

ANALITYCZNA METODA OBLICZANIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
PRĘTÓW SKRĘCANYCH

MARIAN GALOS i MICHAŁ ŻYCKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Problem rozkładu naprężeń w uplastycznionym przekroju pryzmatycznego pręta poddanego skręcaniu jest problemem wewnątrznie statycznie wyznaczalnym. Jeżeli oś z jest osią pręta, to różne od zera składowe stanu naprężenia τ_{zx} i τ_{zy} są w zupełności określone równaniem równowagi wewnętrznej

$$(1.1) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

i warunkiem plastyczności, dającym się w przypadku ogólnym przedstawić w postaci

$$(1.2) \quad f(\tau_{zx}, \tau_{zy}) = k(x, y),$$

gdzie k oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu (skręcaniu). Przyjęto tu, iż wielkość ta nie zależy od zmiennej z (niejednorodność co najwyżej w płaszczyźnie xy). Tak więc rozkład naprężeń nie zależy od tego, czy przyjmujemy teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych, czy teorię płynięcia plastycznego. Ewentualną niejednoznaczność spowodowaną nieliniowością warunku plastyczności (1.2) usuwają twierdzenia ekstremalne teorii plastyczności.

Przypominamy, że układ równań (1.1) i (1.2) daje się z łatwością sprowadzić do jednego równania przez wprowadzenie funkcji naprężeń Φ takiej, że

$$(1.3) \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

równanie (1.1) jest wtedy tożsamościowo spełnione, a podstawienie (1.3) do (1.2) określa funkcję Φ :

$$(1.4) \quad f\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = k(x, y).$$

W przypadku jednorodnego ciała izotropowego równanie to posiada postać

$$(1.5) \quad \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} = k,$$

czyli

$$(1.6) \quad |\vec{\text{grad}} \Phi| = k.$$

A. Nádai, [14], zwrócił uwagę, iż równanie to jest analogiczne do równania wzgórza idealnie sypkiego piasku o kącie tarcia wewnętrznego μ ,

$$(1.7) \quad |\overrightarrow{\text{grad } w}| = \text{tg } \mu.$$

W przypadku konturu jednospójnego zachodzi również prosta analogia warunków brzegowych ($\Phi = 0$ i $w = 0$ na konturze) tak, że określenie rozkładu naprężeń oraz momentu granicznego

$$(1.8) \quad \overline{M}_s = 2 \int_F \int \Phi dF = \frac{2k}{\text{tg } \mu} \int_F \int w dF = \frac{2k}{\text{tg } \mu} V_p$$

stało się bądź możliwe na drodze doświadczalnej, bądź też sprowadziło się do rozważań czysto geometrycznych, których przedmiotem jest określenie odpowiedniej powierzchni równego spadku oraz objętości pod tą powierzchnią V_p .

Określenie objętości V_p , bardzo proste w przypadku, gdy przekrój ma kształt prostokąta, koła, trójkąta itp., może natrafiać na trudności przy bardziej złożonych kształtach przekroju. Celem obecnej pracy jest podanie ogólnych wzorów analitycznych, określających tę objętość, oraz rozwiązanie kilku przykładów, dla których odpowiednie wzory nie zostały jeszcze podane w literaturze. Poświęcimy również uwagę prętom anizotropowym i niejednorodnym, a także konturom wielospójnym.

Znajomość nośności granicznej przy czystym skręcaniu posiada także znaczenie jako podstawa analizy przypadków złożonych, np. skręcania z rozciąganiem lub skręcania ze zginaniem. Problemom tym poświęca się ostatnio wiele uwagi (por. np. R. HILL, M. P. L. SIEBEL, [9, 10], F. A. GAYDON, [3], F. A. GAYDON i H. NUTTALL, [4], St. PIECHNIK, [16], St. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, [17], E. O. IMEGWU, [11], M. WNUK, [24, 25, 26], i inne).

2. Określenie linii nieciągłości

Własności powierzchni równego spadku, określonych równaniami (1.6) lub (1.7), były wielokrotnie badane. Prawdopodobnie po raz pierwszy zajął się nimi DE LA GOURNERIE, [6]; obszerną rozprawę poświęcił im R. ACKERMANN, [1]; F. SCHILING, [20], badał powierzchnie tego typu odpowiadające konturom określonymi równaniami drugiego stopnia; z nowszych prac należy wymienić dość ogólne rozważania W. Ja. SKOROBOGAČKI, [21].

Charakterystyczne dla powierzchni równego spadku są tzw. linie nieciągłości, przy czym chodzi tu nie o nieciągłości rzędnej, lecz jej pochodnych, a więc — w interesującym nas przypadku — naprężeń. Geometrycznie nieciągłości te odpowiadają grzbietom wzgórz piasku. Zajmiemy się najpierw określeniem równań rzutu linii nieciągłości na płaszczyznę podstawy.

Jak widać z prostej analizy, linie nieciągłości przechodzą przez środki kół, stycznych do konturu jednocześnie co najmniej w dwóch punktach, a więc łączą punkty równooddalone od dwóch łuków konturu przy mierzeniu odległości wzdłuż normalnej. Jeżeli kontur posiada wklęsłe punkty osobliwe, to przez styczność należy rozumieć jedynie przechodzenie okręgu koła przez ten punkt. W przypadku konturu

wielokątnego liniami nieciągłości są zawsze części dwusiecznych kątów. Uogólniając to pojęcie W. Ja. SKOROBOGAĆKO, [21], nazywa linie nieciągłości dla równań typu (1.6) «dwusiecznymi (bisektrysami) konturu».

Zajmiemy się najpierw określeniem linii nieciągłości, odpowiadającej regularnym łukom konturu, nie posiadającym wklęsłego punktu osobliwego. Załóżmy, że dwa odcinki konturu opisane są równaniami parametrycznymi $x_1 = x_1(t_1)$, $y_1 = y_1(t_1)$ oraz $x_2 = x_2(t_2)$ i $y_2 = y_2(t_2)$. W dalszym ciągu parametrów t_1 i t_2 nie będziemy uwidaczniali w zapisie; przecinkiem u góry będziemy oznaczali pochodną podług odpowiedniego parametru. Jeżeli cały kontur opisany jest jednym równaniem, również można efektywnie podstawić $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, ale w uzależnieniu od dwóch różnych parametrów t_1 i t_2 ; należy wtedy pamiętać, że równość $t_1 = t_2$ nie określa linii nieciągłości (bowiem mamy do czynienia z tą samą normalną), chociaż odpowiednio równanie będzie oczywiście spełnione.

Przy założeniu regularności łuków konturu istnieją określone normalne o równaniach

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (x - x_1) x'_1 + (y - y_1) y'_1 &= 0, \\ (x - x_2) x'_2 + (y - y_2) y'_2 &= 0, \end{aligned}$$

a linię nieciągłości określimy z warunku, iż punkt przecięcia się tych normalnych jest jednakowo oddalony od obu łuków konturu:

$$(2.2) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Rozwiązanie układu (2.1) i (2.2), czyli współrzędne linii nieciągłości, oznaczmy przez \tilde{x} i \tilde{y} .

Z dwóch pierwszych równań możemy obliczyć \tilde{x} i \tilde{y} jako funkcję dwóch parametrów t_1 i t_2 ,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{(x_2 x'_2 + y_2 y'_2) y'_1 - (x_1 x'_1 + y_1 y'_1) y'_2}{x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2}, \\ \tilde{y} &= \frac{(x_1 x'_1 + y_1 y'_1) x'_2 - (x_2 x'_2 + y_2 y'_2) x'_1}{x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2}, \end{aligned}$$

a podstawienie tych wartości do (2.2) pozwala określić związek między parametrami t_1 i t_2 . Przedstawimy go w postaci

$$(2.4) \quad [(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2] (x'_2 y'_1 + x'_1 y'_2) + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(y'_1 y'_2 - x'_1 x'_2) = 0.$$

Tak więc linia nieciągłości została określona w sposób parametryczo-uwikłany. Jeżeli z równania (2.4) da się wyznaczyć jeden z parametrów, np. t_1 , to po podstawieniu tak uzyskanego wzoru do (2.3) otrzymujemy równanie linii nieciągłości w postaci parametrycznej przy parametrze t_2 .

Dla przykładu weźmy pod uwagę przekrój, ograniczony łukiem paraboli $y = x^2$ i prostą $y = a$. Równania te możemy napisać w postaci parametrycznej:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x_1 &= t_1, & y_1 &= t_1^2, \\ x_2 &= t_2, & y_2 &= a. \end{aligned}$$

Ze wzorów (2.3) otrzymujemy

$$(2.6) \quad \tilde{x} = t_1, \quad \tilde{y} = -\frac{t_1}{2t_2} + \frac{1}{2} + t_2^2,$$

a związek (2.4) posiada tu postać

$$(2.7) \quad t_2 t_1^2 - (t_2^2 + a) t_1 - (t_2^5 - 2at_2^3 + a^2 t_2 - at_2) = 0.$$

Jak widać, jest to równanie dające się stosunkowo łatwo rozwiązać ze względu na t_1 :

$$(2.8) \quad t_1 = \frac{t_2^2 + a - \sqrt{4t_2^6 + (1 - 8a)t_2^4 + (4a^2 - 2a)t_2^2 + a^2}}{2t_2}.$$

Znak plus przed pierwiastkiem nie wchodzi tu w rachubę, gdyż przy t_2 zmierzającym do zera musimy otrzymywać skończone wartości t_1 ; ostatecznie równania parametryczne krzywej granicznej można napisać w postaci:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{t_2^2 + a - \sqrt{4t_2^6 + (1 - 8a)t_2^4 + (4a^2 - 2a)t_2^2 + a^2}}{2t_2}, \\ \tilde{y} &= \frac{4t_2^4 + t_2^2 - a + \sqrt{4t_2^6 + (1 - 8a)t_2^4 + (4a^2 - 2a)t_2^2 + a^2}}{4t_2^2}. \end{aligned}$$

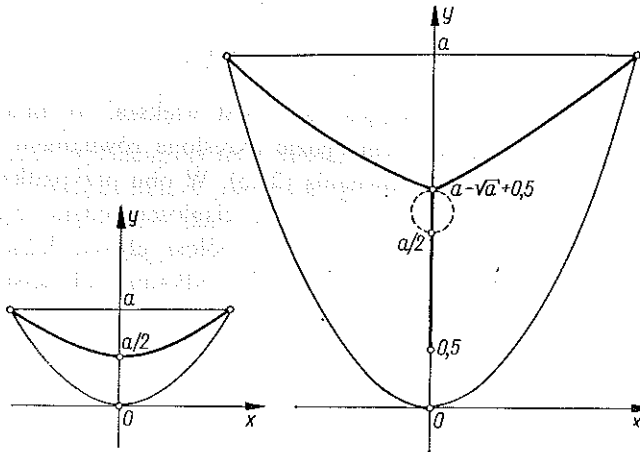
Niecała linia, określona równaniami (2.9), stanowi poszukiwaną linię nieciągłości. Oczywiście musi ona leżeć wewnątrz konturu, zatem parametr t_2 można dobierać tylko z przedziału $-\sqrt{a} < t_2 < \sqrt{a}$. Ale zależnie od wielkości stałej a nawet ten przedział zmienności t_2 może być zbyt duży. Zbadamy w tym celu punkty przecięcia linii (2.9) z osią y . Najłatwiej określimy je przez przyjęcie $x = 0$, czyli $t_1 = 0$, w równaniu (2.7); otrzymujemy pięć pierwiastków

$$(2.10) \quad t_2 = 0 \quad \text{lub} \quad t_2 = \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a}}.$$

Dwa z nich, odpowiadające znakowi plus wewnątrz pierwiastka, nie wchodzi w rachubę, ponieważ są co do wartości bezwzględnej większe od \sqrt{a} . Wobec tego o ile $a > 1$, otrzymujemy trzy punkty przecięcia się linii (2.9) z osią y , odpowiadające wartościom parametru $t_2 = 0$ oraz $t_2 = \pm \sqrt{a - \sqrt{a}}$; jeżeli natomiast $a \leq 1$, to istnieje tylko jeden punkt, odpowiadający $t_2 = 0$.

