

## PRZYKŁADY KSZTAŁTOWANIA BELEK SPRĘŻONYCH

ANDRZEJ BRANDT (WARSZAWA)

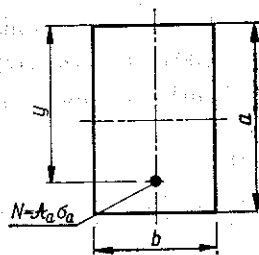
### 1. Wstęp

Celem pracy jest przedstawienie kilku przykładów kształtowania belek izostatycznych z betonu sprężonego, stanowiących dalszy ciąg pracy [1]. Wszystkie oznaczenia i założenia przyjęte w tamtej pracy pozostają bez zmiany i nie będziemy ich przypominali. Przegląd najważniejszych kierunków poszukiwań w zakresie kształtowania konstrukcji podano w pracach [2] i [3] wraz z obszernym zestawieniem publikacji odnoszących się do tego tematu.

### 2. Kształtowanie belek przez wyrównywanie naprężeń

Rozpatrzmy belkę o przekroju prostokątnym (rys. 1) pod działaniem ciężaru własnego oraz obciążenia użytkowego  $p$  rozłożonego równomiernie wzdłuż rozpiętości belki. Wyznamy kształt belki, przy którym nastąpi wyrównanie największych naprężeń normalnych wzdłuż jej długości w przekrojach poprzecznych, pominiemy przy tym wpływ sił poprzecznych na parametry kształtowania.

Kształtowanie takich belek przez wyrównywanie naprężeń daje tylko trzy równania, ponieważ spośród równań (2.3) podanych w pracy [1] wspomnianej we wstępie, jedno równanie jest spełnione tożsamościowo. Te trzy równania po podstawieniu  $v' = v = \frac{1}{2}a$  przyjmują postać



Rys. 1. Prostokątny przekrój belki sprężonej

$$\frac{N}{ab} + \frac{6(M_q - M_0)}{a^2 b} = \underline{\sigma},$$

$$(2.1) \quad \frac{N}{ab} + \frac{6(M_q + M_p - M_0)}{a^2 b} = \bar{\sigma},$$

$$\frac{N}{ab} + \frac{6(-M_q - M_p + M_0)}{a^2 b} = \underline{\sigma}.$$

Zakładając, że belka ma stałą szerokość  $b = \text{const}$ , można wyznaczyć trzy pozostałe niewiadome:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} a(x) &= \sqrt{\frac{6M_p}{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})b}}, & N(x) &= \frac{1}{2}(\bar{\sigma} + \underline{\sigma})b \sqrt{\frac{6M_p}{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})b}}, \\ y(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6M_p}{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})b}} + \frac{2M_q + M_p}{(\bar{\sigma} + \underline{\sigma})b \sqrt{\frac{6M_p}{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})b}}}. \end{aligned}$$

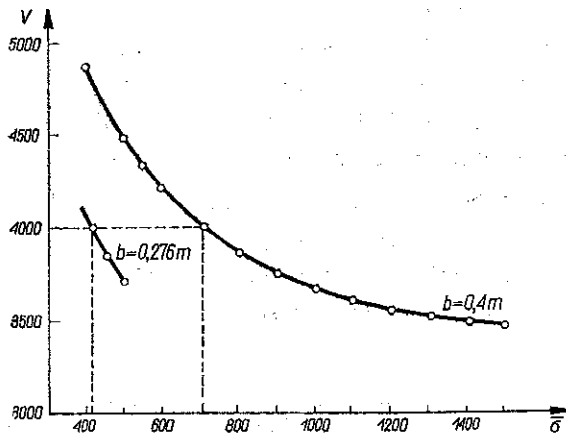
Przez dołączenie do tych równań warunku zachowania stałej objętości materiału belki otrzymamy czwarte równanie, z którego można wyznaczyć naprężenie dozwolone  $\bar{\sigma}$  lub odwrotnie, przy danym naprężeniu  $\underline{\sigma}$  określić potrzebną objętość materiału  $V$ . Równanie to posiada postać

$$(2.3) \quad V = \int_0^l A_b dx + n \int_0^l N dx.$$

*Przykład.* Do wykonania obliczeń niezbędne jest ustalenie wartości współczynnika  $n$ , który we wzorze (2.3) pozwala na ustalenie sumy objętości dwóch różnych materiałów i uwzględnia jednocześnie naprężenie dozwolone w stali sprężającej  $\sigma_{\alpha} = 100\,000 \text{ t/m}^2$ . Przyjmując, że ceny obu materiałów są następujące: beton  $750 \text{ zł/m}^3$  i stal sprężająca  $9\,000 \text{ zł/t}$ , otrzymamy

$$(2.4) \quad n = \frac{9\,000 \cdot 7,85}{750 \cdot 100\,000} \approx 0,001 \text{ [m}^2/\text{t]},$$

gdzie 7,85 jest ciężarem objętościowym stali.

