ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 12 (1964)

PEWNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI CIAŁ ANIZOTROPOWYCH

MARIAN SUCHAR (ŁÓDŹ)

Wstęp

Praca składa się z dwóch rozdziałów. W rozdziale pierwszym zajmujemy się głównie strukturą rozwiązań równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych typu eliptycznego, występujących w dwuwymiarowych zagadnieniach teorii sprężystości jednorodnych ciał anizotropowych (dwuwymiarowych w tym sensie, że poszukiwane i dane funkcje zależą od dwóch zmiennych niezależnych). Opisują one ugięcie cienkich płyt anizotropowych lub funkcję naprężeń i funkcje przemieszczeń dla płaskich stanów naprężenia i odkształcenia przy istnieniu w każdym punkcie ciała co najmniej jednej płaszczyzny symetrii sprężystej; wtedy zawierają one tylko pochodne rzędu czwartego o stałych współczynnikach, [9]. Opisują one również pewnego rodzaju stany naprężenia lub odkształcenia w ciele o dowolnej anizotropii prostoliniowej i wówczas dają się sprowadzić do równania zawierającego pochodne szóstego rzędu ze stałymi współczynnikami, [10]. Szczególną uwagę zwrócimy na równanie powierzchni ugięcia płyty anizotropowej.

Zagadnieniom tym poświęcono dotychczas bardzo dużą liczbę prac i w dalszym ciągu są one intensywnie badane. Część rezultatów została zebrana w znanych monografiach S. G. LECHNICKIEGO, [9], [10], G. N. SAWINA, [23], J. BRILLI, [3], A. E. GREENA i W. ZERNY, [6], i innych.

Szczególnie duże usługi, zwłaszcza w zagadnieniach o charakterze teoretycznym dotyczących struktury oraz istnienia i jednoznaczności rozwiązań, oddało zastosowanie metod zmiennej zespolonej.

Wyjściowym punktem takich rozważań jest przedstawienie ogólnego rozwiązania odpowiedniego równania jednorodnego za pomocą funkcji zmiennej zespolonej. Formalny sposób otrzymania ogólnej postaci rozwiązania, podany w wyżej cytowanych pracach, omówimy na przykładzie równania rzędu czwartego

$$a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{0.1}$$

gdzie $u(x, y)$ jest poszukiwaną funkcją, zaś a_j są znanymi stałymi.

Równanie to można napisać, [9], w postaci

$$D_1 D_2 D_3 D_4 u = 0, \tag{0.2}$$

przy czym $D_j = \partial/\partial y - \mu_j\, \partial/\partial x$, a μ_j są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$a_4 \mu^4 + a_3 \mu^3 + a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0 = 0 \tag{0.3}$$

lub, co jest równoważne, w postaci

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = 0, \tag{0.4}$$

gdzie

$$z_j = x + \mu_j y \tag{0.5}$$

bądź

$$z_j = z + k_j \bar{z}, \qquad \left(z = x + iy,\ k_j = \frac{1 + i\mu_j}{1 - i\mu_j}\right), \qquad j = 1, 2 \tag{0.5'}$$

w zależności od tego, czy używamy parametrów zespolonych pierwszego czy drugiego rodzaju. Stąd, jeżeli parametry zespolone są różne, otrzymuje się

$$u = F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(\bar{z}_1) + F_4(\bar{z}_2), \tag{0.6}$$

gdzie F_m są «dowolnymi» funkcjami swoich argumentów. Wreszcie ponieważ $u(x, y)$ jest funkcją rzeczywistą, to

$$u(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)}. \tag{0.7}$$

Ten tok postępowania wymaga założenia, że funkcja $u(x, y)$ jest analityczna. W pracy tej podamy inny sposób wyprowadzenia ogólnej postaci rozwiązania równania rzędu czwartego (por. [27, 28]) jak również dowolnego rzędu parzystego, nie wymagający założenia analityczności rozwiązania; własność ta będzie wnioskiem z udowodnionych twierdzeń.

Podobnie przedstawia się sprawa z ogólnym rozwiązaniem równania biharmonicznego. Wzór Goursata, [5], ponownie udowodnił N. I. Muscheliszwili, [16], nie zakładając, że każda funkcja biharmoniczna jest analityczna. Podane w pracy dowody (§ 2 i 9) stanowią uogólnienie dowodu Muscheliszwilego na przypadek równania eliptycznego postaci (0.1) oraz równań eliptycznych dowolnego rzędu parzystego o stałych współczynnikach.

Dalsze rozważania w pracy dotyczą ogólnej postaci rozwiązania jednorodnych równań eliptycznych dla obszarów wielospójnych skończonych i nieskończonych (§ 4, 6, 9). Najpierw wyprowadza się postać rozwiązania wykorzystując jedynie warunki regularności i jednoznaczności rozwiązania lub jego odpowiednich pochodnych, a dopiero następnie uwzględnia warunki równowagi i z nich wyznacza występujące w rozwiązaniu współczynniki. Tak otrzymane w pierwszym stadium rozwiązania mają charakter ogólny i stosują się zarówno do zagadnień zginania płyt i zagadnień płaskich, jak również do dowolnych innych zagadnień, które są opisane tego typu równaniami.

W szczególności otrzymano w ten sposób rozwiązania podstawowe rozważanych równań, które mogą służyć do zbudowania funkcji Greena.

Wykorzystując rozwiązanie dla płyty zajmującej obszar dwuspójny, ograniczony okręgiem i punktem w nieskończoności, w odpowiedni sposób obciążonej na obwodzie otworu, oraz wykonując przejście graniczne przy promieniu okręgu dążącym do zera, otrzymano w § 7 rozwiązanie osobliwe dla nieograniczonej płyty anizotropowej obciążonej siłą skupioną, podane uprzednio przez J. Mossakowskiego, [13] (w pracy tej nie opisano sposobu uzyskania funkcji stanowiących rozwiązanie zagadnienia) oraz dla płyty obciążonej momentem skupionym i bimomentem skupionym.

W podobny sposób otrzymuje się rozwiązanie osobliwe dla nieograniczonej tarczy anizotropowej obciążonej siłą skupioną i momentem skupionym, podane przez S. G. Lechnickiego, ([9, 12]; por. również [16]).

Rozdział II pracy jest poświęcony płaskiemu zagadnieniu dystorsyjnemu dla ciał anizotropowych. Zadanie polega na wyznaczeniu stanu naprężenia i przemieszczeń w tarczy anizotropowej, wywołanych przez odkształcenia początkowe dane na pewnej części obszaru tarczy. Jest to uogólnienie na przypadek anizotropii płaskiego zagadnienia dystorsyjnego, rozwiązanego przez W. Nowackiego dla ciał izotropowych, [18].

Skorzystano tutaj z metody funkcji Greena, dostosowanej przez W. Nowackiego do tych zagadnień. Funkcjami Greena są w tym przypadku wielkości (naprężenia, przemieszczenia, funkcje naprężeń lub przemieszczeń) wywołane działaniem jądra sprężystego odkształcenia. Znajomość funkcji Greena pozwala przez scałkowanie otrzymać rozwiązanie dla odkształceń początkowych dowolnie rozłożonych na danym obszarze.

Punktem wyjścia jest obliczenie naprężeń i przemieszczeń w tarczy nieograniczonej, wywołanych przez jądro sprężystego odkształcenia. Naprężenia wyznaczono za pomocą funkcji Airy'ego, a przemieszczenia posługując się funkcjami Galerkina, przy czym rozwiązanie wyrażono przez odpowiednie całki Fouriera, które ostatecznie przedstawiono w postaci zamkniętej. Można je również otrzymać z odpowiednich rozwiązań osobliwych dla płyt anizotropowych, obciążonych siłą, momentem albo bimomentem skupionym.

Dodając do otrzymanej poprzednio części osobliwej rozwiązania odpowiednio dobraną część regularną tak, aby ich suma spełniała dane warunki brzegowe, wyznaczono dalej naprężenia i przemieszczenia w półpłaszczyźnie tarczowej o brzegu utwierdzonym i swobodnym oraz w pasmie tarczowym. Pokazano również, że obliczenie rozwiązania dla tarczy skończonej sprowadza się do rozwiązania jednego z podstawowych zagadnień płaskich teorii sprężystości ciała anizotropowego.

Szczególny przypadek omówionego zagadnienia dystorsyjnego stanowią ustalone dystorsje termiczne, którym poświęcony jest ostatni punkt pracy. Wykorzystując otrzymane poprzednio rezultaty podano naprężenia i przemieszczenia w tarczy nieograniczonej oraz w półpłaszczyźnie tarczowej, wywołane przez ustalone jądro termo-sprężystego odkształcenia. Mogą one posłużyć do obliczenia naprężeń czy przemieszczeń wywołanych w tarczy przez nieciągłe pole temperatury. Zilustrowano to na dwóch przykładach, gdy temperatura w tarczy nieograniczonej i w półpłaszczyźnie jest stała na obszarze prostokąta, a równa się zeru na zewnątrz tego obszaru.

W pracy omówiono również możliwość wykorzystania otrzymanych rozwiązań do wyznaczania naprężeń i przemieszczeń w ciałach anizotropowych znajdujących się w płaskim stanie odkształcenia.

Rozdział I

PEWNE ZAGADNIENIA TEORII PŁYT ANIZOTROPOWYCH

1. Podstawowe równania teorii zginania cienkich płyt anizotropowych

Zajmować się będziemy płytami cienkimi, tzn. takimi, których grubość jest mała w porównaniu z pozostałymi rozmiarami. Rozpatrujemy małe ugięcia tych płyt (małe w porównaniu z grubością). Zakładamy, że płyta jest jednorodna anizotropowa i ma w każdym punkcie płaszczyznę symetrii sprężystej równoległą do płaszczyzny środkowej płyty. Prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych umieścimy tak, że płaszczyzna Oxy pokrywa się z płaszczyzną środkową płyty (nieodkształconej), zaś oś OZ skierujemy pionowo w dół.

Nie uwzględniamy sił objętościowych, natomiast obciążenie powodujące zginanie płyty może być bądź obciążeniem powierzchniowym $p(x, y)$ prostopadłym do płaszczyzny środkowej (w stanie nieodkształconym), bądź obciążeniem brzegowym w postaci momentów zginających lub sił pionowych.

Zgodnie z przybliżoną teorią zginania cienkich płyt zakładamy, że: 1) odcinki prostoliniowe, prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty przed odkształceniem, pozostają prostoliniowymi i prostopadłymi do odkształconej powierzchni środkowej, 2) elementy powierzchni środkowej nie odkształcają się i 3) naprężenie normalne σ_z jest wielkością małą w porównaniu z naprężeniami w przekrojach poprzecznych σ_x, σ_y i τ_{xy}.

Przy powyższych założeniach składowe wektora przemieszczenia u i v w kierunku osi Ox i Oy oraz momenty zginające M_x, M_y, skręcający H_{xy} i siły tnące N_x, N_y wyrażają się następująco przez ugięcie $w(x, y)$, [9]:

$$u = -Z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -Z\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} M_x &= -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right), \\ M_y &= -\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right), \\ H_{xy} &= -\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right); \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
N_x &= -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + (D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right],\\
N_y &= -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right];
\end{aligned}
$$

D_{ij} oznaczają tutaj stałe materiałowe.

Warunki równowagi nieskończenie małego elementu płyty dostarczają równania różniczkowego

$$
(1.4)\qquad D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p,
$$

które musi spełniać ugięcie płyty $w(x, y)$. Ponadto funkcja $w(x, y)$ musi spełniać określone warunki brzegowe zależne od sposobu obciążenia lub utwierdzenia brzegu płyty.

Oznaczając przez t, n odpowiednio styczną i normalną do brzegu warunki brzegowe możemy ogólnie napisać w postaci, [7],

$$
(1.5)\qquad M_n = -k_1\frac{\partial w}{\partial n},\qquad R_n = -k_2 w,
$$

gdzie k_1, k_2 są stałymi sprężystego utwierdzenia i sprężystego podparcia brzegu, zaś

$$
M_n = M_x\cos^2(n, x) + M_y\cos^2(n, y) + 2H_{xy}\cos(n, x)\cos(n, y),
$$

$$
R_n = N_n + \frac{\partial H_{tn}}{\partial s},
$$

przy czym

$$
N_n = N_x\cos(n, x) + N_y\cos(n, y),
$$

$$
H_{tn} = (M_y - M_x)\cos(n, x)\cos(n, y) + H_{xy}[\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)],
$$

a $\partial/\partial s$ oznacza pochodną względem łuku s.

W granicznych przypadkach przy $k_1 \to \infty$, $k_2 \to \infty$ mamy brzeg utwierdzony zupełnie, przy $k_1 \to 0$, $k_2 \to 0$ brzeg swobodny, przy $k_1 \to 0$, $k_2 \to \infty$ brzeg wolno podparty.

Jeżeli do (1.5) podstawimy $-k_1\dfrac{\partial w}{\partial n} = m(s)$, $-k_2 w = r(s)$, to warunki te odpowiadają przypadkowi, gdy brzeg jest obciążony danymi momentami zginającymi $m(s)$ i siłami brzegowymi $r(s)$; przyjmując zaś $M_n(-k_1)^{-1} = \alpha^*$, $R_n(-k_2)^{-1} = w^*$, będziemy mieć do czynienia z przypadkiem, gdy znane jest ugięcie brzegu w^* i kąt nachylenia α^* ugiętej powierzchni do płaszczyzny Oxy.

Rozwiązanie ogólne równania (1.4) jest sumą

$$
(1.6)\qquad w = w_0 + w_1,
$$

gdzie $w_0(x, y)$ jest szczególnym rozwiązaniem tego równania, natomiast $w_1(x, y)$ rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego. W następnych punktach podamy ogólne rozwiązanie równania jednorodnego dla obszarów jedno- i wielospójnych.

2. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego w obszarze jednospójnym

Równaniu różniczkowemu

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0 \tag{2.1}$$

odpowiada równanie charakterystyczne

$$D_{22}\mu^4+4D_{26}\mu^3+2(D_{12}+2D_{66})\mu^2+4D_{16}\mu+D_{11}=0. \tag{2.2}$$

Jak wykazał S. G. Lechnicki, [11], dla płyt anizotropowych jednorodnych, doskonale sprężystych równanie (2.2) nie może mieć pierwiastków rzeczywistych. Dlatego, jak łatwo sprawdzić, w występujących w teorii sprężystości przypadkach równanie (2.1) jest typu eliptycznego.

Możliwe są dwa przypadki: gdy pierwiastki równania charakterystycznego są różne oraz gdy są równe parami. W pierwszym przypadku możemy je napisać w postaci

$$\mu_1=\alpha+i\beta,\quad \mu_2=\gamma+i\delta,\quad \mu_3=\bar{\mu}_1,\quad \mu_4=\bar{\mu}_2,\quad (\beta>0,\ \delta>0). \tag{2.3}$$

W przypadku pierwiastków równych, gdy $\mu_1=\mu_2=\omega+i\theta$, $\theta>0$, równanie (2.1) po zamianie zmiennych $\xi=x+\omega y$, $\eta=\theta y$ przekształca się w równanie biharmoniczne. Dlatego powyższego przypadku nie będziemy w pracy rozpatrywać.

Niech S będzie pewnym jednospójnym obszarem na płaszczyźnie Oxy. Rozwiązania równania (2.1), które w obszarze S mają ciągłe pochodne do rzędu czwartego włącznie, będziemy nazywać rozwiązaniami regularnymi.

Niech $w(x, y)$ będzie dowolnym regularnym rozwiązaniem tego równania. Wprowadzając nowe zmienne

$$z=x+iy,\quad \bar{z}=x-iy, \tag{2.4}$$

możemy zapisać równanie (2.1) w postaci

$$B_1\frac{\partial^4 W}{\partial z^4}+B_2\frac{\partial^4 W}{\partial z^3\partial\bar{z}}+B_3\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}+B_4\frac{\partial^4 W}{\partial z\partial\bar{z}^3}+B_5\frac{\partial^4 W}{\partial\bar{z}^4}=0, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
B_1&=D_{11}+4D_{16}i-2(D_{12}+2D_{66})-4D_{26}i+D_{22},\\
B_2&=4D_{11}+8D_{16}i+8D_{26}i-4D_{22},\\
B_3&=6D_{11}+4(D_{12}+2D_{66})+6D_{22},\\
B_4&=4D_{11}-8D_{16}i-8D_{26}i-4D_{22},\\
B_5&=D_{11}-4D_{16}i-2(D_{12}+2D_{66})+4D_{26}i+D_{22}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Równanie charakterystyczne równania (2.5)

$$B_5 k^4 + B_4 k^3 + B_3 k^2 + B_2 k + B_1 = 0 \tag{2.7}$$

ma pierwiastki

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1+i\mu_1}{1-i\mu_1}, \quad k_2 = \frac{1+i\mu_2}{1-i\mu_2}, \quad k_3 = \frac{1+i\bar{\mu}_1}{1-i\bar{\mu}_1} = \frac{1}{\bar{k}_1}, \\ k_4 &= \frac{1+i\bar{\mu}_2}{1-i\bar{\mu}_2} = \frac{1}{\bar{k}_2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

przy czym ze względu na warunki $\beta > 0$ i $\delta > 0$

$$|k_1| < 1, \quad |k_2| < 1. \tag{2.9}$$

Korzystając z zależności między pierwiastkami i współczynnikami równania (2.7) możemy przedstawić równanie (2.5) w postaci

$$\left[k_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (1+k_1\bar{k}_1)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}} + \bar{k}_1 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right]\left[k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - (1+k_2\bar{k}_2)\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial \bar{z}} + \right. \\ \left. + \bar{k}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2}\right] = 0. \tag{2.10}$$

Niech funkcja $w(x, y) = W(z, \bar{z})$ będzie rzeczywistym regularnym w obszarze S rozwiązaniem równania (2.1) i niech jej pochodne od drugiego rzędu zaczynając będą funkcjami jednoznacznymi. Wtedy

$$k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - (1+k_2\bar{k}_2)\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial \bar{z}} + \bar{k}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} = f(x_1, y_1) \tag{2.11}$$

jest funkcją rzeczywistą harmoniczną zmiennych rzeczywistych

$$x_1 = \frac{1+\bar{k}_1}{2} z + \frac{1+k_1}{2}\bar{z}, \quad y_1 = \frac{1-\bar{k}_1}{2i} z - \frac{1-k_1}{2i}\bar{z}. \tag{2.12}$$

Niech $g(x_1, y_1)$ oznacza funkcję harmoniczną sprzężoną z $f(x_1, y_1)$, tak że

$$h(z_1) = f(x_1, y_1) + ig(x_1, y_1) \tag{2.13}$$

jest funkcją holomorficzną zmiennej zespolonej

$$z_1 = x_1 + iy_1 = z + k_1 \bar{z}. \tag{2.14}$$

Zbudujmy funkcje holomorficzne

$$H(z_1) = \int h(z_1)\, dz_1,$$

$$\varphi_1(z_1) = \frac{(k_2\bar{k}_2 - 1)^2}{4(k_2 - k_1)(k_1\bar{k}_2 - 1)} \int H(z_1)\, dz_1 = p(x_1, y_1) + iq(x_1, y_1). \tag{2.15}$$

Przez całkę nieoznaczoną $\int h(z_1)\, dz_1$ rozumiemy funkcję $H(z_1) = \int_{z_{10}}^{z_1} h(z_1)\, dz_1 +$ $+\mathrm{const}$, gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż dowolnej drogi łączącej ustalony punkt z_{10} ze zmiennym punktem z_1, leżącej wewnątrz obszaru S_1 powstałego z obszaru S przez przekształcenie afiniczne, określone za pomocą związków (2.12) i (2.4). Ponieważ z założenia obszar S jest jednospójny, przeto $H(z_1)$ jest funkcją jednoznaczną.

Nie trudno jest sprawdzić korzystając ze związków Cauchy'ego–Riemanna, że

$$\left[k_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (1+k_2\bar{k}_2)\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} + \bar{k}_2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right][w - p(x_1, y_1)] = 0.$$

Zatem

$$w(x,y) - p(x_1, y_1) = r(x_2, y_2) \tag{2.16}$$

jest funkcją rzeczywistą harmoniczną zmiennych rzeczywistych

$$x_2 = \frac{1+\bar{k}_2}{2} z + \frac{1+k_2}{2}\bar{z}, \quad y_2 = \frac{1-\bar{k}_2}{2i} z - \frac{1-k_2}{2i}\bar{z}. \tag{2.17}$$

Jeżeli przez $\varphi_2(z_2)$, gdzie z_2 jest zmienną zespoloną

$$z_2 = x_2 + iy_2 = z + k_2\bar{z}, \tag{2.18}$$

oznaczymy funkcję holomorficzną, której częścią rzeczywistą jest $r(x_2, y_2)$, to z (2.16) otrzymamy

$$w(x,y) = \mathrm{Re}\,[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)], \tag{2.19}$$

gdzie Re oznacza część rzeczywistą.

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie: *każde rozwiązanie równania jednorodnego* (2.1), *rzeczywiste i regularne w obszarze jednospójnym S, którego pochodne od drugiego rzędu zaczynając są jednoznaczne, można przedstawić za pomocą dwóch funkcji holomorficznych w postaci* (2.19) (*jeśli pierwiastki równania charakterystycznego* (2.2) *są zespolone i różne*).

Ponieważ na odwrót przy dowolnych funkcjach holomorficznych $\varphi_1(z_1)$ i $\varphi_2(z_2)$ funkcja $w(x,y)$ określona przez (2.19) spełnia równanie różniczkowe (2.1), wzór (2.19) przedstawia ogólną postać rozwiązania w obszarze jednospójnym.

Zauważmy, że jako wniosek otrzymujemy przy powyższych założeniach jednoznaczność funkcji $w(x,y)$ i jej pierwszych pochodnych. Podobnie przedstawia się sprawa z jednoznacznością rozwiązań równania biharmonicznego, [16].

Korzystając z powyższego twierdzenia oraz analityczności funkcji harmonicznych, ([8], str. 217), można łatwo pokazać, że $w(x,y)$ będąca rzeczywistym jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.1), regularnym w jednospójnym obszarze S, jest w S funkcją analityczną zmiennych x i y.

Rozwiązanie ogólne równania (2.1) można również wyrazić przez funkcje holomorficzne $\varphi_1^*(z_1^*)$, $\varphi_2^*(z_2^*)$ zmiennych zespolonych

$$z_1^* = x + \mu_1 y, \quad z_2^* = x + \mu_2 y \tag{2.20}$$

w postaci

$$w(x, y) = \mathrm{Re}\,[\varphi_1^*(z_1^*) + \varphi_2^*(z_2^*)]. \tag{2.21}$$

Wzory (2.21) oraz (2.19) zostały wyprowadzone innym sposobem przez S. G. LECHNICKIEGO, [9].

3. Stopień określoności funkcji $\varphi_j(z_j)$

Niech w obszarze S płyty będzie dany stan naprężenia określony przez składowe tensora naprężeń σ_x, σ_y, τ_{xy} lub, co jest równoważne, niech będą dane momenty zginające M_x i M_y oraz moment skręcający H_{xy}. Powstaje pytanie, w jakim stopniu funkcje $\varphi_1(z_1)$ i $\varphi_2(z_2)$ są wyznaczone przez te wielkości.

Załóżmy, że znaleźliśmy dwa układy funkcji holomorficznych $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$ oraz $\psi_1(z_1)$, $\psi_2(z_2)$ i tym samym dwie postacie ugięć $w_1(x, y) = \mathrm{Re}\,[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)] + w_0(x, y)$ oraz $w_2(x, y) = \mathrm{Re}\,[\psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)] + w_0(x, y)$ [w_0 oznacza rozwiązanie szczególne równania (1.5)], takie że momenty M_x, M_y, H_{xy}, określone przez wzory (1.2), są w obu przypadkach takie same.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\Phi_j(z_j) = \psi_j(z_j) - \varphi_j(z_j), \quad j = 1, 2; \qquad \omega(x, y) = w_2(x, y) - w_1(x, y), \tag{3.1}$$

przy czym $\Phi_j(z_j)$ są funkcjami holomorficznymi zmiennych, odpowiednio, z_1, z_2. Wtedy

$$\omega(x, y) = \mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)], \tag{3.2}$$

oraz

$$D_{11}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} \equiv 0,$$

$$D_{12}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} \equiv 0,$$

$$D_{16}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + 2D_{66}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} \equiv 0,$$

stąd

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} \equiv 0 \text{ w } S,$$

czyli zgodnie z (3.2), (2.14) i (2.18)

$$\begin{aligned}
&(1+k_1)^2\,\Phi_1''(z_1) + (1+k_2)^2\,\Phi_2''(z_2) + (1+\bar{k}_1)^2\,\overline{\Phi_1''(z_1)} + (1+\bar{k}_2)^2\,\overline{\Phi_2''(z_2)} \equiv 0,\\
&(1-k_1)^2\,\Phi_1''(z_1) + (1-k_2)^2\,\Phi_2''(z_2) + (1-\bar{k}_1)^2\,\overline{\Phi_1''(z_1)} + (1-\bar{k}_2)^2\,\overline{\Phi_2''(z_2)} \equiv 0,\\
&(1-k_1^2)\,\Phi_1''(z_1) + (1-k_2^2)\,\Phi_2''(z_2) - (1-\bar{k}_1^2)\,\overline{\Phi_1''(z_1)} - (1-\bar{k}_2^2)\,\overline{\Phi_2''(z_2)} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Tutaj wykorzystano fakt, że energia potencjalna ugięcia (na jednostkę pola), która ma postać (por. [9], str. 246):

$$dV = \frac{1}{2}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right],$$

jest dodatnio określona, zatem

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & 2D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & 2D_{66} \end{vmatrix} > 0.$$

Poddając obie strony każdej z tożsamości (3.3) operacji $\partial^2/\partial z_2\,\partial\bar{z}_2$, otrzymamy

$$(1+k_1)^2(k_1-k_2)(1-k_1\bar{k}_2)\,\Phi_1^{\mathrm{IV}} + (1+\bar{k}_1)^2(\bar{k}_1-\bar{k}_2)(1-k_2\bar{k}_1)\,\overline{\Phi_1^{\mathrm{IV}}} \equiv 0,$$
$$(1-k_1)^2(k_1-k_2)(1-k_1\bar{k}_2)\,\Phi_1^{\mathrm{IV}} + (1-\bar{k}_1)^2(\bar{k}_1-\bar{k}_2)(1-k_2\bar{k}_1)\,\overline{\Phi_1^{\mathrm{IV}}} \equiv 0,$$
$$(1-k_1{}^2)(k_1-k_2)(1-k_1\bar{k}_2)\,\Phi_1^{\mathrm{IV}} - (1-\bar{k}_1{}^2)(\bar{k}_1-\bar{k}_2)(1-k_2\bar{k}_1)\,\overline{\Phi_1^{\mathrm{IV}}} \equiv 0,$$

więc

(3.4) $$\Phi_1^{\mathrm{IV}}(z_1) \equiv 0,$$

i analogicznie [mnożąc obie strony (3.3) przez operator $\partial^2/\partial z_1\,\partial\bar{z}_1$]

(3.5) $$\Phi_2^{\mathrm{IV}}(z_2) \equiv 0.$$

Zwróćmy bowiem uwagę, że

$$\begin{vmatrix} (1+k_1)^2 & (1+\bar{k}_1)^2 \\ (1-k_1)^2 & (1-\bar{k}_1)^2 \end{vmatrix} = 4(k_1-\bar{k}_1)(1-k_1\bar{k}_1) \neq 0.$$

Wobec tego

(3.6) $$\Phi_j(z_j) = a_j z_j{}^3 + b_j z_j{}^2 + c_j z_j + d_j, \qquad j = 1, 2,$$

gdzie a_j, b_j, c_j, d_j są dowolnymi stałymi.