W tym ostatnim przypadku cały ustalony poprzednio zakres zmienności parametru t_2 , mianowicie $-\sqrt{a} < t_2 < \sqrt{a}$, określa poszukiwaną linię nieciągłości,

natomiast gdy $a > 1$, to trzeba wziąć pod uwagę tylko odcinki $-\sqrt{a} < t_2 < -\sqrt{a}-\sqrt{a}$ i $\sqrt{a}-\sqrt{a} < t_2 < \sqrt{a}$. Mianowicie jak wynika z rys. 1, tworzy się wtedy jeszcze inna gałąź linii nieciągłości, którą można określić przez przyjęcie $x_1 = t_1, y_1 = t_1^2$ oraz $x_2 = t_2, y_2 = t_2^2$ (równo oddalona od dwóch łuków paraboli).



Rys. 1

W wyniku otrzymujemy oczywiście odcinek prostej $x=0$, zawarty pomiędzy $x=1/2$ (ognisko paraboli) oraz $y=a-\sqrt{a}+1/2$ [przecięcie z linią (2.9) dla $t_2 = \pm\sqrt{a}-\sqrt{a}$]. Z dwóch możliwych linii nieciągłości wystąpi w rzeczywistości ta, która leży bliżej konturu (na danej normalnej).

Określimy jeszcze linię nieciągłości dla przekroju o kształcie elipsy. Podstawiając do (2.3)

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x_1 &= a \cos t_1, & y_1 &= b \sin t_1, \\ x_2 &= a \cos t_2, & y_2 &= b \sin t_2, \end{aligned}$$

otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$(2.12) \quad \tilde{x} = \frac{(a^2 - b^2) \cos t_1 \cos t_2 \cos \frac{t_1 + t_2}{2}}{a \cos \frac{t_1 - t_2}{2}},$$

$$\tilde{y} = \frac{(b^2 - a^2) \sin t_1 \sin t_2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2}}{b \cos \frac{t_1 - t_2}{2}},$$

a równanie (2.4) można przedstawić w postaci

$$(2.13) \quad [1 - \cos(t_1 - t_2)] \sin(t_1 + t_2) \sin^2 \frac{t_1 - t_2}{2} = 0.$$

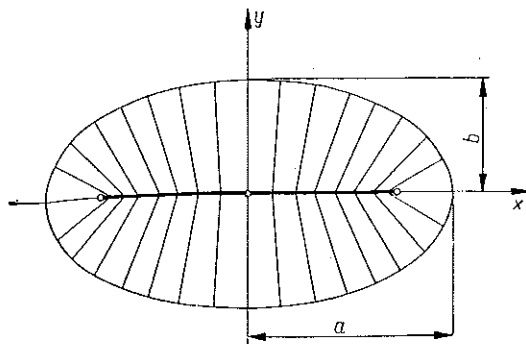
Z równania (2.13), po pominięciu możliwości $t_1 = t_2$, wynika $t_2 = -t_1$ lub $t_2 = \pi - t_1$. W pierwszym przypadku

$$(2.14) \quad \tilde{x} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t_1, \quad \tilde{y} = 0,$$

natomiast w drugim

$$(2.15) \quad \tilde{x} = 0, \quad \tilde{y} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin t_1.$$

Jeżeli $a > b$, czyli półoś odpowiadająca osi x jest większa, to linia nieciągłości będzie przebiegała wzdłuż osi x , zatem będzie określona równaniem (2.14); jeżeli $a < b$, to należy wziąć pod uwagę równania (2.15). W obu przypadkach linia nieciągłości będzie częścią dłuższej półosi elipsy, leżąca pomiędzy środkami kół ściśle stycznych, odpowiadających minimalnym promieniom krzywizny.



Rys. 2

Zajmiemy się jeszcze przypadkiem punktów osobliwych, w których normalna do konturu nie jest jednoznacznie określona. Jeżeli punkt taki odpowiada wypukłości konturu (jak np. przy badanym przez nas profilu ograniczonym odcinkiem prostej i łukiem

paraboli), to nie wnosi to żadnych nowych elementów; linia nieciągłości dochodzi do takiego punktu wzdłuż symetralnej kąta, wyznaczonego dwiema granicznymi stycznymi do konturu w tym punkcie. Jeżeli jednak punkt osobliwy odpowiada wklęsłości konturu, to wokół niego powierzchnia równego spadku przybiera kształt wycinka wklęsłego stożka, a odpowiednią linię nieciągłości musimy wyznaczać inaczej.

Jeżeli istnieje tylko jeden wklęsły punkt osobliwy, to linię nieciągłości wyznaczymy z warunku równej odległości od tego punktu i odległości wzdłuż normalnej od innego łuku konturu. Oznaczmy współrzędne punktu osobliwego przez x_0 i y_0 , wtedy punkt linii nieciągłości musi spełniać równanie normalnej i warunek równej odległości

$$(2.16) \quad \begin{aligned} (\tilde{x} - x_1) x_1' + (\tilde{y} - y_1) y_1' &= 0, \\ (\tilde{x} - x_1)^2 + (\tilde{y} - y_1)^2 &= (\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2, \end{aligned}$$

gdzie $x_1 = x_1(t)$ i $y_1 = y_1(t)$ są parametrycznymi równaniami konturu (lub łuku konturu). Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= x_1 - \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{(x_1 - x_0) y_1' - (y_1 - y_0) x_1'} \frac{y_1'}{2}, \\ \tilde{y} &= y_1 + \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{(x_1 - x_0) y_1' - (y_1 - y_0) x_1'} \frac{x_1'}{2}. \end{aligned}$$

Linia nieciągłości jest tu przedstawiona równaniami parametrycznymi przy parametrze t , a więc w sposób prostszy niż poprzednio.

Jeżeli wreszcie kontur posiada dwa wklęsłe punkty osobliwe, to może wystąpić linia nieciągłości równo oddalona od obu tych punktów, a więc będąca częścią symetralnej odcinka łączącego oba punkty osobliwe. Równanie tej symetralnej można napisać w postaci

$$(2.18) \quad \tilde{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left(\tilde{x} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right).$$

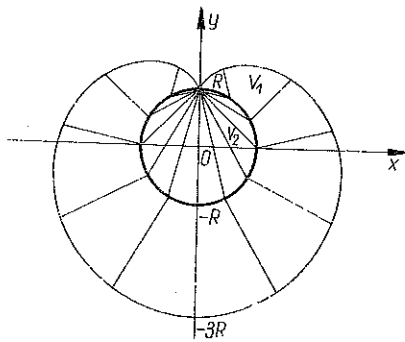
Dla przykładu wyznaczmy linię nieciągłości dla przekroju o kształcie kardioidy. Jest to krzywa, którą zatacza punkt okręgu koła o promieniu R , tocącego się bez poślizgu po drugim kole o tym samym promieniu R , rys. 3. Posiada ona równania parametryczne

$$(2.19) \quad \begin{aligned} x_1 &= (2 \sin t - \sin 2t) R, \\ y_1 &= (2 \cos t - \cos 2t) R. \end{aligned}$$

Dla $t = 0$ mamy $x'_1 = y'_1 = 0$, zatem jest to punkt osobliwy, jak łatwo się przekonać, odpowiadający wklęsłości konturu. Współrzędnymi tego punktu są $x_0 = 0$, $y_0 = R$. Podstawienie tych wartości oraz (2.19) do wzorów (2.17) daje

$$(2.20) \quad \tilde{x} = R \sin t, \quad \tilde{y} = R \cos t,$$

a więc — jak można było przewidywać — linia nieciągłości jest tu okręgiem koła podstawowego.



Rys. 3

3. Obliczanie nośności granicznej skręcanych izotropowych prętów jednorodnych

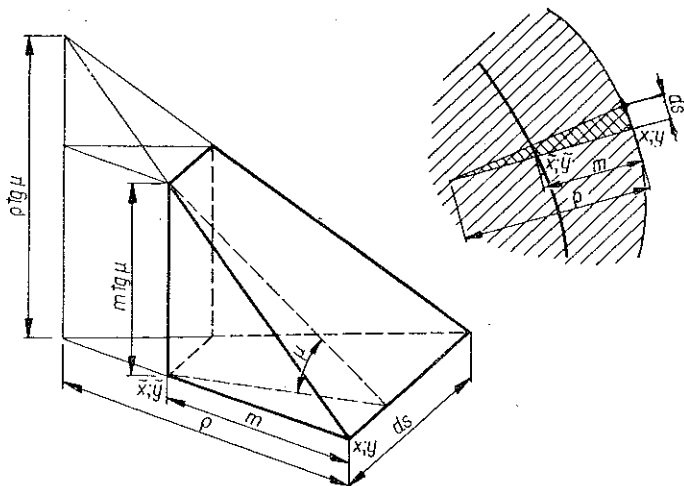
Znajomość rozkładu linii nieciągłości umożliwia wyprowadzenie ogólnych wzorów analitycznych, określających objętość wzgórza piasku, a tym samym nośność graniczną skręcanego pręta. Weźmy najpierw pod uwagę wypukły odcinek konturu jednospójnego. Wtedy element objętości wzgórza piasku jest bryłą, przedstawioną na rys. 4. Objętość tej bryły można obliczyć jako objętość ostrosłupa o wysokości $q \operatorname{tg} \mu$ (gdzie q oznacza promień krzywizny w danym punkcie konturu), zmniejszoną o objętość ostrosłupa o wysokości $(q - m) \operatorname{tg} \mu$ i graniastoslupa o podstawie trójkątnej i wysokości $m \operatorname{tg} \mu$. Przez m oznaczono tu mierzoną wzdłuż normalnej odległości konturu od linii nieciągłości. Ostatecznie po prostych obliczeniach