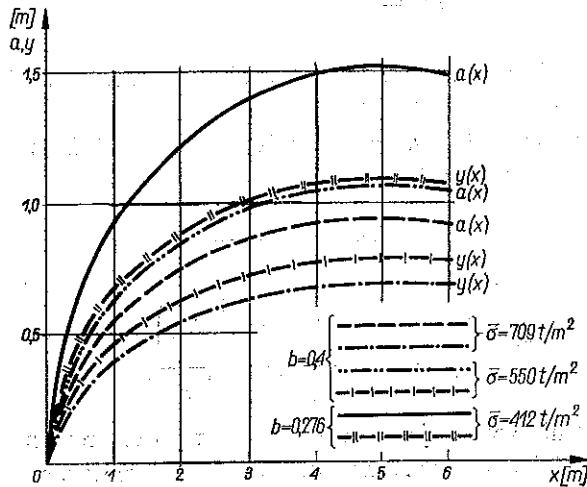


Rys. 2. Wykresy funkcji  $V = f$  belki

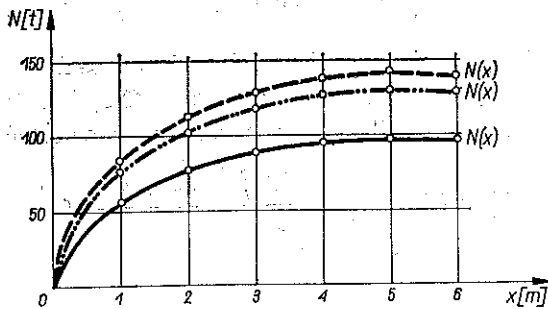
Po podstawieniu funkcji  $a(x)$  i  $N(x)$  z (2.2) do (2.3) i po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(2.5) \quad V = f(\bar{\sigma}) = \left[ 1 + \frac{1}{2} n (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) \right] \cdot \frac{\pi l^2}{16} \cdot \sqrt{\frac{12b\bar{p}}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}}.$$

Na rysunku 2 pokazano wykresy funkcji  $V = f(\bar{\sigma})$  przy danych  $n = 0,001 \text{ m}^2/\text{t}$ ,  $p = 3 \text{ t/m}$ ,  $l = 10,0 \text{ m}$ ,  $\bar{\sigma} = 50 \text{ t/m}^2$  oraz przy dwóch różnych szerokościach belki  $b_1 = 0,4 \text{ m}$  i  $b_2 = 0,276 \text{ m}$ . Następnie ze wzorów (2.2) wyznaczono poszukiwane



Rys. 3. Wykresy funkcji  $V$  i  $f$



Rys. 4. Wykresy funkcji  $N$

funkcje  $a$ ,  $N$  i  $y$  przy kilku różnych wartościach  $b$  i  $\bar{\sigma}$  z naszego wykresu. Otrzymane funkcje pokazano na rys. 3 i 4.

### 3. Wyznaczanie kształtu belki z warunku minimum energii odkształceń sprężystych od obciążeń użytkowych

Poszukiwanie minimum potencjału sił sprężystych powstających pod wpływem obciążeń użytkowych w belce rozpatrywanej w p. 2, sprowadza się do wyznaczenia ekstremum funkcjonału

$$(3.1) \quad U_p = \frac{6}{Eb} \int_0^l F(x) dx,$$

gdzie  $F(x) = M_p^2/a^3$  przy zachowaniu stałej objętości materiału (2.3). Jest to zagadnienie izoperymetryczne rachunku wariacyjnego, które można rozwiązać przez wprowadzenie funkcji

$$(3.2) \quad F^* = \frac{M_p^2}{ba^3} + (ab + nN)\lambda,$$

gdzie  $\lambda$  jest wielkością stałą, i przez poszukiwanie ekstremum bezwarunkowego otrzymanego w ten sposób funkcjonału.