Podstawiając otrzymane funkcje $\Phi_j(z_j)$ do tożsamości (3.3), dostaniemy dla a_j i b_j układy równań

(3.7)
$$(1+k_1)^3 a_1 + (1+k_2)^3 a_2 + (1+\bar{k}_1)^3 \bar{a}_1 + (1+\bar{k}_2)^3 \bar{a}_2 = 0,$$
$$(1+k_1)^2(1-k_1)\,a_1 + (1+k_2)^2(1-k_2)\,a_2 - (1+\bar{k}_1)^2(1-\bar{k}_1)\,\bar{a}_1 -$$
$$-(1+\bar{k}_2)^2(1-\bar{k}_2)\,\bar{a}_2 = 0,$$
$$(1+k_1)(1-k_1)^2 a_1 + (1+k_2)(1-k_2)^2 a_2 + (1+\bar{k}_1)(1-\bar{k}_1)^2 \bar{a}_1 +$$
$$+(1+\bar{k}_2)(1-\bar{k}_2)^2 \bar{a}_2 = 0;$$
$$(1-k_1)^3 a_1 + (1-k_2)^3 a_2 - (1-\bar{k}_1)^3 \bar{a}_1 - (1-\bar{k}_2)^3 \bar{a}_2 = 0;$$

$$
(3.8)\quad
\begin{aligned}
&(1+k_1)^2 b_1 + (1+k_2)^2 b_2 + (1+\bar{k}_1)^2 \bar{b}_1 + (1+\bar{k}_2)^2 \bar{b}_2 = 0,\\
&(1-k_1)^2 b_1 + (1-k_2)^2 b_2 + (1-\bar{k}_1)^2 \bar{b}_1 + (1-\bar{k}_2)^2 \bar{b}_2 = 0,\\
&(1-k_1{}^2) b_1 + (1-k_2{}^2) b_2 - (1-\bar{k}_1{}^2) \bar{b}_1 - (1-\bar{k}_2{}^2) \bar{b}_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Z układu (3.7)

$$
(3.9)\qquad a_1 = a_2 = 0,
$$

natomiast przyjmując $b_1 = b_1' + ib_1''$, $b_2 = b_2' + ib_2''$ i przyjmując jedną z czterech stałych rzeczywistych b_1', b_1'', b_2', i b_2'' dowolnie np. b_1', możemy wyznaczyć pozostałe za pomocą b_1' korzystając z (3.8).

W ten sposób ostatecznie dla funkcji $\Phi_j(z_j)$ otrzymujemy wyrażenia

$$
(3.10)\quad
\begin{aligned}
\Phi_1(z_1) &= \lambda_1 b_1' z_1{}^2 + c_1 z_1 + d_1,\\
\Phi_2(z_2) &= \lambda_2 b_1' z_2{}^2 + c_2 z_2 + d_2,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
(3.11)\quad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= (1-k_2\bar{k}_1)(1-k_2\bar{k}_2)(\bar{k}_1-\bar{k}_2)\, i,\\
\lambda_2 &= (1-k_1\bar{k}_1)(1-k_1\bar{k}_2)(\bar{k}_2-\bar{k}_1)\, i;
\end{aligned}
$$

c_1, d_1, c_2 i d_2 są dowolnymi stałymi zespolonymi, a b_1' dowolną stałą rzeczywistą. W przypadku ortotropii λ_1 i λ_2 są liczbami urojonymi, gdyż k_j są wtedy liczbami rzeczywistymi.

Wykazaliśmy więc, że przy danych momentach (przy danym stanie naprężenia) funkcje $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$ można wyznaczyć z dokładnością do składników występujących po prawych stronach (3.6). Występujące tam stałe możemy przyjąć dowolnie, np. jeżeli początek układu należy do obszaru S, wielkości $\varphi_j(0)$, $\varphi_j'(0)$ i $\operatorname{Re}\lambda_1^{-1}\varphi_1''(0)$ albo $\operatorname{Re}\lambda_2^{-1}\varphi_2''(0)$ możemy przyjąc równe zeru. W przypadku ortotropii dwie ostatnie wielkości można zastąpić odpowiednio przez $\operatorname{Im}\varphi_1''(0)$ i $\operatorname{Im}\varphi_2''(0)$.

Jeżeli w obszarze S będą dane wartości pierwszych pochodnych ugięcia $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, to tym samym będą dane wartości momentów i funkcje $\Phi_j(z_j)$ mogą być tylko postaci (3.10). Ale dodatkowo muszą być spełnione warunki

$$
\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial y} \equiv 0 \text{ w } S,
$$

czyli

$$
(3.12)\quad
\begin{aligned}
&(1+k_1)\Phi_1'(z_1) + (1+k_2)\Phi_2'(z_2) + (1+\bar{k}_1)\overline{\Phi_1'(z_1)} + (1+\bar{k}_2)\overline{\Phi_2'(z_2)} \equiv 0,\\
&(1-k_1)\Phi_1'(z_1) + (1-k_2)\Phi_2'(z_2) - (1-\bar{k}_1)\overline{\Phi_1'(z_1)} - (1-\bar{k}_2)\overline{\Phi_2'(z_2)} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Korzystając z tych równań, możemy wyznaczyć jedną ze stałych zespolonych c_1 albo c_2, lub dwie z czterech stałych rzeczywistych c_1', c_1'', c_2', c_2'' $(c_1 = c_1' + ic_1''$, $c_2 = c_2' + ic_2'')$. Funkcje $\varphi_j(z_j)$ mogą więc być wyznaczone w tym przypadku z dokładnością do składników $\Phi_j(z_j)$ postaci

$$(3.13)\qquad \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \lambda_1 b_1' z_1^2 + (c_1' + ic_1'')z_1 + d_1,\\ \Phi_2(z_2) &= \lambda_2 b_1' z_2^2 + (\Delta' c_1' + i\Delta'' c_1'')z_2 + d_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14)\qquad \Delta' = \frac{(1 - k_1\bar{k}_2 + \bar{k}_1 - \bar{k}_2)}{k_2\bar{k}_2 - 1}, \quad \Delta'' = \frac{(1 - k_1\bar{k}_2 - \bar{k}_1 + \bar{k}_2)}{k_2\bar{k}_2 - 1};$$

stałe b_1', c_1' i c_1'' są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, d_1, d_2 dowolnymi stałymi zespolonymi, zaś λ_1, λ_2 są dane za pomocą wzorów (3.11).

Dla ustalenia dowolnych wielkości można np. przyjąć (jeżeli 0 należy do obszaru S) $\varphi_j(0) = 0$, $(j = 1, 2)$, $\varphi_1'(0) = 0$ albo $\varphi_2'(0) = 0$ oraz $\operatorname{Re}\lambda_1^{-1}\varphi_1''(0) = 0$ albo $\operatorname{Re}\lambda_2^{-1}\varphi_2''(0) = 0$ [w przypadku ortotropii $\operatorname{Im}\varphi_1''(0) = 0$ albo $\operatorname{Im}\varphi_2''(0) = 0$].

Wreszcie jeżeli w obszarze S jest dana funkcja $w(x, y)$, to dodatkowo musi być spełniony warunek

$$w(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] \equiv 0 \quad \text{w } S,$$

który dostarcza jednego równania wiążącego stałe d_1 i d_2. Wykorzystując je, możemy stwierdzić, że w tym przypadku funkcje $\varphi_j(z_j)$ są wyznaczone z dokładnością do składników postaci odpowiednio

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} \Phi_1 &= \lambda_1 b_1' z_1^2 + (c_1' + ic_1'')z_1 + d_1' + id_1'',\\ \Phi_2 &= \lambda_2 b_1' z_2^2 + (\Delta' c_1' + ic_1''\Delta'')z_2 - d_1' + id_2'', \end{aligned}$$

gdzie d_1', d_1'', d_2'' oznaczają dowolne stałe rzeczywiste, a znaczenie innych wyrażeń omówiono wyżej. Zatem zawsze (jeżeli początek układu należy do obszaru S) możemy przyjąć $\varphi_1(0) = 0$, $\operatorname{Im}\varphi_2(0) = 0$ [albo $\varphi_2(0) = 0$ i $\operatorname{Im}\varphi_1(0) = 0$], $\varphi_1'(0) = 0$ [albo $\varphi_2'(0) = 0$] oraz $\operatorname{Re}\lambda_1^{-1}\varphi_1''(0) = 0$ [albo $\operatorname{Re}\lambda_2^{-1}\varphi_2''(0) = 0$].

4. Ogólna postać rozwiązania w obszarze wielospójnym skończonym

Niech S będzie $(n+1)$-spójnym obszarem na płaszczyźnie Oxy, ograniczonym przez $n+1$ konturów $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$, nie mających ze sobą punktów wspólnych, przy czym L_0 zawiera wewnątrz wszystkie pozostałe krzywe (konturem nazywamy krzywą regularną Jordana dodatnio zorientowaną względem obszaru S).

Oznaczmy przez S_1 i S_2 obszary $(n+1)$-spójne, które powstają z obszaru S przez przekształcenia afiniczne, odpowiednio, $z_1 = x_1 + iy_1 = z + k_1\bar{z}$ oraz $z_2 = x_2 + iy_2 = z + k_2\bar{z}$. Jeżeli punkt (x, y) na płaszczyźnie z obiega dowolną krzywą zamkniętą K, zawartą w obszarze S w danym kierunku, np. przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to punkty (x_1, y_1) na płaszczyźnie z_1 oraz (x_2, y_2) na płaszczyźnie z_2 obiegają krzywe zamknięte K_1, K_2, odpowiadające krzywej K, zawarte odpowiednio w obszarach S_1 i S_2 w tym samym kierunku. Wynika to stąd, że jakobiany powyższych przekształceń są dodatnie:

$$(4.1)\qquad \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)} = 1 - k_1\bar{k}_1 > 0, \qquad \frac{\partial(x_2, y_2)}{\partial(x, y)} = 1 - k_2\bar{k}_2 > 0.$$

Oznaczmy krzywe stanowiące brzegi obszarów S_1 i S_2 odpowiednio przez $L_0^{(1)}$, $L_1^{(1)}, \ldots, L_n^{(1)}$ oraz $L_0^{(2)}, L_1^{(2)}, \ldots, L_n^{(2)}$. Krzywa $L_r^{(j)}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2)$ jest zorientowana względem obszaru S_j w ten sam sposób, jak krzywa L_r względem obszaru S.

Niech $w(x, y)$ będzie rzeczywistym jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.1), regularnym w S. Dokonując w obszarze S odpowiednich rozcięć możemy otrzymać obszar jednospójny S'. W obszarze S' funkcja $w(x, y)$ spełnia założenia twierdzenia z p. 2. Zatem można ją przedstawić w postaci (2.19), gdzie $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$ są funkcjami holomorficznymi swoich argumentów odpowiednio w obszarach S_1', S_2'. Wtedy

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (1+k_j)^3 \varphi_j'''(z_j), \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i(1-k_j)(1+k_j)^2 \varphi_j'''(z_j),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (-1)(1-k_j)^2(1+k_j)\varphi_j'''(z_j), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (-1)\, i(1-k_j)^3 \varphi_j'''(z_j).$$

Z równań tych możemy w sposób jednoznaczny wyrazić $\varphi_1'''(z_1)$, $\varphi_2'''(z_2)$ przez pochodne trzeciego rzędu funkcji $w(x, y)$. Bowiem wyznacznik macierzy współczynników przy $\varphi_1'''(z_1)$, $\varphi_2'''(z_2)$, $\overline{\varphi_1'''(z_1)}$ i $\overline{\varphi_2'''(z_2)}$, który ma postać

$$4(k_1 - k_2)(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)(1 - k_1\bar{k}_1)(1 - k_2\bar{k}_2)(1 - k_1\bar{k}_2)(1 - k_2\bar{k}_1),$$

na podstawie przyjętego założenia, że pierwiastki k_1, k_2, (μ_1, μ_2) są różne oraz z (2.9) jest różny od zera.

W ten sposób $\varphi_1'''(z_1)$, $\varphi_2'''(z_2)$ są funkcjami holomorficznymi (jednoznacznymi) zmiennych z_1, z_2 odpowiednio w obszarach S_1 i S_2.

Ponieważ całka nieoznaczona funkcji holomorficznej w obszarze wielospójnym zawiera składniki w postaci logarytmów (por. np. [1]), kolejno otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi_1''(z_1) &= \sum_{m=1}^{n} 2A_{m1} \ln(z_1 - z_{1m}) + \varphi_{10}(z_1), \\ \varphi_1'(z_1) &= \sum_{m=1}^{n} 2A_{m1}(z_1 - z_{1m}) \ln(z_1 - z_{1m}) + \sum_{m=1}^{n} B_{m1} \ln(z_1 - z_{1m}) + \varphi_{11}(z_1), \\ \varphi_1(z_1) &= \sum_{m=1}^{n} A_{m1}(z_1 - z_{1m})^2 \ln(z_1 - z_{1m}) + \sum_{m=1}^{n} B_{m1}(z_1 - z_{1m}) \ln(z_1 - z_{1m}) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n} C_{m1} \ln(z_1 - z_{1m}) + \psi_1(z_1), \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie A_{m1}, B_{m1}, C_{m1} oznaczają stałe zespolone, $\varphi_{10}(z_1)$, $\varphi_{11}(z_1)$, $\psi_1(z_1)$ są funkcjami holomorficznymi w S_1, zaś z_{1m} oznaczają stałe punkty dowolnie wybrane wewnątrz krzywych odpowiednio $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \ldots, L_n^{(1)}$.

Podobnie

$$(4.4)\quad \varphi_2(z_2) = \sum_{m=1}^{n} A_{m2}(z_2 - z_{2m})^2 \ln(z_2 - z_{2m}) + \sum_{m=1}^{n} B_{m2}(z_2 - z_{2m}) \times$$

$$\times \ln(z_2 - z_{2m}) + \sum_{m=1}^{2} C_{m2} \ln(z_2 - z_{2m}) + \psi_2(z_2),$$

gdzie $\psi_2(z_2)$ oznacza funkcję holomorficzną w obszarze S_2; A_{m2}, B_{m2}, C_{m2} są to stałe zespolone, zaś z_{2m} ustalone punkty wewnątrz krzywych $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \ldots, L_n^{(2)}$, odpowiadające poprzednio wybranym punktom z_{1m}.

Wstawiając wyrażenia (4.3) i (4.4) do (2.19), otrzymamy

$$(4.5)\quad w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{m=1}^{n} [A_{mj}(z_j - z_{jm})^2 \ln(z_j - z_{jm}) +$$

$$+ B_{mj}(z_j - z_{jm}) \ln(z_j - z_{jm}) + C_{mj} \ln(z_j - z_{jm}) + \psi_j(z_j)].$$

Na to, aby funkcja $w(x, y)$ była jednoznaczna, potrzeba i wystarcza, by stałe A_{mj}, B_{mj}, C_{mj} spełniały układ równań

$$(4.6)\quad \begin{aligned} &A_{m1} + A_{m2} - \bar{k}_1^2 \bar{A}_{m1} - \bar{k}_2^2 \bar{A}_{m2} = 0, \\ &k_1 A_{m1} + k_2 A_{m2} - \bar{k}_1 \bar{A}_{m1} - \bar{k}_2 \bar{A}_{m2} = 0, \\ &k_1^2 A_{m1} + k_2^2 A_{m2} - \bar{A}_{m1} - \bar{A}_{m2} = 0; \end{aligned}$$

$$(4.7)\quad \begin{aligned} &B_{m1} + B_{m2} - \bar{k}_1 \bar{B}_{m1} - \bar{k}_2 \bar{B}_{m2} = 0, \\ &k_1 B_{m1} + k_2 B_{m2} - \bar{B}_{m1} - \bar{B}_{m2} = 0; \end{aligned}$$

$$(4.8)\quad C_{m1} + C_{m2} - \bar{C}_{m1} - \bar{C}_{m2} = 0.$$

Z układu równań (4.6) możemy wyrazić np. A_{m2}, $\bar{A}_{m1}$, $\bar{A}_{m2}$ przez A_{m1}:

$$(4.9)\quad \begin{aligned} &A_{m2} = \frac{(1 - k_1 \bar{k}_1)(k_1 \bar{k}_2 - 1)}{(1 - k_2 \bar{k}_1)(1 - k_2 \bar{k}_2)} A_{m1}, \\ &\bar{A}_{m1} = \frac{(k_1 - k_2)(1 - k_1 \bar{k}_2)}{(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)(1 - k_2 \bar{k}_1)} A_{m1}, \qquad \bar{A}_{m2} = \frac{(k_2 - k_1)(1 - k_1 \bar{k}_1)}{(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)(1 - k_2 \bar{k}_2)} A_{m1}. \end{aligned}$$

Z (4.7) wyznaczmy B_{m2}, $\bar{B}_{m2}$ przez B_{m1}, $\bar{B}_{m1}$:

$$(4.10)\quad \begin{aligned} &B_{m2} = (k_2 \bar{k}_2 - 1)^{-1} [(1 - k_1 \bar{k}_2) B_{m1} + (\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \bar{B}_{m1}], \\ &\bar{B}_{m2} = (k_2 \bar{k}_2 - 1)^{-1} [(k_2 - k_1) B_{m1} + (1 - k_2 \bar{k}_1) \bar{B}_{m1}]. \end{aligned}$$

Równanie (4.8) stanowi warunek

$$(4.11)\quad \operatorname{Im} C_{m1} = -\operatorname{Im} C_{m2},$$

gdzie Im oznacza część urojoną. Stałe C_{m1}, C_{m2} możemy więc zapisać w postaci

$$C_{m1} = C'_{m1} + iC''_{m1}, \quad C_{m2} = C'_{m2} - iC''_{m1}, \tag{4.12}$$

gdzie C'_{m1}, C''_{m1}, C'_{m2} są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Zachodzi zatem następujące twierdzenie: *każde rzeczywiste jednoznaczne i regularne w* $(n+1)$*-spójnym obszarze S rozwiązanie równania* (2.1) *jest postaci* (4.5), *gdzie* $\psi_1(z_1)$, $\psi_2(z_2)$ *są funkcjami holomorficznymi odpowiednio w obszarach* S_1 i S_2, *stałe* A_{mj}, B_{mj}, C_{mj}, $(m = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2)$ *spełniają warunki* (4.9), (4.10), (4.11), *zaś* $z_{1m} = z_m + k_1 \bar{z}_m$, $z_{2m} = z_m + k_2 \bar{z}_m$ *są ustalonymi punktami wewnątrz krzywych* $L_m^{(1)}$, $L_m^{(2)}$, *odpowiadającymi punktom* z_m *dowolnie wybranym wewnątrz krzywych* L_m.

Oczywiście na odwrót przy dowolnych funkcjach holomorficznych $\psi_1(z_1)$, $\psi_2(z_2)$ funkcja postaci (4.5) spełnia równanie (2.1), zatem wzór (4.5) przedstawia wszystkie rzeczywiste jednoznaczne i regularne w S rozwiązania tego równania.

Ogólną postać rozwiązania równania (2.1) rzeczywistego jednoznacznego i regularnego w $(n+1)$–spójnym obszarze S można również wyrazić przez funkcje zmiennych z_1^*, z_2^*, określone przez (2.20). Daje ją wzór

$$\begin{aligned} w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{m=1}^{n} [A_{mj}^*(z_j^* - z_{jm}^*)^2 \ln (z_j^* - z_{jm}^*) + \\ + B_{mj}^*(z_j^* - z_{jm}^*) \ln (z_j^* - z_{jm}^*) + C_{mj}^* \ln (z_j^* - z_{jm}^*) + \psi_j^*(z_j^*)], \end{aligned} \tag{4.13}$$

gdzie $\psi_1^*(z_1^*)$, $\psi_2^*(z_2^*)$ są holomorficznymi funkcjami swoich argumentów, $z_{jm}^* = x_m + \mu_j y_m$ odpowiadają dowolnie wybranym wewnątrz krzywych L_m, stałym punktom (x_m, y_m), natomiast stałe zespolone A_{mj}^*, B_{mj}^*, C_{mj}^* spełniają zależności:

$$A_{m2}^* = \frac{(\mu_1 - \bar{\mu}_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_1)}{(\bar{\mu}_2 - \mu_2)(\mu_2 - \bar{\mu}_1)} A_{m1}^*, \quad \bar{A}_{m1}^* = \frac{(\bar{\mu}_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 - \bar{\mu}_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_1)} A_{m1}^*, \tag{4.14}$$

$$B_{m2}^* = (\mu_2 - \bar{\mu}_2)^{-1} [(\bar{\mu}_2 - \mu_1) B_{m1}^* + (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \bar{B}_{m1}^*], \tag{4.15}$$

$$\operatorname{Im} C_{m1}^* = -\operatorname{Im} C_{m2}^*, \quad m = 1, 2, \dots, n. \tag{4.16}$$

5. Wektor wypadkowy i moment wypadkowy. Warunki równowagi

Niech S będzie dowolnym skończonym obszarem jednospójnym lub wielospójnym. Niech L oznacza dowolny kontur zawarty w S i nie przecinający żadnej z krzywych brzegowych w przypadku, gdy obszar S jest wielospójny. Oznaczmy przez n normalną zewnętrzną do L, zaś przez X_n, Y_n, Z_n składowe wektora naprężeń działających na powierzchni walcowej o wysokości h (h oznacza grubość płyty) i kierownicy L od strony dodatniej normalnej. Obliczymy składowe wektora i momentu wypadkowego tych naprężeń.

