

UOGÓLNIONY PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA
W WIRUJĄCYM LEPKOSPŘEŻYSTYM Dysku ZE SPRĘŻYSTYM PIERŚCIENIEM

JÓZEF KOSSECKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W jednej z ostatnich prac J. IGNACZAKA, [2], zbadany został stan naprężenia i przemieszczenia w jednorodnym walcu (lub dysku), wirującym dookoła swej osi geometrycznej ze stałą prędkością kątową ω przy założeniu, że walec (lub dysk) wykonany jest z materiału lepkospřeżystego, odpowiadającego modelowi Maxwella. Odpowiednie rozwiązania podano zarówno przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia, jak również dla płaskiego stanu naprężenia. Okazało się, że przy założeniu płaskiego stanu naprężenia przemieszczenie radialne na brzegu dysku dąży do nieskończoności, gdy czas wzrasta nieograniczenie. Wskutek tego rozwiązanie dla dysku mieści się w ramach liniowej teorii tylko w wystarczająco małym początkowym przedziale czasu.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie stanu naprężenia oraz przemieszczenia dla dysku wykonanego z lepkospřeżystego materiału odpowiadającego modelowi Maxwella, otoczonego pierścieniem wykonanym z materiału sprężystego. Zakładamy, że dysk znajduje się w stanie izotermicznym, w płaskim stanie naprężenia oraz że wiruje wokół swej osi geometrycznej ze stałą prędkością kątową ω . Zatem przyjmujemy, że prędkość ta zmienia się w czasie według funkcji Heaviside'a. W chwili $t = 0^+$ dysk składa się z dwóch współśrodkowych pierścieni, których własności sprężyste są w ogólności różne. Dla $t > 0$ zewnętrzny pierścień pozostaje sprężysty, zaś wewnętrzny zmienia swe właściwości reologiczne. Na linii rozdziału obu pierścieni w każdej chwili żądamy ciągłości przemieszczenia radialnego i naprężenia radialnego.

Interesuje nas między innymi, czy funkcje przemieszczeń radialnych wykazywać będą osobliwości, czy też dążyć będą do wartości skończonych w rozważanym przedziale czasu $0 < t < \infty$.

2. Zagadnienie dysku wirującego

Założmy, że prędkość kątową dysku określa równanie

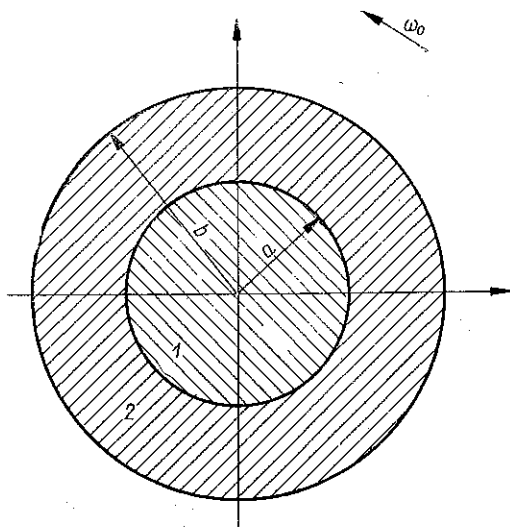
$$(2.1) \quad \omega(t) = \omega_0 \eta(t),$$

gdzie $\eta(t)$ jest funkcją Heaviside'a oraz $\omega_0 = \text{const.}$

Równanie (2.1) oznacza, że ruch dysku zaczyna się w chwili $t = 0^+$ i przybiera od razu stałą prędkość kątową ω_0 dla $t > 0$.

Dysk składa się z obszaru wewnętrznego 1 o przekroju kołowym i promieniu a , otoczonego obszarem 2 o kształcie pierścienia o promieniu wewnętrznym a i promieniu zewnętrznym b . Obszary 1 i 2 wykonane są na ogół z różnych materiałów charakteryzujących się różnymi modułami Younga i współczynnikami Poissona, a ponadto materiał obszaru 1 jest materiałem lepkosprężystym, a więc posiadającym zmienne w czasie własności sprężyste, natomiast obszar 2 wykonany jest z materiału idealnie sprężystego, a więc nie zmienia w czasie swych własności sprężystych. Ze względu na biegunową symetrię pojawiającą się w naszym problemie wyrazimy równania pola we współrzędnych biegunowych r, θ . Rozważane pole jest scharakteryzowane przez składowe tensorów odkształcenia $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ oraz naprężenia σ_r, σ_θ . Radialną składową wektora przemieszczenia oznaczymy przez u .