Aby uprościć rozważania, warunki wyrównania naprężeń (2.1)<sub>1</sub> i (2.1)<sub>3</sub> przekształcimy do postaci następującej:

$$(3.3) \quad N = \underline{\sigma} ab + \frac{3M_p}{a},$$

$$(3.4) \quad y = \frac{a}{2} + \frac{a \left( M_a + \frac{1}{2} M_p \right)}{\underline{\sigma} a^2 b + 3M_p}.$$

Niewiadoma  $y(x)$  nie występuje w funkcji  $F^*$ , przeto ekstremum funkcjonału  $U_p$  nie zależy od  $y(x)$ . Niewiadoma  $N(x)$  natomiast może być wyrugowana z wyrażenia  $F^*$  za pomocą równania (3.3). Otrzymamy stąd

$$(3.5) \quad F^* = \frac{M_p^2}{a^3 b} + ab\lambda(1+n\underline{\sigma}) + \frac{3M_p n\lambda}{a}.$$

W ten sposób w  $F^*$  występuje tylko jedna funkcja poszukiwana  $a(x)$ . Pozostałe dwie funkcje będą następnie wyznaczone z równań (3.3) i (3.4).

Odpowiednie równanie Eulera dla naszego zagadnienia ma postać

$$(3.6) \quad F_a^* = b\lambda(1+n\underline{\sigma}) - \frac{3M_p^2}{a^4 b} - \frac{3M_p n\lambda}{a^2} = 0.$$

Stąd

$$(3.7) \quad a(x) = \left( \sqrt{\frac{3n}{2b(1+n\underline{\sigma})} + \frac{1}{b} \sqrt{\left[ \frac{3n}{2(1+n\underline{\sigma})} \right]^2 + \frac{3}{\lambda(1+n\underline{\sigma})}}} \right) \sqrt{M_p};$$

oznaczając wyrażenie w nawiasie przez  $A$ , mamy

$$a(x) = A \sqrt{M_p}.$$

Aby wyznaczyć  $A$  i stałą  $\lambda$  trzeba wykorzystać warunek (2.3):

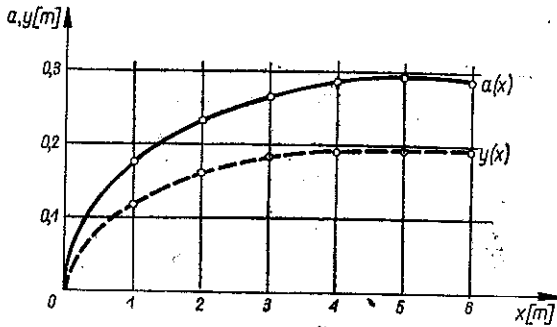
$$V = \int_0^l \left[ A \sqrt{M_p} b (1+n\underline{\sigma}) + \frac{3n\sqrt{M_p}}{A} \right] dx = \left[ Ab(1+n\underline{\sigma}) + \frac{3n}{A} \right] \cdot \frac{\pi l^2}{16} \cdot \sqrt{2p}.$$

$$A = \frac{1}{2b(1+n\underline{\sigma})} \left[ \frac{16V}{\pi l^2 \sqrt{2p}} \pm \sqrt{\left( \frac{16V}{\pi l^2 \sqrt{2p}} \right)^2 - 12nb(1+n\underline{\sigma})} \right].$$

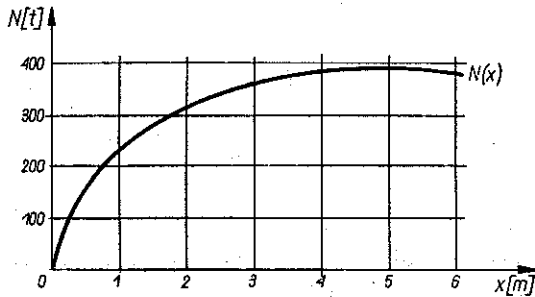
Ostatecznie będzie

$$(3.8) \quad a(x) = \frac{8V}{\pi l^2 \sqrt{2p(1+n\sigma)} b} \sqrt{M_p} \pm \sqrt{\left( \frac{8V}{\pi l^2 \sqrt{2p(1+n\sigma)} b} \right)^2 - \frac{3n}{b(1+n\sigma)} \sqrt{M_p}}$$

Otrzymane dwa rozwiązania różnią się znakiem przed pierwiastkiem, rozwiązanie ze znakiem dodatnim jest identyczne z przedstawionym poprzednio. Wskazuje to na zbieżność dwóch metod kształtowania, opisaną już w pracy [4].