$$(3.1) \quad dV_p = \frac{m^2}{6q} (3q - 2m) \operatorname{tg} \mu ds.$$

Założmy na razie, że parametr t dobrany jest tak, iż obchodzimy kontur przekroju przeciwnie do wskazówek zegara (później wykazemy, że założenie to nie jest

istotne). Wtedy, jeżeli dany odcinek konturu jest wypukły, promień krzywizny określa wzór

$$(3.2) \quad \rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$$



Rys. 4

Podstawiając dalej

$$(3.3) \quad ds = (x'^2 + y'^2)^{1/2} dt,$$

$$(3.4) \quad m = [(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2]^{1/2}$$

oraz wykorzystując równanie normalnej typu (2.1) dochodzimy po prostych przekształceniach do wzoru

$$(3.5) \quad V_p = \frac{\operatorname{tg} \mu}{6} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{3(y - \tilde{y})^2 (x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'^2} + \frac{2(x'y'' - x''y')(y - \tilde{y})^3 (x'^2 + y'^2)^{1/2}}{x'^3} \right] dt$$

lub, po wprowadzeniu \tilde{x} zamiast \tilde{y} ,

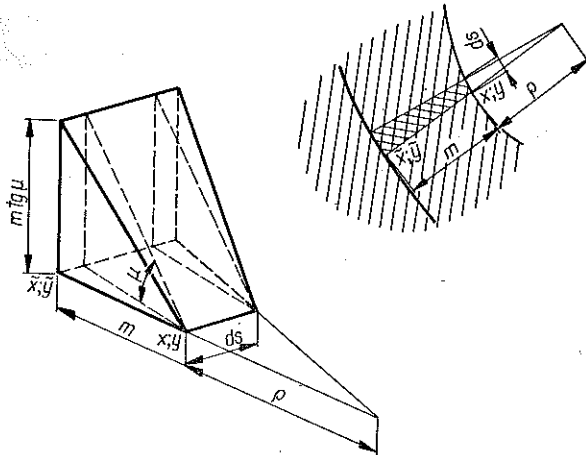
$$(3.6) \quad V_p = \frac{\operatorname{tg} \mu}{6} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{3(x - \tilde{x})^2 (x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y'^2} + \frac{2(x'y'' - x''y')(x - \tilde{x})^3 (x'^2 + y'^2)^{1/2}}{y'^3} \right] dt.$$

Wykażemy teraz, że powyższe wzory mają charakter uniwersalny, a mianowicie, iż dwa poprzednio przyjęte założenia nie posiadają znaczenia. Rozpatrzmy najpierw

wklęsły odcinek konturu. Wtedy element dV_p posiada kształt jak na rys. 5. Tym razem obliczamy objętość jako sumę objętości graniastoslupa i dwóch ostrosłupów, otrzymując

$$(3.7) \quad dV_p = \frac{m^2}{6\rho} (3\rho + 2m) \operatorname{tg} \mu ds.$$

Jednakże teraz promień krzywizny ρ określony jest wzorem (3.3) ze znakiem minus, tak że po dokonaniu podstawień dochodzimy znowu do wzorów (3.5) i (3.6). Jeżeli



Rys. 5

wreszcie wprowadzimy nowy parametr $\bar{t} = t_1 - t$, to — jak łatwo sprawdzić przez zmianę znaku pochodnych x' i y' — wzór nie ulegnie zmianie, a ruch wokół konturu odbywa się zgodnie ze wskazówkami zegara. Tak więc podstawiając (3.5) do (1.8) otrzymamy wzór ogólny

$$(3.8) \quad \bar{M}_s = k \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{(y - \bar{y})^2 (x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'^2} + \frac{2(x' y'' - x'' y') (y - \bar{y})^3 (x'^2 + y'^2)^{1/2}}{3x'^3} \right] dt,$$

przy czym całkowaniem należy objąć cały kontur przekroju. Analogiczny wzór otrzymujemy przez podstawienie (3.6) do (1.8).

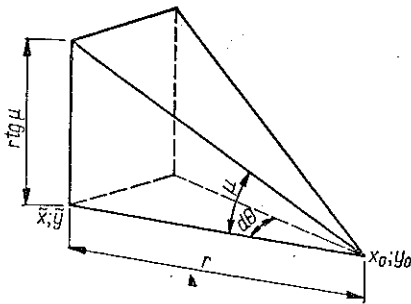
W przypadku punktu osobliwego, odpowiadającego wklęsłości konturu, wzór (3.8) nie może znaleźć zastosowania, bowiem element objętości posiada tu inny kształt i wprowadzenie elementu długości łuku konturu ds nie jest możliwe. Odpowiedni wzór, określający objętość pod wklęsłą powierzchnią stożkową, najłatwiej

jest napisać we współrzędnych biegunowych (o biegunie w punkcie osobliwym). Mamy mianowicie (rys. 6)

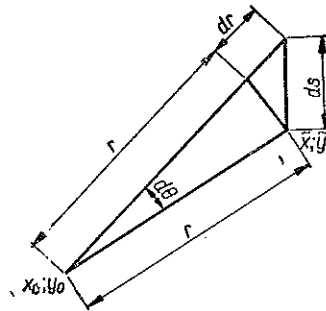
$$(3.9) \quad dV_p = \frac{1}{3} r^3(\theta) \operatorname{tg} \mu d\theta.$$

Przejdziemy do współrzędnych kartezjańskich. Z elementarnego trójkąta (rys. 7) wynika

$$(3.10) \quad r^2 d\theta^2 = ds^2 - dr^2.$$



Rys. 6



Rys. 7

Podstawimy teraz

$$(3.11) \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2}, \\ dr &= \frac{(\tilde{x} - x_0) \tilde{x}' + (\tilde{y} - y_0) \tilde{y}'}{\sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2}} dt, \\ ds &= \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2} dt \end{aligned}$$

otrzymując po obliczeniu pierwiastka

$$(3.12) \quad d\theta = \frac{|(\tilde{x} - x_0) \tilde{y}' - (\tilde{y} - y_0) \tilde{x}'|}{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2} dt.$$

Podstawienie (3.12) do (3.9) i (1.8) daje ostatecznie

$$(3.13) \quad \overline{M}_{s1} = \frac{2}{3} k \int_{t_0}^{t_1} |(\tilde{x} - x_0) \tilde{y}' - (\tilde{y} - y_0) \tilde{x}'| \sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2} dt,$$

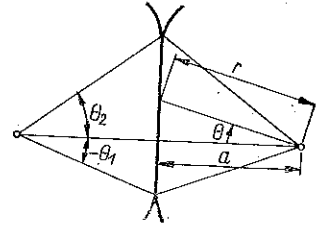
przy czym symbolu \overline{M}_{s1} użyto dla podkreślenia, że za pomocą tego wzoru określamy zawsze tylko część granicznego momentu skręcającego.

W przypadku istnienia dwóch wklęsłych punktów osobliwych najłatwiej obliczyć jest tę część objętości wzgórza piasku, która odpowiada linii nieciągłości równo oddalonych od obu tych punktów, a więc symetrycznej odcinka o równaniu (2.18).

Element bryły posiada również kształt przedstawiony na rys. 6, a więc elementarna objętość określona jest za pomocą wzoru (3.9), gdzie tym razem, wobec prostoliniowości linii nieciągłości,

$$(3.14) \quad r(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}.$$

Przez a oznaczono tu połowę odległości między punktami osoblwymi, a kąt θ liczony jest od kierunku odcinka łączącego te punkty (rys. 8). Po podstawieniu (3.14) do (3.9), scałkowaniu i wykorzystaniu (1.8) otrzymujemy ostatecznie



Rys. 8

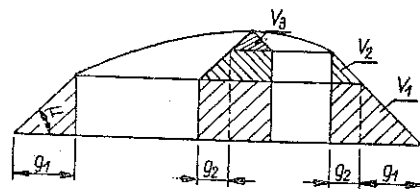
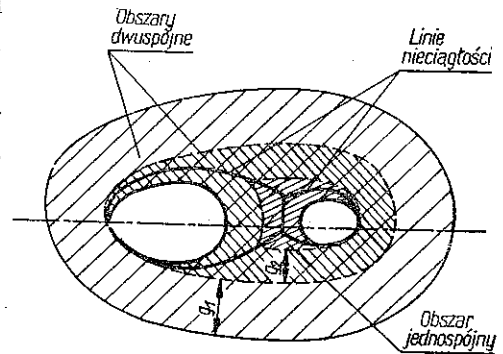
$$(3.15) \quad \bar{M}_{s1} = \frac{a^3 k}{3} \left[\frac{\sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2} - \frac{\sin \theta_1}{\cos^2 \theta_1} + \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right].$$

Pozostałe części momentu skręcającego (lub objętości wzgórza piasku) określają wzory (3.8) i (3.13).

4. Przypadek przekrojów wielospójnych

W przypadku przekrojów wielospójnych analogia Nádai'a nie ma zastosowania, mianowicie dla wewnętrznych łuków konturu mamy warunek brzegowy $w = 0$ dla wzgórza piasku, a $\Phi = C \neq 0$ dla funkcji naprężeń.

Odpowiednią modyfikację analogii Nádai'a podał M. A. SADOWSKY, [19]. Nie wchodząc w szczegóły zauważymy, że z analogii tej wynika, iż dowolny przekrój wielospójny można, przy obliczaniu granicznego momentu skręcającego, uważać za złożony z pewnych przekrojów dwuspójnych o stałej szerokości g_i (grubości ścianek) oraz z przekroju jednospójnego, rys. 9 (należy przypomnieć, że moment skręcający odpowiada tu objętości piasku wraz z objętością walca, wstawionego w otwór, o wysokości $\operatorname{tg} \mu \sum_{i=1}^j g_i$). Takie ujęcie jest dla obliczeń korzystne, ponieważ w przypadku konturu dwuspójnego o stałej szerokości piasek zsypuje się wyłącznie na zewnątrz.



Rys. 9

Obliczenie objętości odpowiadającej konturowi jednospójnemu można przeprowadzić przy użyciu wzorów, podanych poprzednio; obecnie zajmiemy się jedynie pewnymi wzorami dla przekrojów dwuspójnych o stałej grubości g_i .

