e^{2\mu^2} = e^{2 \ln \tilde{x}} e^{2\tilde{\mu}^2}, \end{aligned}$$

a stąd

$$m_2 = \tilde{x}^2 e^{2\tilde{\mu}^2}.$$

Na podstawie wzorów na  $m_1$  i  $m_2$  dochodzimy bez trudności do zależności

$$\tilde{x} = \frac{m_1^2}{\sqrt{m_2}}, \quad \tilde{\mu} = \sqrt{2 \ln \frac{\sqrt{m_2}}{m_1}}.$$

Przechodząc do parametrów  $\bar{x}$  i  $\mu$  (tj. do wartości przeciętnej i odchylenia standardowego zmiennej  $x$ ) i podstawiając  $m_1 = \bar{x}$ ,  $m_2 = \bar{x}^2 + \mu^2$  (zależność znana z teorii prawdopodobieństwa) otrzymujemy

$$(6.18) \quad \tilde{x} = \frac{\bar{x}^2}{\sqrt{\bar{x}^2 + \mu^2}},$$

$$(6.19) \quad \tilde{\mu} = \sqrt{2 \ln \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \mu^2}}{\bar{x}}}.$$

Korzystając z zależności (6.16) i (6.17) lub ze wzorów (6.18) i (6.19) (tj. obliczając uprzednio w zwykły sposób wartość przeciętną i odchylenie standardowe) możemy wyznaczyć parametry rozkładu logarytmnormalnego.

Weźmy pod uwagę funkcję

$$(6.20) \quad y = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

gdzie  $x_1, \dots, x_n$  są zmiennymi losowymi o rozkładach logarytmnormalnych,  $c$  jest stałą, zaś  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  dowolnymi liczbami rzeczywistymi (w szczególności dodatnimi lub ujemnymi). Niech  $\tilde{x}_k$  i  $\tilde{\mu}_k$  oznaczają parametry rozkładu zmiennej  $x_k$ . Wówczas  $y$  posiada również rozkład logarytmnormalny o parametrach

$$(6.21) \quad \tilde{y} = c \tilde{x}_1^{\alpha_1} \tilde{x}_2^{\alpha_2} \dots \tilde{x}_n^{\alpha_n},$$

$$(6.22) \quad \tilde{\mu} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \tilde{\mu}_k^2}.$$

Aby to uzyskać, wystarczy zlogarytmować (6.20):

$$\ln y = \ln c + a_1 \ln x_1 + \dots + a_n \ln x_n.$$

Zmienne  $\ln x_1, \dots, \ln x_n$  posiadają rozkłady normalne, wobec czego taki sam rozkład posiada ich funkcja liniowa; wartość przeciętna tej funkcji wynosi

$$\overline{\ln y} = \ln \bar{y} = \ln c + a_1 \overline{\ln x_1} + \dots + a_n \overline{\ln x_n} = \ln c + a_1 \ln \bar{x}_1 + \dots + a_n \ln \bar{x}_n,$$

skąd wynika bezpośrednio (6.21). Analogicznie wariancja funkcji liniowej wyraża się zależnością

$$\tilde{\mu}^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \tilde{\mu}_k^2,$$

gdzie  $\tilde{\mu}_k^2$  jest wariancją zmiennych  $\ln x_k$ , co uzasadnia wzór (6.22).

Zastosujmy powyższe wywody do warunku wytrzymałościowego (4.2) i załóżmy, że współczynnik pewności (rzeczywisty)  $s$  jest zmienną przypadkową o rozkładzie logarytmnormalnym. Warunek wytrzymałościowy (4.2) możemy zapisać w postaci  $-\ln s < 0$ . Ponieważ funkcja powyższa posiada rozkład normalny, zatem wypisana nierówność spełnia się z prawdopodobieństwem  $p$ , jeśli [por. wywód wzoru (6.8)]  $\ln \tilde{s} = \lambda_p \tilde{\mu}_s$ , gdzie  $\lambda_p$  ma znaczenie określone wzorem (6.5), a stąd otrzymujemy dopuszczalny współczynnik pewności

$$(6.23) \quad s^d = e^{\lambda_p \tilde{\mu}_s}$$

oraz warunek bezpieczeństwa

$$(6.24) \quad \tilde{s} = s^N \geq s^d.$$

Przyjmijmy, że  $s$  wyraża się wzorem (1.2), w którym  $P$  i  $R$  wykazują rozkłady logarytmnormalne. Korzystając z (6.22) otrzymujemy wówczas

$$(6.25) \quad s^d = \exp(\lambda_p \sqrt{\tilde{\mu}_P^2 + \tilde{\mu}_R^2}).$$

Zależność ta jest odpowiednikiem wzoru (6.8) dla naprężeń dopuszczalnych. Przyjmując jak tam np.  $\lambda_p = 4,89$  otrzymujemy

$$s^d = \exp(4,89 \sqrt{\tilde{\mu}_P^2 + \tilde{\mu}_R^2}).$$

W przypadku gdy  $s$  wyraża się ogólniejszą zależnością typu (6.20), otrzymujemy

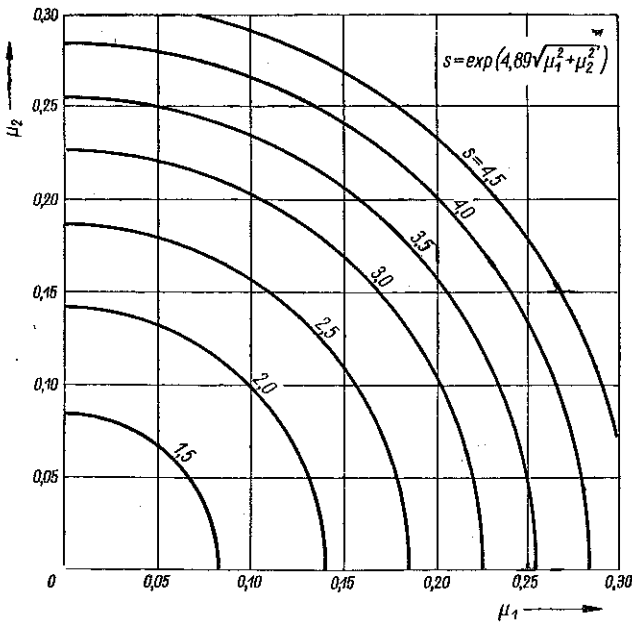
$$(6.26) \quad s^d = \exp\left(\lambda_p \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \tilde{\mu}_k^2}\right).$$

Jeśli w szczególności  $a_k = \pm 1$  (tzn.  $s$  jest, jak to często bywa w praktyce, funkcją ułamkową, w której liczniku i mianowniku występują pewne iloczyny), to

$$s^d = \exp\left(\lambda_p \sqrt{\sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_k^2}\right).$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku rozkładów logarytmnormalnych wielkościami nominalnymi (obliczeniowymi) są w ogólności wartości modalne zmiennych, nie zaś przeciętne [por. wzory (6.18), (6.19)].

Dla ułatwienia obliczeń R. LÉVI, [45], podaje wykres odpowiadający wzorowi (6.25) przy  $\lambda_p = 4,89$ , pozwalający na podstawie dwóch znanych wielkości  $\tilde{\mu}_1$  i  $\tilde{\mu}_2$  wyznaczyć  $s$  (rys. 8). Wartości  $s$  wypisane są na odpowiednich okręgach. Z wy-



Rys. 8

kresu tego można korzystać również przy większej liczbie składników  $\tilde{\mu}$ . Np. dla czterech wartości znajdujemy najpierw dwa okręgi odpowiadające kolejno wartościom np.  $\tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2$  oraz  $\tilde{\mu}_3^2 + \tilde{\mu}_4^2$ . Okręgi te odcinają na osiach współrzędnych punkty, na podstawie których wyznaczymy z kolei okrąg «wypadkowy» i odpowiadającą mu wartość  $s$ . Z wykresu widać, że małe wielkości  $\tilde{\mu}$  mają znikomy wpływ na wartość  $s$  w porównaniu z wielkościami większymi, toteż w obliczeniach praktycznych z reguły wystarczy uwzględnić tylko niewiele zmiennych, charakteryzujących się największymi rozrzutami. Dotyczy to także wzorów typu (6.8) lub (6.12).

Omówimy jeszcze pewną ważną praktycznie własność rozkładów logarytmnormalnych. Otóż często zakładamy, że odchylenie standardowe jest proporcjonalne do wartości przeciętnej, czyli że współczynnik zmienności

$$(6.27) \quad v = \frac{\mu}{x}$$

ma wartość stałą. Uwzględniając to we wzorach (6.18) i (6.19) otrzymujemy

$$(6.28) \quad \tilde{x} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{1+v^2}},$$

$$(6.29) \quad \tilde{\mu} = \sqrt{\ln(1+v^2)}.$$

Widzimy więc, że parametr  $\mu$  jest wielkością stałą, a wyrażenie (6.26) przyjmuje postać

$$(6.30) \quad s^d = \exp \left\{ \lambda_p \sqrt{\ln [(1+\nu_1^2)^{\alpha_1^2} (1+\nu_2^2)^{\alpha_2^2} \dots]} \right\};$$

w szczególności dla  $\alpha_k = \pm 1$

$$s^d = \exp \left\{ \lambda_p \sqrt{\ln [(1+\nu_1^2) (1+\nu_2^2) \dots]} \right\}$$

Jak widzimy,  $s^d$  nie zależy tu od wielkości nominalnych (zmiennych w sposób ciągły). Jeśli np. obciążenie określonego elementu konstrukcji (w ramach prawa superpozycji) wynosi  $aP$ , gdzie  $a$  jest pewnym wyrażeniem zależnym od wymiarów geometrycznych, to  $\nu = a\mu/a\bar{P} = \mu/\bar{P}$  nie zależy od  $a$  i  $s^d$  zachowuje stałą wartość. Pozwala to na niemal natychmiastowe rozwiązanie wielu zagadnień praktycznych. Niech np.  $M = gl^2/8$ ,  $Q = M/W'$ ,  $W' = bh^2/4$  ( $Q$  oznacza granicę plastyczności oraz  $W'$  wskaźnik wytrzymałości z uwzględnieniem pełnego uplastycznienia przekroju) i niech warunek wytrzymałościowy ma postać  $s = W' Q/M > 1$ . Wówczas

$$s^d = \exp \left\{ \lambda_p \sqrt{\ln [(1+\nu_p^2) (1+\nu_Q^2) (1+\nu_l^2)^4 (1+\nu_b^2) (1+\nu_h^2)^4]} \right\}$$

dla warunku bezpieczeństwa  $\tilde{W}' Q/\tilde{M} \geq s^d$  [w myśl (6.21) i (6.24)].