Oznaczając składowe wektora wypadkowego przez P_{xL}, P_{yL}, P_{zL} oraz składowe momentu wypadkowego przez M_{xL}, M_{yL}, M_{zL}, mamy

$$(5.1)\qquad P_{xL}=\int_L\int_{-h/2}^{h/2} X_n\,dZ\,ds\,,\qquad P_{yL}=\int_L\int_{-h/2}^{h/2} Y_n\,dZ\,ds\,,\qquad P_{zL}=\int_L\int_{-h/2}^{h/2} Z_n\,dZ\,ds\,;$$

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} M_{xL}&=\int_L\int_{-h/2}^{h/2}(Z_n y-Y_n Z)\,dZ\,ds\,,\qquad M_{yL}=\int_L\int_{-h/2}^{h/2}(X_n Z-Z_n x)\,dZ\,ds\,,\\ M_{ZL}&=\int_L\int_{-h/2}^{h/2}(Y_n x-X_n y)\,dZ\,ds\,. \end{aligned}$$

Korzystając ze znanych związków (por. [9])

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} X_n&=\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)+\tau_{xz}\cos(n,Z)\,,\\ Y_n&=\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)+\tau_{yz}\cos(n,Z)\,,\\ Z_n&=\tau_{xz}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)+\sigma_z\cos(n,Z) \end{aligned}$$

oraz

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} &\sigma_x=\frac{12M_x}{h^3}Z,\qquad \sigma_y=\frac{12M_y}{h^3}Z,\qquad \tau_{xy}=\frac{12H_{xy}}{h^3}Z,\\ &\tau_{xz}=\frac{6N_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-Z^2\right),\qquad \tau_{yz}=\frac{6N_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-Z^2\right) \end{aligned}$$

i biorąc pod uwagę, że $\sigma_z=0$, $\cos(n,Z)=0$, $\cos(n,x)=dy/ds$, $\cos(n,y)=$ $=-dx/ds$, z (5.1—2), otrzymujemy

$$(5.5)\qquad P_{xL}=P_{yL}=M_{zL}=0\,,$$

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} P_{zL}&=\int_L(N_x\,dy-N_y\,dx)\,,\qquad M_{xL}=\int_L(M_y-yN_y)\,dx+(yN_x-H_{xy})\,dy\,,\\ M_{yL}&=\int_L(xN_y-H_{xy})\,dx+(M_x-xN_x)\,dy\,. \end{aligned}$$

Wiemy, że

$$w(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(z_j)\,,$$

gdzie $\varphi_j(z_j)$ są funkcjami holomorficznymi, gdy S jest obszarem jednospójnym, zaś są sumami funkcji holomorficznych i wyrazów z logarytmami według (4.5), gdy S jest obszarem wielospójnym. Zatem z (1.2) i (1.3) otrzymamy

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} M_x&=-\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}p_j\varphi_j''(z_j)\,,\qquad M_y=-\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}q_j\varphi_j''(z_j)\,,\\ H_{xy}&=-\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}r_j\varphi_j''(z_j)\,; \end{aligned}$$

$$N_x = -\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} s_j \varphi_j'''(z_j), \quad N_y = -\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} t_j \varphi_j'''(z_j), \tag{5.8}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned} p_j &= D_{11}(1+k_j)^2 - D_{12}(1-k_j)^2 + 2D_{16}\, i(1-k_j^2), \\ q_j &= D_{12}(1+k_j)^2 - D_{22}(1-k_j)^2 + 2D_{26}\, i(1-k_j^2), \\ r_j &= D_{16}(1+k_j)^2 - D_{26}(1-k_j)^2 + 2D_{66}\, i(1-k_j^2), \\ s_j &= (1+k_j)p_j + (1-k_j)ir_j, \; t_j = i(1-k_j)q_j + (1+k_j)r_j, \qquad j = 1,2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Podstawiając (5.7) i (5.8) do (5.6), dla wypadkowego wektora P_{zL} i składowych wypadkowego momentu M_{xL}, M_{yL} otrzymamy wyrażenia

$$\begin{aligned} P_{zL} &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2} \frac{is_j}{1-k_j}\varphi_j''(z_j)\right\}_L, \\ M_{xL} &= -\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{q_j}{1+k_j}\varphi_j'(z_j) - iy\frac{s_j}{1-k_j}\varphi_j''(z_j)\right]\right\}_L, \\ M_{yL} &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{ip_j}{1-k_j}\varphi_j'(z_j) - \frac{ixs_j}{1-k_j}\varphi_j''(z_j)\right]\right\}_L, \end{aligned} \tag{5.10}$$

gdzie przez $\{\ \}_L$ oznaczono przyrost wyrażenia stojącego w nawiasie przy jednym obiegu wzdłuż konturu L w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Analogicznie, przedstawiając ugięcie za pomocą funkcji analitycznych $\varphi_1^*(z_1^*)$ i $\varphi_2^*(z_2^*)$, zmiennych z_1^*, z_2^*, określonych przez (2.20) w postaci

$$w(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^*(z_j^*),$$

ostatecznie otrzymamy (por. [23])

$$\begin{aligned} P_{zL} &= -\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2} s_j^*\varphi_j^{*''}(z_j^*)\right\}_L, \\ M_{xL} &= -\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2}[q_j^*\varphi_j^{*'}(z_j^*) + ys_j^*\varphi_j^{*''}(z_j^*)]\right\}_L, \\ M_{yL} &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2}[-p_j^*\mu_j^{-1}\varphi_j^{*'}(z_j^*) + xs_j^*\varphi_j^{*''}(z_j^*)]\right\}_L, \end{aligned} \tag{5.10'}$$

przy czym

$$\begin{aligned} p_j^* &= D_{11} + \mu_j^2 D_{12} + 2\mu_j D_{16}, \qquad q_j^* = D_{12} + \mu_j^2 D_{22} + 2\mu_j D_{26}, \\ s_j^* &= D_{11}\mu_j^{-1} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_j + 3D_{16} + D_{26}\mu_j^2, \qquad j = 1,2. \end{aligned} \tag{5.9'}$$

Jeżeli obszar S jest jednospójny, to funkcje $\varphi_j(z_j)$ $(\varphi_j^*(z_j^*))$ są jednoznaczne, przyrost ich pochodnych wzdłuż dowolnego konturu L jest równy zeru, czyli wtedy $P_{zL} = M_{xL} = M_{yL} = 0$. Takiego wyniku należało oczywiście oczekiwać, gdyż wydzielona przez kontur L część płyty znajduje się w równowadze, zatem układ sił działających na nią od strony odrzuconej części jest statycznie równoważny zeru.

Jeżeli obszar S jest wielospójny, lecz kontur L nie zawiera wewnątrz żadnego otworu w płycie, wówczas również otrzymamy $P_{zL} = M_{xL} = M_{yL} = 0$, co jest zrozumiałe jak poprzednio z fizycznego punktu widzenia. Jeżeli jednak kontur L obejmuje jedną z wewnętrznych krzywych brzegowych płyty na przykład L_m nie przecinając się z nią w żadnym punkcie, to wielkości P_{zL}, M_{xL}, M_{yL} będą się równać z przeciwnym znakiem wypadkowemu wektorowi P_{zm} i składowym wypadkowego momentu M_{xm}, M_{ym} obciążeń zewnętrznych przyłożonych na brzegu otworu L_m. W ten sposób z warunków równowagi pierścienia ograniczonego konturami L i L_m (dla $m = 1, 2, \ldots, n$) otrzymujemy dodatkowe równania do wyznaczenia stałych A_{mj}, B_{mj} we wzorze (4.5) [lub stałych A^*_{mj}, B^*_{mj} we wzorze (4.13)].

Mianowicie, podstawiając zamiast $\varphi_j(z_j)$ wyrażenia stojące pod znakiem pierwszej sumy we wzorze (4.5) do związków (5.10) oraz korzystając z zależności (4.6) i (4.7) zgodnie z wyżej powiedzianym dostaniemy

$$(5.11)\quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \dfrac{(1-k_j)^3}{1+k_j} A_{mj} = -\dfrac{P_{zm}}{4\pi D_{22}}, \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i \dfrac{(1-k_j)^2}{1+k_j} B_{mj} = \dfrac{-M_{xm}+y_m P_{zm}}{2\pi D_{22}}, \\ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \dfrac{(1+k_j)^2}{1-k_j} B_{mj} = \dfrac{M_{ym}+x_m P_{zm}}{2\pi D_{11}}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

gdzie przez x_m, y_m oznaczono współrzędne punktu dowolnie poprzednio wybranego, tak że

$$z_{jm} = (1+k_j)\, x_m + i\,(1-k_j)\, y_m.$$

Stąd uwzględniając (4.9) i (4.10) współczynniki A_{mj}, B_{mj} wyrazimy następująco:

$$(5.12)\qquad A_{mj} = (-1)^{j+1} \frac{P_{zm}(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{16\pi D_{22}(1-k_j\bar{k}_2)(1-k_j\bar{k}_1)(k_1-k_2)},$$

$$(5.13)\qquad B_{mj} = (-1)^{j+1} \frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8\pi D_{22}(1-k_j\bar{k}_1)(1-k_j\bar{k}_2)(k_1-k_2)} [(k_j-1) M_{xm}\, i + $$
$$+ (1+k_j) M_{ym} + P_{zm} z_{jm}], \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2.$$

Natomiast przedstawiając ugięcie za pomocą funkcji zmiennych z^*_j, analogiczne do (5.11-13) otrzymamy

$$(5.11')\quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i\mu_j^3 A^*_{mj} = \dfrac{-P_{zm}}{4\pi D_{22}}, \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i\mu_j^2 B^*_{mj} = \dfrac{M_{xm} - P_{zm} y_m}{2\pi D_{22}}, \\ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \dfrac{iB^*_{mj}}{\mu_j} = \dfrac{M_{ym} + P_{zm} x_m}{2\pi D_{11}}; \end{cases}$$

$$(5.12') \qquad A^*_{mj} = \frac{(-1)^{j+1} P_{zm}\, i}{2\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_j-\bar{\mu}_1)(\mu_j-\bar{\mu}_2)},$$

$$(5.13') \qquad B^*_{mj} = (-1)^{j+1} \frac{-M_{xm}\,\mu_j + M_{ym} + P_{zm} z^*_{jm}}{\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_j-\bar{\mu}_1)(\mu_j-\bar{\mu}_2)}\, i,$$

$$j = 1, 2; \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

przy czym

$$z^*_{jm} = x_m + \mu_j y_m.$$

Zauważmy, że jeżeli równania (5.11) albo (5.11′) są spełnione dla $m = 1, 2, \ldots, n$, to zapewniona już jest równowaga części płyty ograniczonej dowolnym konturem L, zawierającym wewnątrz dowolną liczbę krzywych brzegowych L_m, i tymi krzywymi przy założeniu, że krzywe L i L_m nie przecinają się.

Ogólną postać funkcji $w(x, y)$, będącej jednoznacznym rzeczywistym i regularnym rozwiązaniem równania (2.1) w $(n+1)$-spójnym obszarze, możemy przedstawić w innej (bardziej wygodnej w pewnych przypadkach) postaci

$$(5.14) \qquad w(x,y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{m=1}^{n} [A_{mj} z_j^2 \ln(z_j - z_{jm}) + B'_{mj} z_j \ln(z_j - z_{jm}) + \\ + C'_{mj} \ln(z_j - z_{jm}) + \psi_j(z_j)],$$

lub przy użyciu zmiennych zespolonych z_1^*, z_2^*

$$(5.14') \qquad w(x,y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{m=1}^{n} [A^*_{mj} z_j^{*2} \ln(z_j^* - z^*_{jm}) + B^{*\prime}_{mj} z_j^* \ln(z_j^* - z^*_{jm}) + \\ + C^{*\prime}_{mj} \ln(z_j^* - z^*_{jm}) + \psi_j^*(z_j^*)],$$

gdzie $\psi_1(z_1)$, $\psi_2(z_2)$, $\psi_1^*(z_1^*)$, $\psi_2^*(z_2^*)$ są dowolnymi funkcjami holomorficznymi swoich argumentów, zaś $A_{mj}, B'_{mj}, C'_{mj}, A^*_{mj}, B^{*\prime}_{mj}, C^{*\prime}_{mj}$ są stałymi zespolonymi. Wtedy warunki jednoznaczności pozostają bez zmiany i wynikające z nich zależności między współczynnikami A_{mj}, B'_{mj}, C'_{mj} oraz $A^*_{mj}, B^{*\prime}_{mj}, C^{*\prime}_{mj}$ otrzymamy odpowiednio z (4.9-11) i (4.14-16) zastępując w nich B_{mj} przez B'_{mj}, C_{mj} przez C'_{mj} oraz B^*_{mj} przez $B^{*\prime}_{mj}$ i C^*_{mj} przez $C^{*\prime}_{mj}$.

Natomiast warunki równowagi, będące odpowiednikami zależności (5.11) lub (5.11′), które otrzymamy z (5.10) i (5.10′), przyjmą postać

$$(5.15) \qquad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{(1-k_j)^3}{1+k_j} A_{mj} = \frac{-P_{zm}}{4\pi D_{22}}, \qquad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{(1-k_j)^2}{1+k_j} iB'_{mj} = \frac{-M_{xm}}{2\pi D_{22}},$$

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{(1+k_j)^2}{1-k_j} B'_{mj} = \frac{M_{ym}}{2\pi D_{11}};$$

$$(5.15') \quad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} i\mu_j^3 A^*_{mj} = \frac{-P_{zm}}{4\pi D_{22}}, \quad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} i\mu_j^2 B^{*\prime}_{mj} = \frac{M_{xm}}{2\pi D_{22}}, \quad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iB^{*\prime}_{mj}}{\mu_j} = \frac{M_{ym}}{2\pi D_{11}},$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

Stąd i z warunków jednoznaczności dla stałych A_{mj}, A^*_{mj} otrzymamy jak poprzednio wyrażenia (5.12) i (5.12′), zaś stałe B'_{mj}, $B^{*\prime}_{mj}$ będą dane za pomocą wzorów

$$(5.16)\quad B'_{mj}=\frac{(-1)^{j+1}(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8\pi D_{22}(k_1-k_2)(1-k_j\bar{k}_1)(1-k_j\bar{k}_2)}[(k_j-1)M_{xm}i+(1+k_j)M_{ym}],$$

$$(5.16')\qquad B^{*\prime}_{mj}=\frac{(-M_{xm}\mu_j+M_{ym})i(-1)^{j+1}}{\pi D_{22}(\mu_j-\bar{\mu}_1)(\mu_j-\bar{\mu}_2)(\mu_1-\mu_2)},$$

$$m=1,2,\ldots,n;\quad j=1,2.$$

Z rozważenia warunków równowagi nie otrzymujemy dodatkowych zależności do wyznaczenia stałych C'_{mj}, $C^{*\prime}_{mj}$. Stałe te muszą jedynie spełnić związki (4.11) lub (4.16) (z odpowiednim podstawieniem C'_{mj} zamiast C_{mj} i $C^{*\prime}_{mj}$ zamiast C^*_{mj}). Podobna dowolność stałych występuje przy rozpatrywaniu płyt izotropowych (por. [23], str. 359).

6. Przypadek obszaru nieskończonego

Rozważymy obecnie szczególny typ obszaru nieskończonego, mianowicie nieskończoną płytę z otworami. Założymy, że obszar S wypełnia całą płaszczyznę Oxy, z której usunięto skończone części ograniczone konturami $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Jest to więc przypadek graniczny poprzednio rozpatrzonego, gdy kontur L_0 dąży do nieskończoności. Jest rzeczą oczywistą, że wzory (4.5) i (4.13) lub (5.14) i (5.14′) zachodzą w dowolnej skończonej części obszaru S. Zatem zbadamy zachowanie się rozpatrywanych funkcji w otoczeniu punktu w nieskończoności.

Łatwo widzieć, że dla dostatecznie dużych $|z|=|x+iy|$ zachodzą jednocześnie nierówności

$$(6.1)\qquad |z_1|>|z_{1m}|,\quad |z_2|>|z_{2m}|\quad \text{dla}\quad m=1,2,\ldots,n.$$

Wtedy mamy

$$(6.2)\qquad \ln(z_j-z_{jm})=\ln z_j-\frac{z_{jm}}{z_j}-\frac{z^2_{jm}}{2z^2_j}-\ldots-\frac{z^n_{jm}}{nz^n_j}-\ldots,\qquad j=1,2.$$

Wstawiając (6.2) do (5.14), otrzymujemy

$$(6.3)\qquad w(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}[A_j z_j^2\ln z_j+B_j z_j\ln z_j+C_j\ln z_j+\chi_j(z_j)],$$

gdzie $\chi_1(z_1)$, $\chi_2(z_2)$ są funkcjami holomorficznymi dla dostatecznie dużych $|z_1|$ i $|z_2|$, z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności, natomiast

$$(6.4)\qquad A_j=\sum_{m=1}^{n}A_{mj},\quad B_j=\sum_{m=1}^{n}B'_{mj},\quad C_j=\sum_{m=1}^{n}C'_{mj}.$$

Podobnie, korzystając z (5.14′), dla dostatecznie dużych $|z_1^*|$ i $|z_2^*|$ mamy

$$w(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}[A_j^* z_j^{*2}\ln z_j^* + B_j^* z_j^*\ln z_j^* + C_j^*\ln z_j^* + \chi_j^*(z_j^*)], \tag{6.3′}$$

gdzie

$$A_j^* = \sum_{m=1}^{n} A_{mj}^*, \quad B_j^* = \sum_{m=1}^{n} B_{mj}^{*\prime}, \quad C_j^* = \sum_{m=1}^{n} C_{mj}^{*\prime}, \tag{6.4′}$$

zaś $\chi_j^*(z_j^*)$ są funkcjami holomorficznymi dla dostatecznie dużych $|z_1^*|$ i $|z_2^*|$, odpowiednio, z wyjątkiem co najwyżej punktu w nieskończoności.

Jeżeli uwzględnimy związki (5.12), (5.12′), (5.16) i (5.16′), to stałe A_j, B_j, A_j^*, B_j^* możemy napisać w postaci

$$A_j = (-1)^{j+1}\frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{16\pi D_{22}(1-k_j\bar{k}_1)(1-k_j\bar{k}_2)(k_1-k_2)}P_{z0}, \tag{6.5}$$

$$B_j = \frac{(-1)^{j+1}(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)[(k_j-1)iM_{x0}+(1+k_j)M_{y0}}{8\pi D_{22}(k_1-k_2)(1-k_j\bar{k}_1)(1-k_j\bar{k}_2),}, \tag{6.6}$$

$$A_j^* = \frac{(-1)^{j+1}iP_{z0}}{2\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_j-\bar{\mu}_1)(\mu_j-\bar{\mu}_2)}, \tag{6.5′}$$

$$B_j^* = \frac{(-1)^{j+1}(-M_{x0}\mu_j+M_{y0})\,i}{\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_j-\bar{\mu}_1)(\mu_j-\bar{\mu}_2)}, \quad j=1,2, \tag{6.6′}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$P_{z0} = \sum_{m=1}^{n} P_{zm}, \quad M_{x0} = \sum_{m=1}^{n} M_{xm}, \quad M_{y0} = \sum_{m=1}^{n} M_{ym}. \tag{6.7}$$

P_{z0}, M_{x0}, M_{y0} przedstawiają odpowiednio wektor wypadkowy i składowe momentu wypadkowego wszystkich obciążeń zewnętrznych, przyłożonych do brzegu obszaru czyli do zbioru konturów $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Funkcje $\chi_1(z_1)$, $\chi_2(z_2)$, $\chi_1^*(z_1^*)$, $\chi_2^*(z_2^*)$ można w odpowiednich otoczeniach punktu w nieskończoności rozwinąć w szeregi Laurenta:

$$\chi_1(z_1) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_s z_1^s, \quad \chi_2(z_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_s z_2^s, \tag{6.8}$$

$$\chi_1^*(z_1^*) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_s^* z_1^{*s}, \quad \chi_2^*(z_2^*) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_s^* z_2^{*s}. \tag{6.8′}$$

Każdy z tych szeregów jest jednostajnie zbieżny w dowolnym skończonym obszarze płaszczyzny odpowiednio z_1, z_2, z_1^*, z_2^*, położonym na zewnątrz okręgu o środku w początku układu i zawierającym wewnątrz wszystkie krzywe brzegowe, odpowiednio, $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \ldots, L_n^{(1)}$; $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \ldots, L_n^{(2)}$; $L_1^{(1)*}, L_2^{(1)*}, \ldots, L_n^{(1)*}$; $L_1^{(2)*}, L_2^{(2)*}, \ldots, L_n^{(2)*}$. (Przez $L_m^{(j)*}$ rozumiemy kontury powstałe z L_m po przekształceniu $z_j^* = x+\mu_j y$).

Załóżmy teraz, że momenty zginające M_x i M_y oraz moment skręcający H_{xy} są ograniczone w całym obszarze S. Podstawiając $w(x, y)$ w postaci (6.3) do (1.2), otrzymamy (por. (5.7))

$$M_x = -\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{2} p_j\left(2A_j \ln z_j + 3A_j + \frac{B_j}{z_j} - \frac{C_j}{z_j^2}\right) + \right. \\ \left. + p_1 \sum_{-\infty}^{\infty} s(s-1)\, a_s z_1^{s-2} + p_2 \sum_{-\infty}^{\infty} s(s-1)\, b_s z_2^{s-2}\right], \tag{6.9}$$

natomiast dla M_y i H_{xy} otrzymamy analogiczne wyrażenia, jeżeli do (6.9) zamiast p_j wstawimy odpowiednio q_j oraz r_j, przy czym p_j, q_j, r_j są określone równościami (5.9). Ponieważ przy $|z| \to \infty$ również $|z_1| \to \infty$ i $|z_2| \to \infty$, to nie trudno sprawdzić, że momenty pozostają ograniczone w nieskończenie odległych częściach płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_j = 0\,, \quad j = 1, 2; \quad a_s = 0\,, \quad b_s = 0 \quad \text{dla} \quad s > 2\,. \tag{6.10}$$

Pierwszy warunek ze względu na (6.5) oznacza, że wypadkowy wektor wszystkich obciążeń przyłożonych do brzegu obszaru musi się równać zeru. Uwzględniając (6.10) możemy ugięcie $w(x, y)$ napisać w postaci

$$w(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2} [B_j z_j \ln z_j + C_j \ln z_j + \chi_{0j}(z_j)] + a_2 z_1^2 + a_1 z_1 + b_2 z_2^2 + b_1 z_2\right\}, \tag{6.11}$$

gdzie $\chi_{0j}(z_j)$ są funkcjami holomorficznymi dla dostatecznie dużych $|z_1|$, $|z_2|$ z punktem w nieskończoności włącznie, to znaczy mają kształt

$$\begin{aligned} \chi_{01}(z_1) &= a_0 + \frac{a_{-1}}{z_1} + \frac{a_{-2}}{z_2} + \ldots, \\ \chi_{02}(z_2) &= b_0 + \frac{b_{-1}}{z_2} + \frac{b_{-2}}{z_2^2} + \ldots. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Zauważmy, że wtedy siły tnące N_x i N_y dążą do zera, gdy $|z| \to \infty$.

Podobnie, jeżeli ugięcie przedstawimy w postaci (6.3′), to przy założeniu, że momenty w całym obszarze S pozostają ograniczone, mamy dla dostatecznie dużych $|z_1^*|$ i $|z_2^*|$

$$w(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2} [B_j^* z_j^* \ln z_j^* + C_j^* \ln z_j^* + \chi_{0j}^*(z_j^*)] + a_2^* z_1^{*2} + a_1^* z_1^* + \right. \\ \left. + b_2^* z_2^{*2} + b_1^* z_2^*\right\}, \tag{6.11′}$$

$$\begin{aligned} \chi_{01}^*(z_1^*) &= a_0^* + \frac{a_{-1}^*}{z_1^*} + \frac{a_{-2}^*}{z_1^{*2}} + \ldots, \\ \chi_{02}^*(z_2^*) &= b_0^* + \frac{b_{-1}^*}{z_2^*} + \frac{b_{-2}^*}{z_2^{*2}} + \ldots. \end{aligned} \tag{6.12′}$$

Stałe a_2, b_2 lub a_2^*, b_2^* można powiązać z wartościami momentów w nieskończoności (por. [23]).

7. Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych

Rozważmy nieograniczoną płaszczyznę płytową z otworem kołowym o promieniu r i środku w punkcie $z_0 = x_0+iy_0$. Niech obwód otworu będzie obciążony siłami pionowymi p (na jednostkę długości łuku), działającymi w kierunku osi OZ, rozłożonymi równomiernie i przyłożonymi na krawędzi $Z = -h/2$. Obciążenie to zgodnie ze wzorami (5.1-2) daje następujące składowe wektora i momentu wypadkowego:

$$(7.1) \qquad P_{x1} = P_{y1} = M_{z1} = 0\,, \quad P_{z1} = 2\pi rp\,, \quad M_{x1} = 2\pi rpy_0\,, \quad M_{y1} = -2\pi rpx_0\,.$$

Obszar płyty S w rozpatrywanym przypadku możemy traktować jako dwuspójny, ograniczony brzegiem otworu i punktem w nieskończoności, którego do obszaru nie zaliczamy. Jest to więc przypadek graniczny obszaru ograniczonego okręgiem L_1 i dowolnym konturem L_0 (nie przecinającym się z L_1), gdy L_0 dąży do nieskończoności.

W każdym skończonym punkcie obszaru S ugięcie możemy przedstawić w postaci (4.5) lub (4.13). Przyjmując w (4.5) $C_{mj} = 0$, $\psi_j(z_j) \equiv 0$ oraz korzystając z (7.1), (5.12) i (5.13), dla ugięcia otrzymamy wzór:

$$(7.2) \qquad w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} A_{1j}(z_j - z_{j1})^2 \ln(z_j - z_{j1})\,,$$

gdzie

$$(7.3) \qquad A_{1j} = (-1)^{j+1} \frac{rp\,(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8D_{22}(1-k_j\bar{k}_1)(1-k_j\bar{k}_2)(k_1-k_2)}\,,$$

$$(7.4) \qquad z_{j1} = z_0 + k_j\bar{z}_0, \quad j = 1, 2.$$

Niech teraz $r \to 0$, przy warunku, że $\lim\limits_{r\to 0} 2\pi rp = P$. Wtedy współczynniki A_{1j} przyjmą postać

$$(7.5) \qquad A_{1j} = (-1)^{j+1} \frac{P(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{16\pi D_{22}(1-k_j\bar{k}_1)(1-k_j\bar{k}_2)(k_1-k_2)}\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Funkcja (7.2) przedstawia wówczas ugięcie (część osobliwą ugięcia) nieograniczonej płyty anizotropowej obciążonej siłą skupioną P w punkcie (x_0, y_0).

Podobnie, korzystając z postaci (4.13), możemy funkcję $w(x, y)$ przedstawić za pomocą zmiennych z_j^*, mianowicie

$$(7.6) \qquad w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} A_{1j}^*(z_j^* - z_{j1}^*)^2 \ln(z_j^* - z_{j1}^*)\,,$$

przy czym, uwzględniając (5.12′) i (5.13′),

$$(7.7) \qquad A_{1j}^* = \frac{(-1)^{j+1} Pi}{2\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_j-\bar{\mu}_1)(\mu_j-\bar{\mu}_2)}\,,$$

$$(7.8) \qquad z_{1j}^* = x_0 + \mu_j y_0, \quad j = 1, 2\,.$$

W przypadku gdy siła skupiona P jest przyłożona w początku układu współrzędnych ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) rozwiązanie to różni się tylko wielomianem od podanego przez J. MOSSAKOWSKIEGO, [13].

Rozważmy teraz przypadek, gdy na obwodzie otworu określonego powyżej działają obciążenia sprowadzające się jedynie do wypadkowego momentu o składowych M_{x1} i M_{y1} i niech $\lim\limits_{r\to 0} M_{x1} = m_x$, $\lim\limits_{r\to 0} M_{y1} = m_y$. Postępując podobnie jak poprzednio i korzystając z (4.5) i (5.12-13) lub odpowiednio z (4.13) i (5.12′-13′), otrzymamy ugięcie płaszczyzny nieograniczonej obciążonej momentem skupionym o składowych m_x, m_y, przyłożonym w punkcie $z_0 = x_0+iy_0$, w postaci

$$w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} B_{1j}(z_j - z_{j1}) \ln (z_j - z_{j1}), \tag{7.9}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8\pi D_{22}(k_1-k_2)(1-k_1\bar{k}_1)(1-k_1\bar{k}_2)} [(k_1-1)\, m_x\, i+(1+k_1)\, m_y], \\ B_{12} &= \frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8\pi D_{22}(k_2-k_1)(1-k_2\bar{k}_2)(1-k_2\bar{k}_1)} [(k_2-1)\, m_x\, i+(1+k_2)\, m_y] \end{aligned} \tag{7.10}$$

lub w postaci

$$w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} B_{1j}^{*}(z_j^{*} - z_{j1}^{*}) \ln (z_j^{*} - z_{j1}^{*}), \tag{7.11}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_{11}^{*} &= \frac{(-m_x\, \mu_1+m_y)\, i}{\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_1)(\mu_1-\bar{\mu}_2)}, \\ B_{12}^{*} &= \frac{(-m_x\, \mu_2+m_y)\, i}{\pi D_{22}(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\bar{\mu}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

W wyrażeniach (7.9) i (7.11) z_{j1} i z_{j1}^{*} oznaczają zmienne zespolone określone odpowiednio przez (7.4) i (7.8).