Rys. 5. Wykresy funkcji  $a(x)$  i  $y(x)$



Rys. 6. Wykres funkcji  $N(x)$

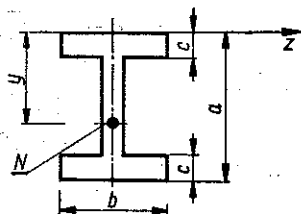
*Przykład.* Obliczenie oparte jest na wzorze (3.8) z uwzględnieniem znaku ujemnego przed pierwiastkiem. Przyjęto następujące wartości liczbowe:  $\sigma = 50 \text{ t/m}^2$ ,  $V = 4,0 \text{ m}^3$ ,  $l = 10 \text{ m}$ ,  $p = 3 \text{ t/m}$ ,  $n = 0,001 \text{ m}^2/\text{t}$ ,  $b = 0,4 \text{ m}$ . Wykresy funkcji (3.3), (3.4) i (3.8) przedstawione są na rys. 5 i 6.

#### 4. Kształtowanie belki dwuteowej

Kształt belki sprężonej o symetrycznych przekrojach dwuteowych określony jest przez sześć parametrów, pokazanych na rys. 7.

Jako niewiadome traktować będziemy następujące parametry zmienne wzdłuż rozpiętości belki: powierzchnię przekroju półki  $\bar{b}(x)$ , grubość środnika  $g(x)$ , rzędną siły sprężającej  $y(x)$  oraz wielkość siły sprężającej  $N(x)$ ; inne wielkości występujące w zadaniu uważać będziemy za dane. Wysokość belki jest stała wzdłuż rozpiętości.

Belka ukształtowana będzie z warunku minimum potencjału odkształceń sprężystych pochodzących od obciążeń użytkowych:



Rys. 7. Dwuteowy przekrój belki sprężonej

(4.1)

$$U_p = \frac{1}{E} \int_0^l F dx = \min,$$

gdzie

$$F = \frac{M_p^2}{a^2 \left( \bar{b} + \frac{1}{6} ag \right)},$$

przy stałej objętości tworzywa:

(4.2)

$$V = \int_0^l (ag + 2\bar{b} + nN) dx = \text{const},$$

oraz przy spełnieniu dwóch warunków ubocznych wyrównania naprężeń

(4.3)

$$\frac{N}{2\bar{b} + ag} + \frac{M_q - M_0}{a\bar{b} + \frac{1}{6}a^2g} = \underline{\sigma},$$

$$\frac{N}{2\bar{b} + ag} + \frac{-M_q - M_p + M_0}{a\bar{b} + \frac{1}{6}a^2g} = \underline{\sigma}.$$

Uzależnienie potencjału tylko od obciążeń użytkowych odpowiada np. w praktyce belce, w której ugięcia od ciężaru własnego i innych stale działających obciążeń są zredukowane przez inne zabiegi. Wówczas tylko ugięcia od obciążeń użytkowych decydują o sztywności belki.

Z warunków (4.3) można wyznaczyć dwie niewiadome

(4.4)

$$y = \frac{a}{2} + \frac{M_p}{2N} + \frac{M_q}{N},$$

(4.5)

$$N = \underline{\sigma} (ag + 2\bar{b}) + \frac{M_p}{2} \frac{ag + 2\bar{b}}{a\bar{b} + \frac{1}{6}a^2g}.$$

Podobnie jak przy kształtowaniu belki o przekroju prostokątnym funkcja  $y(x)$  nie występuje ani w funkcjale (4.1), ani w równaniu (4.2). Można więc poszukiwać minimum niezależnie od tej funkcji, a następnie wyznaczyć ją za pomocą funkcji pozostałych.

