

## O PEWNYM ROZWIĄZANIU W TEORII ZGINANIA PŁYT CIENKICH O ORTOTROPII CYLINDRYCZNEJ

WOJCIECH BARAŃSKI (ŁÓDŹ)

### 1. Wstęp

Pierwsze rozwiązania zagadnienia zginania płyty kołowej o ortotropii cylindrycznej podali równocześnie LECHNICKI, [3], i CARRIER, [1]. Autorzy ci zajmowali się przypadkiem zginania osiowo-symetrycznego (siła skupiona po środku, obciążenie ciągle równomiernie rozłożone na całej powierzchni płyty). Zauważyli oni, że przy pewnych stałych materiałowych, niezależnie od rodzaju obciążenia, w środku płyty pojawiają się nieskończenie wielkie momenty zginające.

Następne rozwiązanie podał SEN GUPTA, [5]. Rozdzielając zmienne otrzymał ugięcie płyty w postaci szeregu typu

$$w = \sum_n r^{1+an} \cos n\theta$$

podobnego do tego, który otrzymuje się w przypadku izotropii. Następnie stosując metodę Clebscha, podał równanie ugiętej płyty ekscentrycznie obciążonej siłą skupioną. Nie zajmował się przy tym osobliwościami sił wewnętrznych w środku płyty. Poprzestał jedynie na wnioskach Carrier'a.

W niniejszej pracy zauważono, że przy pewnych stałych materiałowych równanie ugięcia płyty może zawierać wyrazy typu

$$w = r^{1+cn} \cos(d_n \ln r) \cos n\theta.$$

Okazało się, że warunkiem decydującym o takiej postaci rozwiązania jest  $D_{r\theta}^2 < D_r D_\theta$  (otrzymany warunek jest podobny do warunku Hubera, [2], dla płyt o ortotropii prostoliniowej).

Przy pewnych wartościach stałych materiałowych obie postacie rozwiązania dają osobliwości sił wewnętrznych w środku płyty. W dalszej części praca zawiera rozważania nad warunkiem ograniczoności sił wewnętrznych w środku płyty, prowadzące do zależności nie wykluczających żadnej z postaci rozwiązania.

### 2. Rozwiązanie równania różniczkowego powierzchni ugiętej płyty

Wykorzystując założenia upraszczające przyjęte w teorii płyt cienkich zagadnienie trójwymiarowe daje się sprowadzić do zagadnienia płaskiego, scharakteryzowanego następującym równaniem różniczkowym, [3]:

$$(2.1) \quad D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2D_{r\theta} \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial r^2 \partial \theta^2} + D_\theta \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} + 2D_r \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} - 2D_{r\theta} \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} - \\ - D_\theta \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + 2(D_\theta + D_{r\theta}) \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} + D_\theta \frac{\partial w}{r^3 \partial r} = q(r, \theta).$$

W równaniu tym  $r, \theta$  są współrzędnymi układu biegunowego, którego początek przyjęto w biegunie ortotropii cylindrycznej,  $w$  jest ugięciem powierzchni środkowej płyty,  $q(r, \theta)$  intensywnością obciążenia płyty,  $D_r, D_\theta, D_K, D_{r\theta}$  sztywnościami płytowymi (stałe materiałowe), które są określone za pomocą następujących wzorów:

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}, \quad D_K = \frac{G_{r\theta} h^3}{12},$$

$$D_{r\theta} = D_r \nu_\theta + 2D_K = D_\theta \nu_r + 2D_K.$$

Stan naprężenia określamy za pomocą momentów zginających, skręcających oraz sił poprzecznych, które w następujący sposób związane są z ugięciem powierzchni środkowej płyty:

$$(2.2) \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = -D_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz = -D_\theta \left( \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right), \\ H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz = -2D_K \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right), \\ N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz = - \left[ D_r \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} \right) + D_{r\theta} \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) - \right. \\ \left. - D_\theta \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \right) \right], \\ N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz = - \left[ D_{r\theta} \frac{\partial^3 w}{r \partial r^2 \partial \theta} + D_\theta \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \right) \right],$$

gdzie symbole  $M_r, M_\theta$  oznaczają momenty zginające,  $H$  moment skręcający,  $N_r, N_\theta$  siły poprzeczne oraz  $h$  grubość płyty.