Łatwo sprawdzić, że dla przypadku izotropii otrzymane rozwiązania różnią się tylko wielomianem od znanych w literaturze (por. np. [29]).

Rozwiązanie osobliwe dla płyty obciążonej momentem skupionym możemy również otrzymać z rozwiązania dla płyty obciążonej siłą skupioną wykonując odpowiednie przejście graniczne. Mianowicie, niech w punkcie $z_0 = x_0+iy_0$ nieograniczonej płaszczyzny będzie przyłożona siła skupiona $-P$, a w punkcie $z_0+\varepsilon e^{i\theta_0}$ siła skupiona $+P$. Układ tych sił jest statycznie równoważny momentowi o składowych $P\varepsilon \sin\theta_0$, $-P\varepsilon\cos\theta_0$, 0. Rozwiązanie dla tego przypadku ma postać

$$w_1(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} A_{mj}(z_j - z_{jm})^2 \ln (z_j - z_{jm}), \tag{7.13}$$

gdzie

(7.14)
$$z_j = (1+k_j)\,x+i\,(1-k_j)\,y, \quad z_{j1} = (1+k_j)\,x_0+i\,(1-k_j)\,y_0,$$
$$z_{j2} = (1+k_j)\,(x_0+\varepsilon\cos\theta_0)+i\,(1-k_j)\,(y_0+\varepsilon\sin\theta_0),$$

(7.15)
$$A_{1j} = -P\varrho_j, \quad A_{2j} = P\varrho_j,$$

przy czym

(7.16)
$$\varrho_j = (-1)^{j+1}\frac{(1+k_1)\,(1+k_2)\,(1+\bar{k}_1)\,(1+\bar{k}_2)}{16\pi D_{22}\,(1-k_j\bar{k}_1)\,(1-k_j\bar{k}_2)\,(k_1-k_2)}.$$

Niech teraz $\varepsilon \to 0$, ale $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P\varepsilon = M$ $(M > 0)$. Wtedy $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} w_1(x, y)$ przedstawia ugięcie nieograniczonej płaszczyzny obciążonej w punkcie (x_0, y_0) momentem skupionym o składowych

(7.17)
$$m_x = M\sin\theta_0, \quad m_y = -M\cos\theta_0, \quad m_z = 0.$$

Jeżeli przez $W(x, y; x_0, y_0)$ oznaczymy wyrażenie

(7.18)
$$W(x, y; x_0, y_0) = \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\varrho_j\,[(1+k_j)\,(x-x_0)+i\,(1-k_j)\,(y-y_0)]^2 \times$$
$$\times \ln\,[(1+k_j)\,(x-x_0)+i\,(1-k_j)\,(y-y_0)],$$

to

(7.19)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_1(x, y) = M\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\cos\theta_0+\frac{\partial W}{\partial y_0}\sin\theta_0\right).$$

Zatem

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_1(x, y) = -M\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\varrho_j\{2\,[(1+k_j)\cos\theta_0+i\,(1-k_j)\sin\theta_0]\times$$
$$\times[(1+k_j)\,(x-x_0)+i\,(1-k_j)\,(y-y_0)]\ln\,[(1+k_j)\,(x-x_0)+i(1-k_j)(y-y_0)]+$$
$$+[(1+k_j)\,(x-x_0)+i\,(1-k_j)\,(y-y_0)]\,[(1+k_j)\cos\theta_0+i\,(1-k_j)\sin\theta_0]\},$$

skąd uwzględniając (7.17) i odrzucając wielomian (część regularną), otrzymamy wynik pokrywający się z (7.9). W ten sam sposób korzystając z (7.6) dochodzimy do rozwiązania (7.11).

Rozważmy teraz nieograniczoną płaszczyznę płytową, obciążoną w punkcie $z_0 = x_0+iy_0$ momentem skupionym o składowych $-M\sin\theta_0$, $M\cos\theta_0$, 0, a w punkcie $z_0+\varepsilon e^{i\theta_0}$ momentem skupionym $(M\sin\theta_0, -M\cos\theta_0, 0)$, gdzie M jest stałą rzeczywistą dodatnią. Powierzchnia ugięcia zgodnie z (7.9-10) będzie miała postać

(7.20)
$$w_2(x, y) = \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}B_{mj}\,(z_j-z_{jm})\ln\,(z_j-z_{jm}),$$

gdzie z_j, z_{jm} są przedstawione przez (7.14), natomiast

(7.21)
$$B_{1j} = 2\varrho_j\,M\,[(1-k_j)\,i\sin\theta_0+(1+k_j)\cos\theta_0], \quad B_{2j} = -B_{1j},$$

a ϱ_j mają kształt (7.16).

Jeżeli przejdziemy z ε do zera, ale $\lim_{\varepsilon\to 0} M\varepsilon = \mathfrak{M}$, to postępując jak wyżej otrzymamy rozwiązanie dla przypadku, gdy płaszczyzna płytowa jest obciążona bimomentem skupionym o wielkości $\mathfrak{M}$, działającym w płaszczyźnie $(x-x_0)\sin\theta_0 - (y-y_0)\cos\theta_0 = 0$ i przyłożonym w punkcie (x_0, y_0). Mianowicie wprowadzając oznaczenie

$$(7.22)\qquad W_1(x,y;x_0,y_0) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \varrho_j\,[(1-k_j)\,i\sin\theta_0+(1+k_j)\cos\theta_0]\,[(1+k_j)\times \\ \times(x-x_0)+i\,(1-k_j)(y-y_0)]\ln[(1+k_j)(x-x_0)+i\,(1-k_j)(y-y_0)],$$

mamy

$$(7.23)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} w_2(x,y) = -2\mathfrak{M}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_0}\cos\theta_0 + \frac{\partial W_1}{\partial y_0}\sin\theta_0\right)$$

lub za pomocą funkcji (7.18)

$$(7.24)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} w_2(x,y) = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^0}\cos\theta_0 + 2\frac{\partial^2 W}{\partial x_0\,\partial y_0}\sin\theta_0\cos\theta_0 + \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}\sin\theta_0\right).$$

Stąd odrzucając stałą otrzymamy dla tego przypadku obciążenia ugięcie w postaci

$$(7.25)\qquad w(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} C_{1j}\ln(z_j - z_{j1}),$$

gdzie

$$(7.26)\qquad \begin{aligned} C_{11} &= \frac{\mathfrak{M}\,(e^{i\theta_0}+k_1e^{-i\theta_0})^2(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8\pi D_{22}(k_1-k_2)(1-k_1\bar{k}_1)(1-k_1\bar{k}_2)},\\ C_{12} &= \frac{\mathfrak{M}\,(e^{i\theta_0}+k_2e^{-i\theta_0})^2(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}{8\pi D_{22}(k_2-k_1)(1-k_2\bar{k}_1)(1-k_2\bar{k}_2)} \end{aligned}$$

lub korzystając z (7.11) i (7.12), w postaci

$$(7.27)\qquad w(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} C_{1j}^*\ln(z_j^* - z_{j1}^*),$$

przy czym

$$(7.28)\qquad \begin{aligned} C_{11}^* &= \frac{\mathfrak{M}i\,(\cos\theta_0+\mu_1\sin\theta_0)^2}{\pi D_{22}(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_1)(\mu_1-\bar{\mu}_2)},\\ C_{12}^* &= \frac{\mathfrak{M}i\,(\cos\theta_0+\mu_2\sin\theta_0)^2}{\pi D_{22}(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\bar{\mu}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)}. \end{aligned}$$

Przyjmując w (7.27) i (7.28) $D_{22} = D$, $\mu_1 = i\beta_1$, $\mu_2 = i\beta_2$ i przechodząc do granicy przy $\beta_2\to\beta_1 = 1$, otrzymamy rozwiązanie dla płaszczyzny izotropowej obciążonej bimomentem skupionym, które dla $x_0 = y_0 = 0$, $\theta_0 = \pi$ pokrywa się (z dokładnością do stałej, którą odrzuciliśmy jako należącą do części regularnej rozwiązania, zresztą nie wpływającej na naprężenia) ze znanym rozwiązaniem, podanym np. w [29].

W ten sposób został wyjaśniony sens stałych C_{mj} czy C_{mj}^*, występujących w rozwiązaniu ogólnym (4.5) lub (4.13). Na stałe te otrzymaliśmy poprzednio tylko jeden warunek (4.11) lub (4.16), wynikający z jednoznaczności rozwiązania, gdyż warunki równowagi dodatkowych związków, potrzebnych do ich wyznaczenia, nie dostarczają.

8. Zagadnienia płaskie

Rozważmy obecnie ciało anizotropowe w postaci cienkiej tarczy o stałej grubości h, ograniczonej dowolnym konturem lub zbiorem konturów i będącej w równowadze pod wpływem obciążeń równoległych do płaszczyzny środkowej, przyłożonych na brzegu tarczy i rozłożonych symetrycznie względem płaszczyzny środkowej bądź w postaci długiego walca o dowolnym przekroju poprzecznym, będącego w równowadze pod działaniem sił przyłożonych na powierzchni bocznej, działających w płaszczyznach prostopadłych do tworzącej i nie zmieniających się wzdłuż tworzącej. Jak wiadomo (por. [9]) w pierwszym przypadku ciało znajduje się w uogólnionym płaskim stanie naprężenia, w drugim zaś w płaskim stanie odkształcenia. W obu przypadkach nie będziemy uwzględniać sił objętościowych i założymy, że odkształcenia są małe oraz że w każdym punkcie ciała znajduje się płaszczyzna symetrii sprężystej, równoległa w pierwszym przypadku do płaszczyzny środkowej tarczy, w drugim prostopadła do tworzącej walca.

Składowe tensora naprężeń[1] możemy w obu przypadkach wyrazić przez funkcję naprężeń $F(x, y)$ za pomocą związków

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{8.1}$$

przy czym funkcja naprężeń spełnia równanie różniczkowe

$$\beta_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{8.2}$$

Dla uogólnionego płaskiego stanu naprężenia $\beta_{ij} = a_{ij}$, zaś dla płaskiego stanu odkształcenia $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}\, a_{j3}/a_{33}$, gdzie a_{ij} są współczynnikami odkształcenia, które dla danego ciała anizotropowego są znane.

Równanie charakterystyczne równania (8.2) nie może mieć rzeczywistych pierwiastków (por. [12]), poza czterema przypadkami granicznymi, których tutaj nie będziemy rozpatrywać. Zakładając, że pierwiastki te są różne, możemy je podobnie jak w przypadku płyt napisać w postaci

$$\mu_1 = \alpha + \beta i, \quad \mu_2 = \gamma + \delta i, \quad \mu_3 = \bar{\mu}_1, \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2, \quad \beta > 0, \quad \delta > 0. \tag{8.3}$$

Postępując jak w p. 2 możemy przedstawić każde rozwiązanie równania (8.2) (rzeczywiste i regularne w jednospójnym obszarze S) o pochodnych od drugiego rzędu zaczynając jednoznacznych w postaci

$$F(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(z_j), \tag{8.4}$$

[1] Naprężenia i przemieszczenia w przypadku uogólnionego płaskiego stanu naprężenia są rozumiane jako średnie względem grubości tarczy (por. [9]).

lub

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j^* (z_j^*), \tag{8.5}$$

gdzie φ_j, φ_j^* są funkcjami holomorficznymi zmiennych i odpowiednio

$$z_j = (1+k_j)\, x + i\, (1 - k_j)\, y, \qquad z_j^* = x + \mu_j\, y, \tag{8.6}$$

przy czym

$$k_j = \frac{1+i\mu_j}{1-i\mu_j}, \qquad j = 1, 2\,. \tag{8.7}$$

Jeżeli obszar S jest $(n+1)$-spójny, ograniczony konturami $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$, to zgodnie z wynikami p. 4 funkcja $F(x, y)$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} F(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{j=1}^{n} [A_{mj}(z_j - z_{jm})^2 \ln (z_j - z_{jm}) + \\ + B_{mj}(z_j - z_{jm}) \ln (z_j - z_{jm}) + C_{mj} \ln (z_j - z_{jm}) + \psi_j (z_j)] \end{aligned} \tag{8.8}$$

lub przy użyciu zmiennych z_j^* analogiczną postać, gdzie współczynniki i zmienne są opatrzone gwiazdkami [por. (4.5) i (4.13)].

Z jednoznaczności naprężeń otrzymujemy dla współczynników A_{mj} warunki

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i(1+k_j)^2 A_{mj} = 0\,, \qquad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i\,(1-k_j)^2 A_{mj} = 0\,, \\ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (1-k_j^2)\, A_{mj} = 0\,, \qquad m = 1, 2, \ldots, n\,. \end{gathered} \tag{8.9}$$

Składowe wektora przemieszczenia możemy korzystając z prawa Hooke'a wyrazić przez składowe tensora naprężeń, a te z kolei przez funkcję naprężeń. Przedstawiając funkcję naprężeń w postaci (8.4) [lub (8.5)], gdzie funkcje $\varphi_j (z_j)$ są holomorficzne, gdy obszar S jest jednospójny, a są sumami funkcji holomorficznych i wyrazów z logarytmami [według (8.8)], gdy obszar S jest wielospójny, otrzymamy

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (1 + k_j) p_j \varphi_j'(z_j) - \omega y + u_0\,, \\ v &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (1 + k_j)\, q_j\, \varphi_j'(z_j) + \omega x + v_0\,, \end{aligned} \tag{8.10}$$

gdzie

$$\begin{aligned} p_j &= -\left(\frac{1-k_j}{1+k_j}\right)^2 \beta_{11} + \beta_{12} - i\,\frac{1-k_j}{1+k_j}\,\beta_{16} = \beta_{11}\,\mu_j^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\,\mu_j\,, \\ q_j &= i\,\frac{1-k_j}{1+k_j}\,\beta_{12} - i\,\frac{1+k_j}{1-k_j}\,\beta_{22} - \beta_{26} = \beta_{12}\,\mu_j + \frac{\beta_{22}}{\mu_j} - \beta_{26}\,, \end{aligned} \tag{8.11}$$

zaś ω, u_0, v_0 są dowolnymi stałymi całkowania.

Jeżeli założymy, że przemieszczenia są funkcjami jednoznacznymi, to biorąc pod uwagę (8.9) dla współczynników A_{mj} dostaniemy jeden dodatkowy niezależny od poprzednich warunek

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\frac{(1-k_j)^3}{1+k_j}A_{mj}=0\,,\qquad m=1,2,\dots,n\,, \tag{8.12}$$

zaś współczynniki B_{mj} muszą spełniać równania

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} i\,(1+k_j)\,p_j B_{mj}=0\,,\qquad \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} i\,(1+k_j)\,q_j B_{mj}=0\,. \tag{8.13}$$

Wyznacznik układu równań (8.9) i (8.12) ma postać

$$\frac{2^6(\bar{k}_1-\bar{k}_2)(k_1-k_2)(1-k_1\bar{k}_1)(1-k_1\bar{k}_2)(1-k_2\bar{k}_1)(1-k_2\bar{k}_2)}{(1+k_1)(1+k_2)(1+\bar{k}_1)(1+\bar{k}_2)}=$$
$$=(1+k_1)^2(1+k_2)^2(1+\bar{k}_1)^2(1+\bar{k}_2)^2(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_1)(\mu_1-\bar{\mu}_2)(\mu_2-$$
$$-\bar{\mu}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\,,$$

jest więc różny od zera, zatem

$$A_{m1}=A_{m2}=0\,,\qquad m=1,2,\dots,n\,. \tag{8.14}$$

Pozostałe równania potrzebne do wyznaczenia stałych B_{mj} otrzymamy z warunków równowagi. Jeżeli jak w p. 5 L oznacza dowolny kontur wewnątrz obszaru S, nie mający punktów wspólnych z żadnym z konturów stanowiących brzeg obszaru, to wektor wypadkowy i moment wypadkowy naprężeń działających od strony dodatniej normalnej na powierzchni walcowej o kierownicy L i wysokości h mają przy uwzględnieniu (5.1), (5.3) i (8.1) składowe

$$\begin{aligned}
P_{xL}&=h\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\right\}_L=h\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2} i\,(1-k_j)\,\varphi_j'(z_j)\right\}_L,\\
P_{yL}&=-h\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\right\}_L=-h\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2}(1+k_j)\,\varphi_j'(z_j)\right\}_L,\\
M_{zL}&=h\left\{F-\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right\}_L=h\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{2}[\varphi_j(z_j)-z_j\varphi_j'(z_j)]\right\}_L,\\
P_{zL}&=M_{xL}=M_{yL}=0\,.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia należy w powyższych związkach przyjąć $h=1$.

Jeżeli obszar S jest jednospójny albo kontur L nie zawiera wewnątrz żadnego otworu w tarczy, otrzymujemy $P_{xL}=P_{yL}=M_{zL}=0$. Jeżeli zaś obszar tarczy jest wielospójny i kontur L obejmuje jedną z wewnętrznych krzywych brzegowych np. L_m, nie mając z nią punktów wspólnych, to wielkości $-P_{xL}$, $-P_{yL}$, $-M_{zL}$

są równe składowym wektora wypadkowego P_{xm}, P_{ym} i momentowi wypadkowemu M_m obciążeń zewnętrznych przyłożonych do brzegu otworu L_m. Wtedy biorąc pod uwagę (8.14) otrzymujemy

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}(1-k_j)B_{mj}=\frac{P_{xm}}{2\pi h},\quad \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}i(1+k_j)B_{mj}=\frac{P_{ym}}{2\pi h},$$
(8.16)
$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}i(z_{jm}B_{mj}-C_{mj})=\frac{M_m}{2\pi h},\qquad m=1,2,\dots,n.$$

Z układu równań (8.13) i dwóch pierwszych równań (8.16) możemy obliczyć B_{mj}. Równania (8.13) po uwzględnieniu (8.11) i (8.16) mogą być napisane w postaci

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}i\frac{(1-k_j)^2}{1+k_j}B_{mj}=\frac{\beta_{16}P_{xm}+\beta_{12}P_{ym}}{2\pi h\beta_{11}},$$

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\frac{(1+k_j)^2}{1-k_j}B_{mj}=\frac{\beta_{12}P_{xm}+\beta_{26}P_{ym}}{2\pi h\beta_{22}}.$$

Zatem

(8.17)
$$B_{m1}=\frac{B^*_{m1}}{1+k_1},\qquad B_{m2}=\frac{B^*_{m2}}{1+k_2},$$

gdzie

$$B^*_{mj}=\frac{P_{xm}\{\mu_j[\bar\mu_1+\bar\mu_2+(-1)^j(\mu_1-\mu_2)]-2\nu_{12}\}}{2\pi ih(-1)^j(\mu_2-\mu_1)(\mu_j-\bar\mu_1)(\mu_j-\bar\mu_2)}+$$
(8.18)
$$+\frac{P_{ym}[\mu_1\mu_2(\bar\mu_1+\bar\mu_2)+\bar\mu_1\bar\mu_2(-1)^j(\mu_2-\mu_1)-2\mu_j\nu_{12}]}{2\pi ih(-1)^j(\mu_2-\mu_1)(\mu_j-\bar\mu_1)(\mu_j-\bar\mu_2)},$$

$$\nu_{12}=\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}},\qquad j=1,2.$$

Warunki równowagi i warunki jednoznaczności naprężeń i przemieszczeń nie pozwalają na wyznaczenie stałych C_{mj}. Otrzymujemy dla nich tylko jedno równanie [trzecie równanie (8.16)], które możemy korzystając z dwu pierwszych zależności (8.16) napisać inaczej;

(8.19)
$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}iC_{mj}=\frac{1}{2\pi h}(x_mP_{ym}-y_mP_{xm}-M_m),\qquad m=1,2,\dots,n.$$

Jeżeli funkcję naprężeń wyrazimy przy pomocy zmiennych z^*_j w postaci

(8.20)
$$F(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{n}[A^*_{mj}(z^*_j-z^*_{jm})^2\ln(z^*_j-z^*_{jm})+$$
$$+B^*_{mj}(z^*_j-z^*_{jm})\ln(z^*_j-z^*_{jm})+C^*_{mj}\ln(z^*_{j_j}-z^*_{jm})+\psi^*_j(z^*_j)],$$

to uwzględniając warunki jednoznaczności naprężeń i przemieszczeń oraz warunki równowagi otrzymamy $A^*_{mj}=0$, B^*_{mj} przedstawione wzorem (8.18), a dla C^*_{mj} zespół równań (8.19), w którym C_{mj} należy zastąpić przez C^*_{mj}.

Z powyższych rozwiązań możemy podobnie jak dla płyt otrzymać rozwiązania osobliwe. Rozważmy mianowicie tarczę z otworem kołowym o promieniu r i środku w punkcie $z_0=x_0+iy_0$. Niech wzdłuż obwodu otworu działają w płaszczyźnie środkowej tarczy (która jest przyjęta za płaszczyznę Oxy układu współrzędnych) siły równomiernie rozłożone o stałych składowych p_x i p_y na jednostkę długości łuku. Obciążenie to daje następujące składowe wektora i momentu wypadkowego;

$$P_{x1}=2\pi rp_x,\quad P_{y1}=2\pi rp_y,\quad M_{z1}=2\pi r(x_0p_y-y_0p_x),\qquad P_{z1}=M_{x1}=M_{y1}=0. \tag{8.21}$$

Przyjmując w (8.8) $C_{mj}=0$, $\psi_j(z_j)\equiv 0$ oraz przechodząc do granicy przy $r\to 0$, przy czym

$$\lim_{r\to 0}2\pi rp_x=P_{x1},\quad \lim_{r\to 0}2\pi rp_y=P_{y1}, \tag{8.22}$$

otrzymamy dla tarczy nieograniczonej obciążonej w punkcie (x_0, y_0) siłą skupioną P o składowych P_{x1} i P_{y1} funkcję naprężeń

$$F(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}B_{1j}(z_j-z_{j1})\ln(z_j-z_{j1}), \tag{8.23}$$

gdzie B_{1j} przedstawiają wzory (8.17-18), zaś z_{j1} mają postać (7.4). Przyjęcie $C_{mj}=0$ nie jest sprzeczne z warunkiem (8.19), gdyż ze względu na (8.21) i (8.22) otrzymujemy przy $m=1$ po jego prawej stronie zero.

Analogicznie korzystając z (8.20) uzyskamy dla tego przypadku obciążenia

$$F(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}B^*_{1j}(z^*_j-z^*_{j1})\ln(z^*_j-z^*_{j1}), \tag{8.24}$$

przy czym B^*_{1j} są dane za pomocą wzorów (8.18), zaś z^*_{j1} mają kształt (7.8). Dla $x_0=y_0=0$ rozwiązanie to pokrywa się z podanym przez S. G. Lechnickiego, [12] (por. również [15]).

Mając rozwiązanie (osobliwe) dla siły skupionej możemy w znany sposób otrzymać funkcję naprężeń dla tarczy nieograniczonej obciążonej momentem skupionym, [9]. Mając zaś funkcję naprężeń możemy obliczyć składowe tensora naprężeń według (8.1) i składowe wektora przemieszczenia według (8.10).

9. Równania eliptyczne dowolnego rzędu parzystego o stałych współczynnikach

Rozważania poprzednich punktów uogólnimy obecnie na równania wyższych rzędów. Zagadnienia równowagi ciał anizotropowych prowadzą do wyznaczenia funkcji spełniających równanie różniczkowe postaci, [10],

$$a_0\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}+a_1\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m-1}\partial y}+\ldots+a_{2m}\frac{\partial^{2m}u}{\partial y^{2m}}=f(x,y), \tag{9.1}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_{2m}$ są stałymi współczynnikami zależnymi od stałych sprężystych materiału, $u(x, y)$ jest poszukiwaną funkcją («funkcją naprężeń»), zaś $f(x, y)$ jest daną funkcją.

Zajmiemy się tutaj równaniem jednorodnym

$$\sum_{s=0}^{2m} a_s \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m-s} \partial y^s} = 0. \tag{9.2}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego

$$a_{2m} \mu^{2m} + a_{2m-1} \mu^{2m-1} + \ldots + a_1 \mu + a_0 = 0 \tag{9.3}$$

w przypadkach występujących w teorii sprężystości ($m = 1, 2, 3$) są zawsze zespolone. Przyjmiemy, że tak jest dla każdego m [wtedy równanie (9.1) jest typu eliptycznego] i zapiszemy je w postaci

$$\mu_r = \alpha_r + i\beta_r, \quad \mu_{m+r} = \bar{\mu}_r = \alpha_r - i\beta_r, \quad \beta_r > 0, \quad r = 1, 2, \ldots, m. \tag{9.4}$$

Jeżeli wprowadzimy nowe zmienne

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \tag{9.5}$$

to

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right),$$

więc

$$\sum_{s=0}^{2m} a_s \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m-s} \partial y^s} = \sum_{s=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-s} \sum_{r=0}^{s} a_s i^s \binom{2m-s}{j} \binom{s}{r} (-1)^r \frac{\partial^{2m} u}{\partial z^{2m-j-r} \partial \bar{z}^{j+r}}.$$

Równanie (9.2) przyjmie zatem postać

$$\sum_{p=0}^{2m} b_p \frac{\partial^{2m} u}{\partial z^{2m-p} \partial \bar{z}^p} = 0, \tag{9.6}$$

gdzie

$$b_p = \sum_{j=0}^{p} \sum_{s=p-j}^{2m-j} (-1)^{p-j} i^s \binom{2m-s}{j} \binom{s}{p-j} a_s. \tag{9.7}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego równania (9.6)

$$\sum_{p=0}^{2m} b_p k^p = 0, \tag{9.8}$$

przy założeniu, że $\mu_r \neq \pm i$, mają postać

$$k_r = \frac{1 + i\mu_r}{1 - i\mu_r}, \quad k_{m+r} = \frac{1 + i\bar{\mu}_r}{1 - i\bar{\mu}_r} = \frac{1}{\bar{k}_r}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, m, \tag{9.9}$$

przy czym ze względu na (8.4)

$$|k_r| < 1, \quad |k_{m+r}| > 1, \quad r = 1, 2, \ldots, m. \tag{9.10}$$

Zauważmy bowiem, że jeżeli $k = (1+i\mu)/(1-i\mu)$, to przy powyższych oznaczeniach

$$\sum_{p=0}^{2m} b_p k^p = \left(\frac{2}{1-i\mu}\right)^{2m} \sum_{p=0}^{2m} a_p \mu^p,$$

czego łatwo dowieść za pomocą indukcji względem m.