Szczególnie prosty wzór otrzymuje się wtedy, gdy na danym obszarze dwuspójnym nie występują linie nieciągłości, czyli gdy promień krzywizny konturu ϱ jest zawsze większy od g_i (w przypadku przedstawionym na rys. 9 zachodzi to dla V_1 , natomiast nie zachodzi dla V_2). Do wzoru wyjściowego (3.1) należy wtedy podstawić $m = g_i = \text{const}$, zatem objętość elementu wzgórza piasku

$$(4.1) \quad V'_{pi} = \frac{g_i^2}{2} \text{tg } \mu \oint_{s_i} ds - \frac{g_i^3}{3} \text{tg } \mu \oint_{s_i} \frac{ds}{\varrho}.$$

Pierwsza z całek jest równa długości łuku zewnętrznego konturu danego obszaru; oznaczymy go przez s_i . Druga całka posiada wartość 2π , ponieważ dodaje się tu po prostu elementarne kąty. Otrzymujemy więc

$$(4.2) \quad V'_{pi} = \left(\frac{1}{2} g_i^2 s_i - \frac{2}{3} \pi g_i^3 \right) \text{tg } \mu.$$

Objętość walca wstawionego w otwór (lub części walca odpowiadającej tylko konturowi dwuspójnemu) wynosi

$$(4.3) \quad V''_{pi} = g_i F_{wi} \text{tg } \mu,$$

gdzie F_{wi} jest polem powierzchni otworu (powierzchni wewnętrznej), tak że ostatecznie

$$(4.4) \quad V_{pi} = \left(\frac{1}{2} g_i^2 s_i - \frac{2}{3} \pi g_i^3 + g_i F_{wi} \right) \text{tg } \mu.$$

Wzór (4.4) można napisać jeszcze w prostszej postaci. Pole powierzchni części pierścieniowej o stałej szerokości g_i można obliczyć następująco (jako całkę różnicy pola powierzchni dwóch elementarnych trójkątów):

$$(4.5) \quad \tilde{F}_{pi} = \frac{1}{2} \oint_{s_i} \left[\varrho - \frac{(\varrho - g_i)^2}{\varrho} \right] ds = \oint_{s_i} \left(g_i - \frac{g_i^2}{2\varrho} \right) ds = g_i s_i - \pi g_i^2.$$

W takim razie

$$(4.6) \quad F_{wi} = F_{zi} - F_{pi} = F_{zi} - g_i s_i + \pi g_i^2,$$

a po podstawieniu do (4.4) i redukcji

$$(4.7) \quad V_{pi} = \left(\frac{1}{3} \pi g_i^3 - \frac{1}{2} g_i^2 s_i + g_i F_{zi} \right) \text{tg } \mu.$$

Wzór (4.7) jest o tyle dogodniejszy od (4.4), że zazwyczaj, zwłaszcza w przypadku

obszarów dwuspójnych, znacznie łatwiej jest obliczyć pole powierzchni F_z niż pole powierzchni F_w . Zatem ostatecznie

$$(4.8) \quad \bar{M}_{st} = \left(\frac{2}{3} \pi g_i^3 - g_i^2 s_i + 2g_i F_{zi} \right) k.$$

W przypadku wystąpienia linii nieciągłości obliczenie nieco się komplikuje, bowiem nie zachodzi wtedy równość $m = g_i$ i należy przede wszystkim określić parametryczne równanie linii nieciągłości. Tok obliczeń w stosunku do przytoczonego w p. 3 nie ulega jednak zmianie.

5. Niektóre rozwiązania szczegółowe dla izotropowych prętów jednorodnych

5.1. Elipsa. Powierzchnię równego spadku, zbudowaną nad konturem eliptycznym, rozważał z punktu widzenia teorii skręcania plastycznego L. S. LEJBIENZON, [13], jednak doszedł on zaledwie do parametrycznego uwikłanego określenia funkcji naprężeń Φ . Podobne wyniki uzyskał już znacznie wcześniej R. ACKERMANN, [1], który wyraził przypuszczenie, iż określenie dla tego konturu funkcji naprężeń nawet za pomocą równania uwikłanego typu $f(\Phi, x, y) = 0$ nie jest możliwe. F. SCHILLING, [20], wykazał, że przedstawienie w takiej postaci jest możliwe i podał efektywnie to równanie. Jest ono jednak tak skomplikowane (cztery wiersze druku), że o wykorzystaniu go do obliczeń objętości V_p nie może chyba być mowy, co stawałoby pod znakiem zapytania możliwość uzyskania ścisłego wzoru na nośność graniczną skręconego pręta o przekroju eliptycznym.

Zastosowanie wzoru (3.5) lub (3.6) z podstawieniem (2.11) i (2.14) lub (2.15) prowadzi jednak nadszpiegowanie szybko do celu. Załóżmy, że $a \geq b$, wtedy linia nieciągłości jest określona równaniami (2.14) i korzystniej jest posłużyć się wzorem (3.5) niż (3.6), bowiem podstawiamy tu po prostu $\tilde{y} = 0$. Otrzymujemy (mnożąc przez 4 objętość ćwiartki)

$$(5.1) \quad V_p = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \mu \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3b^2}{a^2} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2} - \frac{2b^4}{a^2} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} \right] dt.$$

Występujące tu całki są oczywiście całkami eliptycznymi. Po sprowadzeniu ich do postaci normalnej otrzymujemy

$$(5.2) \quad V_p = \frac{2}{3} ab^2 \operatorname{tg} \mu \left[2\mathbf{E} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) - \frac{b^2}{a^2} \mathbf{K} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \right],$$

gdzie $\mathbf{K}(k^2)$ i $\mathbf{E}(k^2)$ są pełnymi całkami eliptycznymi pierwszego i drugiego rodzaju. Wobec (1.8) otrzymujemy stąd wzór na moment graniczny \bar{M}_s . Oznaczmy stosunek półosi elipsy przez

$$(5.3) \quad \frac{b}{a} = \psi \leq 1$$

i zapiszemy wzór ostateczny w postaci

$$(5.4) \quad \bar{M}_s = ab^2 k f_1(\psi) = \sqrt{a^3 b^3} k f_2(\psi),$$

gdzie

$$(5.5) \quad f_1(\psi) = \frac{4}{3} [2E(1 - \psi^2) - \psi^2 K(1 - \psi^2)],$$

$$(5.6) \quad f_2(\psi) = \frac{4}{3} \sqrt{\psi} [2E(1 - \psi^2) - \psi^2 K(1 - \psi^2)] = \sqrt{\psi} f_1(\psi).$$

Wzór (5.4) podano celowo w dwóch postaciach, bowiem dla małych ψ (elipsa wydłużona) dogodniejsze jest posługiwanie się funkcją $f_1(\psi)$ (wysokość wzgórza piasku jest rzędu krótszej półosi b), natomiast przy ψ bliskich jedności dogodniejsza jest funkcja $f_2(\psi)$ (wysokość wzgórza piasku jest rzędu \sqrt{ab}). Własność ta jest zresztą widoczna z tablicy 1, w której zestawiono wartości obu funkcji $f_1(\psi)$ i $f_2(\psi)$.

Tablica 1. Nośność graniczna skręcanego pręta o przekroju eliptycznym

$\psi = b/a$	$f_1(\psi)$	$f_2(\psi)$
0	2,6667	0,0000
0,1	2,6600	0,8412
0,2	2,6405	1,1809
0,3	2,6086	1,4288
0,4	2,5651	1,6223
0,5	2,5107	1,7753
0,6	2,4459	1,8946
0,7	2,3713	1,9840
0,8	2,2876	2,0461
0,9	2,1951	2,0825
1,0	2,0944	2,0944

W przypadku $\psi = 1$ mamy $K(0) = E(0) = \pi/2$ i otrzymujemy wprost wzór dla pręta o przekroju kołowym.

5.2. Półkole. Kontur półkolea opiszemy dwoma układami równań parametrycznych (rys. 10);

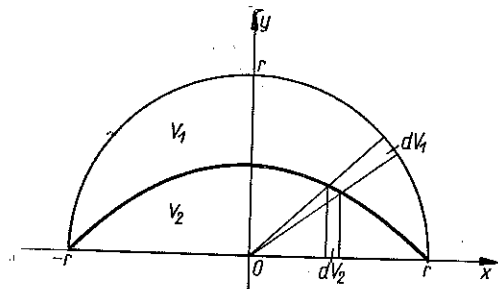
$$(5.7) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos t_1, & x_2 &= t_2, \\ y_1 &= r \sin t_1, & y_2 &= 0, \end{aligned}$$

przy czym $0 < t_1 < \pi$, $-r < t_2 < r$.

Na drodze elementarnych rozważań łatwo stwierdzić, że linia nieciągłości

jest w tym przypadku parabolą, jednak dla naszych celów wyrazimy równanie tej paraboli przez parametry t_1 i t_2 . Z równań (2.3) wynika

$$(5.8) \quad \tilde{x} = t_2, \quad \tilde{y} = t_2 \operatorname{tg} t_1,$$



Rys. 10

a ponieważ związek (2.4) posiada tu postać

$$(5.9) \quad t_2^2 \cos t_1 - 2t_2 r + r^2 \cos t_1 = 0$$

i daje się efektywnie rozwiązać ze względu na oba parametry, więc ostatecznie

$$(5.10) \quad \tilde{x} = \frac{1 - \sin t_1}{\cos t_1} r, \quad \tilde{y} = \frac{1 - \sin t_1}{\cos t_1} r \operatorname{tg} t_1$$

albo

$$(5.11) \quad \tilde{x} = t_2, \quad \tilde{y} = \frac{r}{2} - \frac{t_2^2}{2r}.$$

Objętość wzgórza piasku V_p będziemy obliczali jako sumę objętości V_1 i V_2 , rys. 10. W przypadku objętości V_2 mamy $y_2 = y_2' = y_2'' = 0$, $x_2 = 1$ i ze wzoru (3.5) otrzymujemy

$$(5.12) \quad V_2 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{2} \int_{-r}^r \tilde{y}^2 dt_2 = \frac{2}{15} r^3 \operatorname{tg} \mu.$$

Obliczanie V_1 jest również dość proste wobec $x_1'^2 + y_1'^2 = r^2$; mamy tu

$$(5.13) \quad V_1 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{6} r^3 \int_0^\pi \left[3 \left(\frac{1 - \sin t_1}{\cos t_1} \right)^2 \operatorname{tg}^2 t_1 - 2 \left(\frac{1 - \sin t_1}{\cos t_1} \right)^3 \operatorname{tg}^3 t_1 \right] dt_1,$$

a po kilku przekształceniach i przeprowadzeniu całkowania

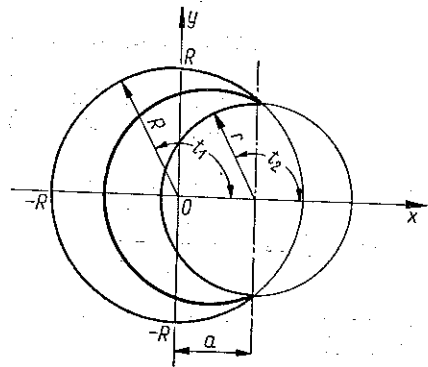
$$(5.14) \quad V_1 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{16}{45} \right) r^3 \operatorname{tg} \mu,$$

tak że ostatecznie

$$(5.17) \quad \bar{M}_s = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9} \right) r^3 k = 0,6028 r^3 k.$$

5.3. Koło z wcięciem kolistym. Kontur opiszemy tu równaniami (rys. 11)

$$(5.18) \quad \begin{aligned} x_1 &= R \cos t_1, & x_2 &= a + r \cos t_2, \\ y_1 &= R \sin t_1, & y_2 &= r \sin t_2, \end{aligned}$$



Rys. 11

jest on więc scharakteryzowany trzema parametrami podstawowymi: promieniem zasadniczym R , promieniem wcięcia r i przesunięciem środków kół a . Parametry t_1 i t_2 w równaniach (5.18) można uważać za zmieniające się w granicach

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \arccos \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2aR} &\leq t_1 \leq \pi, \\ \arccos \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2ar} &\leq t_2 \leq \pi. \end{aligned}$$

Ujmujemy w ten sposób pół obszaru, a dla obliczenia objętości będziemy odpowiednio wielkości mnożyli przez 2. Założymy, że $a+r \geq R$, co zapewni jednopójność obszaru, jednak uzyskane rozwiązanie wykorzystamy później dla obszarów dwuspójnych.