Dla ośrodka sprężystego równania pola we współrzędnych biegunowych dla płaskiego stanu naprężenia przybierają postać podaną w pracy [4] na str. 76:



Rys. 1

równanie równowagi

$$(2.2) \quad \frac{d(r\sigma_r)}{dr} = \sigma_\theta - \rho \omega_0^2 r^2,$$

gdzie ρ oznacza gęstość masy dysku; przyjmujemy że jest ona stała w obszarach 1 i 2.

Równania geometryczne

$$(2.3) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Prawo Hooke'a

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r). \end{aligned}$$

Warunki brzegowe dla obszaru przedstawionego na rys. 1 przybierają postać

$$(2.5) \quad \sigma_{r1} < \infty \quad \text{dla} \quad r = 0,$$

zakładamy bowiem, że naprężenie w środku dysku nie może być nieskończone.

Na zewnętrznym brzegu dysku ($r = b$)

$$(2.6) \quad \sigma_{r2} = 0,$$

a na granicy obszarów 1 oraz 2 ($r = a$)

$$(2.7) \quad u_1 = u_2, \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r2}.$$

Równania (2.2)–(2.4) odnoszą się do obu rozważanych obszarów. Jako rozwiązania tych równań przy warunkach brzegowych (2.5)–(2.7) otrzymamy w obszarze 1:

$$(2.8) \quad \hat{\sigma}_{\theta 1} = I - (1 + 3\nu_1)x^2, \quad \hat{\sigma}_{r1} = I - (3 + \nu_1)x^2,$$

$$\hat{u}_1 = \frac{(1 - \nu_1)E_1^0}{E_1} x [I - (1 + \nu_1)x^2].$$

Dla obszaru 2

$$(2.9) \quad \hat{\sigma}_{\theta 2} = -(1 + 3\nu_2)x^2 + \frac{1 + \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} I + J - \left(\frac{x_b}{x}\right)^2 L,$$

$$\hat{\sigma}_{r2} = -(3 + \nu_2)x^2 + \frac{1 - \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} I + J + \left(\frac{x_b}{x}\right)^2 L,$$

$$\hat{u}_2 = \frac{(1 - \nu_2)E_2^0}{E_2} x \left[-(1 + \nu_2)x^2 + \frac{1 + \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} I + \right. \\ \left. + J - \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{x_b}{x}\right)^2 L \right].$$

W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(2.10) \quad \hat{\sigma}_{ki} = \frac{8\sigma_{ki}}{a^2 \omega_0^2 \varrho}, \quad i = 1, 2, \quad k = \theta, r,$$

przy czym σ_{ki} jest odpowiednią składową tensora naprężenia w obszarze i ;

$$(2.11) \quad \hat{u}_i = \frac{8E_i^0 u_i}{a^3 \omega_0^2 \varrho}, \quad i = 1, 2,$$

przy czym u_i oznacza przemieszczenie dla obszaru i , a E_i^0 jednostkowy moduł Younga jednakowy dla obu obszarów;

$$(2.12) \quad x = \frac{r}{a} \quad \begin{cases} x < 1 \text{ dla obszaru 1,} \\ x > 1 \text{ dla obszaru 2;} \end{cases}$$

symbole ν_i oraz E_i oznaczają odpowiednio współczynniki Poissona i moduły Younga dla obszarów 1 i 2;

$$(2.13) \quad I = \frac{1}{g} \{ (1 - x_b^2) [(1 - \nu_2) - (1 - \nu_1) \hat{E}] - (\nu_2 - \nu_1) [(1 - \nu_2) + \\ + x_b^2 (1 + \nu_2)] + 2 (3 + \nu_2) x_b^4 \},$$

$$J = \frac{(\nu_2 - \nu_1) - (3 + \nu_2) x_b^4}{1 - x_b^2}, \quad L = \frac{(3 + \nu_2) x_b^2 - (\nu_2 - \nu_1)}{1 - x_b^2},$$

$$g = 2x_b^2 + [(1 - \nu_2) - \hat{E} (1 - \nu_1)] (1 - x_b^2);$$

$$(2.14) \quad x_b = \frac{b}{a} > 1, \quad \hat{E} = \frac{E_2}{E_1}.$$

Z rozwiązań (2.8) i (2.9) łatwo przejść do rozwiązań dla dysku jednorodnego podanych w pracy [4], str. 77.