Korzystając z zależności między pierwiastkami równania charakterystycznego i jego współczynnikami możemy równanie (9.6) napisać w postaci

$$b_{2m} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\bar{k}_j} \left[k_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (1+k_j\bar{k}_j) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \bar{k}_j \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] u = 0,$$

lub biorąc pod uwagę, że

$$k_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (1+k_j\bar{k}_j) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \bar{k}_j \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = -$$

$$- \frac{(k_j\bar{k}_j - 1)^2}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{1+\bar{k}_j}{2} z + \frac{1+k_j}{2} \bar{z} \right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{1-\bar{k}_j}{2i} z - \frac{1-k_j}{2i} \bar{z} \right)^2} \right],$$

w postaci

$$\left[\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) \right] u = 0, \tag{9.11}$$

przy czym x_j, y_j oznaczają następujące zmienne rzeczywiste:

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{2} [(1+\bar{k}_j) z + (1+k_j) \bar{z}], \\ y_j &= \frac{1}{2i} [(1-\bar{k}_j) z - (1-k_j) \bar{z}], \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Niech S oznacza pewien obszar na płaszczyźnie $z = x+iy$. Rozwiązania równania (9.2), które w obszarze S mają ciągłe pochodne rzędu $\leqslant 2m$, będziemy nazywać rozwiązaniami regularnymi w obszarze S.

Z kolei udowodnimy następujące twierdzenie: *każde rozwiązanie równania (9.2), rzeczywiste i regularne w jednospójnym obszarze S, którego pochodne od drugiego rzędu zaczynając są jednoznaczne, w przypadku gdy pierwiastki równania charakterystycznego (9.3) są zespolone i nie równe sobie, można przedstawić za pomocą m funkcji holomorficznych $\varphi_j(z_j)$ w postaci*

$$u(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z_j), \tag{9.13}$$

gdzie z_j są zmiennymi zespolonymi

$$z_j = x_j + iy_j = z + k_j\bar{z}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{9.14}$$

Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji. Dla $m = 2$ twierdzenie zachodzi, jak wykazano w p. 2. (Dla $m = 1$ twierdzenie to przedstawia fakt znany w teorii funkcji analitycznych). Załóżmy, że teza zachodzi dla $m-1$. Wówczas zgodnie z (9.11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m-1} \varphi_j^*(z_j) = \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x_j, y_j).$$

Niech $g_j(x_j, y_j)$ oznaczają funkcje harmoniczne sprzężone z $f_j(x_j, y_j)$ dla $j = 1, 2, \ldots, m-1$, tak że

$$h_j(z_j) = f_j(x_j, y_j) + ig_j(x_j, y_j)$$

są funkcjami holomorficznymi zmiennych z_j kształtu (9.14). Skonstruujmy funkcje holomorficzne

$$H_j(z_j) = \int h_j(z_j)\, dz_j,$$

$$\varphi_j(z_j) = \frac{(k_m \bar{k}_m - 1)^2}{4(k_m - k_j)(k_j \bar{k}_m - 1)} \int H_j(z_j)\, dz_j = p_j(x_j, y_j) + iq_j(x_j, y_j), \tag{9.15}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Łatwo sprawdzić korzystając z warunków Cauchy'ego–Riemanna, że

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2}\right)\left[u(x, y) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(x_j, y_j)\right] = 0.$$

Zatem

$$u(x, y) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(x_j, y_j) = p_m(x_m, y_m)$$

jest funkcją rzeczywistą harmoniczną zmiennych rzeczywistych x_m, y_m, czyli

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x_j, y_j)$$

lub oznaczając przez $\varphi_m(z_m)$ funkcję holomorficzną, której częścią rzeczywistą jest $p_m(x_m, y_m)$, i uwzględniając (9.15) otrzymujemy (9.13).

Ponieważ na odwrót, przy dowolnych funkcjach holomorficznych $\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2), \ldots, \varphi_m(z_m)$, funkcja $u(x, y)$ o postaci (9.13) spełnia równanie różniczkowe (9.2), wzór (9.13) przedstawia ogólną postać rozwiązania rzeczywistego i regularnego w obszarze jednospójnym.

Podobnie jak p. 2 jednoznaczność funkcji $u(x, y)$ i jej pierwszych pochodnych otrzymuje się stąd jako wniosek. Również nie trudno jest pokazać, że $u(x, y)$ spełniająca założenia powyższego twierdzenia jest funkcją analityczną zmiennych x i y.

Ogólną postać rozwiązania równania (9.2) można również napisać w sposób następujący:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^*(z_j^*), \tag{9.16}$$

gdzie $\varphi_j^*(z_j^*)$ są funkcjami holomorficznymi zmiennych zespolonych

$$z_j^* = x + \mu_j y, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{9.17}$$

Niech teraz S będzie $(n+1)$-spójnym skończonym obszarem na płaszczyźnie Oxy, ograniczonym przez $n+1$ konturów $L_0, L_1, \ldots, L_n$, nie mających ze sobą wspólnych punktów i niech L_0 zawiera wewnątrz wszystkie pozostałe krzywe. Oznaczmy podobnie jak w p. 4 przez S_j obszar $(n+1)$-spójny, który powstaje z obszaru S przez przekształcenie afiniczne $z_j = x_j + iy_j = z + k_j \bar{z}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, zaś przez $L_0^{(j)}, L_1^{(j)}, \ldots, L_n^{(j)}$ krzywe brzegowe obszaru S_j. Niech $u(x, y)$ będzie rzeczywistym jednoznacznym rozwiązaniem równania (9.2) regularnym w S. W jednospójnym obszarze S', otrzymanym z S po wykonaniu odpowiednich rozcięć, funkcja $u(x, y)$ spełnia założenia powyżej udowodnionego twierdzenia, możemy ją więc przedstawić w postaci (9.13), przy czym $\varphi_j(z_j)$ są holomorficzne w odpowiednich obszarach S_j'. Stąd

$$\frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x^{2m-1-r} \partial y^r} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} (1+k_j)^{2m-1-r} (1-k_j)^r i^r \varphi_j^{(2m-1)}(z_j), \tag{9.18}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1.$$

Z tego układu $2m$ równań możemy w sposób jednoznaczny wyrazić pochodne $\varphi_j^{(2m-1)}(z_j)$, $j=1, 2, \ldots, m$, przez pochodne rzędu $2m-1$ funkcji $u(x, y)$, gdyż wyznacznik macierzy współczynników przy $\varphi_j^{(2m-1)}(z_j)$, $\overline{\varphi_j^{(2m-1)}(z_j)}$ jest zgodnie z (9.10) różny od zera, bowiem jak łatwo sprawdzić jest on proporcjonalny do wyznacznika Vandermonde'a zbudowanego z elementów, z których żadne dwa nie są równe.

Wobec tego $\varphi_j^{(2m-1)}(z_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, są funkcjami holomorficznymi (jednoznacznymi) zmiennych $z_1, z_2, \ldots, z_m$, odpowiednio w obszarach $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Postępując więc podobnie jak w p. 4, otrzymujemy

$$\varphi_j(z_j) = \sum_{s=0}^{2m-2} \sum_{r=1}^{n} A_{jrs} (z_j - z_{jr})^{2m-s-2} \ln (z_j - z_{jr}) + \psi_j(z_j), \tag{9.19}$$

gdzie A_{jrs} oznaczają stałe zespolone, $z_{jr} = z_r + k_j \bar{z}_r$ są punktami odpowiadającymi dowolnie ustalonym punktom z_r wewnątrz krzywych L_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, natomiast $\psi_j(z_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ są funkcjami holomorficznymi odpowiednio w obszarach S_j.

Wstawiając (9.19) do (9.13) dostaniemy

$$(9.20)\qquad u(x,y) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{2m-2}\sum_{r=1}^{n}[A_{jrs}(z_j - z_{jr})^s \ln(z_j - z_{jr}) + \psi_j(z_j)]\right\}.$$

Ponieważ $u(x, y)$ jest funkcją jednoznaczną, stałe A_{jrs} muszą spełniać układ równań

$$(9.21)\qquad \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{m} A_{jrs}\, i^t(1+k_j)^{s-t}(1-k_j)^t = 0,$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots, 2m-2;\; t = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie: *każde rzeczywiste jednoznaczne i regularne w $(n+1)$-spójnym obszarze S rozwiązanie równania* (9.2), *w przypadku gdy pierwiastki jego równania charakterystycznego są zespolone i różne, jest postaci* (9.20), *przy czym współczynniki A_{jrs} spełniają układ równań* (9.21).

Oczywiście, na odwrót, przy dowolnych funkcjach $\psi_j(z_j)$ holomorficznych odpowiednio w obszarach S_j funkcja $u(x, y)$ w postaci (9.20) spełnia równanie (9.2), zatem wzór (9.20) przedstawia ogólną postać rozwiązania rzeczywistego jednoznacznego i regularnego w obszarze wielospójnym.

Przyjmując w (9.20): $\varphi_j(z_j) \equiv 0$, $A_{jrs} = 0$ dla $s = 0, 1, 2, \ldots, 2m-3$, otrzymamy rozwiązanie szczególne równania (9.2)

$$(9.22)\qquad u_0(x, y; x_r, y_r) = \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m} A_j(z_j - z_{jr})^{2m-2}\ln(z_j - z_{jr}).$$

Stałe $A_j = A_j' + iA_j''$, $j = 1, 2, \ldots, m$, (A_j', A_j'' są to liczby rzeczywiste) zgodnie z (9.21) spełniają układ $2m-1$ równań, wynikających z jednoznaczności funkcji $u_0(x, y; x_r, y_r)$

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{m} A_j\, i^t(1+k_j)^{2m-2-t}(1-k_j)^t = 0,$$

$$t = 0, 1, 2, \ldots, 2m-2,$$

z którego $2m$ stałych rzeczywistych A_j', A_j'' możemy wyrazić przez jedną z nich. Funkcja $u_0(x, y; x_r, y_r)$ przedstawia rozwiązanie podstawowe równania (9.2) z biegunem w punkcie (x_r, y_r), (por. [30] oraz [26]).

Łatwo jest podać ogólną postać rozwiązania równania (9.2) dla przypadku obszaru wielospójnego nieskończonego typu omówionego w p. 6, powstającego z obszaru $(n+1)$-spójnego S, gdy kontur L_0 dąży do nieskończoności. W dowolnej skończonej części obszaru rozwiązanie przedstawia wzór (9.20). Natomiast w otoczeniu punktu w nieskończoności dla dostatecznie dużych $|z| = |x+iy|$ zachodzi (6.2), więc przedstawiając $u(x, y)$ w równoważnej (9.20) postaci

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{2m-2} \sum_{r=1}^{n} [A_{jrs} z_j^s \ln (z_j - z_{jr}) + \psi_j(z_j)]$$

i podstawiając tutaj zależności (6.2), uzyskamy

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{2m-2} [A_{js} z_j^s \ln z_j + \chi_j(z_j)],$$

gdzie

$$A_{js} = \sum_{r=1}^{n} A_{jrs},$$

zaś $\chi_j(z_j), j = 1, 2, \ldots, m$ są funkcjami zmiennych z_j holomorficznymi dla dostatecznie dużych $|z_j|$ z wyjątkiem, być może, punktu w nieskończoności. Funkcje $\chi_j(z_j)$ można więc w odpowiednich otoczeniach pierścieniowych punktu w nieskończoności rozwinąć w szeregi Laurenta.

Rozdział II

OGÓLNE PŁASKIE ZAGADNIENIE DYSTORSYJNE DLA CIAŁ ANIZOTROPOWYCH

10. Związki ogólne

Niech na pewnym obszarze G tarczy anizotropowej będą dane odkształcenia scharakteryzowane wielkościami ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0, będącymi funkcjami miejsca i niezależnymi od czasu, przy czym poza obszarem G wielkości te są równe zeru. Te początkowe odkształcenia wywołają określone naprężenia i odkształcenia w całym obszarze tarczy. Początkowe odkształcenia w obszarze G mogą być wywołane nieciągłym polem temperatury — wtedy mamy do czynienia z dystorsjami termicznymi albo błędami w wykonaniu elementów tarczy, powodującymi wystąpienie naprężeń montażowych.

Pierwszy typ zagadnień dystorsyjnych, dotyczących wyznaczania naprężeń termicznych wywołanych przez nieciągły rozkład temperatury w tarczach izotropowych, był rozpatrywany w wielu pracach (por. [17], gdzie podany też jest obszerny spis literatury). Bardziej ogólne zagadnienie wyznaczenia ustalonego stanu naprężenia w tarczach izotropowych, spowodowanego przez dowolne odkształcenia początkowe, omówił W. Nowacki w pracy [18]. Zadaniem, które stawiamy w tym rozdziale, jest rozszerzenie rozważań W. Nowackiego na przypadek tarcz anizotropowych.

Związki fizyczne między składowymi tensora naprężeń i odkształceń przy istnieniu odkształceń początkowych $\varepsilon_x^0(x, y)$, $\varepsilon_y^0(x, y)$, $\gamma_{xy}^0(x, y)$ dla ciała o anizotropii prostoliniowej znajdującego się w płaskim stanie naprężenia (w granicach stosowalności klasycznej teorii odkształceń małych) przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} + \varepsilon_x^0,\\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} + \varepsilon_y^0,\\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} + \gamma_{xy}^0,
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

gdzie a_{ij} są znanymi stałymi materiałowymi, zwanymi współczynnikami odkształcenia (por. [18] oraz [9]). Zakładamy przy tym, że w każdym punkcie ciała znajduje się płaszczyzna symetrii sprężystej, równoległa do płaszczyzny środkowej tarczy.

Ponadto muszą być spełnione równania równowagi (przyjmujemy, że nie występują siły masowe)

$$
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,
\tag{10.2}
$$

zależności geometryczne między składowymi tensora odkształceń i wektora przemieszczenia (odkształcenia początkowe nie zależą od przemieszczeń)

$$
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\tag{10.3}
$$

oraz w przypadku rozwiązywania zagadnienia w naprężeniach równanie nierozdzielności

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.
\tag{10.4}
$$

Oprócz tego mamy do spełnienia na brzegu tarczy określone warunki brzegowe dane bądź w naprężeniach, bądź w przemieszczeniach.

Rozwiązanie powyższego układu równań możemy np. otrzymać posługując się funkcją Greena w sposób opisany przez W. Nowackiego, [18]. Mianowicie rozważmy najpierw przypadek, gdy na obszarze G tarczy dane jest tylko pole odkształceń $\varepsilon_x^0(x, y)$. Załóżmy, że ε_x^0 istnieje tylko na nieskończenie małym obszarze dG otaczającym punkt $(\xi, \eta) \in G$, a równa się zeru na pozostałej części obszaru G. Wielkość $(\varepsilon_x^0\, dG)$ nazywamy ustalonym jądrem sprężystego odkształcenia. Działanie tego jądra wywołuje w tarczy stan naprężenia o składowych $\sigma_x^*(x, y; \xi, \eta)$, $\sigma_y^*(x, y; \xi, \eta)$, $\tau_{yx}^*(x, y; \xi, \eta)$ oraz przemieszczenia o składowych $u^*(x, y; \xi, \eta)$, $v^*(x, y; \xi, \eta)$. Natomiast składowe tensora naprężeń i wektora przemieszczenia, powstałe na skutek działania odkształcenia $\varepsilon_x^0(x, y)$ danego na obszarze G i zerującego się na zewnątrz tego obszaru, otrzymamy w postaci

$$
\sigma_{ij}^*(x, y) = \iint_G \varepsilon_x^0(\xi, \eta)\, \sigma_{ij}^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad i, j = 1, 2,
\tag{10.5}
$$

$$
u_j^*(x, y) = \iint_G \varepsilon_x^0(\xi, \eta)\, u_j^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad j = 1, 2,
\tag{10.6}
$$

$$
(\sigma_{11} = \sigma_x,\quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy},\quad \sigma_{22} = \sigma_y;\quad u_1 = u,\quad u_2 = v).
$$

Analogicznie otrzymuje się rozwiązania za pomocą funkcji Greena dla odkształceń początkowych $\varepsilon_y^0(x, y)$ i $\gamma_{xy}^0(x, y)$. Jeżeli przez $(\varepsilon_y^0 dG)$, $(\gamma_{xy}^0 dG)$ oznaczymy jądra sprężystego odkształcenia działające w punkcie (ξ, η), a wywołane przez nie naprężenia i przemieszczenia, odpowiednio, przez $\sigma_x^{**}, \sigma_y^{**}, \tau_{xy}^{**}, u^{**}, v^{**}$, oraz σ_x^{***}, σ_y^{***}, τ_{xy}^{***}, u^{***}, v^{***}, to naprężenia i przemieszczenia powstałe w tarczy pod wpływem odkształceń początkowych $\varepsilon_y^0(x, y)$ i $\gamma_{xy}^0(x, y)$, przyłożonych na obszarze G, wyrażą się wzorami analogicznymi do (10.5) i (10.6). Superponując trzy uzyskane w ten sposób stany naprężenia i przemieszczenia dostaniemy składowe tensora naprężeń i wektora przemieszczenia dla przypadku, gdy na obszarze G przyłożone są odkształcenia początkowe o wszystkich trzech składowych:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \iint_G [\varepsilon_x^0(\xi, \eta)\, \sigma_{ij}^*(x, y; \xi, \eta) + \varepsilon_y^0(\xi, \eta)\, \sigma_{ij}^{**}(x, y; \xi, \eta) + \gamma_{xy}^0(\xi, \eta)\, \sigma_{ij}^{***}(x, y; \xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta\,, \tag{10.7}$$

$$u_j(x, y) = \iint_G [\varepsilon_x^0(\xi, \eta)\, u_j^*(x, y; \xi, \eta) + \varepsilon_y^0(\xi, \eta)\, u_j^{**}(x, y; \xi, \eta) + \gamma_{xy}^0(\xi, \eta)\, u_j^{***}(x, y; \xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta\,. \tag{10.8}$$

W celu otrzymania rozwiązania omawianych zagadnień, w szczególności funkcji Greena dla tych zagadnień, możemy posłużyć się funkcją naprężeń Airy'ego $F(x, y)$ związaną z naprężeniami za pomocą znanych zależności

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}. \tag{10.9}$$

Wtedy równania równowagi (10.2) są już spełnione, ale składowe tensora odkształceń $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ muszą dodatkowo zadośćuczynić warunkowi (10.4). Podstawiając wielkości (10.1) po wykorzystaniu związków (10.9) do równania (10.4) otrzymujemy następujące równanie dla funkcji naprężeń $F(x, y)$:

$$L[F] = -\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x\, \partial y}\right), \tag{10.10}$$

gdzie L jest operatorem różniczkowym

$$L = a_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3\, \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{10.11}$$

Jeżeli przez $F^*(x, y)$, $F^{**}(x, y)$, $F^{***}(x, y)$ oznaczymy funkcje naprężeń, które za pomocą (10.9) są powiązane z naprężeniami napisanymi wyżej przy użyciu odpowiednio jednej, dwóch i trzech gwiazdek, to funkcje te spełniają równania

$$L[F^*] = -(\varepsilon_x^0 dG)\, \delta(x - \xi)\frac{\partial^2 \delta(y - \eta)}{\partial y^2}, \tag{10.12}$$

$$L[F^{**}] = -(\varepsilon_y^0 dG)\frac{\partial^2 \delta(x - \xi)}{\partial x^2}\, \delta(y - \eta), \tag{10.13}$$

$$L[F^{***}] = (\gamma_{xy}^0 dG) \frac{\partial \delta (x-\xi)}{\partial x} \frac{\partial \delta (y-\eta)}{\partial y}, \tag{10.14}$$

przy czym $\delta(...)$ jest symbolem funkcji Diraca.

Składowe wektora przemieszczenia, zwłaszcza ich części osobliwe, wygodnie będzie obliczyć korzystając z funkcji przemieszczeń Galerkina (por. [25]).

Rozwiążmy mianowicie układ równań (10.1) względem σ_x, σ_y, τ_{xy}. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0) + B_{12}(\varepsilon_y - \varepsilon_y^0) + B_{16}(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0), \\ \sigma_y &= B_{12}(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0) + B_{22}(\varepsilon_x - \varepsilon_y^0) + B_{26}(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0), \\ \tau_{xy} &= B_{16}(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0) + B_{26}(\varepsilon_y - \varepsilon_y^0) + B_{66}(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0), \end{aligned} \tag{10.15}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\Delta}(a_{22}a_{66} - a_{26}^2), & B_{12} &= \frac{1}{\Delta}(a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}), \\ B_{22} &= \frac{1}{\Delta}(a_{11}a_{66} - a_{16}^2), & B_{16} &= \frac{1}{\Delta}(a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}), \\ B_{66} &= \frac{1}{\Delta}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), & B_{26} &= \frac{1}{\Delta}(a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}), \end{aligned} \tag{10.16}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik Δ jest większy od zera, gdyż energia potencjalna odkształcenia jest formą kwadratową dodatnio określoną. Wstawmy teraz składowe tensora odkształceń ε_x, ε_y, γ_{xy} wyrażone przez składowe wektora przemieszczenia zgodnie z (10.3), do zależności (10.15) a te ostatnie do równań równowagi. Wtedy dla funkcji u i v otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} L_1[u] + L_2[v] &= M_1[\varepsilon_x^0] + M_2[\varepsilon_y^0] + M_3[\gamma_{xy}^0], \\ L_2[u] + L_3[v] &= M_4[\varepsilon_x^0] + M_5[\varepsilon_y^0] + M_6[\gamma_{xy}^0]. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Tutaj L_j, M_j oznaczają operatory

$$\begin{aligned} L_1 &= B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_2 &= B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_3 &= B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \end{aligned} \tag{10.18}$$

$$
(10.19)\qquad \begin{aligned}
&M_1=B_{11}\frac{\partial}{\partial x}+B_{16}\frac{\partial}{\partial y}, \quad M_2=B_{12}\frac{\partial}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial}{\partial y}, \quad M_3=B_{16}\frac{\partial}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial}{\partial y},\\
&M_4=B_{16}\frac{\partial}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial}{\partial y}, \quad M_5=B_{26}\frac{\partial}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial}{\partial y}, \quad M_6=B_{66}\frac{\partial}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Funkcje przemieszczeń $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$ wprowadzamy przyjmując

$$
(10.20)\qquad u=L_3[\Phi_1]-L_2[\Phi_2], \qquad v=L_1[\Phi_2]-L_2[\Phi_1].
$$

Funkcje te spełniają równania

$$
(10.21)\qquad \begin{aligned}
L[\Phi_1]&=\Delta\,(M_1[\varepsilon_x^0]+M_2[\varepsilon_y^0]+M_3[\gamma_{xy}^0]),\\
L[\Phi_2]&=\Delta\,(M_4[\varepsilon_x^0]+M_5[\varepsilon_y^0]+M_6[\gamma_{xy}^0]),
\end{aligned}
$$

gdyż nie trudno sprawdzić korzystając z zależności (10.16), że

$$
L_1L_3-L_2^2=\frac{1}{\Delta}L,
$$

gdzie L jest operatorem określonym przez (10.11).

W szczególności funkcje przemieszczeń $\Phi_j^*, \Phi_j^{**}, \Phi_j^{***}$, odpowiadające przemieszczeniom powstającym w tarczy na skutek działania jąder sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_x^0\,dG)$, $(\varepsilon_y^0\,dG)$, $(\gamma_{xy}^0\,dG)$ odpowiednio spełniają równania

$$
(10.22)\qquad \begin{aligned}
L[\Phi_1^*]&=\Delta\,(\varepsilon_x^0\,dG)\,M_1\,[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)],\\
L[\Phi_2^*]&=\Delta\,(\varepsilon_x^0\,dG)\,M_4\,[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)];
\end{aligned}
$$

$$
(10.23)\qquad \begin{aligned}
L[\Phi_1^{**}]&=\Delta\,(\varepsilon_y^0\,dG)\,M_2\,[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)],\\
L[\Phi_2^{**}]&=\Delta\,(\varepsilon_y^0\,dG)\,M_5\,[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)];
\end{aligned}
$$

$$
(10.24)\qquad \begin{aligned}
L[\Phi_1^{***}]&=\Delta\,(\gamma_{xy}^0 dG)\,M_3\,[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)],\\
L[\Phi_2^{***}]&=\Delta\,(\gamma_{xy}^0 dG)\,M_6\,[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)].
\end{aligned}
$$

Zatem znalezienie naprężeń i przemieszczeń wywołanych przez odkształcenia początkowe, działające na pewnym obszarze G tarczy, sprowadza się do rozwiązania układu równań (10.12)-(10.14) lub (10.22)-(10.24) przy określonych warunkach brzegowych, obliczenia z otrzymanych stąd funkcji naprężeń lub przemieszczeń składowych tensora naprężeń i wektora przemieszczenia (funkcji Greena zagadnienia) i wykonania na nich operacji splotu postaci (10.7) i (10.8). Oczywiście można najpierw wykonać tę ostatnią operację na funkcjach naprężeń czy przemieszczeń, a po scałkowaniu wyznaczyć z nich naprężenia i przemieszczenia.

W następnych paragrafach omówimy otrzymywanie funkcji Greena dla najprostszych kształtów tarczy: tarczy nieograniczonej, półpłaszczyzny tarczowej i pasma tarczowego.

11. Przypadek tarczy nieograniczonej

Zaczniemy od wyznaczenia funkcji naprężeń F^* i odpowiadających jej naprężeń σ_x^*, σ_y^*, τ_{xy}^*, wywołanych w nieograniczonej tarczy przez jądro sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_x^0\, dG)$, działające w punkcie (ξ, η). Na naprężenia i przemieszczenia nakładamy warunek zerowania się w nieskończoności. Mamy więc do rozwiązania równanie (10.12).