SEN GUPTA, [5], podał rozwiązanie równania jednorodnego (2.1) w następującej postaci:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos n\theta, \\ w_0(r) &= E_{01}r^2 + E_{02} + E_{03}r^{1+b_0} + E_{04}r^{1-b_0}, \\ w_1(r) &= E_{11}r^{1+a_1} + E_{12}r^{1-a_1} + E_{13}r + E_{14}r \ln r, \\ w_n(r) &= E_{n1}r^{1+a_n} + E_{n2}r^{1-a_n} + E_{n3}r^{1+b_n} + E_{n4}r^{1-b_n}, \\ & \quad n = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

gdzie  $E_{ni}$  są to stałe całkowania oraz

$$(2.4) \quad a_0 = 1, \quad b_0 = \sqrt{\frac{D_\theta}{D_r}},$$

$$(2.5) \quad a_1 = \sqrt{1 + \frac{D_\theta + 2D_{r_0}}{D_r}}, \quad b_1 = 0,$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a_n &= \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{D_\theta + 2D_{r_0}n^2}{D_r} \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{D_\theta + 2D_{r_0}n^2}{D_r} \right)^2 - \frac{D_\theta}{D_r} (n^2 - 1)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \\ b_n &= \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{D_\theta + 2D_{r_0}n^2}{D_r} \right) - \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{D_\theta + 2D_{r_0}n^2}{D_r} \right)^2 - \frac{D_\theta}{D_r} (n^2 - 1)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

W przypadku obciążenia płyty określonego za pomocą szeregu

$$(2.7) \quad q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r) \cos n\theta$$

rozwiązanie szczególne równania (2.1) można znaleźć metodą wariacji stałych całkowych. Przyjmuje ono następującą postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \bar{w}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(r) \cos n\theta, \\ \bar{w}_0(r) &= -r^2 \int \frac{p_0(r) r dr}{2(b_0^2 - 1)D_r} + \int \frac{p_0(r) r^3 dr}{2(b_0^2 - 1)D_r} + \\ & \quad + r^{1+b_0} \int \frac{p_0(r) r^{2-b_0} dr}{2b_0(b_0^2 - 1)D_r} - r^{1-b_0} \int \frac{p_0(r) r^{2+b_0} dr}{2b_0(b_0^2 - 1)D_r}, \\ \bar{w}_1(r) &= r^{1+a_1} \int \frac{p_1(r) r^{2-a_1} dr}{2a_1^3 D_r} - r^{1-a_1} \int \frac{p_1(r) r^{2+a_1} dr}{2a_1^3 D_r} + \\ & \quad + r \int \frac{p_1(r) r^2 \ln r dr}{a_1^2 D_r} - r \ln r \int \frac{p_1(r) r^2 dr}{a_1^2 D_r}, \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad \bar{w}_n(r) = r^{1+a_n} \int \frac{p_n(r) r^{2-a_n} dr}{2a_n (a_n^2 - b_n^2) D_r} - r^{1-a_n} \int \frac{p_n(r) r^{2+a_n} dr}{2a_n (a_n^2 - b_n^2) D_r} - \\ - r^{1+b_n} \int \frac{p_n(r) r^{2-b_n} dr}{2b_n (a_n^2 - b_n^2) D_r} + r^{1-b_n} \int \frac{p_n(r) r^{2+b_n} dr}{2b_n (a_n^2 - b_n^2) D_r}.$$

W bardzo prostej formie można przedstawić rozwiązanie szczególne w przypadku, gdy obciążenie płyty przedstawione jest za pomocą szeregu

$$q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left( \frac{r}{a} \right)^m \cos n\theta.$$