Dla ośrodka lepkosprężystego równania pola będą miały podobną postać jak dla ciała sprężystego (por. praca [1], str. 63) z tym zastrzeżeniem, że wszystkie funkcje będą zależeć od czasu.

Jeżeli na odpowiednich równaniach pola lepkosprężystego dokonamy transformacji Laplace'a względem czasu, to otrzymamy równania podane w pracy [2], str. 9:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dr}(r\sigma_r^*) - \sigma_\theta^* + \frac{\rho\omega_0^2 r^2}{p} &= 0, \\ \varepsilon_r^* &= \frac{du^*}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^* = \frac{u^*}{r}, \\ \varepsilon_r^*(r, p) &= \frac{1}{pE^*(p)} [\sigma_r^*(r, p) - \nu^*(p)p\sigma_\theta^*(r, p)], \\ \varepsilon_\theta^*(r, p) &= \frac{1}{pE^*(p)} [\sigma_\theta^*(r, p) - \nu^*(p)p\sigma_r^*(r, p)]. \end{aligned}$$

Funkcje oznaczone gwiazdką oznaczają transformaty Laplace'a odpowiednich funkcji.

Należy pamiętać, że $\lim_{p \rightarrow \infty} p f^*(p) = f(0^+)$ ([5], str. 256). Analogicznie transformować się będą warunki brzegowe (2.5)–(2.7) oraz rozwiązania w przetransformowanym obszarze przyjmą postać analogiczną do (2.8) i (2.9). Aby otrzymać poszukiwane rozwiązania dla ciała lepkosprężystego należy wykonać odwrotną transformację Laplace'a.

Dla szczególnego przypadku, jeżeli obszar 1 wykazuje właściwości odpowiadające modelowi Maxwella, przyjmujemy zgodnie z [2], str. 12:

$$(2.16) \quad \nu_1^*(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{\beta_1}{p + \alpha_1} \right), \quad E_1^*(p) = \frac{E_1}{p + \alpha_1},$$

gdzie

$$(2.17) \quad \alpha_1 = \frac{2}{3}(1 + \nu_1) \frac{1}{\tau_0^1}, \quad \beta_1 = 1 - 2\nu_1.$$

Symbole E_1 i ν_1 oznaczają odpowiednio $E_1 = E_1(0^+)$ i $\nu_1 = \nu_1(0^+)$, τ_0^1 natomiast czas relaksacji dla materiału, z którego wykonany jest pierścień 1.

Materiał obszaru 2 ma cechy sprężyste, wobec tego E_2 i ν_2 oznaczają odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona dla tego obszaru.

Zgodnie ze wzorami (2.8) i (2.9) i analogią lepkośćprężystą otrzymamy kolejno:

$$(2.18) \quad p \hat{\sigma}_{\theta 1}^*(x, p) = I^* - [1 + 3p \nu_1^*(p)] x^2,$$

$$(2.19) \quad p \hat{\sigma}_{r 1}^*(x, p) = I^* - [3 + p \nu_1^*(p)] x^2,$$

$$(2.20) \quad p \hat{u}_1^*(x, p) = \frac{[1 - p \nu_1^*(p)] E_1^0}{p E_1^*(p)} x \{I^* - [1 + p \nu_1^*(p)] x^2\},$$

$$(2.21) \quad p \hat{\sigma}_{\theta 2}^*(x, p) = - (1 + 3\nu_2) x^2 + \frac{1 + \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} I^* + J^* - \left(\frac{x_b}{x}\right)^2 L^*,$$

$$(2.22) \quad p \hat{\sigma}_{r 2}^*(x, p) = - (3 + \nu_2) x^2 + \frac{1 - \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} I^* + J^* + \left(\frac{x_b}{x}\right)^2 L^*,$$

$$(2.23) \quad p \hat{u}_2^*(x, p) = \frac{(1 - \nu_2) E_2^0}{E_2} x \left[- (1 + \nu_2) x^2 + \frac{1 + \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} I^* + \right. \\ \left. + J^* - \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{x_b}{x}\right)^2 L^* \right]_i,$$