Podsumowując stwierdzamy, że rozkłady logarytmnormalne wymagają warunku wytrzymałościowego w postaci jednomianu i ustalenia wielkości nominalnych normowych i obliczeniowych na poziomie wartości modalnych. Prowadzą one w sposób naturalny do współczynników bezpieczeństwa (gdyż te są pewnymi ilorazami), podobnie jak rozkłady normalne prowadziły do naprężeń dopuszczalnych. Obliczenia są tu jeszcze prostsze, a przy tym teoretycznie poprawniejsze, gdyż rozkłady obejmują tylko wartości jednego znaku.

**6.3. Rozkłady gamma i beta.** Rozkład *gamma* czyli Pearsona typu III o początku w początku układu współrzędnych i o parametrze  $m$  charakteryzuje się gęstością prawdopodobieństwa

$$(6.31) \quad \varphi(x) = \frac{e^{-x} x^{m-1}}{\Gamma(m)},$$

a w uogólnieniu

$$(6.32) \quad \varphi(x) = \frac{\beta^m e^{-\beta x} x^{m-1}}{\Gamma(m)},$$

gdzie  $m > 0$ ,  $\beta > 0$ . Rozkład *beta* pierwszego rodzaju, zaliczający się do rozkładów Pearsona typu I, ma gęstość prawdopodobieństwa

$$(6.33) \quad \varphi(x) = \frac{x^{m-1} (1-x)^{n-1}}{B(m, n)},$$

przy czym ograniczamy się do  $m > 0$ ,  $n > 2$ . Rozkład *beta* drugiego rodzaju, czyli Pearsona typu VI, o dodatnich parametrach  $m$ ,  $n$  posiada gęstość prawdopodobieństwa

$$(6.34) \quad \varphi(x) = \frac{x^{m-1}}{B(m, n) (1+x)^{m+n}}.$$

Rozkłady te zostały wprowadzone przez K. PEARSONA jako rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x - x_0}{Ax^2 + 2Bx + C};$$

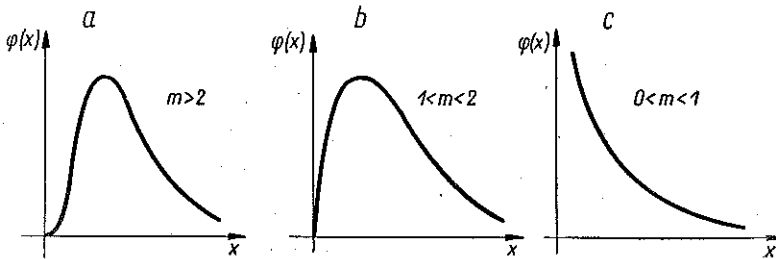
w zależności od wyróżnika  $AC - B^2$  otrzymuje się 12 typów rozwiązań. Jest to jednak wyprowadzenie o charakterze formalnym, podczas gdy istotne znaczenie mają założenia probabilistyczne prowadzące do poszczególnych typów rozkładów.

Funkcje  $\Gamma$  i  $B$  wyrażają się jak wiadomo całkami

$$(6.35) \quad \Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-1} dx,$$

$$(6.36) \quad B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx,$$

a postaci funkcji (6.31) lub (6.32) kolejno dla  $m > 2$ ,  $1 < m < 2$ ,  $0 < m < 1$  są przedstawione na rys. 9. Podobny przebieg wykazują krzywe (6.33) odpowiednio



Rys. 9

dla  $m > 2$ ,  $1 < m < 2$ ,  $0 < m < 1$ , z tym że z prawej strony są ograniczone i osiągną oś  $x$  dla  $x = 1$ . Również taką formę mają wykresy funkcji (6.34) zdążając znowu asymptotycznie do osi  $x$ . Parametry powyższych rozkładów wyrażają się w prosty sposób przez wartość przeciętną i odchylenie standardowe:

dla rozkładu (6.31)

$$(6.37) \quad m = \bar{x};$$

dla rozkładu (6.32)

$$(6.38) \quad \beta = \frac{\bar{x}}{\mu^2}, \quad m = \frac{\bar{x}^2}{\mu^2} = \frac{1}{\nu^2},$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem zmienności, a stąd  $\bar{x} = m/\beta$ ;

dla rozkładu (6.33)

$$(6.39) \quad m = \left(\frac{\bar{x}}{\mu}\right)^2 (1 - \bar{x}) - \bar{x},$$

$$n = \frac{\bar{x}(1 - \bar{x})^2}{\mu^2} - (1 + \bar{x});$$

wreszcie dla rozkładu (6.34)

$$(6.40) \quad m = \left( \frac{\bar{x}}{\mu} \right)^2 (1 + \bar{x}) + \bar{x},$$

$$n = \frac{\bar{x} (1 + \bar{x})}{\mu^2} + 2.$$

Znaczenie rozkładów Pearsona, zwłaszcza rozkładu gamma, wynika z ich uzasadnienia teoretycznego (w p. 5 widzieliśmy to w stosunku do obciążeń; podobne uzasadnienie istnieje dla rozkładów wytrzymałości, traktowanej jako wytrzymałość najslabszego ogniwa), a także z kilku twierdzeń ułatwiających ich praktyczne zastosowanie. Podajemy tu najważniejsze z nich bez uzasadnienia, które Czytelnik znajdzie w podręcznikach teorii prawdopodobieństwa: (1) Suma zmiennych niezależnych o rozkładach gamma (6.31) o parametrach odpowiednio  $m_1, m_2, \dots$  wykazuje również rozkład gamma o parametrze  $\sum m_i$ . (2) Iloraz zmiennych niezależnych o rozkładach gamma i parametrach dla dzielnej  $m$ , dla dzielnika  $n$ , ma rozkład beta drugiego rodzaju o parametrach  $m$  i  $n$ . (3) Jeśli niezależne zmienne  $x$  i  $y$  wykazują rozkłady gamma o parametrach kolejno  $m$  i  $n$ , to zmienna  $x/(x+y)$  posiada rozkład beta pierwszego rodzaju o parametrach  $m$  i  $n$ . (4) Iloczyn zmiennej o rozkładzie beta pierwszego rodzaju o parametrach  $m, n$  i zmiennej niezależnej o rozkładzie gamma o parametrze  $m+n$  charakteryzuje się rozkładem gamma o parametrze  $m$ . Odpowiednie, ewentualnie wielokrotne, zastosowanie tych twierdzeń pozwala w prosty sposób rozwiązać szereg zagadnień teorii bezpieczeństwa.

Wyjaśnimy to na przykładzie warunku wytrzymałościowego

$$(6.41) \quad s = \frac{R}{\sigma} > 1.$$

( $s$  jest współczynnikiem bezpieczeństwa naprężeniowym).

Niech  $R$  i  $\sigma$  wykazują rozkłady (6.32) o parametrach odpowiednio  $\beta_R, m_R, \beta_\sigma$  i  $m_\sigma$ , które można wyznaczyć na podstawie wartości przeciętnych i odchyłeń standardowych z wyżej podanych wzorów. Wprowadzając zmienne  $R' = \beta_R R$  i  $\sigma' = \beta_\sigma \sigma$  otrzymujemy dla tychże rozkłady (6.31), a dla ich ilorazu  $s' = R'/\sigma' = s (\beta_R/\beta_\sigma)$ , w myśl twierdzenia (2), rozkład (6.34),

$$(6.42) \quad \varphi'(s') = \frac{(s')^{m_R-1}}{B(m_R, m_\sigma) (1+s')^{m_R+m_\sigma}},$$

i przechodząc do zmiennej  $s$  [tj. od różniczki prawdopodobieństwa  $\varphi'(s') ds'$  do  $\varphi(s) ds$ ]

$$(6.43) \quad \varphi(s) = \frac{\beta_R^{m_R} \beta_\sigma^{m_\sigma} s^{m_R-1}}{B(m_R, m_\sigma) (\beta_\sigma + \beta_R s)^{m_R+m_\sigma}}.$$



Stopień bezpieczeństwa  $p$ , obliczamy następująco:

$$(6.44) \quad p = \int_1^{\infty} \varphi(s) ds = \int_{\beta_R/\beta_\sigma}^{\infty} \varphi'(s') ds' = \int_{\delta}^1 \frac{t^{m_R-1} (1-t)^{m_\sigma-1}}{B(m_R, m_\sigma)} dt = \\ = \frac{B(m_R, m_\sigma) - B_\delta(m_R, m_\sigma)}{B(m_R, m_\sigma)} = \frac{B_\vartheta(m_\sigma, m_R)}{B(m_\sigma, m_R)},$$

gdzie

$$(6.45) \quad B_\delta(m_R, m_\sigma) = \int_0^\delta t^{m_R-1} (1-t)^{m_\sigma-1} dt, \\ B_\vartheta(m_\sigma, m_R) = \int_0^\vartheta t^{m_\sigma-1} (1-t)^{m_R-1} dt$$

przedstawiają funkcję beta niezupełną (czyli funkcję Eulera drugiego rodzaju), przy czym

$$(6.46) \quad \delta = \frac{\beta_R}{\beta_\sigma + \beta_R}, \quad \vartheta = 1 - \delta = \frac{\beta_\sigma}{\beta_\sigma + \beta_R}.$$

Ostatnią całkę we wzorze (6.44) otrzymaliśmy ze wzoru (6.42) przez podstawienie  $t = s'/(1+s')$  oraz skorzystaliśmy ze znanych, łatwych do sprawdzenia zależności

$$(6.47) \quad B_\delta(m, n) = B(n, m) - B_{1-\delta}(n, m), \\ B(m, n) = B(n, m).$$

Jeżeli współczynniki zmienności  $\nu$ , a stąd parametry  $m$ , uważamy za stałe, to w myśl (6.44)  $p$  jest funkcją tylko zmiennej  $\delta$  lub  $\vartheta$  i na odwrót np.  $\vartheta = \vartheta(p) = = \vartheta_p$ , wobec czego z (6.38) i (6.46) otrzymujemy

$$(6.48) \quad \sigma^a = \bar{\sigma} = \frac{\vartheta_p}{1 - \vartheta_p} \left( \frac{\mu_\sigma}{\mu_R} \right)^2 \bar{R},$$

$$(6.49) \quad s^a = \frac{\bar{R}}{\sigma} = \frac{1 - \vartheta_p}{\vartheta_p} \left( \frac{\mu_R}{\mu_\sigma} \right)^2.$$

Funkcje beta zupełna i niezupełna są stabelaryzowane (tablice Pearsona) i określenie  $\vartheta_p$  dla przyjętego  $p$  nie nastrocza trudności, stąd zaś w myśl powyższych wzorów wyznaczamy naprężenie dopuszczalne lub dopuszczalny współczynnik bezpieczeństwa (naprężeniowy). Oczywiście wielkości obliczeniowe (nominalne) powinny być tu równe odpowiednim wartościom przeciętnym. Wzory (6.48) i (6.49) mają analogiczne znaczenie jak (6.8) lub (6.25), a  $\vartheta_p$  jak  $\lambda_p$  w tychże wzorach, należy wszakże pamiętać, że tutaj  $\vartheta_p$  zależy od  $\nu_\sigma$  i  $\nu_R$ , można je więc uważać za stałe tylko w ramach określonych klas konstrukcji, materiałów, obciążeń itp.