Przejdziemy do określenia linii nieciągłości. Ze wzorów (2.3) otrzymujemy

$$(5.20) \quad \tilde{x} = \frac{\sin t_2}{\sin t_2 - \cos t_2 \operatorname{tg} t_1} a, \quad \tilde{y} = \frac{\sin t_2 \operatorname{tg} t_1}{\sin t_2 - \cos t_2 \operatorname{tg} t_1} a.$$

Równanie (2.4) po pewnych przekształceniach daje

$$(5.21) \quad (R+r) \sin(t_1 - t_2) + a(\sin t_1 + \sin t_2) = 0$$

(związek ten można tu nawet w prostszy sposób otrzymać z elementarnych rozważań geometrycznych bez pomocy geometrii różniczkowej). Równanie (5.21) daje się efektywnie rozwiązać ze względu na obydwaj parametry t_1 i t_2 , tak że linie nieciągłości można określić w sposób dogodny dla dalszych rachunków. Stosując wzór na sinus różnicy kątów, wyrażając funkcję sinus przez kosinus i rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe otrzymujemy mianowicie

$$(5.22) \quad \sin t_2 = \frac{(R+r)^2 - a^2}{(R+r)^2 - 2a(R+r) \cos t_1 + a^2} \sin t_1$$

albo

$$(5.23) \quad \sin t_1 = \frac{(R+r)^2 - a^2}{(R+r)^2 + 2a(R+r) \cos t_2 + a^2} \sin t_2.$$

Równaniami parametrycznymi linii nieciągłości będą więc

$$(5.24) \quad \tilde{x} = \frac{[(R+r)^2 - a^2] \cos t_1}{2(R+r - a \cos t_1)}, \quad \tilde{y} = \frac{[(R+r)^2 - a^2] \sin t_1}{2(R+r - a \cos t_1)}$$

albo po wprowadzeniu parametru t_2

$$(5.25) \quad \tilde{x} = a + \frac{[(R+r)^2 - a^2] \cos t_2}{2(R+r + a \cos t_2)}, \quad \tilde{y} = \frac{[(R+r)^2 - a^2] \sin t_2}{2(R+r + a \cos t_2)}.$$

Są to równania elipsy, bowiem po wyrugowaniu parametru t_1 lub t_2 można je napisać w postaci

$$(5.26) \quad \frac{4\left(\tilde{x} - \frac{a}{2}\right)^2}{(R+r)^2} + \frac{4\tilde{y}^2}{(R+r)^2 - a^2} = 1.$$

Możemy teraz przystąpić do obliczenia objętości wzgórza piasku. Po podstawieniu (5.18) i (5.24) do (3.5) i uporządkowaniu otrzymujemy do scalkowania funkcje

$$(5.27) \quad V_1 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{3} \int_{\arccos \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2aR}}^{\pi} \left\{ R^3 - \frac{3}{4} R \frac{[(R+r)^2 - a^2]^2}{(R+r - a \cos t_1)^2} + \frac{1}{4} \frac{[(R+r)^2 - a^2]^3}{(R+r - a \cos t_1)^3} \right\} dt_1.$$

Występujące tu całki należą do całek elementarnych, jednak obliczenie ich jest dość żmudne. Po skorzystaniu z ogólnie znanych wzorów redukcyjnych (I. S. GRADSZTEJN, I. M. RYŻIK, [7], wzór 2.554.3) oraz wzorów dla funkcji cyklometrycznych typu

$$(5.28) \quad \arctg \sqrt{\frac{1-U}{1+U}} = \frac{1}{2} \arccos U$$

(wzory takie można dość łatwo wyprowadzić przez przejście z funkcji cyklometrycznych na trygonometryczne) otrzymujemy

$$(5.29) \quad V_1 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{3} \left\{ R^3 \arccos \frac{r^2 - R^2 - a^2}{2aR} + \frac{2(R+r)^2 - 6R(R+r) + a^2}{8} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(R+r)^2 - a^2} \arccos \frac{r-R}{a} + \frac{R-3r}{8} \sqrt{[r^2 - (R-a)^2][(R+a)^2 - r^2]} \right\}.$$

Podobnie po podstawieniu (5.18) i (5.25) do (3.5) uzyskujemy

$$(5.30) \quad V_2 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{3} \int_{\arccos \frac{R^2 - r^2 - a^2}{2aR}}^{\pi} \left\{ r^3 - \frac{3}{4} r \frac{[(R+r)^2 - a^2]^2}{(R+r+a \cos t_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{[(R+r)^2 - a^2]^3}{(R+r+a \cos t_2)^3} \right\} dt_2,$$

a po scałkowaniu

$$(5.31) \quad V_2 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{3} \left\{ r^3 \arccos \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar} + \frac{2(R+r)^2 - 6r(R+r) + a^2}{8} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(R+r)^2 - a^2} \arccos \frac{r-R}{a} + \frac{3R-r}{8} \sqrt{[r^2 - (R-a)^2][(R+a)^2 - r^2]} \right\}.$$

Ostateczny wzór uzyskamy przez dodanie (5.30) i (5.31) i podstawienie do (1.8). Przedstawimy go w postaci bezwymiarowej

$$(5.32) \quad \frac{\bar{M}_s}{kR^3} = \frac{2}{3} \arccos \frac{p^2 - a^2 - 1}{2a} + \frac{2}{3} p^3 \arccos \frac{p^2 + a^2 - 1}{2ap} - \\ - \frac{1}{6} [(1+p)^2 - a^2]^{3/2} \arccos \frac{p-1}{a} + \frac{1-p}{3} \sqrt{[p^2 - (1-a)^2][(1+a)^2 - p^2]},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.33) \quad p = \frac{r}{R}, \quad a = \frac{a}{R}.$$

Zajmiemy się obecnie przypadkami szczególnymi wzoru (5.32). Przyjmując $a = R$, czyli $a = 1$, otrzymujemy wzór podany w pracy M. WNUKA, [26]; jest to przypadek o tyle ważny, że dla tego przekroju (koło z wcięciem kołowym o środku

na okręgu koła zasadniczego) znane jest ściśle i posiadające prostą postać rozwiązanie w zakresie sprężystym. Stosując mianowicie przekształcenie

$$(5.34) \quad \arccos\left(\frac{p^2}{2} - 1\right) = 2 \arccos \frac{p}{2},$$

otrzymujemy

$$(5.35) \quad \frac{\bar{M}_s}{kR^3} = \frac{2}{3}(2+p^3) \arccos \frac{p}{2} - \frac{1}{6}(2p+p^2)^{3/2} \arccos(p-1) + \\ + \frac{1}{3}p(1-p)\sqrt{4-p^2}.$$

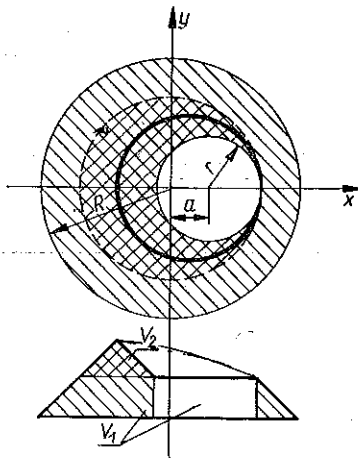
Wartości tej funkcji zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 2. Nośność graniczna skręcanego pręta o przekroju kołowym z wcięciem kolistym

$p = r/R$	\bar{M}_s/kR^3	$p = r/R$	\bar{M}_s/kR^3
0	2,0944	0,7	1,2140
0,1	2,0455	0,8	1,0490
0,2	1,9533	0,9	0,8879
0,3	1,8335	1,0	0,7341
0,4	1,6940	1,5	0,1596
0,5	1,5409	2,0	0,0000
0,6	1,3794		

Ważnym przypadkiem jest również $a = R - r$, czyli $a = 1 - p$; mamy wtedy styczność obu kół. Wzór (5.32) upraszcza się znacznie, bowiem ostatni wyraz odpada, a funkcje arkus kosinus przyjmują wartość π lub $\pi/2$. Ostatecznie

$$(5.36) \quad \frac{\bar{M}_s}{kR^3} = \frac{2}{3}\pi(1+p^3 - 2p^{3/2}) = \\ = \frac{2}{3}\pi(1-p^{3/2})^2.$$



Rys. 12

Wykorzystamy teraz wzór (5.36) dla obliczenia nośności granicznej badanych prętów w zakresie obszarów dwuspójnych, gdy $a+r < R$, czyli $a+p < 1$ (rys. 12). Wzór (5.32) wtedy oczywiście nie ma zastosowania, natomiast objętość wzgórza piasku, zgodnie z analogią Sadowskyego, oblicza się jako sumę objętości stożka ściętego o promieniach podstaw R i r oraz objętości odpowiadającej obszarowi jedno-spójnemu, określonej właśnie wzorem (5.36) przy zastąpieniu R przez $a+r$.

Objętość stożka ściętego wynosi

$$(5.37) \quad V_1 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{3} \pi [R^3 - (a+r)^3],$$

a wzór (5.36) napiszemy w postaci

$$(5.38) \quad V_2 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{3} \pi [(a+r)^{3/2} - r^{3/2}]^2$$

i ostatecznie po powrocie do postaci bezwymiarowej przy oznaczeniach (5.33)

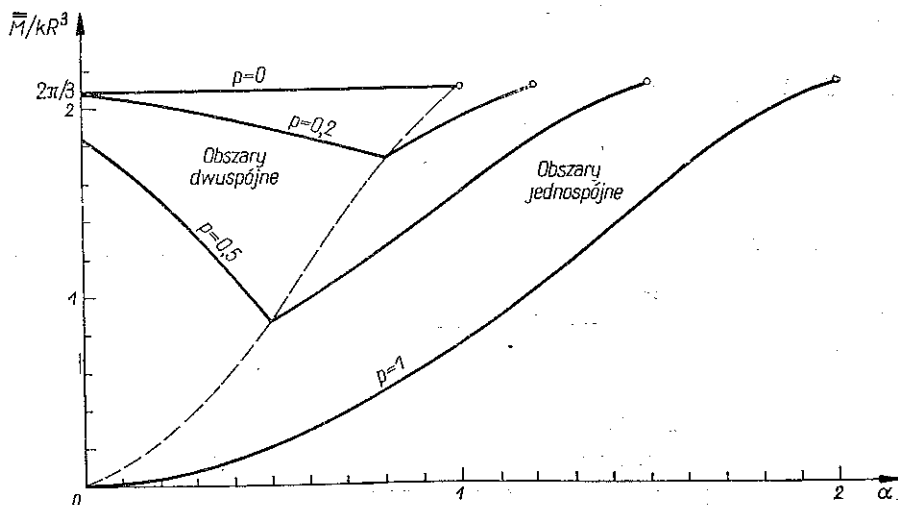
$$(5.39) \quad \frac{\bar{M}_s}{kR^3} = \frac{2}{3} \pi [1 + p^3 - 2p^{3/2} (\alpha + p)^{3/2}].$$