Aby je uzyskać, należy w rozwiązaniu (2.8) przyjąć

$$p_n(r) = p_n \left( \frac{r}{a} \right)^m.$$

Wykonując całkowanie otrzymujemy

$$(2.9) \quad \bar{w}_0(r) = \frac{p_0 r^{m+4}}{a^m (M^2 - 1) (M^2 - b_0^2) D_r}, \\ \bar{w}_1(r) = \frac{p_1 r^{m+4}}{a^m (M^2 - a_1^2) M^2 D_r}, \\ \bar{w}_n(r) = \frac{p_n r^{m+4}}{a^m (M^2 - a_n^2) (M^2 - b_n^2) D_r},$$

gdzie  $M = m+3$  oraz  $n = 2, 3, 4, \dots$

Podstawiając uzyskane rozwiązanie (2.3) i (2.9) do związków (2.2) otrzymamy siły wewnętrzne:

$$M_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{r,n}(r) \cos n\theta, \quad M_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta,n}(r) \cos n\theta, \\ H(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(r) \cos n\theta, \quad N_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{r,n}(r) \cos n\theta, \\ N_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta,n}(r) \cos n\theta,$$

gdzie

$$(2.10) \quad M_{r,0} = -D_r \left\{ 2E_{01} (1 + \nu_0) + E_{03} [b_0^2 + b_0 (1 + \nu_0) + \nu_0] r^{-1+b_0} + \right. \\ \left. + E_{04} [b_0^2 - b_0 (1 + \nu_0) + \nu_0] r^{-1-b_0} + \frac{p_0 (M+1) (M+\nu_0) r^{m+2}}{a^m (M^2 - 1) (M^2 - b_0^2) D_r} \right\},$$

$$(2.10) \quad M_{r,1} = -D_r \left\{ E_{11} [a_1^2 + a_1(1 + \nu_\theta)] r^{-1+a_1} + E_{12} [a_1^2 - a_1(1 + \nu_\theta)] r^{-1-a_1} + \right. \\ \left. + E_{14} (1 + \nu_\theta) r^{-1} + \frac{p_1 [M^2 + M(1 + \nu_\theta)] r^{m+2}}{a^m (M^2 - a_1^2) M^2 D_r} \right\},$$

$$M_{r,n} = -D_r \left[ E_{n1} f(a_n) r^{-1+a_n} + E_{n2} f(-a_n) r^{-1-a_n} + E_{n3} f(b_n) r^{-1+b_n} + \right. \\ \left. + E_{n4} f(-b_n) r^{-1-b_n} + \frac{p_n f(M) r^{m+2}}{a^m (M^2 - a_n^2) (M^2 - b_n^2) D_r} \right],$$

$$(2.11) \quad f(a_n) = a_n^2 + a_n(1 + \nu_\theta) - \nu_\theta(n^2 - 1),$$

$$M_{\theta,0} = -D_\theta \left[ E_{01} 2(1 + \nu_r) + E_{03} (1 + b_0)(1 + \nu_r b_0) r^{-1+b_0} + \right. \\ \left. + E_{04} (1 - b_0)(1 - \nu_r b_0) r^{-1-b_0} + \frac{p_0 (M+1)(M\nu_r+1) r^{m+2}}{a^m (M^2 - 1)(M^2 - b_0^2) D_r} \right],$$

$$(2.12) \quad M_{\theta,1} = -D_\theta \left\{ E_{11} [\nu_r a_1^2 + a_1(1 + \nu_r)] r^{-1+a_1} + E_{12} [\nu_r a_1^2 - a_1(1 + \nu_r)] r^{-1-a_1} + \right. \\ \left. + E_{14} (1 + \nu_r) r^{-1} + \frac{p_1 [\nu_r M^2 + M(1 + \nu_r)] r^{m+2}}{a^m (M^2 - a_1^2) M^2 D_r} \right\},$$

$$M_{\theta,n} = -D_\theta \left[ E_{n1} h(a_n) r^{-1+a_n} + E_{n2} h(-a_n) r^{-1-a_n} + E_{n3} h(b_n) r^{-1+b_n} + \right. \\ \left. + E_{n4} h(-b_n) r^{-1-b_n} + \frac{p_n h(M) r^{m+2}}{a^m (M^2 - a_n^2) (M^2 - b_n^2) D_r} \right],$$

$$(2.13) \quad h(a_n) = a_n^2 \nu_r + a_n(1 + \nu_r) - n^2 + 1;$$

$$H_0 = 0$$

$$(2.14) \quad H_1 = 2D_k \left[ E_{11} a_1 r^{-1+a_1} - E_{12} a_1 r^{-1-a_1} + E_{14} r^{-1} + \frac{p_1 M r^{m+2}}{a^m (M^2 - a_1^2) M^2 D_r} \right], \\ H_n = 2D_k \left[ E_{n1} a_n r^{-1+a_n} - E_{n2} a_n r^{-1-a_n} + E_{n3} b_n r^{-1+b_n} - E_{n4} b_n r^{-1-b_n} + \right. \\ \left. + \frac{p_n M r^{m+2}}{a^m (M^2 - a_n^2) (M^2 - b_n^2) D_r} \right] n,$$