Funkcję $F^*(x, y)$ jako rzeczywistą przedstawimy w postaci

$$F^*(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{F^*}}(\varkappa, \lambda)\, e^{i(\varkappa x+\lambda y)}\, d\lambda, \tag{11.1}$$

gdzie

$$\widetilde{\widetilde{F^*}}(\varkappa, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, y)\, e^{-i(\varkappa x+\lambda y)}\, dx\, dy.$$

Podstawiając $F^*(x, y)$ według (11.1) do równania (10.12) i wyrażając jego prawą stronę w odpowiedni sposób przez całkę Fouriera, otrzymamy

$$F^*(x, y) = \frac{(\varepsilon_x^0\, dG)}{2\pi^2 a_{11}} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{i[\varkappa(x-\xi)+\lambda(y-\eta)]}}{(\lambda-\varkappa\mu_1)(\lambda-\varkappa\mu_2)(\lambda-\varkappa\bar{\mu}_1)(\lambda-\varkappa\bar{\mu}_2)}\, d\lambda. \tag{11.2}$$

Tutaj przez μ_j, $\bar{\mu}_j$, $(j = 1, 2)$ oznaczono pierwiastki równania charakterystycznego

$$a_{11}\,\mu^4 - 2a_{16}\,\mu^3 + (2a_{12}+a_{66})\,\mu^2 - 2a_{26}\,\mu + a_{22} = 0. \tag{11.3}$$

Pierwiastki te poza czterema przypadkami granicznymi, których w pracy nie rozpatrujemy, nie mogą być rzeczywiste, [9], i możemy je tak ponumerować, że

$$\operatorname{Im}\mu_j > 0, \quad j = 1, 2. \tag{11.4}$$

Rozważamy przypadek gdy $\mu_1 \neq \mu_2$. Rozwiązanie dla przypadku pierwiastków równych otrzymuje się z wyprowadzonych niżej rozwiązań przez przejście do granicy przy $\mu_1 \to \mu_2$.

Rozkładając wyrażenie podcałkowe w (11.2) na ułamki proste uzyskamy

$$F^*(x, y) = \frac{(\varepsilon_x^0\, dG)}{2\pi^2 a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty \frac{e^{i\varkappa(x-\xi)}}{\varkappa}\, d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_j\mu_j^2}{\lambda-\varkappa\mu_j} + \frac{\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2}{\lambda-\varkappa\bar{\mu}_j}\right) e^{i\lambda(y-\eta)}\, d\lambda, \tag{11.5}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= [(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_1)(\mu_1-\bar{\mu}_2)]^{-1},\\ A_2 &= [(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\bar{\mu}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)]^{-1}. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Dalej, uwzględniając (11.4) nie trudno sprawdzić, że dla $\varkappa > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_j\mu_j^2}{\lambda-\varkappa\mu_j}+\frac{\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2}{\lambda-\varkappa\bar{\mu}_j}\right)e^{i\lambda(y-\eta)}\,d\lambda=\begin{cases}2\pi iA_j\mu_j^2\,e^{i\varkappa\mu_j(y-\eta)} & \text{dla } y>\eta,\\ i\pi\,(A_j\mu_j^2-\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2) & \text{dla } y=\eta,\\ -2\pi i\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2\,e^{i\varkappa\bar{\mu}_j(y-\eta)} & \text{dla } y<\eta.\end{cases}$$

Powyższe całki zostały obliczone w sensie wartości głównej Cauchy'ego (por. [2]). Stąd

$$(11.7)\qquad \int_0^{\infty}\frac{e^{i\varkappa(x-\xi)}}{\varkappa}\,d\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_j\mu_j^2}{\lambda-\varkappa\mu_j}+\frac{\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2}{\lambda-\varkappa\bar{\mu}_j}\right)e^{i\lambda(y-\eta)}\,d\lambda=$$

$$=\begin{cases}2\pi iA_j\mu_j^2\lim\limits_{\varepsilon\to0}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\varkappa}e^{i\varkappa(z_j-\zeta_j)}\,d\varkappa & \text{dla } y>\eta,\\ \pi i(A_j\mu_j^2-\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2)\lim\limits_{\varepsilon\to0}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\varkappa}e^{i\varkappa(x-\xi)}\,d\varkappa & \text{dla } y=\eta,\\ -2\pi i\bar{A}_j\bar{\mu}_j^2\lim\limits_{\varepsilon\to0}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\varkappa}e^{i\varkappa(\bar{z}_j-\bar{\zeta}_j)}\,d\varkappa & \text{dla } y<\eta,\end{cases}$$

gdzie z_j i ζ_j oznaczają zmienne zespolone (w rozdziale 1 oznaczone jako z_j^*, ζ_j^*)

$$(11.8)\qquad z_j=x+\mu_j y,\qquad \zeta_j=\xi+\mu_j\eta,\qquad j=1,2.$$

Wydzielając w wyrażeniach stojących po prawej stronie zależności (11.7) części skończone w sposób podobny do omówionego przez H. Zorskiego, [31], ostatecznie otrzymamy dla funkcji naprężeń, w przypadku działania jądra sprężystego odkształcenia ($\varepsilon_x^0\,dG$), wzór

$$(11.9)\qquad F^*(x,y)=K_1\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}iA_j\mu_j^2\ln(z_j-\zeta_j),$$

przy czym

$$(11.10)\qquad K_1=-\frac{(\varepsilon_x^0\,dG)}{\pi a_{11}}.$$

Odpowiadające tej funkcji naprężeń składowe tensora naprężeń, uzyskane z F^* za pomocą związków (10.9), przyjmują postać

$$(11.11)\qquad \begin{gathered}\sigma_x^*=-K_1\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\frac{iA_j\mu_j^4}{(z_j-\zeta_j)^2},\qquad \sigma_y^*=-K_1\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\frac{iA_j\mu_j^2}{(z_j-\zeta_j)^2},\\ \tau_{xy}^*=K_1\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\frac{iA_j\mu_j^3}{(z_j-\zeta_j)^2}.\end{gathered}$$

W ten sam sposób obliczamy funkcje naprężeń F^{**} i F^{***} spełniające, odpowiednio, równania różniczkowe (10.13) i (10.14), dla przypadków gdy w punkcie (ξ, η) tarczy nieograniczonej działają jądra $(\varepsilon_y^0\, dG)$ i $(\gamma_{xy}^0\, dG)$. Ostatecznie

(11.12) $$F^{**}(x, y) = K_2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} iA_j \ln(z_j - \zeta_j),$$

(11.13) $$F^{***}(x, y) = K_3 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} iA_j \mu_j \ln(z_j - \zeta_j),$$

gdzie

(11.14) $$K_2 = -\frac{(\varepsilon_y^0\, dG)}{\pi a_{11}}, \quad K_3 = \frac{(\gamma_{xy}^0\, dG)}{\pi a_{11}},$$

zaś pozostałe oznaczenia są takie, jak podano wyżej. Stąd, wykonując różniczkowanie określone wzorami (10.9), otrzymamy dla składowych tensora naprężeń $\sigma_x^{**}, \sigma_y^{**}, \tau_{xy}^{**}$ oraz $\sigma_x^{***}, \sigma_y^{***}, \tau_{xy}^{***}$ wzory postaci (11.11), do których wystarczy podstawić zamiast K_1, A_j odpowiednio $K_2, A_j \mu_j^{-2}$ oraz $K_3, A_j \mu_j^{-1}$.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia składowych wektora przemieszczenia u^*, v^* występujących w nieograniczonej tarczy pod wpływem jądra sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_x^0\, dG)$ przyłożonego w punkcie (ξ, η). W tym celu obliczymy najpierw funkcje przemieszczeń Φ_1^*, Φ_2^*, spełniające równania (10.22).

Wyrażając funkcje Φ_1^*, Φ_2^* oraz prawe strony równań (10.22) przez całki Fouriera postaci (11.1), otrzymamy

$$\Phi_1^*(x, y) = \frac{\Delta\,(\varepsilon_x^0\, dG)}{2\pi^2 a_{11}} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\varkappa B_{11} + \lambda B_{16})\, e^{i[\varkappa(x-\xi)+\lambda(y-\eta)]}}{(\lambda - \varkappa\mu_1)(\lambda - \varkappa\mu_2)(\lambda - \varkappa\bar{\mu}_1)(\lambda - \varkappa\bar{\mu}_2)}\, d\lambda,$$

$$\Phi_2^*(x, y) = \frac{\Delta\,(\varepsilon_x^0\, dG)}{2\pi^2 a_{11}} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\varkappa B_{16} + \lambda B_{12})\, e^{i[\varkappa(x-\xi)+\lambda(y-\eta)]}}{(\lambda - \varkappa\mu_1)(\lambda - \varkappa\mu_2)(\lambda - \varkappa\bar{\mu}_1)(\lambda - \varkappa\bar{\mu}_2)}\, d\lambda.$$

Stąd

(11.15) $$\Phi_n^*(x, y) = -\frac{\Delta K_1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty \frac{i d\varkappa}{\varkappa^2} \left(\frac{A_j b_{jn}^*}{\lambda - \varkappa\mu_j} + \frac{\bar{A}_j \bar{b}_{jn}^*}{\lambda - \varkappa\bar{\mu}_j} \right) e^{i[\varkappa(x-\xi)+\lambda(y-\eta)]}\, d\lambda,$$

$$n = 1, 2,$$

gdzie

(11.16) $$b_{j1}^* = B_{11} + \mu_j B_{16}, \quad b_{j2}^* = B_{16} + \mu_j B_{12}, \quad j = 1, 2.$$

Zatem

$$\Phi_n^* = \frac{\Delta K_1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{i\varkappa(x-\xi)}}{\varkappa^2}\, d\varkappa \begin{cases} 2A_j b_{jn}^* e^{i\varkappa\mu_j(y-\eta)} & \text{dla} \quad y > \eta, \\ A_j b_{jn}^* - \bar{A}_j \bar{b}_{jn}^* & \text{dla} \quad y = \eta, \\ -2\bar{A}_j \bar{b}_{jn}^* e^{i\varkappa\bar{\mu}_j(y-\eta)} & \text{dla} \quad y < \eta. \end{cases}$$

Dalej, całkując przez części i wydzielając z otrzymanych wyrażeń części skończone podobnie jak wyżej, ostatecznie dla funkcji Φ_n^* dostaniemy

$$\Phi_n^*(x,y) = -\Delta K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} iA_j b_{jn}^* (z_j - \zeta_j) \ln (z_j - \zeta_j), \quad n = 1, 2. \tag{11.17}$$

Mając obliczone funkcje przemieszczeń Φ_1^* i Φ_2^* możemy wyznaczyć składowe wektora przemieszczenia u^*, v^* według wzorów (10.20). Po uwzględnieniu określeń (10.18) oraz zależności (10.16) i (11.16) otrzymamy

$$u^* = K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j^2 p_j}{z_j - \zeta_j}, \quad v^* = K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j q_j}{z_j - \zeta_j}, \tag{11.18}$$

gdzie wprowadzono skrótowe oznaczenia

$$p_j = a_{11}\mu_j^2 - a_{16}\mu_j + a_{12}, \quad q_j = a_{12}\mu_j^2 - a_{26}\mu_j + a_{22}, \quad j = 1, 2. \tag{11.19}$$

W ten sam sposób możemy obliczyć funkcje przemieszczeń Φ_n^{**}, Φ_n^{***} $(n = 1, 2)$, stanowiące rozwiązania równań (10.23) i (10.24), a odnoszące się do przypadków, gdy w punkcie (ξ, η) nieograniczonej tarczy działają jądra sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_y^0 dG)$ i $(\gamma_{xy}^0 dG)$ odpowiednio. Są one kształtu (11.17), gdzie należy podstawić zamiast K_1, b_{jn}^* odpowiednio w wyrażeniach dla Φ_n^{**} wielkości K_2 i b_{jn}^{**}, w wyrażeniach zaś dla Φ_n^{***} wielkości $-K_3$ i b_{jn}^{***}, przy czym

$$b_{j1}^{**} = B_{12} + \mu_j B_{26}, \quad b_{j2}^{**} = B_{26} + \mu_j B_{22},$$

$$b_{j1}^{***} = B_{16} + \mu_j B_{66}, \quad b_{j2}^{***} = B_{66} + \mu_j B_{26}, \quad j = 1, 2,$$

zaś K_2, K_3 są określone za pomocą wzorów (11.14).

Natomiast składowe wektora przemieszczenia $u^{**}, v^{**}, u^{***}, v^{***}$ przyjmują postać

$$u^{**} = K_2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j p_j}{z_j - \zeta_j}, \quad v^{**} = K_2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j q_j}{\mu_j (z_j - \zeta_j)}, \tag{11.20}$$

$$u^{***} = K_3 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j p_j}{z_j - \zeta_j}, \quad v^{***} = K_3 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j q_j}{z_j - \zeta_j}. \tag{11.21}$$

Otrzymane powyżej rozwiązania szczególne równań (10.12)-(10.14) oraz (10.22)-(10.24) stanowią części osobliwe funkcji naprężeń i funkcji przemieszczeń. Mogą one służyć do konstruowania funkcji Greena dla zagadnień dystorsyjnych tarcz anizotropowych skończonych lub nieskończonych dowolnego kształtu. Wtedy należy do nich dodać części regularne rozwiązań takie, by suma części osobliwej i regularnej spełniała dane warunki na brzegu tarczy. W następnych paragrafach otrzymamy w ten sposób funkcje Greena dla półpłaszczyzny i pasma tarczowego o brzegach wolnych od naprężeń, bądź utwierdzonych.

Warto również zaznaczyć, że ze względu na formalne podobieństwo równania zginanej płyty anizotropowej i równań (10.12)-(10.14) oraz (10.22)-(10.24) wyprowadzone wyżej rozwiązania można otrzymać z odpowiednich rozwiązań osobliwych dla płyt, podanych przez J. Mossakowskiego, [13], (por. również p. 7 tej pracy).

Mianowicie, równanie różniczkowe powierzchni ugięcia cienkiej płyty anizotropowej, obciążonej w punkcie (ξ, η) siłą skupioną P, ma postać [por. (1.5)]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+ \tag{11.22}$$
$$+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=P\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta),$$

gdzie D_{ik} są stałymi współczynnikami. Zatem funkcje

$$F^*=-\frac{(\varepsilon_x^0 dG)}{P}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad F^{**}=-\frac{(\varepsilon_y^0 dG)}{P}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad F^{***}=\frac{(\gamma_{xy}^0 dG)}{P}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \tag{11.23}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^*&=\frac{\Delta(\varepsilon_x^0 dG)}{P}M_1[w],\quad \Phi_2^*=\frac{\Delta(\varepsilon_x^0 dG)}{P}M_4[w],\quad \Phi_1^{**}=\frac{\Delta(\varepsilon_y^0 dG)}{P}M_2[w],\\ \Phi_2^{**}&=\frac{\Delta(\varepsilon_y^0 dG)}{P}M_5[w],\quad \Phi_1^{***}=\frac{\Delta(\gamma_{xy}^0 dG)}{P}M_3[w],\quad \Phi_2^{***}=\frac{\Delta(\gamma_{xy}^0 dG)}{P}M_6[w]\end{aligned} \tag{11.24}$$

mają z dokładnością do części regularnej te same osobliwości co rozwiązanie osobliwe równania (11.22). Wykonując na rozwiązaniu osobliwym $w(x, y; \xi, \eta)$, podanym przez J. Mossakowskiego lub na innej drodze wyprowadzonym w p. 7, operacje różniczkowania występujące w związkach (11.23) i (11.24) i zastępując formalnie D_{22} przez a_{11} oraz pierwiastki równania charakterystycznego (2.2) przez pierwiastki równania (11.3) i odrzucając nieistotne stałe, otrzymujemy rozwiązania osobliwe opisane powyżej. Można również otrzymać bezpośrednio powyższe rozwiązania osobliwe z rozwiązań osobliwych dla płyt anizotropowych obciążonych odpowiednimi momentami albo bimomentami skupionymi (por. p. 7, rozdział 1).

Podstawiając do wyżej wypisanych równań i wzorów

$$a_{16}=a_{26}=0,\quad a_{11}=\frac{1}{E_1},\quad a_{22}=\frac{1}{E_2},\quad a_{66}=\frac{1}{G_{12}},\quad a_{12}=\frac{-\nu_{21}}{E_2}=\frac{-\nu_{12}}{E_1} \tag{11.25}$$

(oznaczenia według S. G. Lechnickiego, [9]) oraz $\mu_1 = i\beta_1$, $\mu_2 = i\beta_2$, otrzymamy odpowiednie równania i ich rozwiązania dla tarczy z materiału ortotropowego 1 typu w układzie współrzędnych, którego osie są równoległe do głównych kierunków sprężystych. Przyjmując zaś stałe według (11.25) i kładąc $\mu_1 = \alpha+i\beta$, $\mu_2 = -\alpha+i\beta$ dostaniemy rozwiązania dla przypadku ortotropii 3 typu. Wreszcie obliczając granice rozwiązań dla tarczy ortotropowej 1 typu przy $\beta_1 \to \beta_2$, uzyskamy rozwiązania dla tarczy ortotropowej 2 typu. Przyjmując w tych ostatnich

$$E_1=E_2=E,\quad a_{12}=-\frac{\nu}{E},\quad a_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \beta_2=1 \tag{11.26}$$

otrzymujemy rezultaty dla tarczy izotropowej identyczne z obliczonymi przez W. Nowackiego, [18].

12. Półpłaszczyzna tarczowa

12.1. Półpłaszczyzna o brzegu swobodnym. Rozważmy obecnie tarczę anizotropową w kształcie półpłaszczyzny, w której w dowolnym punkcie wewnętrznym działa jądro sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_x^0\, dG)$. Przyjmijmy, że tarcza zajmuje obszar $y \geqslant 0$, zaś jądro działa w punkcie (ξ, η), $\eta > 0$. Zakładamy, że brzeg półpłaszczyzny jest nieobciążony, zatem warunki brzegowe są następujące

$$\sigma_{yp}^*(x, 0) \equiv 0, \qquad \tau_{xyp}^*(x, 0) \equiv 0, \tag{12.1.1}$$

gdzie indeksem p oznaczamy składowe tensora naprężeń w półpłaszczyźnie, powiązane z odpowiadającą im funkcją naprężeń F_p^*, zgodnie z (10.9), za pomocą zależności

$$\sigma_{xp}^* = \frac{\partial^2 F_p^*}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yp}^* = \frac{\partial^2 F_p^*}{\partial x^2}, \quad \tau_{xyp}^* = -\frac{\partial^2 F_p^*}{\partial x\, \partial y}. \tag{12.1.2}$$

Ponadto naprężenia muszą dążyć do zera przy $|z| = |x+iy| \to \infty$.

Funkcji naprężeń F_p^* będziemy poszukiwali w postaci sumy

$$F_p^* = F^* + F_0^*, \tag{12.1.3}$$

gdzie F^* jest funkcją naprężeń dla tarczy nieograniczonej, poddanej w punkcie (ξ, η) działaniu jądra $(\varepsilon_x^0\, dG)$ — przedstawia ją wzór (11.9), zaś F_0^* oznacza takie rozwiązanie równania jednorodnego (10.12), żeby były spełnione warunki brzegowe (12.1.1).

Ogólne rozwiązanie F_0^* równania jednorodnego (10.12) możemy przedstawić w postaci całki Fouriera (por. [3])

$$F_0^*(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty [C_j(\lambda)\, e^{i\lambda z_j} + D_j(\lambda)\, e^{i\lambda \bar{z}_j}]\, d\lambda,$$

gdzie z_1, z_2 są zmiennymi zespolonymi, określonymi przez (11.8). Ze względu na zerowanie się naprężeń w nieskończoności i warunek (11.4) musimy przyjąć $D_j(\lambda) \equiv \equiv 0$, $j = 1, 2$. Tak więc funkcja naprężeń F_0^* ma postać

$$F_0^*(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty C_j(\lambda)\, e^{i\lambda z_j} d\lambda. \tag{12.1.4}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sigma_{y0}^*(x, 0) &= \frac{-1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty \lambda^2 C_j\, e^{i\lambda x}\, d\lambda, \\ \tau_{xy0}^*(x, 0) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty \lambda^2 \mu_j C_j\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \end{aligned} \tag{12.1.5}$$

Przedstawiając naprężenia $\sigma_y^*(x, 0)$, $\tau_{xy}^*(x, 0)$ za pomocą całek Fouriera zgodnie z (11.11) i (11.8) otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_y^*(x, 0) &= -K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j^2}{(x-\zeta_j)^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \varphi^*(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda, \\ \tau_{xy0}^*(x, 0) &= K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j^3}{(x-\zeta_j)^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \psi^*(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \tag{12.1.6}$$

przy czym

$$\varphi^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y^*(x, 0)\, e^{-i\lambda x} dx, \qquad \psi^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}^*(x, 0)\, e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{12.1.7}$$

Żądając aby sumy naprężeń $\sigma_y^*(x, 0) + \sigma_{y0}^*(x, 0)$, $\tau_{xy}^*(x, 0) + \tau_{xy0}^*(x, 0)$ były tożsamościowo równe zeru, dostaniemy dla $C_1(\lambda)$ i $C_2(\lambda)$ układ dwóch równań, po których rozwiązaniu i podstawieniu wyników do (12.1.4) funkcja naprężeń F_0^* wyrazi się następująco:

$$F_0^* = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} [-(\mu_2 \varphi^* + \psi^*)\, e^{i\lambda z_1} + (\mu_1 \varphi^* + \psi^*)] e^{i\lambda z_2}\, d\lambda. \tag{12.1.8}$$

Obliczając $\varphi^*(\lambda)$ i $\psi^*(\lambda)$ ze wzorów (12.1.7) i (12.1.6) uzyskamy

$$\varphi^*(\lambda) = -K_1\, i\lambda\pi \sum_{j=1}^{2} \bar{A}_j^2 \bar{\mu}_j^2\, e^{-i\lambda\bar{\zeta}_j}, \qquad \psi^*(\lambda) = K_1\, i\lambda\pi \sum_{j=1}^{2} \bar{A}_j \bar{\mu}_j^3\, e^{-i\lambda\bar{\zeta}_j},$$

a następnie postępując podobnie jak w p. 11 (por. [31] lub [3]) i biorąc pod uwagę zależności (11.6), mamy ostatecznie

$$F_0^*(x, y) = \frac{K_1}{|\mu_1 - \mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} A_{js} \ln (z_j - \bar{\zeta}_s), \tag{12.1.9}$$

gdzie wprowadzono skrótowe oznaczenie

$$A_{js} = \frac{i(-1)^{j+s} \bar{\mu}_s^2}{\bar{\mu}_s - \mu_j}. \tag{12.1.10}$$

Stąd zaś naprężenia odpowiadające funkcji $F_0^*(x, y)$ są dane za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}^* &= \frac{-K_1}{|\mu_1 - \mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\mu_j^2 A_{js}}{(z_j - \bar{\zeta}_s)^2}, \\ \sigma_{y0}^* &= \frac{-K_1}{|\mu_1 - \mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{A_{js}}{(z_j - \bar{\zeta}_s)^2}, \\ \tau_{xy0}^* &= \frac{K_1}{|\mu_1 - \mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\mu_j A_{js}}{(z_j - \bar{\zeta}_s)^2}. \end{aligned} \tag{12.1.11}$$

Sumy odpowiednich składowych tensora naprężeń (12.1.11) i (11.11) opisują stan naprężenia w półpłaszczyźnie tarczowej o brzegu swobodnym, poddanej w punkcie (ξ, η) działaniu jądra sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_x^0\, dG)$.

Natomiast składowe wektora przemieszczenia dla tego przypadku otrzymamy w postaci sum

$$u_p^* = u^* + u_0^*, \qquad v_p^* = v^* + v_0^*, \tag{12.1.12}$$

gdzie u^*, v^* są przedstawione wzorami (11.8), zaś u_0^*, v_0^* możemy wyrazić przez funkcję naprężeń F_0^* za pomocą znanych zależności, (por. [9], [3])

$$\begin{aligned} u_0^* &= a_{11}\int \frac{\partial^2 F_0^*}{\partial y^2}dx + a_{12}\frac{\partial F_0^*}{\partial x} - a_{16}\frac{\partial F_0^*}{\partial y} - c_0 y + a_0, \\ v_0^* &= a_{12}\frac{\partial F_0^*}{\partial y} + a_{22}\int \frac{\partial^2 F_0^*}{\partial x^2}dy - a_{26}\frac{\partial F_0^*}{\partial x} + c_0 x + b_0. \end{aligned} \tag{12.1.13}$$

(Związki fizyczne (10.1) między odkształceniami $\varepsilon_{x0}^*, \varepsilon_{y0}^*, \gamma_{xy0}^*$ i naprężeniami $\sigma_{x0}^*, \sigma_{y0}^*, \tau_{xy0}^*$ nie zawierają już odkształceń początkowych, gdyż te zostały uwzględnione przy obliczaniu części osobliwych przemieszczeń u^*, v^*). Tutaj a_0, b_0, c_0 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, a wyrazy z tymi stałymi opisują przemieszczenia ciała jako bryły sztywnej. W szczególności możemy je przyjąć za zera, gdyż nie mają wpływu na stan naprężenia.

Zatem u_0^*, v_0^* wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} u_0^* &= \frac{K_1}{|\mu_1 - \mu_2|^2}\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{A_{js}p_j}{z_j - \bar{\zeta}_s}, \\ v_0^* &= \frac{K_1}{|\mu_1 - \mu_2|^2}\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{A_{js}q_j}{(z_j - \bar{\zeta}_s)}, \end{aligned} \tag{12.1.14}$$

przy czym p_j i q_j określają wzory (11.19).