Wywody powyższe można bez trudności uogólnić na przypadek, gdy naprężenie jest funkcją liniową obciążeń, np. gdy wyraża się wzorem (6.11). Jak bowiem widać

z (6.38), parameter  $m$  nie ulega zmianie przy pomnożeniu zmiennej przez stałą; wobec tego w myśl twierdzenia (1)  $m_\sigma = m_g + m_p$  i  $\vartheta_p = \vartheta_p(m_g + m_p, m_R)$ . Z tą zmianą wzory (6.48) i (6.49) pozostają w mocy i otrzymujemy warunek bezpieczeństwa

$$(6.50) \quad \alpha_g \bar{g} + \alpha_p \bar{P} \leq \frac{\vartheta_p}{1 - \vartheta_p} \frac{\alpha_g^2 \mu_g^2 + \alpha_p^2 \mu_p^2}{\mu_R^2} \bar{R}.$$

Przyjmując odpowiednio rozkłady beta i gamma i korzystając z twierdzeń (1) do (4) możemy rozwiązać szereg praktycznych zagadnień, gdzie warunek wytrzymałościowy nie ogranicza się tylko do postaci funkcji liniowej (jak przy rozkładach normalnych) lub jednomianu (jak przy logarytmnormalnych).

### 7. Metody przybliżone

Jeśli rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych (niezależnych) nie są jednorodnie lub jeśli funkcja w warunku wytrzymałościowym (3.2) ma postać nieodpowiednią, tj. nie prowadzącą do prostego rozkładu zmiennej zależnej, to całki typu (3.6) nie dają się na ogół obliczyć w sposób elementarny i uciekamy się do metod przybliżonych. Wszystkie te metody sprowadzają się w zasadzie do: (1) przyjęcia odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa bądź stosownej ich transformacji, (2) zastąpienia warunku wytrzymałościowego warunkiem przybliżonym o postaci dostosowanej do typu rozkładów, przy czym najczęściej chodzi tu o linearyzację funkcji (3.2). Linearyzacja ta może być przeprowadzona w różny sposób, np. w otoczeniu wartości przeciętnych, wartości modalnych, krytycznych itp. W zależności od połączenia tych lub innych spośród wymienionych założeń otrzymujemy szereg metod przybliżonych.

W najprostszych metodach przybliżonych przyjmujemy jako znane jedynie pewne parametry rozkładów zmiennych  $x$  (nie czyniąc żadnych założeń co do formy rozkładów) np. wartości przeciętne  $\bar{x}$  i odchylenia standardowe  $\mu$  i na tej podstawie obliczamy takie same parametry zmiennej zależnej, tj. funkcji (3.2). Przyjmując *ex post* określoną postać rozkładu wyjściowego wyznaczamy prawdopodobieństwo  $p$ . Jeżeli w szczególności warunek wytrzymałościowy jest funkcją liniową  $y = \sum_k a_k x_k + b$ , to jak wiadomo,  $\bar{y} = \sum_k a_k \bar{x}_k + b$ ,  $\mu_y^2 = \sum_k a_k^2 \mu_k^2$ , niezależnie od postaci rozkładów. Przyjmując, że zmienna  $Y$  ma rozkład normalny, możemy więc stosować wzory z p. 6.1, w szczególności [por. (6.8)]

$$(7.1) \quad \bar{y} + \lambda_p \mu_y = \sum_k a_k \bar{x}_k + b + \lambda_p \sqrt{\sum_k a_k^2 \mu_k^2} \leq 0$$

będzie naszym warunkiem bezpieczeństwa. Byłby on ścisły, gdyby rozkłady zmiennych  $X$  były normalne. Jeśli funkcja (3.2) nie jest liniowa, to możemy ją rozwinąć w szereg potęgowy np. w otoczeniu wartości przeciętnych, zatrzymując wyraz liniowy

$$(7.2) \quad y \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 (x_1 - \bar{x}_1) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_0 (x_2 - \bar{x}_2) + \dots,$$

gdzie  $\partial f/\partial x$  są obliczone dla wartości przeciętnych  $\bar{x}$ , co oznaczono wskaźnikiem 0. Tutaj otrzymujemy więc

$$a_k = \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0, \quad b = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) - \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0 \bar{x}_k,$$

czyli w myśl (7.1) przybliżony warunek bezpieczeństwa ma postać

$$(7.3) \quad f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) + \lambda_p \sqrt{\sum_k \mu_k^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0^2} \leq 0.$$

Znak równości odpowiada tu wartości  $p$ , a znak nierówności wartości niemniejszej od  $p$ . Metoda linearyzacji była rozwinięta przez A. R. RZANICYNA, [82].

Zamiast linearyzacji warunku bezpieczeństwa możemy obliczyć parametry  $\bar{y}$ ,  $\mu_y$  (lub inne stosowne), obierając odpowiednie rozkłady zmiennych. Niech np. warunek wytrzymałościowy ma postać funkcji wymiernej.

$$(7.4) \quad \frac{\sum_i a_i x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \dots}{\sum_j b_j x_1^{\beta_{j1}} x_2^{\beta_{j2}} \dots} > 1.$$

Przyjmujemy dla zmiennych  $x$  rozkłady logarytmnormalne i wprowadzamy nowe zmienne  $y_i = x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \dots$ , których parametry  $\tilde{y}_i$  i  $\tilde{\mu}_i$  wyznaczymy bez trudności na podstawie wzorów (6.21) i (6.22), stąd zaś parametry  $\bar{y}_i$  i  $\mu_i$  z zależności

$$(7.5) \quad \bar{y}_i = \tilde{y}_i e^{\tilde{\mu}_i^2/2}, \quad \mu_i = \tilde{y}_i \sqrt{e^{\tilde{\mu}_i^2} (e^{\tilde{\mu}_i^2} - 1)},$$

wynikających z (6.18) i (6.19). Warunek (7.4) sprowadziliśmy więc do postaci

$$\sum_i a_i y_i > \sum_j b_j y_j,$$

gdzie zmienne  $y$  mają rozkłady logarytmnormalne o parametrach (7.5). Założenie o postaci rozkładów było nam jednak potrzebne tylko dla obliczenia parametrów zmiennych  $y_i$ , podobnie jak poprzednio linearyzacja warunku wytrzymałościowego. Znając te ostatnie obliczymy bez trudności parametry ich funkcji liniowej wyżej wypisanej i z kolei możemy np. wyprowadzić warunek bezpieczeństwa typu (7.1). Jest to równoważne założeniu, że zmienne  $y_i$  mają rozkłady nielogarytmnormalne, lecz normalne o tych samych parametrach.

Ocena błędu w przypadku aproksymacji warunku wytrzymałościowego wchodzi w zakres analizy [wzory na resztę w szeregu (7.2)], a przy zmianie typu rozkładu wymaga metod estymacyjnych. Aby tego uniknąć, stosujemy transformację rozkładów (zamiast ich zamiany) i aproksymację nowego (przetransformowanego) warunku wytrzymałościowego. Ponadto ścisłość omawianych powyżej sposobów jest niewielka, gdyż linearyzację przeprowadziliśmy w otoczeniu wartości przeciętnych  $\bar{x}$ , niekiedy dość oddalonych od wartości krytycznych odnoszących się do zniszczenia, chodzi tu zaś o linearyzację w otoczeniu takich wartości, które prowadzą do minimum błędu w ocenie stopnia bezpieczeństwa  $p$ . Obydwa te postulaty, tzn.

transformację rozkładów i linearyzację w otoczeniu wartości krytycznych spełnia metoda R. Léviiego, [40] i nast., zwana przez niego «normalizacją», ponieważ rozkłady prawdopodobieństwa przekształca się w normalne. Poniżej przedstawimy ją w sposób inny niż to czyni autor, dodając niezbędne uzasadnienie matematyczne.

Wyjdziemy od przypadku ogólnego, gdy rozkłady zmiennych przypadkowych niezależnych odbiegają od normalnych, zaś funkcja  $f$  w warunku wytrzymałościowym jest nieliniowa. Przypadkami szczególnymi będą rozkłady normalne zmiennych przy nieliniowej funkcji  $f$  oraz rozkłady nienormalne przy funkcji liniowej.

Otóż całkę (3.6) obliczamy podstawiając nowe zmienne  $\xi$  z zależności

$$(7.6) \quad F(x) = \Phi(\xi),$$

gdzie  $F(x)$  jest dystrybuantą zmiennej przypadkowej  $x$  o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa, zaś  $\Phi(\xi)$  funkcją Laplace'a, tzn. dystrybuantą zmiennej  $\xi$  o rozkładzie normalnym. Innymi słowy, postulujemy równość (spełniającą się dla każdego  $x$ )

$$(7.7) \quad \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi,$$

pociągającą za sobą zależność

$$(7.8) \quad \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Równanie (7.7) przyporządkowuje sobie wzajemnie wartości  $x$  i  $\xi$ , czyli wyznacza w ogólności funkcję

$$(7.9) \quad \xi = \xi(x)$$

oraz

$$(7.10) \quad x = x(\xi).$$

W tych warunkach całka (3.6) wyrazi się następująco:

$$(7.11) \quad p = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\omega} \dots \int \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \xi_k^2\right) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Jeżeli obszar całkowania  $\Omega$  określony jest nierównością (3.2), to obszar  $\omega$ , zgodnie z (7.10), nierównością

$$(7.12) \quad f[x_1(\xi_1), \dots, x_n(\xi_n)] \equiv g(\xi_1, \dots, \xi_n) < 0.$$