gdzie

$$(2.24) \quad I^* = \frac{1}{g^*} \left\{ (1 - x_b^2) \left[(1 - \nu_2^2) - (1 - p^2 \nu_1^{*2}(p)) \frac{E_2}{p E_1^*(p)} \right] - \right. \\ \left. - (\nu_2 - p \nu_1^*(p)) [(1 - \nu_2) + x_b^2 (1 + \nu_2)] + 2 (3 + \nu_2) x_b^4 \right\}, \\ J^* = \frac{[\nu_2 - p \nu_1^*(p)] - (3 + \nu_2) x_b^4}{1 - x_b^2}, \quad L^* = \frac{(3 + \nu_2) x_b^2 - [\nu_2 - p \nu_1^*(p)]}{1 - x_b^2}, \\ g^* = \left[(1 - \nu_2) - \frac{E_2}{p E_1^*(p)} (1 - p \nu_1^*(p)) \right] (1 - x_b^2) + 2 x_b^2.$$

Jeżeli do wzorów (2.18)–(2.24) wprowadzimy funkcje parametru p według (2.16) i wykonamy odwrotne transformacje Laplace'a, to otrzymamy po pewnych przekształceniach wzory dla naprężeń i przemieszczeń w postaci:

$$(2.25) \quad \hat{\sigma}_{\theta 1}(x, t) = \eta(t) \left\{ A \exp(-\delta t) + B \exp(-a_1 t) + \frac{3}{2} \beta_1 x^2 \exp(-a_1 t) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} x^2 \right\},$$

$$(2.26) \quad \hat{\sigma}_{r 1}(x, t) = \eta(t) \left\{ A \exp(-\delta t) + B \exp(-a_1 t) + \frac{1}{2} \beta_1 x^2 \exp(-a_1 t) - \right. \\ \left. - \frac{7}{2} x^2 + \frac{3}{2} \right\},$$

$$(2.27) \quad \hat{u}_1(x, t) = \eta(t) x \left\{ C \exp(-\delta t) + D \exp(-\alpha_1 t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{E_1^0}{E_1} \beta_1^2 x^2 \exp(-\alpha_1 t) + F + \left[\frac{1}{4} \frac{E_1^0}{E_1} (-3 - 2\beta_1) \right] x^2 \right\},$$

$$(2.28) \quad \hat{\sigma}_{\theta 2}(x, t) = \eta(t) \left\{ [A \exp(-\delta t) + (B + \frac{1}{2} \beta_1) \exp(-\alpha_1 t) + \right. \\ \left. + 1 + \nu_2] \frac{1 + \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} - (1 + 3\nu_2) x^2 - \frac{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} [(3 + \nu_2) x_b^4] \right\},$$

$$(2.29) \quad \hat{\sigma}_{r 2}(x, t) = \eta(t) \left\{ [A \exp(-\delta t) + (B + \frac{1}{2} \beta_1) \exp(-\alpha_1 t) + \right. \\ \left. + 1 + \nu_2] \frac{1 - \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} - (3 + \nu_2) x^2 - \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} [(3 + \nu_2) x_b^4] \right\},$$

$$(2.30) \quad \hat{u}_2(x, t) = \eta(t) \left\langle \frac{(1 - \nu_2) E_2^0}{E_2} x \left\{ [A \exp(-\delta t) + (B + \frac{1}{2} \beta_1) \exp(-\alpha_1 t) + \right. \right. \\ \left. \left. + 1 + \nu_2] \frac{1 + \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{x_b}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} - (1 + \nu_2) x^2 - \frac{1 + \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{1}{x}\right)^2}{1 - x_b^2} [(3 + \nu_2) x_b^4] \right\} \right\rangle.$$

Stałe A, B, C, D i F wyrażają się za pomocą wzorów

$$A = \frac{1}{g} \cdot \left\langle (1 - x_b^2) \left\{ (1 - \nu_2^2) - \frac{1}{4} \hat{E} \left[3 + 2\beta_1 \left(1 + \frac{\beta_1 \delta}{2(\alpha_1 - \delta)} \right) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\frac{1}{2} \beta_1 \delta}{\alpha_1 - \delta} + \frac{1}{2} - \nu_2 \right) [(1 - \nu_2) + x_b^2(1 + \nu_2)] + 2(3 + \nu_2) \cdot x_b^4 \right\rangle - \frac{3}{2},$$

$$(2.31) \quad B = \frac{\alpha_1 \beta_1}{2g(\alpha_1 - \delta)} \left\{ \frac{\beta_1}{2} \hat{E} (1 - x_b^2) - [(1 - \nu_2) + x_b^2(1 + \nu_2)] \right\},$$