W ten sam sposób można obliczyć funkcje naprężeń F_p^{**} i F_p^{***} oraz odpowiadające im naprężenia i przemieszczenia dla przypadków, gdy w punkcie (ξ, η) półpłaszczyzny działają jądra $(\varepsilon_y^0\, dG)$ i $(\gamma_{xy}^0\, dG)$. Są one sumami

$$\begin{aligned} F_p^{**} &= F^{**} + F_0^{**}, & F_p^{***} &= F^{***} + F_0^{***}, \\ \sigma_{ijp}^{**} &= \sigma_{ij}^{**} + \sigma_{ij0}^{**}, & \sigma_{ijp}^{***} &= \sigma_{ij}^{***} + \sigma_{ij0}^{***}, \\ u_{jp}^{**} &= u_j^{**} + u_{j0}^{**}, & u_{jp}^{***} &= u_j^{***} + u_{j0}^{***}, \qquad i,j = 1,2, \end{aligned} \tag{12.1.15}$$

gdzie wielkości po prawych stronach bez indeksu zero są częściami osobliwymi, stanowiącymi odpowiednie rozwiązania dla tarczy nieograniczonej, obliczonymi w poprzednim paragrafie, natomiast F_0^{**}, F_0^{***} otrzymuje się ze wzoru (12.1.9), jeżeli podstawić w nim zamiast K_1 i A_{js} w wyrażeniu dla F_0^{**} wielkości K_2 i $A_{js}\bar{\mu}_s^{-2}$ oraz w wyrażeniu dla F_0^{***} wielkości K_3 i $A_{js}\bar{\mu}_s^{-1}$ odpowiednio. Stosując te podstawienia we wzorach (12.1.11) oraz (12.1.14) otrzymamy wyrażenia dla σ_{ij0}^{**}, σ_{ij0}^{***} oraz u_{j0}^{**} i u_{j0}^{***}.

Rozwiązanie dla przypadku, gdy działa jądro o wszystkich trzech składowych, jest superpozycją trzech obliczonych stanów naprężenia i przemieszczenia. Dokonując odpowiednich podstawień i przejść granicznych, omówionych przy końcu p. 11, możemy stąd otrzymać rozwiązania dla półpłaszczyzn ortotropowej i izotropowej.

12.2. Półpłaszczyzna o brzegu utwierdzonym. Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem naprężeń i przemieszczeń w półpłaszczyźnie tarczowej zajmującej jak poprzednio obszar $y \geqslant 0$, której brzeg $y = 0$ jest utwierdzony, tzn. przemieszczenia u_p i v_p spełniają warunki

$$u_p(x, 0) \equiv 0, \quad v_p(x, 0) \equiv 0. \tag{12.2.1}$$

Można by rozwiązanie zagadnienia otrzymać przy pomocy funkcji przemieszczeń Φ_1 i Φ_2, omówionych w p. 10. Prościej jednak będzie skorzystać z funkcji naprężeń.

Zaczniemy od przypadku, gdy w punkcie (ξ, η) półpłaszczyzny działa tylko jądro $(\varepsilon_x^0\, dG)$. Funkcję naprężeń F_p^* przedstawimy jak w p. 12.1 w postaci sumy (12.1.3), a F_0^* w postaci (12.1.4). Stąd dla części regularnych składowych wektora przemieszczenia u_0^*, v_0^* zgodnie z (12.1.13) otrzymamy

$$\begin{aligned} u_0^* &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty i\lambda C_j(\lambda)\, p_j\, e^{i\lambda z_j}\, d\lambda - c_0 y + a_0, \\ v_0^* &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty \frac{i\lambda C_j(\lambda)}{\mu_j}\, q_j\, e^{i\lambda z_j}\, d\lambda + c_0 x + b_0. \end{aligned} \tag{12.2.2}$$

Wartości brzegowe części osobliwych przemieszczeń u^*, v^* [funkcje te są dane przez wzory (11.18)] również przedstawimy za pomocą całek Fouriera

$$u^*(x, 0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \tilde{u}^* e^{i\lambda x} d\lambda, \qquad v^*(x, 0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \tilde{v}^* e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{12.2.3}$$

Podstawiając (12.2.2) i (12.2.3) do warunków brzegowych (12.2.1) i biorąc pod uwagę, że $u_p^* = u^* + u_0^*$, $v_p^* = v^* + v_0^*$, otrzymamy

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0, \tag{12.2.4}$$

$$C_1 = \frac{i\mu_1(q_2 \tilde{u}^* - \mu_2 p_2 \tilde{v}^*)}{\lambda(\mu_1 p_1 q_2 - \mu_2 p_2 q_1)}, \qquad C_2 = \frac{i\mu_2(\mu_1 p_1 \tilde{v}^* - q_1 \tilde{u}^*)}{\lambda(\mu_1 p_1 q_2 - \mu_2 p_2 q_1)}. \tag{12.2.5}$$

Dalej, uwzględniając (11.18) mamy

$$\begin{aligned} \widetilde{u^*} &= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x, 0)\, e^{-i\lambda x}\, dx = -\pi K_1 \sum_{j=1}^{2} \bar{A}_j \bar{\mu}_j^2 \bar{p}_j\, e^{-i\lambda \bar{\zeta}_j}, \\ \widetilde{v^*} &= \int_{-\infty}^{\infty} v^*(x, 0)\, e^{-i\lambda x}\, dx = -\pi K_1 \sum_{j=1}^{2} \bar{A}_j \bar{\mu}_j \bar{q}_j\, e^{-i\lambda \bar{\zeta}_j}. \end{aligned} \tag{12.2.6}$$

Zatem ostatecznie

$$F_0^* = K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \bar{A}_s \bar{\mu}_s \alpha_{js} \ln (z_j - \bar{\zeta}_s), \tag{12.2.7}$$

$$u_0^* = K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{p_j \bar{A}_s \bar{\mu}_s \alpha_{js}}{z_j - \bar{\zeta}_s}, \quad v_0^* = K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{q_j \bar{A}_s \bar{\mu}_s \alpha_{js}}{\mu_j (z_j - \bar{\zeta}_s)}, \tag{12.2.8}$$

gdzie za pomocą α_{js} oznaczono wyrażenia

$$\alpha_{1s} = \frac{i\mu_1 (\bar{\mu}_s \bar{p}_s q_2 - \mu_2 p_2 \bar{q}_s)}{\mu_1 p_1 q_2 - \mu_2 p_2 q_1}, \quad \alpha_{2s} = \frac{i\mu_2 (\mu_1 p_1 \bar{q}_s - \bar{\mu}_s \bar{p}_s q_1)}{\mu_1 p_1 q_2 - \mu_s p_2 q_1}. \tag{12.2.9}$$

Części regularne składowych tensora naprężeń obliczamy w znany sposób różniczkując funkcję naprężeń F_0^*. Przyjmują one postać

$$\begin{gathered} \sigma_{x0}^* = -K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\bar{A}_s \bar{\mu}_s \mu_j^2 \alpha_{js}}{(z_j - \bar{\zeta}_s)^2}, \quad \sigma_{y0}^* = -K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\bar{A}_s \bar{\mu}_s \alpha_{js}}{(z_j - \bar{\zeta}_s)^2}, \\ \tau_{xy0}^* = K_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\bar{A}_s \bar{\mu}_s \mu_j \alpha_{js}}{(z_j - \bar{\zeta}_s)^2}. \end{gathered} \tag{12.2.10}$$

Rozwiązania dla półpłaszczyzny o brzegu utwierdzonym i znajdującej się pod działaniem jąder sprężystego odkształcenia ($\varepsilon_y^0\, dG$) i ($\gamma_{xy}^0\, dG$) otrzymamy podobnie przedstawiając odpowiednie wielkości w postaci sum (12.1.15). Końcowe wyrażenia dla funkcji naprężeń F_0^{**} i F_0^{***} są postaci (12.2.7), z tym że zamiast K_1 i $\bar{A}_s$ należy podstawić K_2 i $\bar{A}_s \bar{\mu}_s^{-2}$ oraz K_3 i $\bar{A}_s \bar{\mu}_s^{-1}$ odpowiednio. Z pomocą tychże podstawień ze wzorów (12.2.8) oraz (12.2.10) dostaniemy części regularne przemieszczeń i naprężeń.

13. Pasmo tarczowe

Rozważmy jeszcze tarczę anizotropową zajmującą obszar $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$, w której punkcie $(0, \eta)$ $(0 < \eta < a)$ działa jądro sprężystego odkształcenia ($\varepsilon_x^0\, dG$). Oznaczmy przez F_s^* funkcję naprężeń zagadnienia i przez σ_{xs}^*, σ_{ys}^*, τ_{xys}^* odpowiadające jej naprężenia. Dla pasma o brzegach wolnych od naprężeń mamy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{gathered} \sigma_{ys}^* (x, 0) \equiv 0, \quad \tau_{xys}^* (x, 0) \equiv 0, \\ \sigma_{ys}^* (x, a) \equiv 0, \quad \tau_{xys}^* (x, a) \equiv 0, \end{gathered} \tag{13.1}$$

natomiast F_s^* musi spełniać równanie (10.12), jeżeli po jego prawej stronie podstawimy $\xi = 0$.

Rozwiązanie przedstawimy w postaci sumy

$$F_s^* (x, y) = F_p^* (x, y) + F_1^* (x, y), \tag{13.2}$$

gdzie F_p^* jest odpowiednią funkcją Greena dla półpłaszczyzny obliczoną w p. 12.1

(we wzorach p. 12.1 należy podstawić $\xi = 0$), zaś F_1^* wyrazimy za pomocą całki Fouriera

$$F_1^* = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty [C_j(\lambda) e^{i\lambda z_j} + D_j(\lambda) e^{i\lambda \bar{z}_j}] \, d\lambda.$$

Po uwzględnieniu dwóch pierwszych warunków brzegowych (składowe tensora naprężeń pochodzące od funkcji F_p^* te dwa warunki już spełniają) funkcja naprężeń przyjmie postać

$$F_1^* = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty C_j [(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) e^{i\lambda \mu_j y} + (\bar{\mu}_2 - \mu_j) e^{i\lambda \bar{\mu}_1 y} + (\mu_j - \bar{\mu}_1) e^{i\lambda \bar{\mu}_2 y}] e^{i\lambda x} \, d\lambda. \tag{13.3}$$

Dwa pozostałe współczynniki $C_1(\lambda)$ i $C_2(\lambda)$ wyznaczymy z dwóch warunków (13.1) na brzegu $y = a$. W tym celu rozłożymy składowe tensora naprężeń $\sigma_{yp}^*(x, a)$, $\tau_{xyp}^*(x, a)$, które są sumami składników danych wzorami (11.11) i (12.1.11), w całki Fouriera

$$\begin{aligned} \sigma_{yp}^*(x, a) &= \sigma_y^*(x, a) + \sigma_{y0}^*(x, a) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda, \\ \tau_{xyp}^*(x, a) &= \tau_{xy}^*(x, a) + \tau_{xy0}^*(x, a) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \psi_1(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda, \end{aligned} \tag{13.4}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_y^*(x, a) + \sigma_{y0}^*(x, a)] e^{-i\lambda x} \, dx, \\ \psi_1(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\tau_{xy}^*(x, a) + \tau_{xy0}^*(x, a)] e^{-i\lambda x} \, dx, \end{aligned} \tag{13.5}$$

i podstawimy sumy odpowiednich naprężeń (13.4) i naprężeń otrzymanych przez zróżniczkowanie funkcji F_1^* według (10.9) do dwóch ostatnich tożsamości (13.1). Po wyznaczeniu niewiadomych $C_1(\lambda)$ i $C_2(\lambda)$ z uzyskanego w ten sposób układu równań algebraicznych i obliczeniu funkcji $\varphi_1(\lambda)$ i $\psi_1(\lambda)$ według wzorów (13.5) otrzymamy ostatecznie dla funkcji F_1^* wyrażenie

$$\begin{aligned} F_1^*(x, y) = -K_1 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda W^*(\lambda)} \, d\lambda \, \times \\ \times \{(\mu_1 \varphi_1^* + \psi_1^*) [(\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1) f(\mu_2, \mu_1) + (\bar{\mu}_1 - \mu_2) f(\bar{\mu}_2, \mu_1) + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) f(\bar{\mu}_1, \mu_1)] + \\ + (\mu_2 \varphi_1^* + \psi_1^*) [(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) f(\mu_1, \mu_2) + (\bar{\mu}_2 - \mu_1) f(\bar{\mu}_1, \mu_2) + (\mu_1 - \bar{\mu}_1) f(\bar{\mu}_2, \mu_2)] + \\ + (\bar{\mu}_1 \varphi_1^* + \psi_1^*) [(\mu_1 - \bar{\mu}_2) f(\mu_2, \bar{\mu}_1) + (\bar{\mu}_2 - \mu_2) f(\mu_1, \bar{\mu}_1) + (\mu_2 - \mu_1) f(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_1)] + \\ + (\bar{\mu}_2 \varphi_1^* + \psi_1^*) [(\bar{\mu}_1 - \mu_1) f(\mu_2, \bar{\mu}_2) + (\mu_2 - \bar{\mu}_1) f(\mu_1, \bar{\mu}_2) + (\mu_1 - \mu_2) f(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)]\}. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$W^*(\lambda) = (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)(\mu_2 - \mu_1)[e^{i\lambda(\mu_1+\mu_2)a} + e^{i\lambda(\bar{\mu}_1+\bar{\mu}_2)a}] +$$
$$+ (\mu_1 - \bar{\mu}_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2)[e^{i\lambda(\mu_1+\bar{\mu}_1)a} + e^{i\lambda(\mu_2+\bar{\mu}_2)a}] +$$
$$+ (\mu_1 - \bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_1 - \mu_2)[e^{i\lambda(\mu_1+\bar{\mu}_2)a} + e^{i\lambda(\mu_2+\bar{\mu}_1)a}],$$

$$\varphi_1^* = -\sum_{j=1}^{2} iA_j \mu_j^2 e^{i\lambda\mu_j(a-\eta)} + \frac{1}{(\mu_1-\mu_2)(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)} \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} A_{js} e^{i\lambda(\mu_j a - \bar{\mu}_s \eta)},$$

$$\psi_1^* = \sum_{j=1}^{2} iA_j \mu_j^3 e^{i\lambda\mu_j(a-\eta)} + \frac{1}{(\mu_1-\mu_2)(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)} \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} A_{js}\mu_j e^{i\lambda(\mu_j a - \bar{\mu}_s \eta)},$$

$$f(m,n) = e^{i\lambda(my+na)}.$$

Składowe tensora naprężeń σ_{x1}^*, σ_{y1}^*, τ_{xy1}^* obliczymy różniczkując według (10.9) funkcję naprężeń F_1^*, składowe zaś wektora przemieszczenia u_1^*, v_1^* stosując wzory w postaci (12.1.13).

W ten sam sposób otrzymuje się rozwiązania dla przypadków, gdy w punkcie $(0, \eta)$ pasma działają jądra sprężystego odkształcenia $(\varepsilon_y^0\, dG)$ oraz $(\gamma_{xy}^0\, dG)$. Oznaczając przez F_s^{**} i F_s^{***} odpowiadające im funkcje naprężeń, dostaniemy

(13.7) $$F_s^{**} = F_p^{**} + F_1^{**}, \qquad F_s^{***} = F_p^{***} + F_1^{***},$$

gdzie F_p^{**}, F_p^{***} są rozwiązaniami dla półpłaszczyzny poddanej działaniu odpowiednich jąder, opisanymi w p. 12.1 (z podstawieniem $\xi = 0$). Natomiast F_1^{**} i F_1^{***} są postaci (13.6), gdzie zamiast K_1, A_j, A_{js} należy podstawić w wyrażeniu dla F_1^{**} wielkości K_2, $A_j\mu_j^{-2}$, $A_{js}\bar{\mu}_s^{-2}$ oraz w wyrażeniu dla F_1^{***} wielkości K_3, $A_j\mu_j^{-1}$, $A_{js}\bar{\mu}_s^{-1}$ odpowiednio.

Przejścia do przypadków ciała ortotropowego i izotropowego wykonuje się w sposób opisany w poprzednich punktach. W analogicznych rozwiązaniach dla pasma izotropowego, wyprowadzonych przez W. Nowackiego, [18], została wyodrębniona inna część osobliwa również typu logarytmicznego.

Zupełnie podobnie, wykorzystując wyniki p. 12.2, znaleźć można rozwiązanie dla tarczy w kształcie pasma o brzegach utwierdzonych.

14. Tarcza anizotropowa o skończonych wymiarach

Rozpatrzymy obecnie tarczę skończoną, zajmującą dowolny obszar Γ płaszczyzny Oxy jedno- lub wielospójny. Niech, jak poprzednio, na pewnym obszarze $G \subset \Gamma$ tarczy dane będą odkształcenia początkowe $\varepsilon_x^0(x,y)$, $\varepsilon_y^0(x,y)$, $\gamma_{xy}^0(x,y)$ równe zeru poza obszarem G. Rozwiązanie zagadnienia zgodnie z p. 10 można sprowadzić do wyznaczenia funkcji Greena i obliczenia splotów postaci (10.7) i (10.8).

Rozważmy w celu uproszczenia zapisu przypadek, gdy w punkcie $(\xi, \eta) \in G$ działa jądro $(\varepsilon_x^0\, dG)$. Funkcję naprężeń $F_\Gamma^*(x, y; \xi, \eta)$ możemy przedstawić w postaci sumy

(14.1) $$F_\Gamma^* = F^* + F_2^*,$$

gdzie F^* jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (10.12), przedstawiającym funkcję naprężeń w tarczy nieograniczonej obliczoną w p. 11 [por. wzór (11.9)], zaś F_2^* jest takim rozwiązaniem równania jednorodnego (10.12), by naprężenia pochodzące od sumy (14.1) spełniały określone warunki brzegowe.

Gdy brzeg $\bar{\Gamma}$ (jeżeli obszar Γ jest wielospójny, $\bar{\Gamma}$ jest sumą konturów stanowiących brzeg obszaru Γ) jest wolny od naprężeń, warunki te możemy napisać następująco (por. [9]):

$$\begin{aligned} &\sigma_{x\Gamma}^* \cos(n, x) + \tau_{xy\Gamma}^* \cos(n, y) = 0\,, \\ &\tau_{xy\Gamma}^* \cos(n, x) + \sigma_{y\Gamma}^* \cos(n, y) = 0\,, \qquad \text{na } \bar{\Gamma}, \end{aligned} \tag{14.2}$$

przy czym n oznacza normalną zewnętrzną, skierowaną w prawo przy obchodzeniu brzegu w kierunku dodatnim.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned} X_n &= -\sigma_x^* \cos(n, x) - \tau_{xy}^* \cos(n, y) = -\frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial y} \cos(n, y)\,, \\ Y_n &= -\tau_{xy}^* \cos(n, x) - \sigma_y^* \cos(n, y) = \frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} \cos(n, y)\,, \end{aligned} \tag{14.3}$$

przy czym X_n, Y_n są znanymi już funkcjami, to zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia funkcji F_2^* spełniającej jednorodne równanie (10.12) i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &\sigma_{x2}^* \cos(n, x) + \tau_{xy2}^* \cos(n, y) = X_n\,, \\ &\tau_{xy2}^* \cos(n, x) + \sigma_{y2}^* \cos(n, y) = Y_n\,, \end{aligned} \tag{14.4}$$

a więc do pierwszego podstawowego zagadnienia dla tarczy anizotropowej.

Jeżeli brzeg $\bar{\Gamma}$ tarczy jest utwierdzony, to warunki brzegowe mają postać

$$u_\Gamma^* = 0\,, \quad v_\Gamma^* = 0 \quad \text{na} \quad \bar{\Gamma}, \tag{14.5}$$

czyli

$$u_2^* = -u^*\,, \quad v_2^* = -v^* \quad \text{na } \bar{\Gamma}, \tag{14.6}$$

gdzie u^*, v^* są znanymi funkcjami [por. (11.18)], mamy więc w tym przypadku do rozwiązania drugie podstawowe zagadnienie.

Tak samo przedstawia się sprawa rozwiązań dla dowolnej tarczy znajdującej się pod działaniem sprężystych jąder ($\varepsilon_y^0\, dG$) i ($\gamma_{xy}^0\, dG$). Wystarczy we wzorach tego punktu zastąpić wielkości opatrzone jedną gwiazdką, zgodnie z przyjętymi w tym rozdziale oznaczeniami, przez wielkości z dwiema lub trzema gwiazdkami.

W ten sposób przy rozwiązywaniu zagadnień dystorsyjnych dla tarcz anizotropowych można wykorzystać znane rozwiązania podstawowych zagadnień płaskich, którym poświęcono dotychczas pokaźną liczbę prac (por. np. [9, 23, 3, 6]).

Dotychczasowe rozważania rozdziału II dotyczyły płaskiego stanu naprężenia. Dla płaskiego stanu odkształcenia wyjściowe równania i otrzymane rozwiązania pozostaną w mocy, jeżeli wszędzie zamiast współczynników odkształcenia a_{jk} podstawimy zredukowane współczynniki β_{jk}, związane z a_{jk} za pomocą zależności, [9],

$$\beta_{jk} = a_{jk} - \frac{a_{j3}\, a_{k3}}{a_{33}}, \qquad j, k = 1, 2, 6 .$$

W tym przypadku zakładamy, że początkowe odkształcenia ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0 nie zmieniają się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny Oxy, a w odniesieniu do jąder sprężystego odkształcenia zamiast jąder punktowych mamy jądra liniowe przyłożone wzdłuż prostej $x = \xi$, $y = \eta$. Występującą wtedy dodatkowo składową σ_z tensora naprężeń możemy wyznaczyć przez znalezione składowe σ_x, σ_y, τ_{xy} lub przez funkcję naprężeń F w postaci

$$\sigma_z = -a_{33}^{-1}(a_{13}\,\sigma_x + a_{23}\,\sigma_y + a_{36}\,\tau_{xy}) = -a_{33}^{-1}\left(a_{13}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + a_{23}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - a_{36}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Można by tutaj również uwzględnić składową ε_z^0 odkształcenia początkowego (por. zakończenie następnego punktu).

15. Ustalone dystorsje termiczne

Szczególny przypadek omówionego w poprzednich punktach ogólnego zagadnienia dystorsyjnego stanowi problem ustalonych dystorsji termicznych. Rozważmy mianowicie tarczę anizotropową znajdującą się pod działaniem ustalonego pola temperatury. Przyjmijmy, że materiał tarczy wykazuje anizotropię zarówno sprężystą jak i termiczną, przy czym w każdym punkcie tarczy istnieje płaszczyzna symetrii sprężystej równoległa do płaszczyzny środkowej, którą wybierzemy za płaszczyznę Oxy układu współrzędnych. Jeżeli ograniczamy się do małych odkształceń, to uogólnione prawo Hooke'a można napisać w postaci, [21], [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\,\sigma_x + a_{12}\,\sigma_y + a_{16}\,\tau_{xy} + \alpha_1 T,\\ \varepsilon_y &= a_{12}\,\sigma_x + a_{22}\,\sigma_y + a_{26}\,\tau_{xy} + \alpha_2 T,\\ \gamma_{xy} &= a_{16}\,\sigma_x + a_{26}\,\sigma_y + a_{66}\,\tau_{xy} + \alpha_6 T, \end{aligned} \tag{15.1}$$

gdzie a_{jk} oznaczają współczynniki sprężystego odkształcenia, α_1, α_2 α_6 współczynniki termiczne odkształceń liniowych i kątowego, zaś $T = T(x, y)$ jest funkcją rozkładu temperatury. Pozostałe równania p. 10 a więc równania (10.2)-(10.4) pozostają bez zmian. Zatem do wyznaczenia naprężeń cieplnych wywołanych ustalonym polem temperatury $T(x, y)$ możemy zastosować metodę omówioną w p. 10. Rolę odkształceń początkowych ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0 grają tutaj odpowiednio $\alpha_1 T$, $\alpha_2 T$, $\alpha_6 T$.

Oznaczmy przez (TdG) jądro termosprężystego odkształcenia przyłożone w punkcie (ξ, η) tarczy. Oznacza to, że temperatura jest równa T na nieskończenie małym obszarze dG tarczy otaczającym punkt (ξ, η), a równa się zeru na zewnątrz tego obszaru. Ściślej, temperatura jest postaci $T\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)$. Pojęcie jądra termosprężystego odkształcenia wprowadzili J. N. GOODIER, [4], oraz B. SEN, [24].