Funkcja pod całką (7.11) maleje szybko przy wzrastających  $\xi_k$ , ponieważ występują one w kwadracie i nadto w wykładniku potęgowym. Toteż o wartości całki decydują wartości w pobliżu maksimum tej funkcji, które znajdziemy poszukując minimum funkcji  $\sum_{k=1}^n \xi_k^2$  dla punktów leżących na brzegu obszaru  $\omega$ , tzn. spełniających równanie

$$(7.13) \quad g(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0.$$

Chodzi tu zatem o wartości krytyczne (w drugim znaczeniu, por. p. 3), lecz w obszarze przetransformowanym, których nie można identyfikować z faktycznymi wartościami krytycznymi. Minimum to przedstawia kwadrat najmniejszej odległości obszaru całkowania od początku układu współrzędnych w przestrzeni  $n$ -wymiarowej zmiennej  $n$ -wymiarowej  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Warunek ekstremum dla funkcji  $\sum_{k=1}^n \xi_k^2$  ma postać

$$\xi_1 d\xi_1 + \xi_2 d\xi_2 + \dots + \xi_n d\xi_n = 0,$$

zaś warunek poboczny na podstawie (7.13) ma postać

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial \xi_n} d\xi_n = 0.$$

Z obu powyższych równań otrzymujemy układ  $n - 1$  równań, który zapisujemy w formie układu równości

$$(7.14) \quad \frac{\xi_1}{\partial g / \partial \xi_1} = \frac{\xi_2}{\partial g / \partial \xi_2} = \dots = \frac{\xi_n}{\partial g / \partial \xi_n}.$$

Układ ten w połączeniu z warunkiem (7.13) pozwala wyznaczyć  $n$  niewiadomych  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Wartości zmiennych spełniające powyższe równania oznaczymy przez  $\xi_{01}, \dots, \xi_{0n}$ . Wówczas uogólniona (najmniejsza) odległość obszaru  $\omega$  od początku układu współrzędnych wynosi

$$(7.15) \quad \lambda = \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_{0k}^2}.$$

Można wykazać, że całka (7.11) ma wartość przybliżoną

$$(7.16) \quad p \approx \Phi(\lambda),$$

odpowiadającą linearyzacji warunku wytrzymałościowego; tutaj  $\Phi$  oznacza funkcję Laplace'a [por. (6.3)], zaś  $\lambda$  (będące zatem naszym  $\lambda_p$ ) określone jest zależnością (7.15).

Rozwińmy mianowicie funkcję  $g(\xi_1, \dots, \xi_n)$  w szereg potęgowy w otoczeniu punktu  $(\xi_{01}, \dots, \xi_{0n})$  i zatrzymajmy pierwsze dwa wyrazy szeregu; innymi słowy, zastąpmy funkcję  $g$  jej przybliżeniem liniowym:

$$g \approx g_0 + \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \right)_0 (\xi_1 - \xi_{01}) + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_n} \right)_0 (\xi_n - \xi_{0n}),$$

gdzie wskaźnik 0 oznacza, że chodzi o wartości funkcji obliczonej dla  $\xi_{01}, \dots, \xi_{0n}$ . Uwzględniając (7.13) określamy obszar całkowania nierównościami [por. (7.12)]

$$\left( \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \right)_0 \xi_1 + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_n} \right)_0 \xi_n < \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \right)_0 \xi_{01} + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_n} \right)_0 \xi_{0n}.$$

Oznaczając przez  $c$  stałą wartość stosunku  $[\partial g/\partial \xi_k]_0 : \xi_{0k}$  [por. (7.14)] i uwzględniając (3.21) zapisujemy tę nierówność w postaci

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi_1}\right)_0 \xi_1 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_n}\right)_0 \xi_n < c\lambda^2.$$

Lewa strona nierówności jest funkcją liniową zmiennych przypadkowych  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , charakteryzujących się rozkładami normalnymi o parametrach  $\bar{\xi} = 0$  oraz  $\mu = 1$ , wobec czego posiada ona rozkład normalny o wartości przeciętnej 0 i odchyleniu standardowym

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_k}\right)_0^2} = c \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_{0k}^2} = c\lambda.$$

Oznaczając tę funkcję przez  $y$  otrzymamy zatem następujące prawdopodobieństwo spełnienia się naszej nierówności [por. (6.2)]:

$$p = \frac{1}{c\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c\lambda^2} e^{-\frac{y^2}{2c^2\lambda^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\lambda)$$

(w drugiej całce wprowadziliśmy nową zmienną  $t = y/c\lambda$ ). Wykazaliśmy więc, że formuła przybliżona (7.16) odpowiada linearyzacji warunku wytrzymałościowego (7.12) (w obszarze przetransformowanym).

Wartości  $\xi_{01}, \dots, \xi_{0n}$  wyznaczone z układu równań (7.14) są funkcjami parametrów rozkładów zmiennych przypadkowych  $X$ , parametry te bowiem występują w funkcji  $g$  [por. (7.7) i (7.12)]. Wobec tego zależność (7.15) przedstawia związek między owymi parametrami i wielkością  $\lambda_p$ , którą możemy wyznaczyć dla określonego  $p$  z (7.16). Rozwiązanie zagadnienia polega więc kolejno na «normalizacji» rozkładu [wzór (7.7)] i znalezieniu funkcji  $g$ , (7.12), rozwiązaniu układu równań (7.14) wraz z (7.13) i określeniu zależności (7.15), którą wykorzystujemy analogicznie do (3.7).

Podnosząc do kwadratu i sumując poszczególne wyrazy układu równań (7.14) oraz uwzględniając (7.15) możemy układ (7.14) przedstawić w postaci

$$(7.17) \quad \frac{\xi_1}{\partial g/\partial \xi_1} = \dots = \frac{\xi_n}{\partial g/\partial \xi_n} = \frac{\lambda}{\sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_k}\right)^2}}.$$

W tej postaci układ ten jest podawany w pracach R. Lévi'ego. Autor ten popełnia jednak nieścisłość, o której wspomnieliśmy już w p. 1.2, mianowicie poprzestaje na tym układzie, tj. pomija dodatkowe równanie (7.13), co jest niewystarczające. Jeśli chodzi o wyznaczenie  $p$  przy znanych rozkładach zmiennych  $X$ , tj. przy znanych wszystkich parametrach występujących w (7.13), to (7.17) przedstawia układ  $n$  równań o  $n+1$  niewiadomych  $\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda$ , musimy więc dołączyć równanie (7.13). Gdy zadanie polega na doborze parametrów w ten sposób, by uzyskać założone  $p$ , to musimy dysponować  $n+1$  warunkami, z których  $n$  służy do wyznaczenia wartości  $\xi_{0k}$ ,  $n+1$ -szy zaś przedstawia warunek bezpieczeństwa pozwalający wyznaczyć np. pewien nieznan parametr. Te  $n+1$  warunków stanowią łącznie równania (7.14), (7.13) i (7.15), podczas gdy układ (7.17) o znanym  $\lambda = \lambda_p$  jest równoważny tylko równaniom (7.14) i (7.15), a więc jest niewystarczający.

Wywody upraszczają się znacznie, gdy zmienne losowe wykazują rozkłady normalne. Porównując (6.1) i (7.8) widzimy, że wówczas

$$(7.18) \quad \xi_k = \frac{x_k - \bar{x}_k}{\mu_k}$$

oraz [por. (7.12)]

$$(7.19) \quad \frac{\partial g}{\partial \xi_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\xi_k} = \mu_k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Układ równań (7.14) możemy więc napisać w postaci

$$(7.20) \quad \frac{x_k - \bar{x}_k}{\mu_k^2 \frac{\partial f}{\partial x_k}} = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\mu_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}},$$

co razem z równaniem  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  pozwala wyznaczyć wartości  $x_{01}, \dots, x_{0n}$ , przedstawiające wartości krytyczne (drugiego rodzaju; por. p. 3), co łatwo sprawdzić drogą bezpośredniego ich obliczenia zgodnie ze wskazówkami w p. 3.

Rozwijając funkcję  $f$  w szereg w otoczeniu wartości  $x_{01}, \dots, x_{0n}$ , tzn. w otoczeniu wartości krytycznych, i zatrzymując pierwsze dwa wyrazy, otrzymamy

$$(7.21) \quad f \approx f_0 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0 (x_k - x_{0k}) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0 (x_k - x_{0k}).$$

Wyraz  $f_0$  jest tu równy zeru, gdyż przedstawia wartość funkcji na brzegu obszaru  $\Omega$ . Wskaźnik 0 przy pochodnych oznacza, że należy je obliczać dla wartości krytycznych  $x_{0k}$  [w odróżnieniu od jego znaczenia we wzorze (7.2)]. Podobnie jak dla rozwinięcia (7.2) obliczamy tutaj

$$a_k = \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0, \quad b = - \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0 x_{0k}$$

i na tej podstawie, w myśl (7.1), otrzymujemy warunek bezpieczeństwa

$$(7.22) \quad \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0 (\bar{x}_k - x_{0k}) + \lambda_p \sqrt{\sum_k \mu_k^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0^2} \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) + \\ + \lambda_p \sqrt{\sum_k \mu_k^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0^2} \leq 0.$$

Przybliżona równość pierwszych wyrazów wynika z (7.21). Jak widzimy, różnica w stosunku do warunku (7.3) polega tylko na obliczeniu pochodnych pod pierwiastkiem dla wartości krytycznych zamiast przeciętnych.

Metodę normalizacji można również łatwo zastosować w przypadku rozkładów logarytmnormalnych. Załóżmy w tym celu, że warunek wytrzymałościowy o postaci  $f(x_1, \dots) > 1$  da się sprowadzić przez obustronne zlogarytmowanie do formy  $f_1(\ln x_1, \ln x_2, \dots) < 0$ , gdzie  $f_1$  może być funkcją dowolną. Wówczas podstawiając

nowe zmienne  $z_1 = \ln x_1, z_2 = \ln x_2, \dots$  otrzymujemy warunek  $f_1(z_1, z_2, \dots) < 0$ , w którym wszystkie zmienne wykazują rozkłady normalne o parametrach  $\bar{z} = \ln \tilde{x}_k \tilde{\mu}_k$ ; można bezpośrednio zastosować wzór (7.22) z zamianą oznaczenia  $x$  na  $z$ , przy czym wielkości krytyczne  $z_{0k}$  wyznaczamy z układu równań (7.20). Stąd, przechodząc do funkcji pierwotnej, otrzymujemy dla danego  $p$

$$(7.23) \quad f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots) = \exp \left[ \lambda_p \sqrt{\sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_k^2 \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} \right)_0^2} \right].$$

Jeżeli funkcja  $f_1$  jest liniowa, to wzór powyższy jest ściśły i przechodzi w zależność typu (6.26).