$$N_{r,0} = 2E_{01} (D_\theta - D_r) r^{-1} + \frac{p_0 r^{m+1}}{a^m (M - 1)},$$

$$(2.15) \quad N_{r,1} = E_{11} [(1 + a_1)(D_\theta - D_r a_1^2) + D_{r\theta} a_1 - D_\theta] r^{-2+a_1} + \\ + E_{12} [(1 - a_1)(D_\theta - D_r a_1^2) - D_{r\theta} a_1 - D_\theta] r^{-2-a_1} + E_{14} (D_{r\theta} + D_\theta) r^{-2} + \\ + \frac{p_1 [(M + 1)(D_\theta - D_r M^2) + D_{r\theta} M - D_\theta] r^{m+1}}{a^m (M^2 - a_1^2) M^2 D_r},$$

$$(2.15) \quad N_{r, n} = D_r \left[ E_{n1} u(a_n) r^{-2+a_n} + E_{n2} u(-a_n) r^{-2-a_n} + E_{n3} u(b_n) r^{-2+b_n} + \right. \\ \left. + E_{n3} u(-b_n) r^{-2-b_n} + \frac{p_n u(M) r^{m+1}}{a^m (M^2 - a_n^2) (M^2 - b_n^2) D_r} \right],$$

$$(2.16) \quad u(a_n) = (1+a_n) \left( \frac{D_\theta}{D_r} - a_n^2 \right) - n^2 \left( \frac{D_\theta}{D_r} - \frac{D_{r\theta}}{D_r} a_n \right);$$

$$N_{\theta, 0} = 0,$$

$$(2.17) \quad N_{\theta, 1} = E_{11} [(1+a_1)(D_\theta + D_{r\theta} a_1) - D_\theta] r^{-2+a_1} + \\ + E_{12} [(1-a_1)(D_\theta - D_{r\theta} a_1) - D_\theta] r^{-2-a_1} + E_{14} (D_{r\theta} + D_\theta) r^{-2} + \\ + \frac{p_1 [(M+1)(MD_{r\theta} + D_\theta) - D_\theta] r^{m+1}}{a^m (M^2 - a_1^2) M^2 D_r},$$

$$(2.18) \quad N_{\theta, n} = D_\theta \left[ E_{n1} v(a_n) r^{-2+a_n} + E_{n2} v(-a_n) r^{-2-a_n} + E_{n3} v(b_n) r^{-2+b_n} + \right. \\ \left. + E_{n4} v(-b_n) r^{-2-b_n} + \frac{p_n v(M) r^{m+1}}{a^m (M^2 - a_n^2) (M^2 - b_n^2) D_r} \right] n, \\ v(a_n) = (1+a_n) \left( 1 + \frac{D_{r\theta}}{D_\theta} a_n \right) - n^2.$$

### 3. Analiza uzyskanego rozwiązania

Postać rozwiązania ogólnego (2.3) równania jednorodnego zależy od tego, czy występujące w nim wykładniki potęg są liczbami rzeczywistymi czy też zespolonymi. Z budowy wzorów (2.4) i (2.5) wynika, że wykładniki  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$  i  $b_1$  mogą być tylko liczbami rzeczywistymi, natomiast dla  $n \geq 2$  należy zbadać, czy wyrażenie występujące pod wewnętrznym pierwiastkiem w związkach (2.6) jest nieujemne. Sformułowany powyżej warunek prowadzi do następującej nierówności:

$$(3.1) \quad n^4 \left( \frac{D_{r\theta}^2}{D_r^2} - \frac{D_\theta}{D_r} \right) + n^2 \left( \frac{D_{r\theta}}{D_r} + \frac{D_\theta D_{r\theta}}{D_r^2} + 2 \frac{D_\theta}{D_r} \right) + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{D_\theta}{D_r} \right)^2 \geq 0.$$

Ponieważ sztywności płytowe mogą być tylko liczbami dodatnimi, zatem widać, że do spełnienia nierówności (3.1) dla wszystkich  $n$  wystarcza, aby współczynnik przy  $n^4$  był nieujemny:

$$\frac{D_{r\theta}^2}{D_r^2} - \frac{D_\theta}{D_r} \geq 0.$$

Jest to równoważne warunkowi

$$(3.2) \quad D_{r\theta}^2 \geq D_\theta D_r.$$

Otrzymany warunek jest podobny do tego, który podaje HUBER, [2], dla płyty o ortotropii prostoliniowej.