$$C = \frac{1}{2g} \frac{E_1^0}{E_1} \left\langle \left(1 + \beta_1 - \frac{\alpha_1}{\delta} \right) \left\{ (1 - x_b^2) \left[(1 - \nu_2^2) - \frac{1}{4} \hat{E} (3 + 2\beta_1 - \beta_1^2 - 3 \frac{\alpha_1}{\delta}) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(3 + \nu_2) x_b^4 + \frac{\hat{E} (1 - x_b^2) \alpha_1 \beta_1^2}{4(\delta - \alpha_1)} \right\} + [(1 - \nu_2) + x_b^2(1 + \nu_2)] \left\{ (1 + \beta_1) \left[\frac{1}{2} \left(1 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\beta_1 \delta}{\alpha_1 - \delta} \right) - \nu_2 \right] + \alpha_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{\delta - \alpha_1} - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{\nu_2}{\delta} \right] \right\} \right\rangle,$$

$$D = \frac{1}{4g} \frac{E_1^0}{E_1} \frac{\alpha_1 \beta_1^2}{\delta - \alpha_1} \left\{ [(1 - \nu_2) + x_b^2(1 + \nu_2)] - \frac{1}{2} \hat{E} \beta_1 (1 - x_b^2) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 F = \frac{E_1^0}{E_2} < \frac{1}{x_b^2 - 1} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \nu_2 \right) [(1 - \nu_2) + x_b^2 (1 + \nu_2)] + 2x_b^4 (3 + \nu_2) \right\} - \\
 - \left\{ \frac{1}{4} \hat{E} \left(\frac{3a_1}{\delta} - 6 - 5\beta_1 \right) + (1 - \nu_2^2) \right\} >, \\
 (2.32) \quad g = 2x_b^2 + (1 - x_b^2) [(1 - \nu_2) - \hat{E} (1 - \nu_1)], \\
 \delta = \frac{1}{2} \hat{E} \frac{\alpha_1}{g} (x_b^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Jak wynika z warunków brzegowych

$$\hat{u}'_1(1, \tau) = \hat{u}'_2(1, \tau), \quad \hat{\sigma}_{r1}(1, \tau) = \hat{\sigma}_{r2}(1, \tau), \quad \hat{\sigma}_{r2}(2, \tau) = 0.$$

Jeżeli założymy, że pierścień sprężysty zanika, tzn. że $x = b/a \rightarrow 1$ oraz oznaczymy $\tau = t/\tau_0$, $E_1 = E$, $\nu_1 = \nu$, $\gamma = a \tau_0$ oraz $x = \xi$, to funkcje \hat{u}_1 , $\hat{\sigma}_{\theta 1}$ i $\hat{\sigma}_{r1}$ przejdą w odpowiednie funkcje podane w pracy [2]:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}'_r(\xi, \tau) &= (1 - \xi^2) \left\{ 3 + \frac{1}{2} [1 - \beta \exp(-\gamma\tau)] \right\} \eta(\tau), \\
 (2.33) \quad \bar{\sigma}'_\theta(\xi, \tau) &= \left\{ 3 - \xi^2 + \frac{1}{2} (1 - 3\xi^2) [1 - \beta \exp(-\gamma\tau)] \right\} \eta(\tau), \\
 \bar{u}^0(\xi, \tau) &= \xi \left\{ 1 + \beta + \gamma\tau + \frac{1}{4} (1 - \xi^2) [3 + 2\beta + 3\gamma\tau - \beta^2 \exp(-\gamma\tau)] \right\} \eta(\tau).
 \end{aligned}$$

Łatwo też sprawdzić, że jeżeli podstawimy $t = 0^+$ do wzorów (2.25)–(2.30), to otrzymamy wzory (2.8) i (2.9). Oznacza to, że początkowy stan ciała o własnościach odpowiadających modelowi Maxwella jest stanem sprężystym.