Na podstawie zależności (4.5) rugujemy niewiadomą  $N(x)$  z (4.2). Warunek zachowania stałej objętości prowadzi do poszukiwania rozwiązania najprostszego zagadnienia rachunku wariacyjnego, w którym pod znakiem całki występuje funkcja

$$F^* = F + (ag + 2\bar{b} + nN) \lambda = \\ = \frac{M_p^2}{a^2 (\bar{b} + \frac{1}{6}ag)} + ag\lambda + 2\bar{b}\lambda + n\lambda\sigma(ag + 2\bar{b}) + \frac{n\lambda M_p}{2} \frac{ag + 2\bar{b}}{a\bar{b} + \frac{1}{6}a^2 g}.$$

Warunkiem koniecznym, aby funkcjonal funkcji  $F^*$  przyjmował wartości minimalne dla pewnych funkcji  $g(x)$  i  $\bar{b}(x)$ , jest spełnienie równań Eulera

$$(4.6) \quad F_{\bar{b}}^* = 0, \quad F_g^* = 0.$$

Z tych dwóch równań znajdziemy

$$(4.7) \quad \bar{b} = \frac{M_p}{2an\lambda} - \frac{3nM_p}{4a(1+n\sigma)},$$

$$(4.8) \quad g = \frac{3M_p}{a^2 n\lambda} + \frac{15M_p}{2a^2(1+n\sigma)}.$$

Inne funkcje spełniające równania (4.6) nie odpowiadają warunkom wynikającym z rozpatrywanego zagadnienia, prowadzą bowiem do ujemnych wartości poszukiwanych parametrów kształtu.

Funkcje  $\bar{b}(x)$  i  $g(x)$  są zależne od stałej  $\lambda$ , którą można określić z warunku (4.2). Po podstawieniu i wykonaniu całkowania mamy

$$V = \frac{pl^3}{12} \left( \frac{12n}{a} - \frac{4(1+n\sigma)}{an\lambda} \right),$$

stąd

$$(4.9) \quad \frac{1}{an\lambda} = - \frac{3(Va - npl^3)}{apl^3(1+n\sigma)}.$$

Po podstawieniu (4.9) do (4.7) i do (4.8) znajdziemy poszukiwane funkcje:

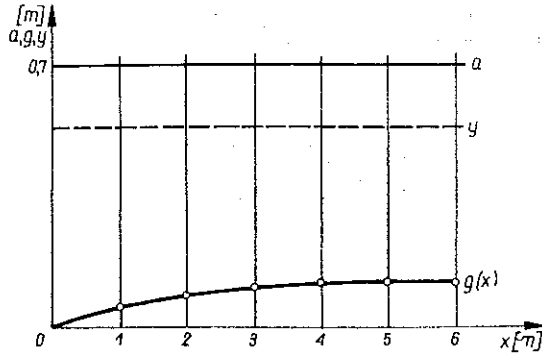
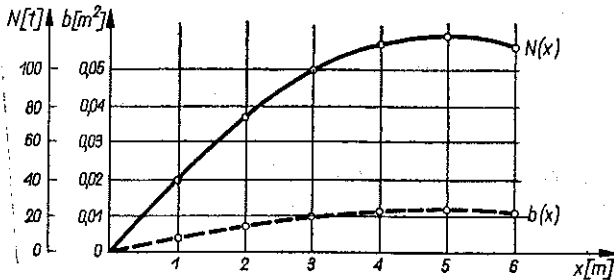
$$(4.10) \quad \bar{b} = \frac{3M_p}{2a(1+n\sigma)} \left( \frac{-Va + npl^3}{pl^3} - \frac{n}{2} \right),$$

$$(4.11) \quad g = \frac{3M_p}{a^2(1+n\sigma)} \left( \frac{5n}{2} + \frac{3(Va - npl^3)}{pl^3} \right).$$

Warunkiem, aby obie funkcje przyjmowały wartości dodatnie, jest odpowiednie dobranie wysokości belki  $a$  przy ustalonej objętości materiału  $V$  oraz danych: rozpiętości  $l$ , obciążeniu  $p$  i współczynniku  $n$ . Wysokość  $a$  powinna być zawarta w przedziale

$$(4.12) \quad \frac{npl^3}{6V} < a < \frac{npl^3}{2V}.$$

*Przykład.* Przyjęto następujące dane:  $\sigma = 50 \text{ t/m}^2$ ,  $l = 10 \text{ m}$ ,  $p = 3 \text{ t/m}$ ,  $n = 0,001 \text{ m}^2/\text{t}$ ,  $V = 1,5 \text{ m}^3$ . Wysokość  $a$  musi być zawarta w przedziale  $(1/3, 1)$ ; przyjęto  $a = 0,7$ . Wykresy funkcji wyznaczone ze wzorów (4.10), (4.11), (4.4) i (4.5) pokazane są na rys. 8 i 9.