W przypadku  $D_{r0}^2 < D_0 D_r$ ,  $a_n$  i  $b_n$  są liczbami zespolonymi przy wskaźnikach  $n > n_c$ , gdzie

$$(3.3) \quad n_c = \left[ \frac{\frac{D_{r0}}{D_r} + \frac{D_0 D_{r0}}{D_r^2} + 2 \frac{D_0}{D_r}}{2 \left( \frac{D_0}{D_r} - \frac{D_{r0}^2}{D_r^2} \right)} \right]^{1/2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{\left( \frac{D_0}{D_r} - \frac{D_{r0}^2}{D_r^2} \right) \left( 1 - \frac{D_0}{D_r} \right)^2}{\frac{D_{r0}}{D_r} + \frac{D_0 D_{r0}}{D_r^2} + 2 \frac{D_0}{D_r}} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

i wyrażają się następującymi wzorami:

$$(3.4) \quad a_n = c_n + id_n, \quad b_n = c_n - id_n,$$

$$(3.5) \quad c_n = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{D_0}{D_r}} (n^2 - 1) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{D_0 + 2D_{r0} n^2}{D_r} \right) \right] \right\}^{1/2},$$

$$d_n = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{D_0}{D_r}} (n^2 - 1) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{D_0 + 2D_{r0} n^2}{D_r} \right) \right] \right\}^{1/2}.$$

Wówczas rozwiązanie równania ugiętej płyty (2.1) ma postać

$$(3.6) \quad w_n = r^{1+c_n} [A_n \sin(d_n \ln r) + B_n \cos(d_n \ln r)] \cos n\theta + \\ + r^{1-c_n} [C_n \sin(d_n \ln r) + D_n \cos(d_n \ln r)] \cos n\theta,$$

gdzie  $A_n, B_n, C_n$  i  $D_n$  są stałymi całkowania oraz  $n > n_c$ .

Oczywiście dla  $n < n_c$  wykładniki  $a_n$  i  $b_n$  są liczbami rzeczywistymi i rozwiązanie równania jednorodnego ma postać (2.3):

Należy jeszcze wyróżnić przypadek, gdy  $n_c$  jest liczbą naturalną. Wówczas dla  $n < n_c$  rozwiązanie ma postać (2.3), dla  $n > n_c$  ma postać (3.6), natomiast dla  $n = n_c$   $a_{n_c} = b_{n_c}$  i rozwiązanie przyjmuje następującą formę:

$$(3.7) \quad w_{n_c} = [r^{1+a_{n_c}} (E_{n_{c1}} + E_{n_{c2}} \ln r) + r^{1+a_{n_c}} (E_{n_{c3}} + E_{n_{c4}} \ln r)] \cos n\theta,$$

gdzie  $E_{n_c}$  i są to stałe całkowania oraz

$$(3.8) \quad a_{n_c} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{D_0 + 2D_{r0} n_c^2}{D_r} \right) \right]^{1/2}.$$

Jak już wspomnieliśmy, wykładniki  $a_n$  i  $b_n$  dla  $n = 0, 1$  mogą być tylko liczbami rzeczywistymi. Nasuwa się zatem pytanie, czy  $a_2$  i  $b_2$  mogą być liczbami zespolonymi. Aby to zachodziło, powinno być  $n_c < 2$ . Sprowadza się to do następującego warunku:

$$(3.9) \quad \frac{D_{r0}}{D_r} < -\frac{1}{8} \left( 1 + \frac{D_0}{D_r} \right) + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{D_0}{D_r}}.$$

Powyższe ma sens tylko wtedy, gdy prawa strona nierówności jest dodatnia. Zachodzi to, gdy  $D_\theta/D_r$  należy do przedziału  $(17 - \sqrt{288}, 17 + \sqrt{288})$ .