Jeżeli warunek wytrzymałościowy nie da się sprowadzić przez zlogarytmowanie do funkcji  $f_1$  (samych logarytmów), atoli nadal zakładamy, że zmienne  $x_k$  wykazują rozkłady logarytmonormalne, to korzystamy ze wzorów ogólnych i porównując (7.8) i (6.15) otrzymujemy

$$(7.24) \quad \xi = \frac{\ln x - \ln \tilde{x}}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \ln \left( \frac{x}{\tilde{x}} \right),$$

a stąd

$$x = \tilde{x} e^{\tilde{\mu} \xi}.$$

Wobec tego

$$g(\xi) \equiv f(\tilde{x}_1 e^{\tilde{\mu}_1 \xi_1}, \tilde{x}_2 e^{\tilde{\mu}_2 \xi_2}, \dots).$$

Układ równań (7.14) można więc przedstawić w postaci [por. wywód wzoru (7.20)]

$$(7.25) \quad \frac{\ln \left( \frac{x_k}{\tilde{x}_k} \right)}{\tilde{\mu}_k^2 \tilde{x}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}} = \gamma = \text{const},$$

do czego dołączamy równanie  $f(x_1, x_2, \dots) = 0$  (łącznie z  $\gamma$  mamy bowiem  $n+1$  niewiadomych). Rozwiązując te równania dochodzimy do warunku bezpieczeństwa (7.15).

W praktyce zagadnienie daje się często sprowadzić do przypadku, gdy  $f$  jest funkcją liniową,  $f = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ , zmiennych o rozkładach logarytmonormalnych, a więc gdy  $\partial f / \partial x_k = a_k$ . Wówczas, zgodnie z (7.25),

$$(7.26) \quad \ln x_k = \ln \tilde{x}_k + \gamma a_k \tilde{\mu}_k^2 x_k.$$

Układ ten rozwiązujemy najprościej drogą prób przyjmując pewną wartość  $\gamma$  i na jej podstawie wyznaczając odpowiednie  $x_k$  i wstawiając do funkcji  $\sum_{k=1}^n a_k x_k$ , co ponawiamy dopóty, dopóki funkcja ta nie będzie równa zero (oczywiście możemy korzystać z wszelkich form interpolacji). Najszybciej odpowiednie  $x_k$  można wy-



znaczyć graficznie znajdując punkty przecięcia prostej, danej prawą stroną równania (7.20), z krzywą logarymiczną; na tym samym wykresie możemy oczywiście rozwiązać wszystkie równania.

Metodę powyższą i popelniany błąd łatwo jest ocenić poglądowo przy rozkładach dowolnych i liniowej postaci warunku wytrzymałościowego typu (1.1). Ekstremum funkcji

$$\xi_\sigma^2(\sigma) + \xi_R^2(R)$$

występującej pod całką (7.11), z uwzględnieniem warunku  $f = 0$ , tj.  $\sigma = R = z$ , gdzie  $z$  oznacza wspólną wartość  $\sigma$  i  $R$ , znajdziemy rozwiązując równanie

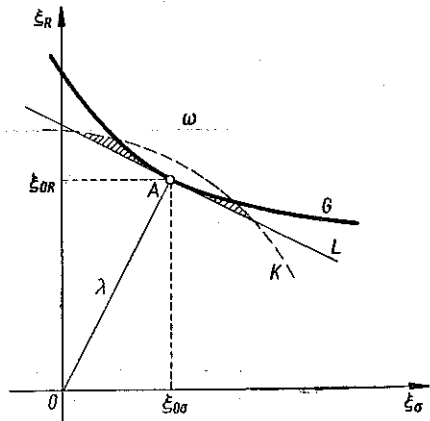
$$(7.27) \quad \xi_\sigma(z) \frac{d\xi_\sigma(z)}{dz} + \xi_R(z) \frac{d\xi_R(z)}{dz} = 0.$$

Wyznaczwszy stąd wartość  $z_0$  obliczamy [por. (7.15)]

$$(7.28) \quad \lambda = \sqrt{\xi_\sigma^2(z_0) + \xi_R^2(z_0)}.$$

Krzywą  $g(\xi_\sigma, \xi_R) = 0$ , czyli  $\sigma(\xi_\sigma) = R(\xi_R)$  przedstawia w układzie współrzędnych  $\xi_\sigma, \xi_R$  krzywa  $G$  (rys. 10); różnym jej punktom odpowiadają różne wartości  $\sigma = R = z$ . Wartości  $z_0$  odpowiada punkt  $A$  położony najbliżej (w odległości  $\lambda$ ) początku układu o współrzędnych  $\xi_{0\sigma} = \xi_\sigma(z_0)$  oraz  $\xi_{0R} = \xi_R(z_0)$ . Zależność przybliżona (7.16) odpowiada zastąpieniu krzywej prostą  $L$  styczną do niej w punkcie  $A$ , o równaniu [por. wywód wzoru (7.16)]

$$(7.29) \quad \left( \frac{\partial \sigma(\xi_\sigma)}{\partial \xi_\sigma} \right)_0 (\xi_\sigma - \xi_{0\sigma}) = \left( \frac{\partial R(\xi_R)}{\partial \xi_R} \right)_0 (\xi_R - \xi_{0R}).$$



Rys. 10

Na podstawie rys. 10 łatwo przedstawić poglądowo błąd, który popełniamy przy linearyzacji funkcji  $g$ . Mianowicie o wartości całki (7.11) decydują tylko punkty w bliskim sąsiedztwie  $A$ , tzn. leżące wewnątrz symbolizującego o okręgu  $K$ , będącego miejscem geometrycznym punktów o równej odległości od początku układu, czyli o stałej wartości funkcji podcałkowej (7.11). Całkując po obszarze ograniczonym styczną  $L$  zamiast po obszarze  $\omega$  ograniczonym krzywą  $G$  popełniamy błąd, odpowiadający w przybliżeniu powierzchni zakreskowanej, a więc z reguły niewielki. Można również ocenić wzrost dokładności przez wprowadzenie wartości krytycznych zamiast przeciętnych. Mianowicie styczna  $L$  przedstawia prostą przecięcia płaszczyzny typu (7.21) z płaszczyzną układu współrzędnych. Pierwsza z nich jest styczna w punkcie  $A$  do powierzchni (7.13) (odgraniczającej obszar  $\omega$  w przestrzen-

nym układzie współrzędnych) o krzywej przecięcia  $G$ . Natomiast płaszczyzna typu (7.2) (której odpowiada funkcja  $g$  zamiast  $f$ ) jest styczna do tej powierzchni w innym punkcie (np. w początku układu) i daje prostą przecięcia odmienną od  $L$ . Jak widać, dokładność obliczenia pola określającego  $p$  będzie w tym przypadku na ogół mniejsza.

Metoda normalizacji znajduje zastosowanie, gdy z przesłanek teoretycznych wiadomo, że rozkłady zmiennych przypadkowych nie są normalnymi, a więc wyników badań nie można adaptować bezpośrednio do rozkładów normalnych. Metodę linearyzacji stosujemy, gdy warunek wytrzymałościowy ma postać nieliniową. Niech np. dla przekroju zbrojonego ma on postać

$$M_g + M_p < A_z Q_r \left( h_1 - \frac{A_z Q_r}{2bR_m} \right),$$

gdzie  $A_z$  oznacza pole przekroju zbrojenia,  $Q_r$  jego granicę plastyczności,  $h_1$  wysokość «czynną» przekroju,  $b$  jego szerokość,  $R_m$  obliczeniową wytrzymałość betonu. Przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę otrzymujemy funkcję  $f$  w warunku (3.2). Załóżmy, że  $M_g$ ,  $M_p$ ,  $Q_r$ ,  $R_m$  i  $h_1$  są zmiennymi przypadkowymi o rozkładach normalnych i stałych współczynnikach zmienności  $v = \mu/\bar{x}$ , przy czym wartości przeciętne identyfikujemy z normowymi dla poszczególnych klas (pozostałe wartości uważamy za nielosowe). Zgodnie z (7.3) otrzymujemy warunek bezpieczeństwa

$$\begin{aligned} & \bar{M}_g + \bar{M}_p + A_z \bar{Q}_r \left( \bar{h}_1 - \frac{A_z \bar{Q}_r}{2b\bar{R}_m} \right) + \\ & + \lambda_p \sqrt{v_g^2 \bar{M}_g^2 + v_p^2 \bar{M}_p^2 + v_Q^2 \bar{Q}_r^2 \left( A_z \bar{h}_1 + \frac{A_z^2 \bar{Q}_r}{b\bar{R}_m} \right)^2 + v_R^2 \bar{R}_m^2 \left( \frac{A_z^2 \bar{Q}_r^2}{2b\bar{R}_m^2} \right)^2 + v_h^2 \bar{h}_1^2 (A_z \bar{Q}_r)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Posługując się zamiast przeciętnymi wartościami krytycznymi otrzymujemy w myśl (7.20) układ równań

$$\begin{aligned} \frac{M_g - \bar{M}_g}{v_g^2 \bar{M}_g^2} &= \frac{M_p - \bar{M}_p}{v_p^2 \bar{M}_p^2} = \frac{Q_r - \bar{Q}_r}{v_Q^2 \bar{Q}_r^2 \left( A_z h_1 + \frac{A_z^2 Q_r}{bR_m} \right)} = \\ &= \frac{R_m - \bar{R}_m}{v_R^2 \bar{R}_m^2 \left( \frac{A_z^2 Q_r^2}{2bR_m^2} \right)} = \frac{h_1 - \bar{h}_1}{v_h^2 \bar{h}_1^2 (A_z Q_r)}, \end{aligned}$$

o niewiadomych  $M_g$ ,  $M_p$ ,  $Q_r$ ,  $R_m$  i  $h_1$ , z którego (łącznie z wypisanym wyżej warunkiem wytrzymałościowym, gdzie znak nierówności zastąpiono znakiem równości) wyznaczamy wartości krytyczne  $M_{0g}$ ,  $M_{0p}$ ,  $Q_{0r}$ ,  $R_{0m}$  i  $h_{01}$  i wstawiamy do wyrażeń w nawiasach pod pierwiastkiem zamiast wartości przeciętnych [por. (7.22)]. Od otrzymanego warunku bezpieczeństwa możemy oczywiście przejść do jakiegokolwiek warunku konwencjonalnego i stabelaryzować wartości odnośnej konwencjonalnej miary bezpieczeństwa w myśl p. 3 i 6.1.