Obecnie zbadamy na przykładzie przebieg zmienności w czasie naprężeń i przemieszczeń. Wprowadźmy oznaczenia:

$$(2.34) \quad \gamma_1 = a_1 \tau_0^1, \quad \tau = \frac{t}{\tau_0^1}, \quad \hat{u}'_1 = \hat{u}_1 \frac{E_1}{E_1^0}, \quad \hat{u}'_2 = \hat{u}_2 \frac{E_2}{E_2^0},$$

oraz założymy

$$(2.35) \quad E_1 = E_2, \quad \nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{4}, \quad x_b = 2.$$

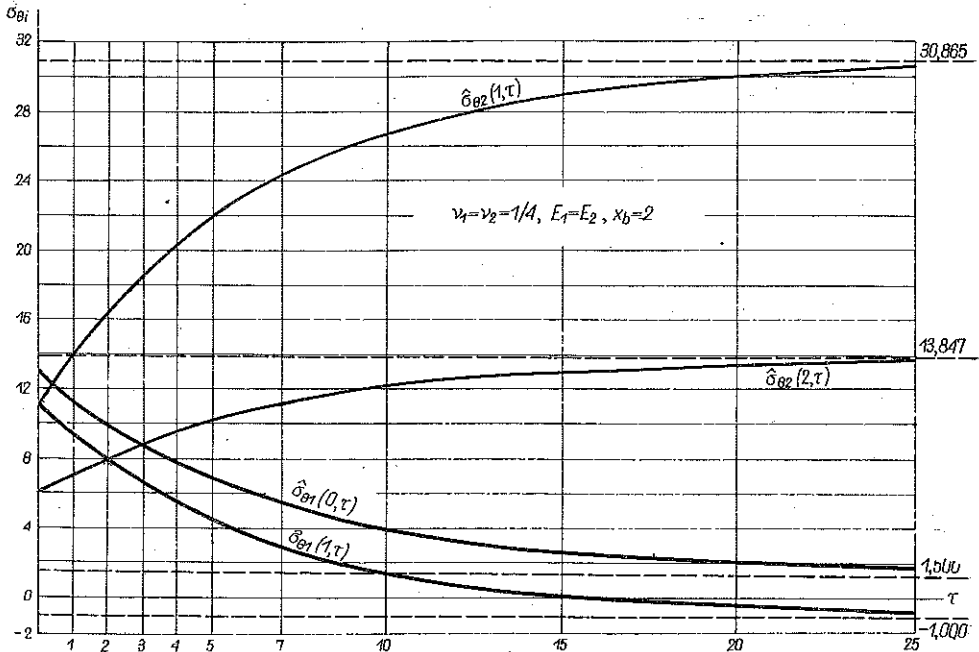
Warunek (2.35) oznacza, że cały dysk w chwili początkowej jest jednorodny, zaś dla $t > 0$ materiał obszaru 1 nabiera własności lepko-sprężystych, a obszar 2 pozostaje nadal sprężysty.

W tablicy 1 oraz na rysunkach 2, 3 i 4 podano wartości odpowiednich funkcji obliczonych ze wzorów (2.25)–(2.30). Jak widać na rys. 2, naprężenia obwodowe $\hat{\sigma}_{\theta 1}$ maleją w miarę upływu czasu dążąc asymptotycznie dla $t \rightarrow \infty$ do odpowiednich wartości skończonych [$\hat{\sigma}_{\theta 1}(0, \infty) = 1,500$, $\hat{\sigma}_{\theta 1}(1, \infty) = -1,000$]. Widać również

Tablica 1 $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{4}, x_b = 2$

τ	$\hat{\sigma}_{\theta 1}$		$\hat{\sigma}_{r 1}$		\hat{u}'_1	$\hat{\sigma}_{\theta 2}$		\hat{u}'_2
	$x = 0$	$x = 1,0$	$x = 0$	$x = 1,0$	$x = 1,0$	$x = 1,0$	$x = 2,0$	$x = 2,0$
0	12,999	11,249	12,999	9,749	7,833	11,265	6,017	11,950
1,0	11,441	9,267	11,441	8,050	11,233	14,115	7,147	14,200
2,0	10,043	7,685	10,043	6,590	14,153	16,565	8,127	16,170
3,0	8,829	6,391	8,829	5,350	16,633	18,615	8,947	17,850
4,0	7,791	5,318	7,791	4,300	18,733	20,365	9,647	19,250
5,0	6,876	4,388	6,876	3,380	20,553	21,885	10,257	20,470
7,0	5,449	2,951	5,449	1,950	23,433	24,285	11,212	22,380
10,0	3,970	1,470	3,970	0,470	26,393	26,745	12,197	24,350
15,0	2,630	0,130	2,630	-0,870	29,073	28,980	13,094	26,140
20,0	2,017	-0,483	2,017	-1,483	30,299	30,005	13,502	26,960
25,0	1,735	-0,765	1,735	-1,765	30,863	30,474	13,690	27,336
∞	1,500	-1,000	1,500	-2,000	31,333	30,865	13,847	27,650