#### 4. Warunki dla środka płyty w przypadku $D_{r\theta}^2 \geq D_\theta D_r$

Stałe całkowania powinny być tak dobrane, aby ugięcie było ciągłe i różniczkowalne w środku płyty oraz aby siły wewnętrzne były ograniczone. Okazuje się jednak, że istnieją takie stałe materiałowe, przy których nie można tego osiągnąć.

Zajmijmy się zginaniem osiowo-symetrycznym ( $n = 0$ ). Aby ugięcie płyty było różniczkowalne w środku, należy przyjąć  $E_{04} = 0$ . W celu spełnienia warunków równowagi przyjmujemy

$$E_{01} = \frac{P}{4\pi(D_r - D_\theta)},$$

gdzie  $P$  oznacza siłę skupioną przyłożoną w biegunie ortotropii.

Ze wzorów (2.10) i (2.12) wynika, że przy  $b_0 < 1$ , czyli

$$(4.1) \quad \frac{D_\theta}{D_r} < 1$$

i w środku płyty pojawiają się nieskończenie wielkie momenty zginające.

Dla przypadku  $n = 1$  należy przyjąć  $E_{12} = 0$  w celu zachowania ciągłości ugięcia w środku płyty. Dla spełnienia warunków równowagi przyjmujemy

$$E_{04} = \frac{M_y}{\pi(D_\theta + 2D_{r\theta} + D_r)},$$

gdzie  $M_y$  oznacza moment skupiony przyłożony w środku płyty, którego wektor jest równoległy do osi  $\theta = \pi/2$ .

Ze wzorów (2.15) i (2.17) wynika, że dla  $a_1 < 2$ , czyli

$$(4.2) \quad \frac{D_{r\theta}}{D_r} < \frac{3}{2} - \frac{D_\theta}{2D_r},$$

w środku płyty istnieją nieskończenie wielkie siły tnące (niezależnie od osobliwości jakie daje przyłożony w środku moment skupiony).

Dla  $n = 2, 3, 4$ , należy przyjąć stałe  $E_{n2} = E_{n4} = 0$  w celu zapewnienia różniczkowalności ugięcia w środku płyty. Aby i siły tnące były ograniczone, powinno być  $a_n \geq 2$  oraz  $b_n \geq 2$ , co daje  $D_\theta/D_r \geq 36$ . Jak widać, otrzymany wynik nie posiada praktycznego znaczenia.

Okazuje się jednak, że dla stałych materiałowych spełniających równanie  $D_{r\theta}^2 = D_\theta D_r$  oraz nierówność  $D_\theta > D_r$  rozwiązanie posiada następujące cechy szczególne:  $a_n > 2$  dla  $n = 2, 3, 4, \dots$ ,  $b_2 > 1$ ,  $b_n \geq 2$ , dla  $n = 3, 4, 5, \dots$  oraz  $u(b_2) = v(b_2) = 0$ . Zatem siły wewnętrzne w środku płyty są ograniczone.



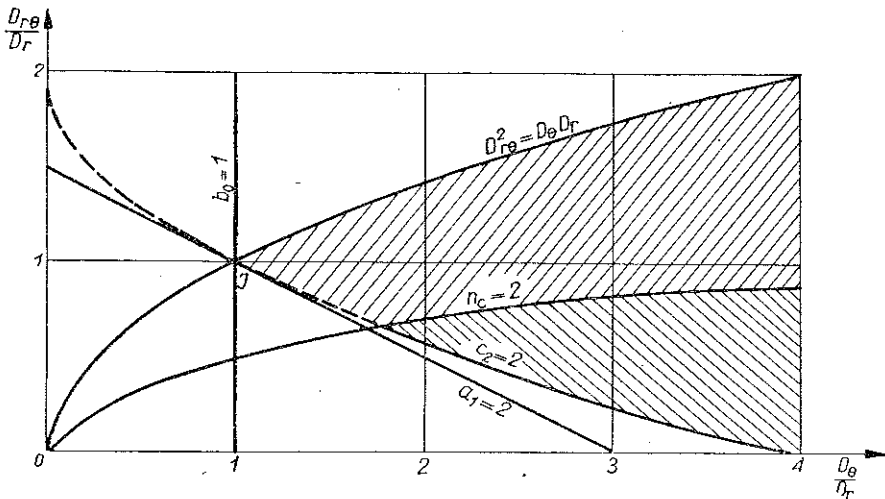
5. Warunki dla środka płyty w przypadku  $D_{r0}^2 < D_\theta D_r$  oraz  $n_c < 2$ 