## Zakończenie

Podsumujmy wywody i rzućmy okiem na perspektywy rozwojowe teorii bezpieczeństwa konstrukcji. Nie ulega wątpliwości — i rozeznanie tego jest dość powszechne — że tradycyjne ujęcia nie odpowiadają współczesnym wymaganiom techniki ani też postulatam i możliwościom nauki. M.in. praktyczne zastosowanie zaawansowanych teorii wytrzymałościowych będzie tak długo iluzoryczne, dopóki wyniki będziemy mnożyć przez współczynniki bezpieczeństwa przyjmowane na wycucie. Na porządku dziennym staje więc sprawa równie precyzyjnego uwzględniania w obliczeniach czynników przypadkowych jak podstawowych, przy czym tych pierwszych nie należy identyfikować z nieznanymi, tyle tylko że prawa nimi rządzące przejawiają się w odmiennej formie, mianowicie w procesach masowych, których analiza wymaga metod statystyki matematycznej. Ponadto coraz wyraźniej występuje potrzeba powiązania zagadnień bezpieczeństwa z ekonomicznymi, gdyż zarówno zbyt słaba jak zbyt mocna konstrukcja nie oznacza nic innego, jak marnotrawstwo pracy ludzkiej o rozmiarach globalnych mierzonych skalą produkcji; również i procesy ekonomiczne przejawiają się w zjawiskach masowych.

Powyższe czynniki definiują tendencje rozwojowe i jak widzieliśmy, prowadzą nieuchronnie do metod statystycznych i probabilistycznych. Jeśli ktoś twierdzenie to chciałby uważać za kontrowersyjne, wystarczy, by spróbował w sposób naukowo uzasadniony odpowiedzieć na takie np. pierwsze z brzegu pytania, jak to, o ile trzeba zmienić współczynnik bezpieczeństwa, jeśli w obliczeniu uwzględnia się także obciążenia drugorzędne, jeśli zmienia się jednorodność materiałów, zakres kontroli, jeśli rosną straty w razie zniszczenia; na jakim poziomie należy ustalić obciążenia obliczeniowe, jak liczne powinny być badania i obserwacje, aby były dostatecznie wiarogodne, lecz nie nadmiernie kosztowne itd.; pytania nader istotne, które w każdym zagadnieniu można by mnożyć.

Z tymi wyjaśnieniami wypada stwierdzić, że teoria probabilistyczna dotychczas nie ze wszystkim spełniła pokładane w niej nadzieje. Zdaniem autora przyczyny tego tkwią w kilku zasadniczych, dość rozpowszechnionych nieporozumieniach co do jej zadań, a także wymagań.

Po pierwsze, utarło się mniemanie, że analiza dotyczy zjawisk tak rzadkich, jak katastrofy konstrukcji (niektórzy autorzy mówią wprost o hipotezie katastroficznej, inni zalecają opierać się na statystykach katastrof), których liczba obserwacji jest zbyt mała, by wyniki można uznać za wystarczająco pewne. Jest to pogląd niesłuszny; sens zagadnienia tkwi w wykryciu praw, którym podlega częstość zjawisk, w celu zastąpienia obserwacji zdarzeń rzadkich wnioskowaniem o nich na podstawie wielkości częstych (np. wytrzymałości i obciążeń w pobliżu przeciętnych, por. p. 5); stąd m.in. wypływa znaczenie teoretycznej analizy rozkładów. W dodatku, jak widzieliśmy, bardzo małe bądź też bardzo bliskie 1 liczby (określające prawdopodobieństwa), które zwykle odstraszały konstruktorów, w obliczeniach praktycznych zazwyczaj nie pojawiają się bezpośrednio, a tylko wielkości typu  $\lambda_p$  lub  $\vartheta_p$  we wzorach np. (6.8), (6.48).

Po wtóre, niemało zamętu wprowadzają częste ogólnikowe rozważania o bezpieczeństwie konstrukcji jako całości, włączając różne jej elementy, pewność połączeń, posadowienia itd. Jak widzieliśmy, warunek bezpieczeństwa odpowiada ściśle warunkowi wytrzymałościowemu, analiza bezpieczeństwa ogranicza się więc do tych samych najbardziej narażonych węzłów, przekrojów itd., które sprawdzamy w obliczeniu statycznym, i tak jak tam, projektując określony element konstrukcyjny, interesujemy się jego wyłącznie bezpieczeństwem. Jeśli jego zniszczenie powoduje ruinę konstrukcji, uwzględniamy to jedynie w koszcie katastrofy (por. p. 2). Jeśli obserwacje ujawnią jakieś nowe słabe ogniwo (np. pewne złącze), to powinno ono stać się przedmiotem równocześnie analizy statycznej i bezpieczeństwa.

Dalej, zaufanie do teorii podważa dążność niektórych autorów do doraźnych wyników liczbowych bez dostatecznego uzasadnienia oraz nieprecyzyjność (w tym, jak widzieliśmy, i błędność) wielu sformułowań. Teoria probabilistyczna stanowi instrument pozwalający maksymalnie spożytkować każdą uzyskaną informację, lecz nie jest w stanie jej zastąpić. Wymagania jej są pod tym względem nieporównanie większe niż dotąd; narzuca ona, by każdy bez wyjątku element rachunku opierał się na określonych seriach badań, których liczba, parametry statystyczne itd. muszą być znane, a ufność statystyczna określona. Łatwo się o tym przekonać próbując rozwiązać konkretnie jakiegokolwiek zagadnienie. Wszelkie przyjęcia arbitralne stawiają wyniki w jednej płaszczyźnie z ujęciami tradycyjnymi (konwencjonalnymi), z tym że te ostatnie górują zwykle wówczas swym ugruntowaniem w obserwacji i praktyce.

Wreszcie, nieprzyzwyczajenie inżynierów do rozumowania kategoriami prawdopodobieństwa prowadzi do prymityzowania pojęć o kryteriach bezpieczeństwa i hamuje rozpowszechnienie teorii. Nie rzadko słyzy się pogląd, że skoro ta lub inna konstrukcja nie uległa katastrofie, to wykazuje widocznie wystarczające bezpieczeństwo i można się na niej wzorować. Do takiego twierdzenia uprawniałoby naturalnie dopiero skonstatowanie, że niszczy się zaledwie jedna na  $n$  analogicznych konstrukcji, obserwowanych w całym okresie eksploatacji, gdzie  $n$  może być rzędu setek. Z drugiej strony, nie wiadomo, czy bezpieczeństwo konstrukcji słabszej, zatem tańszej, nie byłoby również dostateczne.

W świetle tych uwag celem niniejszego szkicu syntetycznego jest zrozumienie przez Czytelnika istoty zagadnienia bezpieczeństwa i zaznajomienie z najważniejszymi dotychczasowymi wynikami teorii, które można uważać za jej trwałą dorobek.

Podane metody wystarczają do obliczeń praktycznych w większości zagadnień inżynierskich, w szczególności do konstrukcji prętowych, w tych przypadkach, gdy dysponujemy znaczną liczbą obserwacji, tak że parametry rozkładów prawdopodobieństwa mieszczą się w bardzo wąskich granicach z ufnością bliską 1. Same obliczenia dla poszczególnych typów konstrukcji, wymagające obszernej dokumentacji liczbowej, nie są oczywiście zadaniem tej pracy. Czytelnik obznajomiony z tematem spostrzeże, że wiele zagadnień zostało naświetlonych w sposób nowy, ogólniejszy i ściślejszy niż dotąd i rozszerzonych wynikami oryginalnymi. Mamy tu na myśli m.in. wprowadzenie lub uściślenie takich pojęć jak wielkość

nominalna i krytyczna, warunki wytrzymałościowy i bezpieczeństwa, teoria miar bezpieczeństwa konwencjonalnych, uwzględnienie związków korelacyjnych, rozwiniecie problematyki obciążeń, uzasadnienie matematyczne metody Lévi'ego itd.

Pogląd autora na perspektywy rozwoju teorii bezpieczeństwa jest następujący. Niewątpliwie znaczenie jej będzie wzrastać równoległe z zapotrzebowaniem na coraz ściślejsze rozwiązania, wynikające, jak już mówiliśmy, z postulatów naukowych i ekonomicznych, wysuwanych w obliczu rosnących rozmiarów produkcji elementów konstrukcyjnych i, z drugiej strony, coraz śmielszych realizacji indywidualnych. W okresie przejściowym, obejmującym najbliższą przyszłość, utrzymują się niezawodnie tradycyjne współczynniki bezpieczeństwa, wynikające z długoletniego doświadczenia, którego niestety nikt nie jest w stanie ująć w ścisłe ramy liczbowe, eliminujące subiektywne przekonania. Naturalnie nieodzowne będą stałe korektury tych współczynników możliwie na bazie probabilistycznej (por. metody przejściowe omówione w p. 1); wprowadzenia do praktyki doczekają się wszakże tylko opracowania ściśle udokumentowane dostatecznie licznym materiałem doświadczalnym i obserwacyjnym.

W dalszej przyszłości te konwencjonalne miary bezpieczeństwa zapewne znikną, jako pojęcia niewyraźne i wieloznaczne (zarówno w sensie różnych definicji, jak i niejednoznacznego określenia stopnia bezpieczeństwa, por. p. 4), niezbyt precyzyjne, wyrosłe z praktyki okresu produkcji rzemieślniczej. Miejsce ich zajmie teoria oparta na rachunku prawdopodobieństwa, odpowiadająca m.in. tendencji do różnicowania (por. p. 1.1), a w przyszłości pełnego zindywidualizowania (dla poszczególnych konstrukcji) miar bezpieczeństwa. Przyczynią się do tego: wprowadzenie nowych materiałów, gdzie brak zaplecza tradycji, za to występuje postulat najekonomiczniejszego planowania i wykonywania badań doświadczalnych; automatyzacja produkcji materiałów, wiążąca się nierozłącznie z kontrolą i ustaleniem wskaźników ich jednorodności; wzrastające tempo zmian obciążeń eksploatacyjnych, wymagające zorganizowania ich stałej kontroli i pomiaru w zakresie daleko szerszym niż obecnie; wykształcenie inżynierów umiejących ściśle wiązać zagadnienia techniczne i ekonomiczne, dla których rachunek prawdopodobieństwa stanie się instrumentem codziennej pracy; ogólna tendencja zawarta w hasle: «od teorii do laboratorium; od laboratorium do praktyki» (zamiast, jak do niedawna — na odwrót); narastający lawinowo materiał obserwacyjny i eksperymentalny, którego wykorzystanie bez aparatu statystyki matematycznej będzie nie do pomyślenia; rozwój techniki przetwarzania danych, zwłaszcza elektronowej techniki rejestrująco-obliczeniowej, pomocnej, a w przyszłości być może niezbędnej dla tych obliczeń.

Najpilniejszym zadaniem (wymagającym rzecz jasna stopniowej, wieloletniej pracy zespołowej) jest, zdaniem autora, opracowanie pod kątem statystycznym i tym samym umożliwienie spożytkowania istniejącego, ogromnego materiału doświadczalnego liczbowego w zakresie (1) własności materiałów, (2) sposobu działania i wielkości obciążeń, (3) ekonomicznym, w tym katastrof, kosztów napraw itp. Tam gdzie wystąpią luki, konieczne będzie zorganizowanie odpowiednich badań.