Tablica 3. Nośność graniczna skręcanego pręta o przekroju kołowym z wcięciem lub otworem kolistym: \bar{M}_s/kR^3

$a=r/R$	$p=r/R$		
	0,2	0,5	1,0
0	2,0776	1,8326	0,0000
0,1	2,0496	1,6679	0,0079
0,2	2,0164	1,4888	0,0313
0,3	1,9787	1,2965	0,0703
0,4	1,9370	1,0917	0,1244
0,5	1,8917	0,8752	0,1932
0,6	1,8431	0,9936	0,2763
0,7	1,7913	1,1226	0,3728
0,8	1,7365	1,2588	0,4820
0,9	1,8483	1,3992	0,6028
1,0	1,9533	1,5409	0,7341
1,1	2,0420	1,6805	0,8744
1,2	2,0944	1,8139	1,0221
1,3	—	1,9352	1,1753
1,4	—	2,0358	1,3316
1,5	—	2,0944	1,4883
1,6	—	—	1,6420
1,7	—	—	1,7882
1,8	—	—	1,9209
1,9	—	—	2,0306
2,0	—	—	2,0944

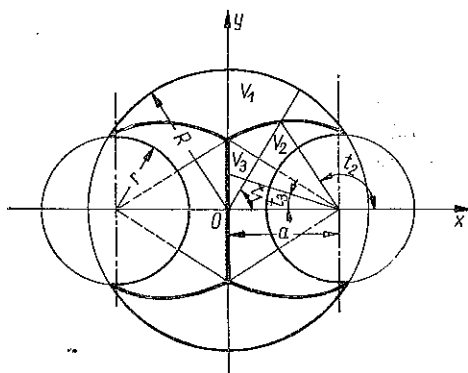
Wzory (5.32) i (5.39), traktowane łącznie, rozwiązują problem nośności granicznej ze względu na skręcanie pręta o przekroju kołowym z wcięciem lub otworem kolistym.

Określone tymi wzorami wartości liczbowe podaje tablica 3, a odpowiednie wykresy funkcji dla $p = 0; 0,2; 0,5$ i 1 zestawione są na rys. 13.



Rys. 13

5.4. Koło z dwoma symetrycznymi wcięciami kolistymi. Przekrój taki jest ważny ze względu na zastosowania, mianowicie stanowi uproszczony schemat przekroju wiertła krętego, rys. 14. Ze względu na podwójną symetrię wystarczy rozpatrywać



Rys. 14

tylko ćwiartkę przekroju, mnożąc następnie obliczoną objętość wzgórza piasku przez 4. W takim razie równania konturu możemy napisać w postaci (5.18), przy czym parametry t_1 i t_2 zmieniają się teraz w granicach

$$\arccos \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2aR} \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\arccos \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2ar} \leq t_2 \leq \pi.$$

Linia nieciągłości będzie częścią linii (5.24) lub (5.25), a ponadto pojawi się nowa linia nieciągłości $\tilde{x} = 0$. Objętość wzgórza piasku obliczymy jako sumę $V_1 + V_2 + V_3$ (rys. 14). Objętość V_1 różni się od (5.27) tylko granicami całkowania; po pomnożeniu przez 4

$$(5.40) \quad V_1 = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \mu \int_{\arccos \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2aR}}^{\pi/2} \left\{ R^3 - \frac{3}{4} R \frac{[(R+r)^2 - a^2]^2}{(R+r - a \cos t_1)^2} + \frac{1}{4} \frac{[(R+r)^2 - a^2]^3}{(R+r - a \cos t_1)^3} \right\} dt_1.$$

Podobnie otrzymujemy

$$(5.41) \quad V_2 = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \mu \int_{\arccos \frac{R^2 - r^2 - a^2}{2ar}}^{\arccos \frac{-2a(R+r)}{(R+r)^2 + a^2}} \left\{ r^3 - \frac{3}{4} r \frac{[(R+r)^2 - a^2]^2}{(R+r+a \cos t_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{[(R+r)^2 - a^2]^3}{(R+r+a \cos t_2)^3} \right\} dt_2.$$

Obliczenie objętości V_3 jest najłatwiejsze, bowiem odpowiednia linia nieciągłości jest tu prostą $\tilde{x} = 0$. Możemy tu wykorzystać wprost wzór (3.7) (kontur wklęsły), podstawiając $\varrho = r$ oraz $m = (a/\cos t_3) - r$, przy czym dla uproszczenia oznaczono $t_3 = \pi - t_2$. Otrzymujemy

$$(5.42) \quad V_3 = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \mu \int_0^{\arccos \frac{2a(R+r)}{(R+r)^2 + a^2}} \left(r^3 - \frac{3a^2 r}{\cos^2 t_3} + \frac{2a^3}{\cos^3 t_3} \right) dt_3,$$

a po scałkowaniu

$$(5.43) \quad V_3 = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \mu \left\{ r^3 \arccos \frac{2a(R+r)}{(R+r)^2 + a^2} + \frac{1}{4(R+r)^2} \times \right. \\ \left. \times [(R+r)^2 - a^2] [(R+r)^2 + a^2 - 6r(R+r)] a + a^3 \ln \frac{R+r}{a} \right\}.$$

Całkowanie funkcji (5.40) i (5.41) i zastosowanie przekształceń typu (5.28) prowadzi ostatecznie do wzoru, który zapiszemy w postaci bezwymiarowej przy użyciu oznaczeń (5.33):

$$(5.44) \quad \frac{\overline{M}_s}{kR^3} = \frac{4}{3} \arcsin \frac{1+a^2-p^2}{2a} + \frac{4}{3} p^3 \arccos \frac{p^2+a^2-1}{2ap} - \\ - \frac{1}{3} [(1+p)^2 - a^2]^{3/2} \left(\arcsin \frac{a}{1+p} + \arcsin \frac{1-p}{a} \right) - \\ - \frac{2}{3} a [(1+p)^2 - a^2] + \frac{2(1-p)}{3} \sqrt{[p^2 - (1-a)^2][(1+a)^2 - p^2]} + \\ + \frac{4}{3} a^3 \ln \frac{1+p}{a}.$$

Liczbowo i wykreślnie ujmijemy tylko ważny przypadek szczególny $a = 1$, czyli gdy środki małych kół leżą na obwodzie koła zasadniczego. Wtedy można zastosować wzór (5.34) i wzór ogólny (5.44) upraszcza się do postaci

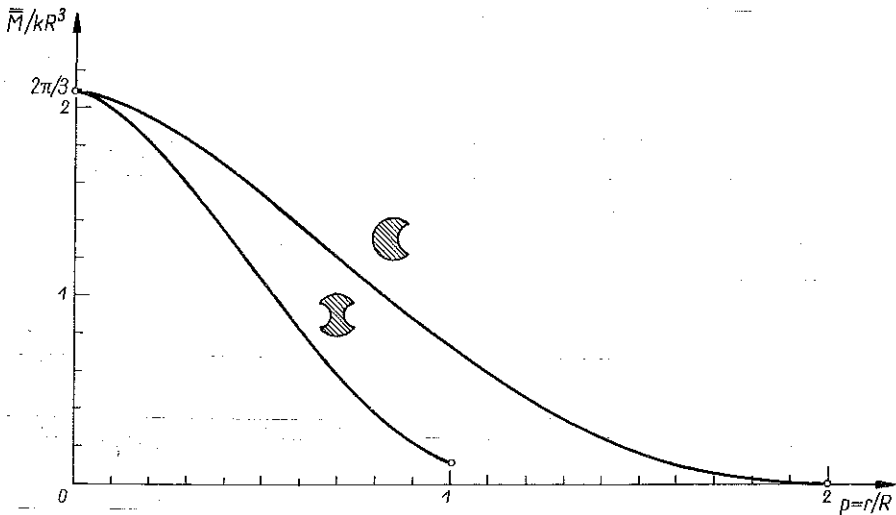
$$(5.45) \quad \frac{\overline{M}_s}{kR^3} = \frac{4}{3} (2+p^3) \arccos \frac{p}{2} - \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{3} (2p+p^2)^{3/2} \times \\ \times \left[\arcsin \frac{1}{1+p} + \arcsin (1-p) \right] - \frac{2}{3} (2p+p^2) + \\ + \frac{2}{3} p(1-p) \sqrt{4-p^2} + \frac{4}{3} \ln(1+p).$$

Wartości liczbowe tej funkcji podaje tablica 4, a wykres zależności $\bar{M}_s = f(p)$ przytoczono na rys. 15 wraz z analogicznym wykresem dla przekroju kołowego z jednym wcięciem kolistym, sporządzonym w oparciu o tablicę 2.

Tablica 4. Nośność graniczna skręcanego pręta
«o przekroju wiertła»

$p = r/R$	\bar{M}_s/kR^3	$p = r/R$	\bar{M}_s/kR^3
0	2,0944	0,5	1,0864
0,1	1,9975	0,6	0,8326
0,2	1,8189	0,7	0,5969
0,3	1,5949	0,8	0,3910
0,4	1,3452	0,9	0,2259
0,5	1,0864	1,0	0,1117

Zwróćmy jeszcze uwagę na przypadek graniczny $p = 1$. Wtedy obszar przekroju pręta rozpada się na dwa oddzielne obszary, z których każdy przenosi połowę



Rys. 15

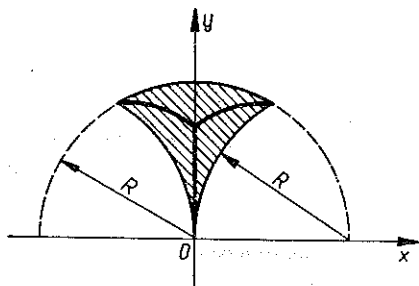
momentu skręcającego. Odpowiedni przekrój ograniczony trzema łukami kół o promieniu R , przedstawiony jest na rysunku 16. Podstawiając $p = 1$ do (5.45) i dzieląc wynik przez 2 otrzymujemy dla takiego przekroju prosty wzór

$$(5.46) \quad \bar{M}_s = \left[\frac{(4 - \sqrt{3})\pi}{12} - 1 + \frac{2}{3} \ln 2 \right] kR^3 = 0,05585 kR^3.$$

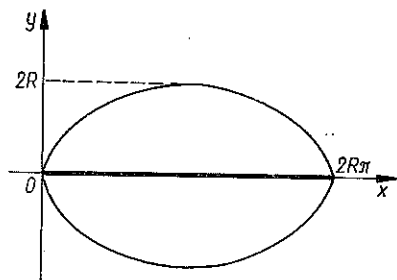
5.5. Dwa łuki cykloidy (owal). Dzięki prostocie wyrażeń na element długości łuku i promieni krzywizny cykloidy otrzymujemy tu wyjątkowo prosty wzór na

graniczny moment skracający. Równanie połówki konturu (rys. 17) napiszemy w postaci

$$(5.47) \quad x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t).$$



Rys. 16



Rys. 17

Linia nieciągłości jest oczywiście odcinek prostej $\tilde{y} = 0$, przy czym należy podkreślić, że — w przeciwieństwie do elipsy — obejmuje on cały przedział $0 \leq x \leq 2R$ (ponieważ promień krzywizny cykloidy w punktach $x = 0$ i $x = 2R$ dąży do zera). Mamy tu

$$(5.48) \quad x'^2 + y'^2 = 2R^2(1 - \cos t), \quad x' y'' - x'' y' = -R^2(1 - \cos t)$$

i po podstawieniu do (3.5) otrzymujemy (mnożąc przez 4 objętość ćwiartki)

$$(5.49) \quad V_D = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \mu \int_0^{\pi} 4R^3 \sqrt{2} (1 - \cos t)^{3/2} dt.$$

Otrzymana całka nie jest całką eliptyczną, jak można by sądzić na pierwszy rzut oka; wprowadzenie kąta $t/2 = u$ otrzymujemy całkę funkcji $\sin^3 u$ i ostatecznie

$$(5.50) \quad \overline{M}_s = \frac{256}{9} kR^3 = 28,44 kR^3.$$

Moment ten jest tylko o około 6% mniejszy od momentu granicznego dla przekroju eliptycznego o tych samych półosiach.