Aby ugięcia i siły wewnętrzne były ograniczone w środku płyty, należy we wzorze (3.6) przyjąć stałe  $C_n = D_n = 0$ . Jednak w przypadku  $n_c < 2$ , czyli

$$(5.1) \quad \frac{D_{r0}}{D_r} < \frac{15}{8} - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{D_\theta}{D_r}} - \frac{D_\theta}{8D_r},$$

w środku płyty pojawiają się nieskończenie wielkie siły tnące.

Wyniki uzyskane w p. 4 i 5 zilustrowano wykresem (rys. 1) sporządzonym we współrzędnych  $D_\theta/D_r$ ,  $D_{r0}/D_r$ . Każdemu punktowi płaszczyzny  $\left(\frac{D_\theta}{D_r}, \frac{D_{r0}}{D_r}\right)$  przypo-



Rys. 1

rządkowane są pewne cechy sprężystości materiału. I tak punktowi I (1,1) odpowiada izotropia. Dla punktów leżących ponad parabolą  $D_{r0}^2 = D_\theta D_r$  rozwiązanie równania płyty ma postać (2.3). Dla punktów leżących poniżej wspomnianej paraboli rozwiązanie ma postać (2.3) przy  $n < n_c$ , natomiast przy  $n > n_c$  postać (3.6). Dla punktów leżących poniżej paraboli  $n_c = 2$  mamy  $n_c < 2$ .

Dla punktów leżących na prawo od prostej  $b_0 = 1$  momenty zginające są ograniczone w przypadku  $n = 0$ . Dla punktów leżących powyżej prostej  $a_1 = 2$  siły tnące są ograniczone w przypadku  $n = 1$ . Dla punktów leżących wzdłuż paraboli  $D_{r0}^2 = D_\theta D_r$  siły tnące są ograniczone przy  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

Dla punktów leżących powyżej paraboli  $c_2 = 2$  i równocześnie poniżej paraboli  $a_c = 2$  siły tnące są ograniczone dla  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

Dla punktów leżących wewnątrz zakresowanego klina włącznie z jego brzegiem siły wewnętrzne są ograniczone w środku płyty.

## Literatura cytowana w tekście

- [1] G. CARRIER, *The bending of the cylindrically anisotropic plate*, J. Appl. Mech., **11** (1944).  
 [2] M. T. HUBER, *Pisma, Teoria sprężystości*, tom. II, PWN, Warszawa 1964.  
 [3] С. Т. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Москва 1957.  
 [4] С. Т. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, М — Л, 1950.  
 [5] A. M. SEN GUPTA, *Bending of a cylindrically anisotropic plate with eccentric load*, J. Appl. Mech., **19** (1952).

## Резюме

## О НЕКОТОРОМ РЕШЕНИИ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК, ОБЛАДАЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПИЕЙ

В работе приводится анализ общего однородного решения изогнутой пластинки, проведенного Сен Гупта. Обсуждается влияние параметров материала на форму решения, а также и особенность внутренних сил (усилий) в середине пластинки. Полученные результаты иллюстрирует диаграмма 1.

Дается также частное решение пластинки в случае нагрузки, которую можно представить в виде ряда  $\sum_n p_n(r) \cos n\theta$ . Это решение было получено методом вариации постоянных интегрирования.

## Summary

## A CERTAIN SOLUTION IN THE THEORY OF BENDING OF CYLINDRICAL ORTHOTROPIC THIN PLATES

This is an analysis of the general solution of the homogeneous equation of plate deflection obtained by SEN GUPTA. The influence of the material parameters on the form of the solution and the singularities of the internal forces at the centre of the plate is discussed. The results are illustrated by a graph (Fig. 1).

A particular solution of the plate equation is obtained in the case in which the load can be represented in the form of a series  $\sum_n p_n(r) \cos n\theta$ . This is done by the method of variation of the integration constants.

KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI  
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dn. 18 listopada 1963 r.