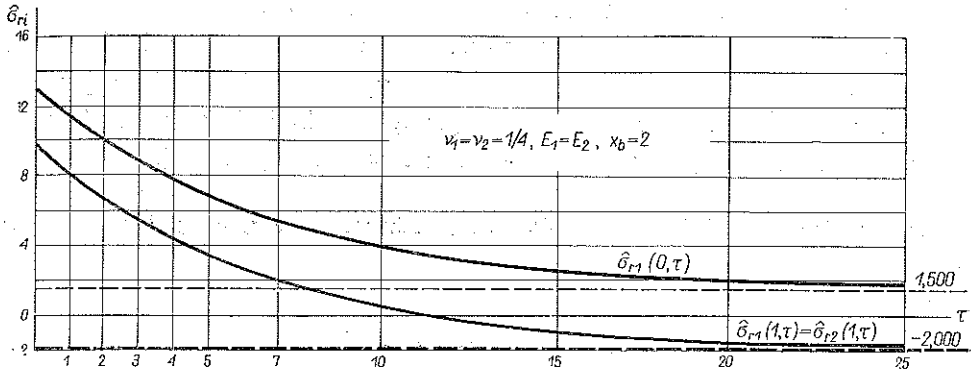
z rys. 2, że w miarę oddalania się od środka maleją naprężenia $\hat{\sigma}_{\theta 1}$ jako funkcje promienia, a w pewnej odległości od granicy obszarów 1 i 2 dla x bliskich jedności, w miarę upływu czasu, przyjmują wartości ujemne. Dla jednorodnego dysku lepko-



Rys. 2

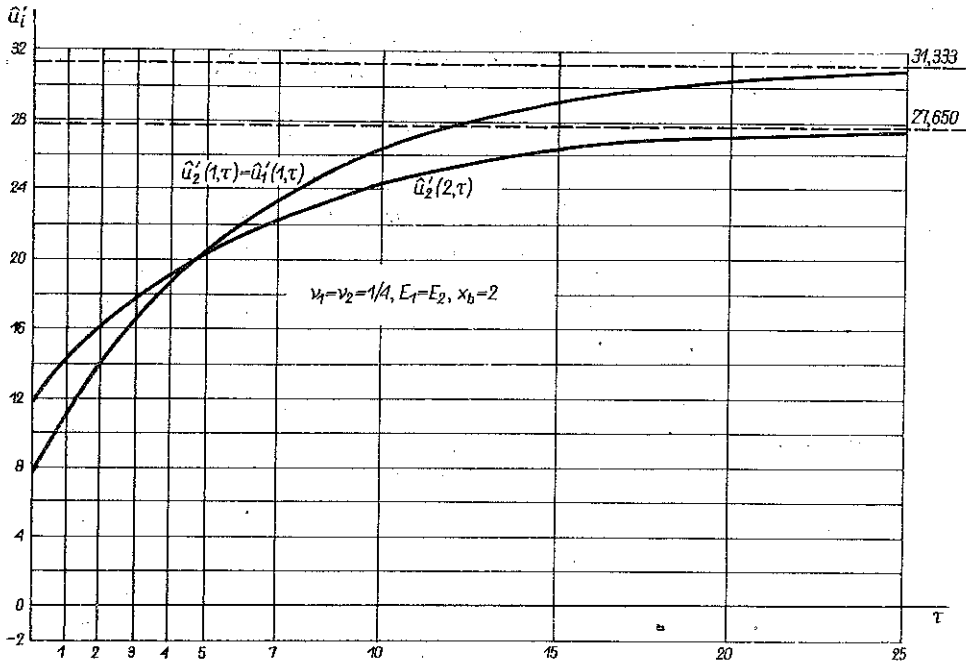
sprężystego naprężenia obwodowe miały wyłącznie wartości dodatnie (por. [2], str. 17). W obszarze 2 naprężenia obwodowe $\hat{\sigma}_{\theta 2}$ rosną z czasem, przy czym otrzymujemy $\hat{\sigma}_{\theta 2}(1, \infty) = 30,865$, $\hat{\sigma}_{\theta 2}(2, \infty) = 13,847$. Naprężenia te maleją w miarę

oddalania się od środka układu przybierając wyłącznie wartości dodatnie. Jeżeli chodzi o wykres naprężeń radialnych, to jest on, jak widać na rys. 3, podobny do wykresu naprężeń obwodowych obszaru wewnętrznego: mamy w tym przypadku