Co się tyczy samej teorii, zdaniem autora na czoło wysuwają się:

(1) Problemy estymacyjne, zwłaszcza uwzględnienie liczebności próby i odchyłek od przyjętych typów rozkładów i ich wpływu na stopień bezpieczeństwa, co umożliwi m.in. rozszerzenie teorii na przypadek, gdy dysponujemy niezbyt licznymi badaniami.

(2) Zagadnienie uwzględnienia ścisłości hipotez obliczeniowych i przeprowadzenie niezbędnych korelacji, omówionych w p. 3. Wyjaśni to sprawę celowości wprowadzenia dokładniejszych teorii.

(3) Pogłębienie analizy teoretycznej rozkładów prawdopodobieństwa i wprowadzenie nowych ich typów, przystosowanych do poszczególnych zagadnień.

(4) Rozszerzenie teorii na ustroje hiperstatyczne, powierzchniowe itp.

(5) Uwzględnienie prawdopodobieństwa miejsca zniszczenia, alternatywy zniszczenia różnych węzłów ustroju (a stąd konstrukcji jako całości) itp. i ogólniej zagadnienia stochastyczne, w nawiązaniu zwłaszcza do teorii wyężenia jako problemu ośrodków stochastycznie niejednorodnych.

Synteza badań teoretycznych, doświadczalnych i pracy obliczeniowej powinna doprowadzić do wyników odzwierciedlających rzeczywistość w sposób ścisły jak nigdy dotąd i do oszczędności przypuszczalnie większych, niż tego oczekujemy.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] P. W. ABELES, *Safety Against Cracking and Permissible Stresses in Prestressed Concrete*, V. Kongr. AIPC, Lizbona 1956.
- [2] S. O. ASPLUND, *Probabilities of Traffic Loads on Bridges*, Proc. ASCE, 585, 81 (1955).
- [3] S. O. ASPLUND, *The Risk of Failure*, Struct. Eng. 8, 1958.
- [4] В. А. Балдин, И. И. Гольденблат, В. М. Коченов, М. Я. Пильдиш, К. Э. Таль, *Расчет строительных конструкций по предельным состояниям*, под ред. В. М. Келдыша, Москва-Ленинград 1951.
- [5] В. И. Беляев, *Статистический метод определения нормативных напряжений для стальных конструкций*, Строит. Промышл., 3, 1954.
- [6] В. И. Беляев, *Статистический метод расчета железобетонных конструкций*, Строит. Промышл., 8, 1957.
- [7] M. BONNET, *Étude expérimentale de la qualité du béton mis en oeuvre pour la reconstruction du pont de Villeneuve-Saint-Georges sur la Seine*, Ann. P.C., 1953.
- [8] M. BONNET, *Le pont de Villeneuve-Saint-Georges, les enseignements tirés du chantier en matière de contrôle de la qualité des matériaux*, Ann. ITBTP, 1953.
- [9] A. BRANDTZAEG, *Zulässige Betondruckspannungen in rechteckigen Eisenbetonquerschnitten bei aussermittigem Druck*, II Kongr. AIPC, 1936, Rapp. Fin.
- [10] C. B. BROWN, *Concepts of Structural Safety*, J. Struct. Div. Proc. Am. Soc. Civ. Engrs, Part 1, 12, 86 (1960).
- [11] F. CAMPUS, *Analyse de la notion de sécurité et sollicitations dynamiques des constructions*, III. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Liège 1948.
- [12] J. T. Mc CALL, *Probability of Fatigue Failure of Plain Concrete*, JACI, 2, 30 (1958).
- [13] M. CASSÉ, *Contribution à la détermination de la courbe de dispersion des résultats d'essais sur éprouvettes d'acier doux*, III. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Liège 1948.
- [14] F. V. COSTA, *Notions de la probabilité dans l'étude de la sécurité des constructions*, III. Kongr. AIPC, Rapp. Fin., Liège 1948.
- [15] M. DUMAS, *Application des méthodes statistiques à l'interprétation des épreuves sur prélèvements*, Trav. Mém. Soc. Franc. Mécan., 1939.

- [16] M. DUMAS, *Introduction des probabilités dans le domaine de la résistance des matériaux*, Ann. P.C. nr 63, 1947.
- [17] J. DUTHEIL, *La conception nouvelle de la sécurité, appliquée aux ossatures métalliques*, III. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Liège 1948.
- [18] D. ESTRATIADIS, *Le coefficient de sécurité comme base du calcul des constructions métalliques*, Mém. P.C., 1, (1932).
- [19] A. M. FREUDENTHAL, *The Safety of Structures*, Proc. ASCE, 71 (1945), 1157.
- [20] A. M. FREUDENTHAL, *Safety and the Probability of Structural Failure*, Proc. ASCE, 468, 80 (1954).
- [21] A. M. FREUDENTHAL, *The Safety of Prestressed Concrete as Affected by Creep and Fatigue*, V. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Lizbona 1956.
- [22] A. M. FREUDENTHAL, E. J. GUMBEL, *On the Statistical Interpretation of Fatigue Tests*, Proc. Roy. Soc. London, 246 (1953), 309.
- [23] GAEDE, *Anwendung Statistischer Untersuchungen auf die Prüfung von Baustoffen*, Bauing., 40-42, 1942.
- [24] GAEDE, *Der Notwendige Umfang von Stichproben*, Bauing., 1, 1951.
- [25] В. Н. Горбунов, *К вопросу о коэффициенте запаса при расчете по теории пластических деформаций*, Труды Конф. Пласт. Деф., АН СССР, 1938.
- [26] B. D. GREENSHIELDS, P. M. WEIDA, *Statistics with Application to Highway Traffic Analyses*, Eno Found. for Traff. Contr. Saugatuck, Conn. (USA), 1952.
- [27] W. GRZEGORZEWSKI, *Współczynnik pewności na zniszczenie i na rysy w betonie sprężonym*, Inż. i Bud., 5, 1957.
- [28] E. J. GUMBEL, *Statistical theory of extreme values and some practical applications*, Nat. Bureau Standards, Appl. Math. Ser. nr 33, 1954 (USA).
- [29] J. HEINHOLD, *Sicherheitsgrenzen für Einzelmessungen und Stichprobenmittel*, Bauing., 1, 1958.
- [30] T. IKEDA, *On Safety of Structures*, Proc. Symp. Safety Struct., 6 Sept. 1955, S. 1, 1956, 7-9.
- [31] M. JEŻEWSKI, J. ODERFELD, *O rozkładach parametrów wytrzymałości*, Zastosowania Matematyki, 1, 2 (1954).
- [32] A. J. JOHNSON, *Strength Safety and Economical Dimensions of Structures*, Roy. Inst. Technol., Div. Build. Stat. Struct. Eng., Stockholm 1953.
- [33] A. J. JOHNSON, *The Determination of the Design Factor for Reinforced Concrete Structures*, Proc. Symp. Strength Concr. Struct., London 1956, CACA 1958, 25-48.
- [34] O. G. JULIAN, *Synopsis of First Progress Report of Committee on Factors of Safety*, J. Struct. Div., Proc. ASCE, 4, 83 (1957).
- [35] I. KAWASAKI, *A Concept Safety Factor of Highway Bridges*, Proc. Symp. Safety Struct., 6. Sept. 1955, S. 1, 1956, 10-19.
- [36] I. KONISHI, M. SHINOZUKA, *A Consideration on the Safety of Structure by Plastic and Statistical Theory*, Proc. 5-th Japan Nat. Congr. Appl. Mec., 1955, Tokyo 1956.
- [37] I. KONISHI, M. SHINOZUKA, *Stochastic Study on Uniform Live Load in the Design of Highway Bridge*, Techn. Rep. Eng. Res. Inst., Kyoto Univ., 2, 1956.
- [38] I. KORÁNYI, *Begriff der Sicherheit*, III. Kongr. AIPC, Rapp. Fin., Liège 1948.
- [39] P. LEBELLE, *Coefficients de sécurité des pièces fléchies en béton précontraint*, ITBTP, 1944.
- [40] R. LÉVI, *La sécurité des constructions, Recherche d'une méthode concrète*, III. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Liège 1948.
- [41] R. LÉVI, *Calculs probabilistes de la sécurité des constructions*, Ann. P.C., VII/VIII, 1949.
- [42] R. LÉVI, *Conférence à l'Institut du Bâtiment et des Travaux Publics*, Ann. ITBTP, III/IV, 1950.
- [43] R. LÉVI, *La sécurité dans les constructions en béton armé*, Trav., 183, 1950.
- [44] R. LÉVI, *La sécurité du béton précontraint*, Trav., 215, 1952.
- [45] R. LÉVI, *La sécurité dans les constructions*, Trav., 262, 1956.
- [46] R. LÉVI, *Emploi de la théorie des probabilités aux calculs de résistance des constructions*, Bull. Ass. Int. Congr. Chemins de Fer, 9, 34 (1957).