Rys. 8. Wykresy funkcji  $a$ ,  $y$ ,  $g(x)$ Rys. 9. Wykresy funkcji  $N(x)$  i  $\bar{b}(x)$ 

### 5. Wyznaczenie kształtu belki z warunku na minimum całkowitej energii potencjalnej

Rozpatrzmy całkowity potencjał uwzględniając także jego składnik dotychczas pomijany a pochodzący od sił poprzecznych. Potencjał wyraża się więc za pomocą wzoru

$$(5.1) \quad U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EJ} dx + \int_0^l \frac{mT^2(x)}{2GA} dx + \int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA} dx.$$

Prostokątny przekrój belki sprężonej określony jest przez cztery niezależne parametry kształtowania:  $y(x)$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$  i  $N(x)$  (rys. 1). W przypadku obciążenia belki tylko przez ciężar własny siły wewnętrzne w przekroju poprzecznym przedstawić można w sposób następujący:

$$M(x) = M_q + M_0 = xy \int_0^l ab dx - \gamma \int_0^x ab(x - \xi) d\xi - N \left( y - \frac{a}{2} \right),$$



$$(5.2) \quad T(x) = T_a + T_0 = \gamma \int_0^{l/2} ab dx - \gamma \int_0^x ab dx - N \frac{dy}{dx},$$

$$N(x) = f(x).$$

Przyjmijmy, że w rozpatrywanej belce funkcjami poszukiwanymi są trzy parametry kształtowania: wysokość belki  $a(x)$ , położenie siły sprężającej  $y(x)$  oraz wielkość siły sprężającej  $N(x)$ . Szerokość belki  $b$  jest stała.

Zagadnienie polega na wyznaczeniu funkcji, dla których funkcjonal (5.1) osiąga minimum przy zachowaniu stałej objętości materiału belki (2.3). Jest to zadanie izoperymetryczne, którego rozwiązanie przebiega drogą pokazaną w p. 4, a więc przez wyznaczenie trzech równań Eulera:

$$(5.3) \quad \frac{6\gamma}{E} \int_0^l a^{-3}(x) x M(x) dx - \frac{12\gamma}{E} \int_0^l a^{-3}(\xi) (\xi - x) M(x) d\xi - \\ - \frac{6}{Eb} N(x) a^{-3}(x) M(x) - \frac{3}{5Gb} a^{-3}(x) T(x) - \frac{N^2(x)}{2Eb} a^{-2}(x) + \lambda b = 0,$$

$$\frac{2a^{-2}(x)}{E} M(x) - \frac{1}{5G} \left( a^{-1}(x) \frac{da(x)}{dx} - N^{-1}(x) \frac{dN(x)}{dx} \right) T(x) + \frac{1}{5G} \frac{dT}{dx} = 0, \\ - \frac{12a^{-3}(x)}{Eb} \left( y(x) - \frac{1}{2} a(x) \right) M(x) - \frac{6a^{-1}(x)}{5Gb} T(x) + \frac{N(x) a^{-1}(x)}{Eb} + \lambda n = 0.$$

Powyższy układ równań w przypadku szczególnym przy stałej wysokości belki  $a = \text{const}$  posiada następujące rozwiązanie:

$$(5.4) \quad y = \frac{a}{2} + \frac{aby}{2N} (lx - x^2), \quad N = -\lambda Eab = \frac{V}{nl} = \text{const},$$

przy czym uwzględniono tu warunki brzegowe dla  $y(x)$  wynikające z symetrii belki względem środka rozpiętości

$$(5.5) \quad y(0) = \frac{a}{2}, \quad \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=\frac{l}{2}} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie (5.4) otrzymać można bezpośrednio poszukując minimum potencjału, który w tym szczególnym przypadku wyrazi się w sposób następujący:

$$(5.6) \quad U = \frac{6}{Ea^3 b} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} aby (lx - x^2) - N \left( y - \frac{a}{2} \right) \right]^2 dx + \\ + \frac{3}{5Gab} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} aby (l - 2x) - N \frac{dy}{dx} \right]^2 dx + \frac{1}{2Eab} \int_0^l N^2 dx$$

przy uwzględnieniu stałej objętości kabla sprężającego  $V = n \int_0^l N(x) dx = \text{const}$ .