Rys. 3

dla $t = \infty$ $\hat{\sigma}_{r1}(0, \infty) = 1,500$, $\hat{\sigma}_{r1}(1, \infty) = -2,000$. Jak widać, naprężenia $\hat{\sigma}_{r1}$ w pewnej odległości od granicy obu obszarów przyjmują po pewnym czasie wartości ujemne. Występowanie wartości ujemnych naprężeń radialnych tłumaczy się, po-



Rys. 4

dobnie jak przy naprężeniach obwodowych, oporem stawianym rozszerzającemu się obszarowi lepkosprężystemu 1 przez pierścień sprężysty 2. Funkcje przemieszczeń \hat{u}'_1 i \hat{u}'_2 rosną z czasem dążąc asymptotycznie do wartości $\hat{u}'_1(1, \infty) = 31,333$,

$\hat{u}'_2 = (2, \infty) = 27,650$. W jednorodnym dysku lepkosprężystym przemieszczenia na obwodzie dążyły do nieskończoności, gdy czas dążył do nieskończoności ([2], str. 18), natomiast w omawianym przypadku są one ograniczone, gdyż pierścień sprężysty nie pozwala na nieskończone przemieszczenia. Wobec tego zastosowanie otrzymanych rozwiązań nie jest ograniczone do skończonego przedziału czasu.

Wreszcie należy zaznaczyć, że analiza rozszerzania się walca lepkosprężystego wydrążonego w środku, wzmocnionego sprężystą powłoką i obciążonego obwodowym ciśnieniem wewnętrznym, przeprowadzona została w pracy [6].

Autor tą drogą uprzejmie dziękuje dr. W. Piechockiemu za cenne uwagi i sugestie przy pisaniu tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, PWN, Warszawa 1963.
- [2] J. IGNACZAK, *Plane-strain and generalized plane-stress analysis of a rotating viscoelastic cylinder* Technical Report 4, Contract 562 (30), Brown University, February 1962.
- [3] E. STERNBERG, M. GURTIN, *Further study of thermal stresses in viscoelastic materials with temperature dependent properties*, Technical Report 2, Contract 562 (30), Brown University, October 1961.
- [4] S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1963.
- [5] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Operational methods in applied mathematics*, 2nd Ed., Oxford University Press, 1953.
- [6] E. H. LEE, J. R. M. RADOK, W. B. WOODWARD, *Stress analysis for linear viscoelastic materials*, Trans. Soc. Rheologie, 3, 1959.

Резюме

ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВО ВРАЩАЮЩИМСЯ ВЯЗКО-УПРУГОМ ДИСКЕ С УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Исследуется поведение напряжений и перемещений для диска, изготовленного из вязко-упругого материала, соответствующего модели Максвелла, окруженного кольцом из упругого материала. Предполагается, что диск находится в изотермическом состоянии в плоском напряженном состоянии, вращаясь вокруг своей геометрической оси с постоянной угловой скоростью ω . Принимается, что эта скорость изменяется во время согласно функции Хевисайда. В момент $t = 0^+$, диск состоит из двух концентрических колец, упругие свойства которых в общем не одинаковы. Для $t > 0$ внешнее кольцо остается упругим, внутреннее же изменяет свои реологические свойства. На линии раздела обоих колец, для каждого времени требовалось непрерывность радиального перемещения и радиального напряжения.

В работе, по сравнению с однородным вязко-упругим диском показано, что радиальные перемещения на краях диска осесимметрически стремятся к конечным значениям, при неограниченном росте времени.

Summary

GENERALIZED PLANE STATE OF STRESS IN A ROTATING VISCOELASTIC DISC
HAVING AN ELASTIC HOOP

The object of the paper is to investigate the state of stress and strain in a disc made of a viscoelastic-material, of the Maxwellian type and having a hoop made of an elastic material. It is assumed that the disc is in an isothermal state under plane stress and rotates about its geometric axis with constant angular velocity ω . It is assumed that this velocity varies in time according to Heaviside's function. At the time $t = 0^+$ the disc is composed of two concentric rings, of which the elastic properties are different, in general. For $t > 0$, the outer ring remains elastic while the inner one changes its rheologic properties. At the common boundary of the two rings, continuity of radial displacement and stress is required.

The paper shows that, contrarily to the case of homogeneous viscoelastic disc, the radial displacement at the edge of the disc tends asymptotically to a finite value if the time goes to infinity.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1963 r.