- [47] T. Y. LIN, *Load Factors for Prestressed Concrete Bridges*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 4, 83 (1957).
- [48] M. MAYER, *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften statt nach zulässigen Spannungen*, Berlin 1926.
- [49] A. J. MOE, *Über die Sicherheiten der Eisenbetonbauten*, II Kongr. AIPC, 1936, Rapp. Fin.
- [50] A. J. MOE, *Begriff der Sicherheit*, III. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Liège 1948.
- [51] W. MOSZYŃSKI, *O rozkładach logarytmnormalnych i możliwościach ich zastosowań technicznych*, Wiad. PKN., 4, 1952.
- [52] W. MOSZYŃSKI, *Wyznaczanie współczynników bezpieczeństwa w wytrzymałościowych obliczeniach konstrukcji inżynierskich i maszynowych*, Wiad. PKN., 8, 1952.
- [53] W. MOSZYŃSKI, *O wyznaczaniu współczynników bezpieczeństwa konstrukcji*, Zastosowania Matematyki, 2, 1 (1954).
- [54] P. A. Муллер, *К вопросу определения коэффициентов однородности и перегрузки по статистических данным*. (Вопросы безопасности и прочности строительных конструкций, Москва.
- [55] P. A. Муллер, *Вероятность достижения предельного состояния конструкции и взаимозависимость коэффициентов однородности и перегрузки*. Вопросы безопасности и прочности строительных конструкций, Москва 1952.
- [56] A. HEUT, *Some Remarks on the Fundamentals of Structural Safety*, AGARD Rep., 155, 1957.
- [57] И. А. ОДИНГ, *Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов*, Москва 1947.
- [58] W. PIEKARSKI, *Wpływ możliwych strat ekonomicznych na współczynnik bezpieczeństwa budowli*, Inż. i Bud., 2, 1954.
- [59] W. PIEKARSKI, *Wpływ liczebności próby na wskaźnik bezpieczeństwa budowli*, Inż. i Bud., 1, 1955.
- [60] N. M. PLUM, *Quality Control of Concrete, its Rational Basis and Economic Aspects*, Proc. Inst. Civ. Eng., 1953, 311.
- [61] W. POGORZEŁSKI, *Prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji*, Zastosowania Matematyki, 1, 2 (1954).
- [62] M. PROT, *Note sur la notion de coefficient de sécurité*, Ann. P.C., 7, 2 (1936).
- [63] M. PROT, *La sécurité des constructions*, III. Kongr. AIPC Publ. Prél., Liège 1948.
- [64] M. PROT, *Contribution à la détermination de la courbe de dispersion d'essais sur éprouvettes de mortier*, III. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Liège 1948.
- [65] M. PROT, *La sécurité*, Ann. P.C. 1, 119 (1949).
- [66] M. PROT, *Essais statistiques sur mortiers et bétons*, Ann. ITBTP, Sér. Béton Armé, 8, 1949.
- [67] M. PROT, *Statistique et sécurité*, Rev. Métall., 11, 1949.
- [68] M. PROT, *Méthodes modernes d'essais des matériaux*, Ann. ITBTP, XI, 1950.
- [69] M. PROT, *Le sécurité des constructions*, Act. Coll. Int. Méc. Poitiers, 4, (1950).
- [70] M. PROT, *La thèse probabiliste de la sécurité*, Ann. Trav. Publ. Belg., 4, 8 (1952).
- [71] M. PROT, *La détermination rationnelle et le contrôle des coefficients de sécurité*, Trav. 222, 1953.
- [72] M. PROT, R. LÉVI, *Conceptions modernes relatives à la sécurité des constructions*, Rev. Gén. Chemins de Fer, VI, 1951.
- [73] A. G. PUGSLEY, *A Philosophy of Aeroplane Strength Factors*, Mem. Res. Aero. Res. Com., London 1942.
- [74] A. G. PUGSLEY, *Concepts of Safety in Structural Engineering*, J. Inst. Civ. Engngs., 5, 1950-51.
- [75] A. G. PUGSLEY, *Structural Safety*, J. Roy. Aero. Soc., 534, 59 (1955).
- [76] A. G. PUGSLEY, *Design for Safety and Efficiency*, Struct. Eng., 1, 1957.
- [77] A. G. PUGSLEY, *Current Trends in the Specification of Structural Safety*, Proc. Symp. Strenght Concr. Struct. London 1956, CACA 1958, 49-54.
- [78] H. RÜSCH, *Der Einfluss des Sicherheitsbegriffes auf die technischen Regeln für vorgespannten Beton*, Schweiz. Arch., 1, 1954.



- [79] H. RÜSCH, *Über die zweckmässigste Art der Güteprüfung und ihren Einfluss auf die Baukosten*, Vet. Stahlb., 3, 1958.
- [80] А. Р. Ржаницын, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, (глава IX, XI), Москва 1949.
- [81] А. Р. Ржаницын, *Статистический метод определения допускаемых напряжений при продольном изгибе*, Научн. Сообщен. ЦНИПС, Вып. 3, Стройиздат., 1951.
- [82] А. Р. Ржаницын, *К проблеме расчетов сооружений на безопасность*. Вопросы безопасности и прочности строительных конструкций, Москва 1952.
- [83] I. J. SOMMERVAILE, *Probability of Service Failures*, Engineering, 4867, 187 (1959).
- [84] H. K. STEPHENSON, *Highway Bridge Live Loads Based on Laws of Chance*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 4, 83 (1957).
- [85] H. K. STEPHENSON, K. CLUNINGER, *Methods of Converting Heavy Motor Vehicle Loads into Equivalent Design Load.*, Texas Eng. Exp. Sta. Bul., 127, 1952.
- [86] Н. С. Стрелецкий, *Об исчислении запасов прочности сооружений*, Сб. труд. Моск. Инж.-Строит. Инст., 1, 1938.
- [87] Н. С. Стрелецкий, *К вопросу установления коэффициента запаса сооружений*, Изв. АН СССР. Отд. Техн. Наук., 1, 1947.
- [88] Н. С. Стрелецкий, *Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений*, Москва 1947.
- [89] Н. С. Стрелецкий, *К вопросу изменчивости параметров работы конструкции на прочность*, Науч. Докл. Высш. Школы Строит., 3, 1958.
- [90] (HSUAN-LOH) SU, *Statistical Approach to Structural Design*, Proc. Inst. Civ. Engrs., 7, 13 (1959).
- [91] M. TICHY, M. VORLIČEK, *Calcul statistique de sections et constructions en béton armé et béton précontraint*, Acta Technica, 2, 1961, (CSRS).
- [92] E. TORROJA, *Notes sur le coefficient de sécurité*, III. Kongr. AIPC, Rapp. Fin., Liège 1948.
- [93] E. TORROJA, *Load Factors*, JACI, 5, 30 (1958).
- [94] E. TORROJA, *Bases of Calculations, Safety*, IV. Kongr. AIPC, Publ. Prél., Cambridge-London 1952.
- [95] E. TORROJA, A. PÁEZ, *Calcul du coefficient de sécurité*, IV. Kongr. AIPC. Publ. Prél., Cambridge-London 1952.
- [96] J. TUCKER JR, *The Compressive Strength Dispersion of Materials with Applications*, J. Franklin Inst., 12, 204 (1927).
- [97] J. C. WARDROOP, *Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research*, Road Pap. nr. 36, v. 1, Part 2, Eng. Div. Proc. Inst. Civ. Engrs, VI, 1952.
- [98] W. WEIBULL, *A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*, J. Appl. Mech., 3, 18 (1951).
- [99] W. WIERZBICKI, *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegl. Techn., (streszczenie referatu), 1936, 690.
- [100] W. WIERZBICKI, *W sprawie bezpieczeństwa pręta wyciąganego osiowo*, Czas. Techn., 16, 1937.
- [101] W. WIERZBICKI, *W sprawie bezpieczeństwa belki zginanej*, Przegl. Techn., 12-13, 1939.
- [102] W. WIERZBICKI, *Wytrzymałość materiału ze statystycznego punktu widzenia*, Przegl. Techn., 7-8, 1945.
- [103] W. WIERZBICKI, *La sécurité des constructions comme problème de probabilité*, Ann. Ac. Pol. Sci. Tech., 7 (1947).
- [104] W. WIERZBICKI, *Rola przypadku w zagadnieniach wytrzymałości materiału*, Ks. Jubil. Prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.
- [105] W. WIERZBICKI, *Nowe drogi nauki o bezpieczeństwie budowli* (streszczenie referatu), Inż. i Bud., 1, 1954.
- [106] W. WIERZBICKI, *O bezpieczeństwie liny nośnej mostu wiszącego*, Rozpr. Inż., XLII, 1956.
- [107] W. WIERZBICKI, *Półprobabilistyczna metoda bezpieczeństwa budowli a metoda stanów granicznych*, Inż. i Bud., 4, 1956.

[108] W. WIERZBICKI, *A Comparative Study on the Semiprobabilistic Method of Determining the Safety of Structures and the Method of Limit States*, Bull. Ac. Pol. Sci., 1, 4 (1956).

[109] W. WIERZBICKI, *Probabilistic and Semi-Probabilistic Method for the Investigation of Structure Safety*, Arch. Mech. Stos., 6, 9 (1957).

[110] W. WIERZBICKI, *Próba wyznaczenia naprężeń dopuszczalnych na podstawie metody pół-probabilistycznej*, Inż. i Bud., 9, 1957.

[111] W. WIERZBICKI, *La méthode semi-probabiliste appliquée a l'investigation de la sécurité des constructions*, Bull. Ac. Sci., Pol. Sér. Sci. Techn., 10, 7 (1959).

[112] W. WIERZBICKI, *Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych*, Warszawa 1961.

[113] L. W. WOOD, *The Factor of Safety in Design of Timber Structures*, Proc. ASCE, 1838, 84 (1958).

[114] *Discussion of the paper by Freudenthal A.M. „Safety and probability of structural failure”*, Proc. ASCE, 654, 81 (1955).

[115] *Discussion on the report on structural safety*, Struct. Eng., 9, 1956.

[116] *Discussion of the paper by Lin T.Y. „Load factors for prestressed concrete bridges”*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1 oraz 3, 84 (1958).

[117] *Discussion of the paper by Torroja E. „Load factors”*, JACI, 12, 30 (1959); Proc. 55 oraz 5, 30 (1959).

[118] *Report on structural safety*, J. Inst. Struct. Engrs., 5, 1955.

## Резюме

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ БЕЗОПАСНОСТИ КОНСТРУКЦИИ

В работе обсуждается синтетически, совокупность основных вопросов теории безопасности конструкции. Работа предназначена для читателей желающих ознакомиться с важнейшими элементами этой теории, а также вникнуть в сущность вопроса. Неизменные достижения теории, представлены на фоне эволюции и критики, существующих до сих пор понятий и решений и дополнены рядом оригинальных результатов.

Обсуждаются последовательно: эволюция и критика актуальных теорий, в которых между прочим исправляется целый ряд неточностей различных авторов, экономический смысл вопроса, понятия и основные зависимости, в особенности структура условия безопасности, теория конвенциональных мер безопасности (как напр. коэффициенты безопасности, допускаемые напряжения), вопрос нагрузок, в особенности анализ распределений их вероятностей, практические расчеты при однородных распределениях важнейших типов: нормальных, логарифмонормальных. Пирсона приближенные методы, основанные на линеаризации, преобразовании распределений и применении критических величин. Приводится перечень литературы, по этому вопросу.

## Summary

### FOUNDATIONS OF THE THEORY OF SAFETY OF STRUCTURES

This paper discusses in a synthetic manner the whole of the fundamental problems of the theory of safety of structures and is intended for readers who want to make themselves acquainted with the most important elements of this theory and to have an insight into the essentials of the problem. The durable achievements of the theory are discussed. The paper contains also a critical survey of the evolution of the existing notions and is completed with a number of original results.

The following topics are discussed: Existing theories and their evolution, a number of inaccuracies of various authors being corrected; The economic sense of the problem; Basic notions and relations, in particular the structure of the safety condition; Theory of conventional measures of safety (admissible stresses); The problem of loads, especially an analysis of their probability distribution; Practical computation with homogeneous distributions of most important types: normal, logarithmic-normal, and Pearson. Approximate methods based on linearization, transformation of the distributions and application of critical quantities. The argument is completed by a list of the most important literature on the subject.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 marca 1962 r.*

---