5.6. Kardioida. Przekrój o kształcie kardioidy, który może znaleźć zastosowanie praktyczne przy wałach krzywkowych, jest o tyle ciekawy, że wobec występowania wklęsłego punktu osobliwego musimy część objętości wzgórze piasku V_2 (rys. 3) obliczać wzorem (3.9) lub (3.13). Równania parametryczne konturu napiszemy w postaci (2.19), punkt osobliwy ma współrzędne $x_0 = 0$, $y_0 = R$. Linia nieciągłości jest okręgiem koła (2.20).

Obliczmy najpierw objętość V_1 . Mamy tu

$$(5.51) \quad x'^2 + y'^2 = 8R(1 - \cos t), \quad x' y'' - x'' y' = -12R(1 - \cos t),$$

więc wyrażenia te nie różnią się w sposób istotny od uzyskanych dla cykloidy (5.48)

i całkowanie przebiega dość prosto. Po podstawieniu do (3.5) i wykonaniu całkowania w granicach od 0 do π oraz pomnożeniu przez 2 otrzymujemy

$$(5.52) \quad V_1 = \frac{32}{3} R^3 \operatorname{tg} \mu \quad \bar{M}_{s1} = \frac{64}{3} kR^3.$$

Moment \bar{M}_{s2} obliczamy wzorem (3.13) otrzymując

$$(5.53) \quad \bar{M}_{s2} = \frac{4}{3} k \int_0^\pi R^3 \sqrt{2} (1 - \cos t)^{3/2} dt = \frac{64}{9} kR^3$$

i ostatecznie

$$(5.54) \quad \bar{M}_s = \bar{M}_{s1} + \bar{M}_{s2} = \frac{256}{9} kR^3 = 28,44 kR^3.$$

6. Nośność graniczna skręcanych prętów anizotropowych

Problemem plastycznego skręcania prętów anizotropowych zajmowali się W. O. GEOGDŻAJEW, [5], i G. I. BYKOWCEW, [2]. GEOGDŻAJEW wykazał, że przez wprowadzenie pewnej liniowej transformacji współrzędnych można zawsze sprowadzić problem skręcania jednorodnego pręta anizotropowego do problemu skręcania pręta izotropowego o pewnym innym, przekształconym konturze przekroju. BYKOWCEW zwrócił uwagę na niejednorodne pręty anizotropowe i przypadki anizotropii krzywoliniowej, np. walcowej.

Dzięki transformacji zaproponowanej przez GEOGDŻAJEWA można będzie wykorzystać wyniki obecnej pracy również do obliczenia nośności granicznej skręcanych prętów anizotropowych. Przedstawiając warunek plastyczności Misesa dla najogólniejszego przypadku anizotropii w postaci

$$(6.1) \quad c_1 \tau_{zx}^2 + c_2 \tau_{zy}^2 + c_3 \tau_{zx} \tau_{zy} = 1$$

i wprowadzając funkcję naprężeń (1.3) otrzymujemy równanie

$$(6.2) \quad c_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - c_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1.$$

Jak wiadomo, stałe c_i muszą spełniać nierówność

$$(6.3) \quad c_3^2 < 4c_1 c_2,$$

aby forma kwadratowa (6.1) była dodatnio określona. Wyprowadzimy teraz nowe zmienne niezależne

$$(6.4) \quad x' = x + \frac{c_3}{2c_1} y, \quad y' = \frac{\sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}}{2c_1} y$$

uzyskując w tym układzie współrzędnych takie samo równanie jak dla prętów izotropowych

$$(6.5) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = \frac{4c_1}{4c_1 c_2 - c_3^2}.$$

Warunek brzegowy $\Phi = 0$ na konturze (jednospójnym) oczywiście pozostaje. Graniczny moment skręcający, jak wykazał GEOGDŻAJEW, określony jest za pomocą wzoru

$$(6.6) \quad \bar{M}_s = \frac{4c_1}{\sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}} \iint_F \Phi(x', y') dx' dy'.$$

Dla naszych celów wygodniej jest posłużyć się analogią wzgórza piaskowego. Porównując równanie wzgórza piaskowego (1.7) i równanie (6.5) dochodzimy do proporcji

$$(6.7) \quad \frac{w}{\Phi} = \frac{\sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}}{2\sqrt{c_1}} \operatorname{tg} \mu,$$

a po wyliczeniu stąd Φ i podstawieniu do (6.6) otrzymujemy

$$(6.8) \quad \bar{M}_s = \frac{8c_1^{3/2}}{(4c_1 c_2 - c_3^2) \operatorname{tg} \mu} V_p',$$

przy czym V_p' jest objętością wzgórza piasku zbudowanego na obszarze przekształconym. Wzór (6.7) jest uogólnieniem wzoru (1.8), który otrzymujemy przez przyjęcie $c_1 = c_2 = 1/k^2, c_3 = 0$.

Objętość V_p' możemy obliczyć za pomocą wzorów (3.5), (3.6), (3.9) lub (3.15).

Dla przykładu zajmiemy się prętem anizotropowym o przekroju eliptycznym, w szczególności o przekroju kołowym. Równanie konturu napiszemy w postaci (2.11), zatem równaniem konturu przekształconego będzie

$$(6.9) \quad x' = a \cos t + \frac{c_3}{2c_1} b \sin t, \quad y' = \frac{\sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}}{2c_1} b \sin t.$$

Jest to przy założeniu (6.3) pewna elipsa obrócona względem układu x, y , mianowicie rugując parametr t otrzymujemy

$$(6.10) \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{(4a^2 c_1^2 + b^2 c_3^2)y'^2}{a^2 b^2 (4c_1 c_2 - c_3^2)} - \frac{2c_3 x' y'}{a^2 \sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}} = 1.$$

Półosie a', b' tej elipsy wynoszą (por. [28])

$$(6.11) \quad a', b' = \frac{1}{\sqrt{2c_1}} \sqrt{a^2 c_1 + b^2 c_2 \pm \sqrt{(a^2 c_1 - b^2 c_2)^2 + a^2 b^2 c_3^2}}.$$

Zatem objętość wzgórza piasku V_p' określona jest za pomocą wzoru (5.2), a podstawienie jej do (6.8) rozwiązuje zagadnienie. Wynik można zapisać w postaci

$$(6.12) \quad \bar{M}_s = \frac{16c_1^{3/2} a' b'^2}{3(4c_1 c_2 - c_3^2)} [2E(1 - \psi^2) - \psi^2 K(1 - \psi^2)],$$

gdzie

$$(6.13) \quad \psi = \frac{b'}{a'} = \frac{a^2 c_1 + b^2 c_2 - \sqrt{(a^2 c_1 - b^2 c_2)^2 + a^2 b^2 c_3^2}}{ab \sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}}.$$

Szczególnie ważny dla zastosowań technicznych jest przekrój kołowy. Podstawiając $a = b = R$ do (6.11) otrzymujemy najpierw

$$(6.14) \quad a', b' = \frac{R}{\sqrt{2c_1}} \sqrt{c_1 + c_2 \pm \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + c_3^2}},$$

$$(6.15) \quad \psi = \frac{b'}{a'} = \frac{c_1 + c_2 - \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + c_3^2}}{\sqrt{4c_1 c_2 - c_3^2}}$$

oraz

$$(6.16) \quad \bar{M}_s = \frac{8R^3}{3\sqrt{2} \sqrt{c_1 + c_2 + \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + c_3^2}}} [2E(1 - \psi^2) - \psi^2 K(1 - \psi^2)].$$

W przypadku $c_3 = 0$, $c_1 = c_2 = 1/k^2$ (izotropia) mamy $\psi = 1$, $E(0) = K(0) = \pi/2$, i otrzymujemy ogólnie znany wzór

$$(6.17) \quad \bar{M}_s = \frac{2}{3} \pi k R^3.$$

7. Nośność graniczna skręcanych prętów niejednorodnych

Skręcaniu w przypadku niejednorodności plastycznej poświęcił uwagę A. I. KUZNIECOW, [12]. Stwierdził on, że w ogólnym przypadku uzyskane równania są trudne do scałkowania, jednak problem upraszcza się znacznie, gdy granica plastyczności zależy tylko od odległości punktu od konturu lub gdy jest funkcją tylko jednej zmiennej w układzie kartezjańskim.

Z tych dwóch przypadków pierwszy może posiadać duże znaczenie praktyczne, odpowiada mianowicie powierzchniowej obróbce cieplnej. Rozwińmy obecnie rozważania Kuzniecowa i podany sposób obliczania granicznego momentu skręcającego. Jak stwierdza Kuzniecowa, linie nieciągłości są tu takie same jak w przypadku materiału izotropowego.

Oznaczmy najkrótszą odległość rozpatrywanego punktu od konturu przez n i załóżmy, że znany jest rozkład granicy plastyczności przy skręcaniu $k = k(n)$. W praktyce jest to zwykle pewna funkcja malejąca zmiennej n . Wprowadźmy funkcję naprężeń za pomocą zwykłych wzorów (1.3) (odmiennie od Kuzniecowa). Wtedy równanie określające funkcję naprężeń można zapisać w postaci

$$(7.1) \quad |\overrightarrow{\text{grad}} \Phi| = k(n),$$

czyli

$$(7.2) \quad \frac{d\Phi(n)}{dn} = k(n),$$

a moment skręcający jest proporcjonalny do objętości wzgórza piasku o zmiennym kącie zsypania $\mu = \mu(n)$.