Podstawiając we wzorach p. 11: $(\varepsilon_x^0\, dG) = (a_1\, TdG)$, $(\varepsilon_y^0\, dG) = (a_2\, TdG)$, $(\gamma_{xy}^0\, dG) = (a_6\, TdG)$ oraz dodając odpowiednie składowe tensora naprężeń i wektora przemieszczenia, oznaczone tam jedną, dwiema i trzema gwiazdkami, otrzymamy następujący rozkład naprężeń i przemieszczeń w nieograniczonej tarczy poddanej w punkcie (ξ, η) działaniu jądra (TdG):

$$
\begin{gathered}
\sigma_x^* = K \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j^2 r_j}{(z_j-\zeta_j)^2}, \qquad \sigma_y^* = K \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j r_j}{(z_j-\zeta_j)^2}, \\
\tau_{xy}^* = -K \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j \mu_j r_j}{(z_j-\zeta_j)^2};
\end{gathered} \tag{15.2}
$$

$$
u^* = -K \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j p_j r_j}{z_j-\zeta_j}, \qquad v^* = -K \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \frac{iA_j q_j r_j}{\mu_j (z_j-\zeta_j)}, \tag{15.3}
$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$
K = \frac{(TdG)}{\pi a_{11}}, \qquad r_j = a_1 \mu_j^2 + a_2 - a_6 \mu_j, \qquad j = 1, 2. \tag{15.4}
$$

Podobnie korzystając z rozwiązań podanych w p. 12.1 i 12.2 możemy uzyskać naprężenia i przemieszczenia w półpłaszczyźnie tarczowej o brzegu nieobciążonym albo utwierdzonym zupełnie, w której punkcie (ξ, η) działa jądro termosprężystego odkształcenia (TdG). Tak więc dla półpłaszczyzny o brzegu wolnym od naprężeń mamy

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xp}^* &= \sigma_x^* + \frac{K}{|\mu_1-\mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\mu_j^2 A_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s^2 (z_j-\bar{\zeta}_s)^2}, \\
\sigma_{yp}^* &= \sigma_y^* + \frac{K}{|\mu_1-\mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{A_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s^2 (z_j-\bar{\zeta}_s)^2}, \\
\tau_{xyp}^* &= \tau_{xy}^* - \frac{K}{|\mu_1-\mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\mu_j A_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s^2 (z_j-\bar{\zeta}_s)^2};
\end{aligned} \tag{15.5}
$$

$$
\begin{aligned}
u_p^* &= u^* - \frac{K}{|\mu_1-\mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{A_{js} p_j \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s^2 (z_j-\bar{\zeta}_s)}, \\
v_p^* &= v^* - \frac{K}{|\mu_1-\mu_2|^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{A_{js} q_j \bar{r}_s}{\mu_j \bar{\mu}_s^2 (z_j-\bar{\zeta}_s)};
\end{aligned} \tag{15.6}
$$

natomiast stan naprężenia i przemieszczenia w półpłaszczyźnie o brzegu utwierdzonym opisują wielkości

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xp}^{*} &= \sigma_{x}^{*} + K\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{\bar{A}_s\mu_j^2 a_{js}\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s(z_j-\bar{\zeta}_s)^2},\\
\sigma_{yp}^{*} &= \sigma_{y}^{*} + K\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{\bar{A}_s a_{js}\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s(z_j-\bar{\zeta}_s)^2},\\
\tau_{xyp}^{*} &= \tau_{xy}^{*} - K\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{\bar{A}_s\mu_j a_{js}\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s(z_j-\bar{\zeta}_s)^2};
\end{aligned}
\tag{15.5'}
$$

$$
\begin{aligned}
u_p^{*} &= u^{*} - K\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{\bar{A}_s p_j a_{js}\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s(z_j-\bar{\zeta}_s)},\\
v_p^{*} &= v^{*} - K\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{\bar{A}_s q_j a_{js}\bar{r}_s}{\mu_j\bar{\mu}_s(z_j-\bar{\zeta}_s)}.
\end{aligned}
\tag{15.6'}
$$

W powyższych wzorach $\sigma_{ij}^{*}, u^{*}, v^{*}$ oznaczają części osobliwe naprężeń i przemieszczeń, określone za pomocą wzorów (15.2) i (15.3).

Wreszcie, biorąc pod uwagę rezultaty uzyskane w p. 13, można by wypisać analogiczne rozwiązania dla tarczy w kształcie pasma o brzegach swobodnych, jak również wykazać, że rozwiązywanie zagadnień ustalonych dystorsji termicznych dla tarczy anizotropowej skończonej (albo nieskończonej), zajmującej dowolny obszar jedno- lub wielospójny, sprowadza się podobnie jak w p. 14 do rozwiązywania podstawowych zagadnień płaskich teorii sprężystości ciał anizotropowych.

Dokonując w powyższych wyrażeniach podstawień (11.25) i przyjmując $a_6 = 0$ oraz $\mu_1 = i\beta_1$, $\mu_2 = i\beta_2$ albo $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = -\alpha + i\beta$, otrzymamy odpowiednie rozwiązania dla tarcz wykonanych z materiału o ortotropii pierwszego albo trzeciego typu, jeżeli osie układu współrzędnych przyjmiemy równolegle do głównych kierunków sprężystych. Obliczając zaś granice rozwiązań dla tarczy ortotropowej pierwszego typu przy $\beta_1 \to \beta_2$, uzyskamy rozwiązania dla tarczy o ortotropii typu drugiego. Jeżeli w tych ostatnich zrobimy podstawienia według (11.26) i dodatkowo przyjmiemy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_t$, dostaniemy rezultaty dla tarczy izotropowej, pokrywające się ze znanymi w literaturze, (por. [4] oraz [17]).

Podane wyżej rozwiązania dla tarczy poddanej działaniu jądra termosprężystego odkształcenia stanowią funkcje Greena rozważanych zagadnień i pozwalają drogą całkowania na wyznaczenie naprężeń i przemieszczeń wywołanych nieciągłym polem temperatury. Mianowicie niech dany będzie rozkład temperatury określony funkcją

$$
T = \begin{cases} T(x, y) & \text{wewnątrz obszaru } G,\\ 0 & \text{na zewnątrz obszaru } G, \end{cases}
\tag{15.7}
$$

gdzie G jest częścią obszaru tarczy. Wówczas naprężenia i przemieszczenia w tarczy będą dane za pomocą wzorów

$$(15.8)\qquad \sigma_{ij} = \iint_G T(\xi, \eta)\, \sigma_{ij}^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$(15.9)\qquad u_j(x, y) = \iint_G T(\xi, \eta)\, u_j^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Obliczmy na przykład naprężenia i przemieszczenia wywołane w nieograniczonej tarczy anizotropowej przez temperaturę równą $T_0 = \text{const}$ wewnątrz prostokąta o bokach $2a$, $2b$ i środku w początku układu współrzędnych, a równą zeru na zewnątrz tego obszaru.

Korzystając ze wzorów (15.8) i (15.2) otrzymamy

$$\sigma_x(x, y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} i A_j \mu_j^2 r_j \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \frac{d\xi\, d\eta}{(z_j - \zeta_j)^2},$$

skąd ostatecznie

$$(15.10)\qquad \sigma_x(x, y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} (-1)^s i A_j \mu_j r_j [\ln(z_j - \omega_{js}) + \ln(z_j - \omega_{js})],$$

gdzie ω_{js} oznaczają wielkości zespolone

$$(15.11)\qquad \omega_{j1} = a + \mu_j b, \quad \omega_{j2} = a - \mu_j b, \quad j = 1, 2.$$

Naprężenia σ_y i τ_{xy} oblicza się analogicznie. Możemy je otrzymać przyjmując we wzorze (15.10) zamiast A_j w wyrażeniu na σ_y wielkość $A_j \mu_j^{-2}$ oraz w wyrażeniu na τ_{xy} wielkość $-A_j \mu_j^{-1}$.

Natomiast dla składowych wektora przemieszczenia, zgodnie ze wzorami (15.9) i (15.3), mamy wyrażenia

$$(15.12)\qquad u(x, y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \frac{i A_j p_j r_j}{\mu_j} (-1)^s [(z_j + \omega_{js}) \ln(z_j + \omega_{js}) + \\ + (z_j - \omega_{js}) \ln(z_j - \omega_{js})]$$

i tej samej postaci wyrażenie dla $v(x, y)$, w którym zamiast p_j występuje $q_j \mu_j^{-1}$.

Postępując w sposób wyjaśniony poprzednio otrzymujemy dla przypadku ortotropii wzory pokrywające się z wyprowadzonymi inaczej przez W. Nowackiego, [20], dla nieograniczonej zaś tarczy izotropowej wzory zgodne z rezultatami J. N. Goodiera, [4].

Wyznaczmy jeszcze stan naprężenia i przemieszczenia w półpłaszczyźnie tarczowej $y \geqslant 0$, która wewnątrz prostokąta o wierzchołkach (a_1, b_1), (a_1, b_2), $(-a_1, b_2)$, $(-a_1, b_1)$ jest ogrzana do temperatury $T_0 = \text{const}$, a na zewnątrz tego prostokąta temperatura jest równa zeru.

Dla półpłaszczyzny o brzegu nieobciążonym zgodnie z (15.8), (15.9), (15.5) i (15.6) otrzymamy

$$\sigma_{xp}(x,y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^k \mu_j \Big\{ iA_j r_j [\ln(z_j+\omega_{jk}^{*}) - \ln(z_j - \omega_{jk}^{**})] + \frac{1}{|\mu_1-\mu_2|^2} \sum_{s=1}^{2} \frac{\mu_j A_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s{}^3} \Big[\ln(z_j+\bar{\omega}_{sk}^{*}) - \ln(z_j - \bar{\omega}_{sk}^{**})\Big]\Big\}, \tag{15.13}$$

$$u_p(x,y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} p_j (-1)^k \Big\{ \frac{iA_j r_j}{\mu_j} \Big[(z_j+\omega_{jk}^{*}) \ln(z_j+\omega_{jk}^{*}) - (z_j-\omega_{jk}^{**}) \ln(z_j-\omega_{jk}^{**})\Big] + \frac{1}{|\mu_1-\mu_2|^2} \sum_{s=1}^{2} \frac{A_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s{}^3} \Big[(z_j+\bar{\omega}_{sk}^{*}) \ln(z_j+\bar{\omega}_{sk}^{*}) - (z_j-\bar{\omega}_{sk}^{**}) \ln(z_j-\bar{\omega}_{sk}^{**})\Big]\Big\}, \tag{15.14}$$

przy czym

$$\omega_{jk}^{*} = a_1 - \mu_j b_k, \qquad \omega_{jk}^{**} = a_1 + \mu_j b_k, \qquad j,k = 1,2. \tag{15.15}$$

Naprężenia σ_{yp}, τ_{xyp} mają postać (15.13), gdzie zamiast A_j, A_{js} należy podstawić w wyrażeniu na σ_{yp} wielkość $A_j \mu_j^{-2}$, $A_{js} \mu_j^{-2}$, a w wyrażeniu na τ_{xyp} wielkość $-A_j \mu_j^{-1}$, $-A_{js} \mu_j^{-1}$. Zaś $v_p(x,y)$ uzyskamy ze wzoru (15.14), jeżeli przyjmiemy w nim $q_j \mu_j^{-1}$ zamiast p_j.

Analogiczne rozwiązania dla półpłaszczyzny izotropowej w inny sposób otrzymał W. Nowacki (por. [17]). Wzór (15.13) i otrzymane z niego za pomocą powyższych podstawień wzory dla σ_{yp} i τ_{xyp} w przypadku półpłaszczyzny izotropowej są zgodne (jeżeli zamienić odpowiednio osie układu współrzędnych oraz wymiary i położenie prostokąta, na którym zadana jest temperatura) z wynikami W. Nowackiego.

Wreszcie dla półpłaszczyzny o brzegu utwierdzonym mamy

$$\sigma_{xp}(x,y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \mu_j (-1)^k \Big\{ iA_j r_j \Big[\ln(z_j+\omega_{jk}^{*}) - \ln(z_j-\omega_{jk}^{**})\Big] + \sum_{s=1}^{2} \frac{\bar{A}_s \mu_j a_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s^2} [\ln(z_j+\bar{\omega}_{sk}^{*}) - \ln(z_j-\bar{\omega}_{sk}^{**})]\Big\}, \tag{15.13'}$$

$$u_p(x,y) = \frac{T_0}{\pi a_{11}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} p_j (-1)^k \Big\{ \frac{iA_j r_j}{\mu_j} [(z_j+\omega_{jk}^{*}) \ln(z_j+\omega_{jk}^{*}) - (z_j-\omega_{jk}^{**}) \ln(z_j-\omega_{jk}^{**})] + \sum_{s=1}^{2} \frac{\bar{A}_s a_{js} \bar{r}_s}{\bar{\mu}_s^2} \times [(z_j+\bar{\omega}_{sk}^{*}) \ln(z_j+\bar{\omega}_{sk}^{*}) - (z_j-\bar{\omega}_{sk}^{**}) \ln(z_j-\bar{\omega}_{sk}^{**})]\Big\}. \tag{15.14'}$$

Aby otrzymać naprężenia σ_{yp}, τ_{xyp}, należy zamienić we wzorze (15.13') A_j, a_{js} na $A_j\,\mu_j^{-2}$, $a_{js}\,\mu_j^{-2}$ oraz $-A_j\,\mu_j^{-1}$, $-a_{js}\,\mu_j^{-1}$ odpowiednio. Funkcję v_p zaś przedstawia wzór postaci (15.14'), w którym zamiast p_j występuje $q_j\,\mu_j^{-1}$.

Rozważmy jeszcze ciało anizotropowe w kształcie walca, znajdujące się w płaskim stanie odkształcenia. Jeżeli ustalone pole temperatury nie zmienia się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny Oxy (T jest funkcją tylko x i y), w każdym punkcie ciała istnieje płaszczyzna symetrii sprężystej prostopadła do tworzącej walca, którą przyjmujemy za oś Oz oraz współczynniki termiczne α_4 i α_5 są równe zeru [2], to uogólnione prawo Hooke'a będzie postaci, [21],

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\,\sigma_x + a_{12}\,\sigma_y + a_{13}\,\sigma_z + a_{16}\,\tau_{xy} + \alpha_1\,T,\\
\varepsilon_y &= a_{12}\,\sigma_x + a_{22}\,\sigma_y + a_{23}\,\sigma_z + a_{26}\,\tau_{xy} + \alpha_2\,T,\\
\varepsilon_z &= a_{13}\,\sigma_x + a_{23}\,\sigma_y + a_{33}\,\sigma_z + a_{36}\,\tau_{xy} + \alpha_3\,T = 0,\\
\gamma_{xy} &= a_{16}\,\sigma_x + a_{26}\,\sigma_y + a_{36}\,\sigma_z + a_{66}\tau_{xy} + \alpha_6\,T.
\end{aligned}
\tag{15.16}
$$

Jeżeli korzystając z trzeciego z powyższych równań wyrugujemy σ_z z pozostałych, to otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \beta_{11}\,\sigma_x + \beta_{12}\,\sigma_y + \beta_{16}\,\tau_{xy} + \varrho_1\,T,\\
\varepsilon_y &= \beta_{12}\,\sigma_x + \beta_{22}\,\sigma_y + \beta_{26}\,\tau_{xy} + \varrho_2\,T,\\
\gamma_{xy} &= \beta_{16}\,\sigma_x + \beta_{26}\,\sigma_y + \beta_{66}\,\tau_{xy} + \varrho_6\,T,
\end{aligned}
\tag{15.17}
$$

gdzie β_{jk} są tzw. zredukowanymi współczynnikami odkształcenia i dane są wzorami (14.7), natomiast ϱ_j oznaczają wyrażenia

$$\varrho_j = \alpha_j - \frac{a_{j3}}{a_{33}}\,\alpha_3, \quad j = 1, 2, 6.$$

Ponieważ pozostałe wyjściowe równania (10.2)-(10.4) pozostają bez zmian, wszystkie otrzymane powyżej rozwiązania będą się odnosić do ciała o wymienionych wyżej własnościach sprężystych i termicznych, znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia, jeżeli tylko wszędzie zamiast a_{jk} podstawimy β_{jk} oraz ϱ_j zamiast α_j.

Pozostałe składowe tensora naprężeń są wtedy

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \qquad \sigma_z = -\frac{1}{a_{33}}\left(a_{13}\,\sigma_x + a_{23}\,\sigma_y + a_{36}\,\tau_{xy} + \alpha_3\,T\right).$$

W przypadku ortotropii mamy $a_{16} = a_{26} = a_{36} = \alpha_6 = 0$, czyli $\beta_{16} = \beta_{26} = \varrho_6 = 0$ i równania (15.16) i (15.17) przechodzą w podane przez W. Nowackiego, [22].

[2] Zerowanie się współczynników termicznych α_4 i α_5 jest jednym z możliwych warunków, przy których układ podstawowych równań dla płaskiego stanu odkształcenia jest formalnie taki sam jak w przypadku płaskiego stanu naprężenia. Chodzi tutaj o spełnienie trzeciego równania równowagi. Zamiast niego można zażądać, by współczynniki termiczne i sprężyste odkształcenia spełniały zależności $a_{44}\,\alpha_5 - a_{45}\,\alpha_4 = 0$, $a_{55}\,\alpha_4 - a_{45}\,\alpha_5 = 0$.

Literatura cytowana w tekście

[1] I. BABUŠKA, K. REKTORYS, F. VYČICHLO, *Matematická theorie rovinné pružnosti*, ČSAV, Praga 1955.

[2] H. BATEMAN, *Tables of Integral Transforms*, New York–Toronto–London 1954.

[3] J. BRILLA, Anizotropické steny, Bratislava SAV, 1958.

[4] J. N. GOODIER, *On the integration of the thermo-elastic equation*, Phil. Mag., 23, **7** (1937), 1017.

[5] E. GOURSAT, *Sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$, Bull. Soc. Math. de France, **26** (1898), 236.

[6] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

[7] S. KALISKI, W. NOWACKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 4, **8** (1956), 413.

[8] M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, Część I, PWN, Warszawa 1957.

[9] С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Москва 1957.

[10] С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Москва–Ленинград 1950.

[11] С. Г. Лехницкий, *О некоторых вопросах связанных с теорией изгиба тонких плит*, Прикл. Мат. Мех., 2, **2** (1938).

[12] С. Г. Лехницкий, *Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела*, Прикл. Мат. Мех., 1, **1** (1937).

[13] J. MOSSAKOWSKI. *Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., 1, **7** (1955), 97.

[14] J. MOSSAKOWSKI, *The state of stress and displacement in a thin anisotropic plate, due to a concentrated source of heat*, Arch. Mech. Stos., 5, **9** (1957), 565.

[15] J. MOSSAKOWSKI, *The Michell problem for anisotropic semi-infinite plate*, Arch. Mech. Stos., 4, **8** (1956), 539.

[16] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва–Ленинград 1949.

[17] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.

[18] W. NOWACKI, *A plane distortion problem*, Arch. Mech. Stos., 4, **9** (1957), 417.

[19] W. NOWACKI, *The stresses in a thin plate due to a nucleus of thermoelastic strain*, Arch. Mech. Stos., **1, 9 (1957),**

[20] W. NOWACKI, *Thermal stresses in orthotropic plates*, Bull. Acad. Polon. Sci, Sér. Sci. Techn., 1, **7** (1959), 1.

[21] W. NOWACKI, *Naprężenia cieplne w ciałach anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., 3, **6** (1954) 481.

[22] W. NOWACKI, *Ustalone naprężenia w walcu ortotropowym oraz w tarczy ortotropowej*, Rozpr. Inż., 3, **8** (1960), 569.

[23] Г. Н. Савин, *Концентрация напряжений около отверстий*, Москва–Ленинград 1951.

[24] B. SEN, *Note on the stresses produced by nuclei of thermoelastic strain in a semi-infinite solid* Quart. Appl. Math., 8, 1951, 365.

[25] M. SOKOŁOWSKI, *Some plane problems with boundary conditions in terms of displacements* Arch. Mech. Stos., 4, **9** (1957), 439.

[26] C. SOMIGLIANA, *Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali*, Ann. di Math. Pura e Appl., ser. II, XXII, 1894.

[27] M. SUCHAR, *Computation by means of polynomials of influence surfaces for anisotropic plates with finite dimensions*, Arch. Mech. Stos., 5, **10** (1958), 615.

[28] M. SUCHAR, *General form of the surface of deflection of a thin anisotropic plate in a multi-connected region*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 2, **8** (1960), 69.

[29] S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, New York–Toronto–London 1959.

[30] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Москва–Ленинград 1948.

[31] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech. Stos., 3, **10** (1958).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В первом разделе работы рассматривается структура решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа, с двумя независимыми переменными четвертого порядка, а также четного порядка с постоянными коэффициентами. Что касается вопросов теории упругости, то уравнения четвертого порядка описывают изгиб тонкой анизотропной пластинки, функцию напряжений и функцию перемещений для анизотропных тел, находящихся в плоском напряженном состоянии или плоском деформированном состоянии, при предположении, что в каждой точке тела существует плоскость упругой симметрии. Ясно, что для каждого из приведенных случаев имеются различные коэффициенты. Тогда как к уравнениям шестого порядка сводится уравнение для функций, описывающих более общие напряженные и деформированные состояния в теле, с произвольной прямолинейной анизотропией.

Уравнения, четвертого порядка обсуждаются на примере уравнения поверхности изгиба анизотропной пластинки. Выводится общий вид решения этого уравнения для случаев односвязной и многосвязной, конечной или бесконечной области и устанавливается степень определенности голоморфных функций существующих в решении. Вычисления проводились для комплексных параметров второго рода, а конечные результаты даются также для параметров первого рода. Полученные результаты распространяются на эллиптические уравнения произвольного четного порядка. Заключающееся в работе доказательства теорем являются обобщением рассуждений Н. И. Мусхелишили, касающихся бигармонического уравнения.

В частности, получено, таким образом, основные решения рассматриваемых уравнений, которые можно использовать для построения функций Грина рассматриваемых уравнений.

Используя решения для пластинки, занимающей двухсвязную область ограниченную кругом и точкой в бесконечности, соответственно нагруженной по контуру отверстия и проводя граничный переход, при радиусе круга стремящимся к нулю, получаем сингулярное решение для бесконечной анизотропной пластинки нагруженной сосредоточенной силой, приведенной раньше Е. Моссаковским; затем дается решение для пластинки, находящейся под влиянием сосредоточенного момента и сосредоточенного бимомента.

Подобным образом получено сингулярное решение для бесконечной анизотропной пластины, под влиянием сосредоточенной силы и сосредоточенного момента, приведенного С. Г. Лехницким.

Во втором разделе работы рассматривается плоская задача, касающаяся дисторсии анизотропных тел. Задача состоит в определении напряженного состояния и перемещений в анизотропной пластине, вызванных начальными деформациями, заданными на некоторой части области. Это является обобщением на случай анизотропии плоской дисторсионной задачи, решенной В. Новацким для изотропных тел.

В данном случае использовалься метод функций Грина, адаптированный В. Новацким для решения таких вопросов. Функциями Грина являются в этом случае, величины (напряжения, перемещения, функции напряжений или перемещений), вызванные действием упругого ядра деформации. Знание функции Грина дает возможность, путем интегрирования, получить решение для начальных деформаций произвольно расположенных на заданной области.

Исходным пунктом является определение напряжений и перемещений в бесконечной пластине, вызванных ядром упругой деформации. Напряжения определяются с помощью функций Эри, а перемещение с помощью функций Галеркина, причем решение выражается соответствующими интегралами Фурье, которые, в конце концов, представлены в замкнутом виде. Их можно получить также из соответствующих сингулярных решений для анизотропных пластинок, находящихся под влиянием силы, момента, или сосредоточенного бимомента.

Путем сложения полученной раньше сингулярной части решения с так подобранной регулярной частью, чтобы их сумма удовлетворяла данным краевым условиям, определяются далее напражения и перемещения в полуплоскости с закрепленным краем и свободным краем, а также в полосе. Показано также, что определение решения для конечного диска пластины сводится к определению решения одной из основных плоских задач теории упругости анизотропного тела.

Частным случаем рассматриваемой дисторсионной задачи являются стационарные термические дисторсии, которым посвящается последний пункт работы. Используя полученные раньше результаты, даются напражения и перемещения в бесконечной пластине и полуплоскости, вызванные стационарным ядром термоупругой деформации. Они могут быть использованы для определения напряжений или перемещений, вызванных в пластине разрывным температурным полем, что и иллюстрируется двумя примерами: когда темперетура в бесконечной пластине и в полуплоскости в области прямоугольника постоянна и равна нулю вне этой области.

Summary

SOME ELASTICITY PROBLEMS OF ANISOTROPIC BODIES

The first section is devoted to the structure of the solution of partial differential equations of the elliptic type with two independent variables, of the fourth or any even order and having constant coefficients. In the theory of elasticity fourth order equations describe the deflection of a thin anisotropic plate and also stress and displacement functions for anisotropic bodies in plane state of stress or strain, assuming that there is a symmetry plane of elasticity at every point of the body. The coefficients of the equation are different in each of the cases considered. For the description of more general states of stress and strain of a body of any rectilinear anisotropy leads to sixth order equations.

The fourth order equations are analysed by means of the example of the deflection surface of an anisotropic plate. A general form of solution is obtained in cases of simply or multiply connected finite or infinite regions. Also the degree of determinacy of the holomorphic functions occurring in the solution is determined. The analysis is performed for complex parameters of the second kind. Final results are also given for parameters of the first kind. The results are generalized to an elliptic equation of any even order. The proofs contained in the paper constitute a generalization of N. I. Muskhelishvili's considerations concerning the biharmonic equation.

In particular, basic solutions are arrived at for obtaining Green's functions for the problems under consideration.

Making use of the solution for a doubly connected plate bounded by a circle and a point at infinity and loaded in an appropriate manner on the contour, and passing to the limit for the radius of the circle tending to zero, a singular solution is obtained for an infinite anisotropic plate loaded by a concentrated force, previously obtained by J. Mossakowski and then for a plate loaded by a concentrated moment and bimoment.

In a similar manner we obtain a singular solution for an infinite anisotropic plate loaded by a concentrated force and moment, obtained by S. G. Letchnitzky.

The second section is devoted to the plane distortion problem for anisotropic bodies. The problem is that of finding the state of stress and strain in an anisotropic plate due to initial strain in a portion of the region. This is a generalization to the case of anisotropy of the plane distortion problem solved by W. Nowacki for isotropic bodies.

The method of Green's function is used in the form adapted by W. Nowacki for the analysis of these problems. Green's functions are, in this case, quantities (stresses displacements, stress or

displacement functions) produced by a nucleus of elastic strain. The knowledge of Green's function enables us to obtain, by integration the solution in the case of intial strains distributed in any way over the region.

The point of departure is the obtainment of stresses and displacements in an infinite plate produced by a nucleus of, elastic strain. The stresses are determined by means of the Airy function and the displacements — by means of Galerkin functions, the solution being expressed in terms of Fourier integrals which are represented finally in a closed form. They can also be obtained from appropriate singular solutions for an anisotropic plate loaded by a concentrated force, moment or bimoment.

By adding to the singular part of the solution a regular selected in such a manner that their sum satisfies the given boundary conditions, stresses and displacements are obtained in a semi-infinite plate with clamped and free edge conditions and in a plate strip. It is also shown that the computation of the solution for a finite plate reduces to the obtainment of the solution of one of the fundamental plane problems of elasticity of an anisotropic body.

A particular case of the above distortion problem are steady-state thermal distortions, to which the last section of the paper is devoted. Making use of the above results, stresses and strains are obtained in an infinite plate and semi-infinite plate produced by a steady-state nucleus of thermoelastic strain. They can be used for the obtainment of stresses in a plate produced by a discontinuous temperature field. This is illustrated by means of two examples, in which the temperature in an infinite plate and in a semi-infinite plate is constant in the region of the rectangle and is zero outside this region.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca zostala złożona w redakcji dnia 27 stycznia 1964 r.