Dzięki analogii obliczymy wprost moment skracający, a całkę podwójną ziterujemy teraz następująco:

$$(7.3) \quad \bar{M}_s = 2 \int_F \int \Phi dF = 2 \oint_s ds \int_0^m \left(1 - \frac{n}{\rho}\right) \Phi(n) dn,$$

ponieważ $dF = (1 - n/\rho) ds dn$, czyli $J = 1 - n/\rho$ jest jacobianem przekształcenia. Przez m oznaczyliśmy tu, podobnie jak w p. 3, odległość linii nieciągłości od konturu. Wobec (7.2) po scałkowaniu przez części otrzymujemy ostatecznie

$$(7.4) \quad \bar{M}_s = 2 \oint_s ds \int_0^m \left(m - \frac{m^2}{2\rho} - n + \frac{n^2}{2\rho}\right) k(n) dn.$$

W szczególnym przypadku $k(n) = k = \text{const}$ (jednorodność) otrzymujemy oczywiście wzór odpowiadający (3.1). W przypadku liniowej zmiany granicy plastyczności,

$$(7.5) \quad k = k_0 + An$$

otrzymujemy po wewnętrznym scałkowaniu

$$(7.6) \quad \bar{M}_s = 2 \oint_s \left[\left(\frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3\rho} \right) k_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^4}{8\rho} \right) A \right] ds.$$

Pierwszy składnik przedstawia nośność graniczną pręta jednorodnego o granicy plastyczności k_0 , drugi — «poprawkę na niejednorodność». Okazuje się, że poprawkę tę często nawet łatwiej jest obliczyć niż nośność pręta jednorodnego. Podstawiając do (7.6) wzory (3.2), (3.3) i (3.4) otrzymujemy na poprawkę $\Delta \bar{M}_s$ wzór

$$(7.7) \quad \Delta \bar{M}_s = \frac{A}{12} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{4(y - \tilde{y})^3 (x'^2 + y'^2)^2}{x'^3} - \frac{3(x'y'' - x''y')(y - \tilde{y})^4 (x'^2 + y'^2)}{x'^4} \right] dt.$$

Należy tu podkreślić, że w przeciwieństwie do wzoru (3.8) wzór (7.7) nie jest uniwersalny o tyle, że może być zastosowany tylko przy takim doborze parametru t , iż ruch wokół konturu odbywa się zgodnie ze wskazówkami zegara. W przeciwnym przypadku należy zmienić obydwie znaki na plus. Prostota w stosunku do wzoru (3.8) polega na tym iż wyrażenie $x'^2 + y'^2$ występuje tylko w potęgze całkowitej. Tak np. w przypadku elipsy, (2.11), otrzymujemy po wykonaniu prostego całkowania prosty wzór

$$(7.8) \quad \Delta \bar{M}_s = \frac{\pi}{24} \frac{b^3}{a} (3a^2 - b^2) A,$$

a więc nie zawierający całek eliptycznych w przeciwieństwie do (5.2).

Poświęcimy jeszcze chwilę uwagi niejednorodności nieciągłej. Niech np. $k(n) = k_1 = \text{const}$ dla $0 < n < g$ oraz $k(n) = k_2 = \text{const}$ dla $g < n < m$, przy czym założymy, że na każdej normalnej $g \leq m$, czyli grubość zewnętrznej strefy nie jest większa od najmniejszego promienia krzywizny. Korzystając ze wzoru ogólnego (7.4) i rozbijając całkę wewnętrzną na dwie całki w odpowiednich granicach otrzymujemy najpierw

$$(7.9) \quad \bar{M}_s = 2 \oint_s \left\{ \left[\left(m - \frac{m^2}{2\varrho} \right) g - \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{6\varrho} \right] (k_1 - k_2) + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3\varrho} \right) k_2 \right\} ds.$$

Wyrażenie wewnątrz pierwszego nawiasu jest równe podwójnej powierzchni całego przekroju, mamy mianowicie — podobnie jak przy wzorze (4.5) —

$$(7.10) \quad F = \frac{1}{2} \oint_s \left[\varrho - \frac{(\varrho - m)^2}{\varrho} \right] ds = \oint_s \left(m - \frac{m^2}{2\varrho} \right) ds;$$

wyrażenie wewnątrz ostatniego nawiasu daje nośność graniczną danego przekroju ze względu na skręcanie przy stałej granicy plastyczności k_2 , tak że ostatecznie otrzymujemy

$$(7.11) \quad \bar{M}_s = \bar{M}_s(k_2) + \left(\frac{2}{3} \pi g^3 - g^2 s + 2gF \right) (k_1 - k_2).$$

Zauważymy jeszcze, iż przy $k_2 = 0$ otrzymujemy po prostu pręt dwuspójny o stałej grubości ścianki g i wzór (7.11) przechodzi w (4.8).

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. ACKERMANN, *Böschungstrahlen und Böschungsf lächen*, Dissertation, Halle 1913.
- [2] Г. И. БЫКОВЦЕВ, *О кручении призматических стержней из анизотропного идеально-пластического материала*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Машин., 1961/3, 151–157.
- [3] F. A. GAYDON, *On the combined torsion and tension of a partly plastic circular cylinder*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 5 (1952), 29–41.
- [4] F. A. GAYDON, H. NUTTALL, *On the combined bending and twisting of beams of various sections*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 6 (1957), 17–26.
- [5] В. О. ГЕОГДЖАЕВ, *Пластическое кручение анизотропных стержней*, Труды Моск. Физ.-Техн. Инст., вып. 3 (1959), 171–179.
- [6] De la GOURNERIE, *Traité de géométrie descriptive*, v. II, Paris 1885, 54.
- [7] И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. 4, Физматгиз, Москва 1962.
- [8] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
- [9] R. HILL, M. P. L. SIEBEL, *On combined bending and twisting of thin tubes in the plastic range*, Phil. Mag., 7, 42 (1951), 722–733.
- [10] R. HILL, M. P. L. SIEBEL, *On the plastic distortion of solid bars by combined bending and twisting*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 1953, 207–214.
- [11] E. O. IBEGWU, *Plastic flexure and torsion*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 8 (1960), 141–146.

- [12] A. I. KUZNIECOW, *The problem of torsion and plane strain of non-homogeneous plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 4, 10 (1958), 447-462.
- [13] Л. С. Лейбензон, *Элементы математической теории пластичности*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1943.
- [14] A. NÁDAI, *Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab*, ZAMM, 6, 3 (1923), 442-454.
- [15] A. NÁDAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw-Hill, New York 1950. Тlum. ros.: IL, Moskwa 1954.
- [16] S. PIECHNIK, *The influence of bending on the limit state of a circular bar subject to torsion*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961), 77-106.
- [17] S. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the plastic interaction curve for bending and torsion of a circular bar*, Arch. Mech. Stos., 5, 13 (1961), 669-692.
- [18] W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York 1951. Тlum. ros.: IL, Moskwa 1956.
- [19] M. A. SADOWSKY, *An extension of the sand heap analogy in plastic torsion applicable to cross-sections having one or more holes*, J. Appl. Mech., 2, 8 (1941), 166-168.
- [20] F. SCHILLING, *Über die Böschungflächen mit Kegelschnitten als Basiskurven*, ZAMM, 3, 3 (1923), 197-217.
- [21] В. Я. Скоробогатько, *Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными*, Изд. Львовского Универс., 1961.
- [22] Z. SOBOTKA, *Theorie Plasticity*, t.I., Nakl. CSAV, Praha 1954.
- [23] В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950.
- [24] M. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcanego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., 3, 10 (1962), 565-581.
- [25] M. WNUK, *Oszacowanie krzywej nośności granicznej przy jednoczesnym skręcaniu z rozciąganiem*, Rozpr. Inżyn., 1, 11 (1963), 179-200.
- [26] M. WNUK, *Krzywe nośności granicznej dla jednocześnie skręcanych i rozciąganych prętów o różnych kształtach przekroju*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963).
- [27] M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955), 285-322.
- [28] M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wyęźnienia*, Rozpr. Inżyn., 4, 9 (1961), 609-637.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПОДВЕРГНУТЫХ
КРУЧЕНИЮ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Благодаря аналогии Надаи и Садовского проблема определения несущей способности изотропных однородных стержней подвергнутых кручению сведена к определению расчету объема тел с постоянным наклоном (объема песчаных бугров). Целью настоящей работы является приведение аналитических формул, определяющих этот объем. В п. 2 даются уравнения линий разрыва напряжений, соответствующие регулярным дугам контура, одной вогнутой сингулярной точке и двум вогнутым сингулярным точкам. Этими уравнениями последовательно являются (2.3), (2.4), (2.17) и (2.8). Объем бугра песка или его часть определяется общими формулами (3.5) или (3.6) либо (3.13) и (3.15).

Для примера дается решение для сечений в форме эллипса, полукруга и круга с вырезанным круговым отверстием, круга с двумя вырезанными круговыми отверстиями, овала ограниченной двумя дугами циклоиды и кардиоды. Результаты сопоставлены в виде таблиц и диаграмм.

В п. 6 выведенные формулы применяются к расчетам несущей способности анизотропных стержней, так как В. О. Геогджаев [5] доказал, что благодаря подставлению (6.4) можно свести к задаче изотропного стержня преобразованного контура. В п. 7 выведенные формулы применяются к определениям несущей способности подвергнутых кручению неоднородных стержней если предел пластичности зависит только от расстояния точки от контура сечения; этот тип неоднородности может иметь практическое значение при поверхностной термической обработке. Рассматривается также случай разрывной неоднородности.

Summary

ANALYTICAL CALCULATION OF THE LIMIT LOAD OF BARS SUBJECT TO TORSION

Owing to the analogies of Nadai and Sadowsky, the problem of calculation of the limit load of an isotropic homogeneous bar subject to torsion is reduced to that of computing the volume of a solid of uniform slope (a «sand hill»). The aim of the present paper is to derive general equations determining this volume. In Sec. 2 are given equations of discontinuity lines of stresses corresponding to regular arcs of the contour, one concave singularity and two concave singularities. These are, respectively, Eqs. (2.3), (2.4), (2.17) and (2.18). The volume of the sand-hill or part of it is determined by the respective general Eqs. (3.5) or (3.6), (3.9) or (3.13) and (3.15).

As an example are given solutions for elliptic profiles, a semicircular profile, circle with a circular incision or with two circular incisions, a profile bounded by two cycloidal arcs and a cardioid. The results are represented in the form of tables and graphs.

In Sec. 6, the equations derived are applied to the computation of the limit load of anisotropic bars, because it has been shown by W.O. GEOGDŻAJEW, [5], that this problem can be reduced by substituting (6.4) to that of an isotropic bar with transformed contour. In Sec. 7, the equations derived are applied to the computation of the limit load of a non-homogeneous bar subject to torsion if the yield point depends only on the distance of the point from the contour of the section; this type of non-homogeneity may have a practical value in the case of surface heat treatment. The case of discontinuous non-homogeneity, is also considered.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 czerwca 1963 r.