Okazuje się, że w belce prostokątnej o stałych wymiarach warunek minimum potencjału jest spełniony przy stałej sile sprężającej, przy czym trasa kabla jest parabolą drugiego stopnia zarówno przy uwzględnieniu jak i przy pominięciu wpływu sił poprzecznych na wartość potencjału.

#### 6. Wpływ sił poprzecznych na kształt belki dwuteowej

W p. 5 przedstawiono próbę uwzględnienia wpływu sił poprzecznych na kształt belki, jednakże w ogólnym przypadku nie uzyskano rozwiązania w postaci poszukiwanych parametrów kształtowania. W p. 2, 3 i 4 pominięto ten wpływ całkowicie, co jest słuszne jednak tylko w środkowej części rozpiętości belki. W pobliżu podpór bowiem decydującym czynnikiem są siły ścinające, pominięcie ich prowadzi do belek o zerowych wymiarach na podporach, co nie odpowiada celom praktycznym.

Siły poprzeczne posiadają również decydujący wpływ na kształt środników w belkach dwuteowych lub skrzynkowych.

Najprostsze rozwiązanie techniczne postawionego zagadnienia ma miejsce w przypadku, gdy z jakichkolwiek powodów zmienność ciągła poszczególnych parametrów kształtu jest niecelowa lub niemożliwa do urzeczywistnienia. Wówczas najczęściej znajduje zastosowanie schodkowa zmienność grubości lub wysokości elementu, np. w przypadku półek i środników belek metalowych lub wałów napędowych urządzeń mechanicznych, [5]. W takim założeniu przekrój poprzeczny w punkcie nieciągłości sąsiadującym z podporą musi być określony z warunków wytrzymałościowych i konstrukcyjnych, zaś w innych punktach przekrój belki może być wyznaczony metodami kształtowania.

W belkach sprężonych na odcinkach, na których wymiary przekroju wyznaczone ze względu na momenty zginające są zbyt małe, należy przekroje określić zgodnie z wymaganiami konstrukcyjnymi, wykonawczymi lub estetycznymi w ten sposób jednak, aby zachować ciągłość kształtu.

Wpływ sił poprzecznych może być także uwzględniony w sposób przybliżony w zagadnieniach kształtowania. Jeden ze sposobów takiego rozwiązania polega na założeniu, że naprężenia normalne i styczne są przenoszone oddzielnie przez półki i środniki.

Wyznamy potencjał sił poprzecznych przyjmując naprężenia styczne ze wzoru

$$(6.1) \quad \tau = \frac{TS}{bJ}.$$

Po odpowiednich podstawieniach znajdziemy

$$(6.2) \quad \tau = \frac{T_p \left[ \frac{1}{12} bc (a - c) + (y - c) \frac{g}{2} (a - c - y) \right]}{g \left( \frac{1}{12} a^3 g + \frac{1}{2} a^2 bc \right)}.$$

Potencjał w danym przypadku ma postać

$$(6.3) \quad U_T = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV,$$

przy czym obszarem całkowania jest cała belka. Uwzględniając założenie, że wymiary grubości pólki i średników są małe w porównaniu do innych wymiarów belki oraz pomijając małe wyższego rzędu, znajdziemy

$$(6.4) \quad U_{Tp} = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{T_p^2}{ag} dx.$$

Tak jak poprzednio w odniesieniu do momentów zginających wyznaczono tu kształt z warunku minimum potencjału przy uwzględnieniu jedynie obciążenia użytkowego. Wzór (6.4) wskazuje na zależność potencjału  $U_{Tp}$  jedynie od pola powierzchni średnika, natomiast wymiary pólki nie występują w tym wzorze. Również parametry sprężania nie wpływają na wielkość potencjału sił poprzecznych.

Rozważania powyższe wskazują na możliwość oddzielnego traktowania średnika i pólki belki w wyniku takiego rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym belki, że maksymalne wartości naprężeń normalnych odpowiadają minimalnym naprężeniom stycznym. Przyjmować więc będziemy, że naprężenia normalne przenoszone są wyłącznie przez półki belki dwuteowej, a w średniku występują tylko naprężenia styczne. Analogiczne założenia przyjęto w pracach [6-8], traktujących o kształtowaniu płyt sandwichowych; w praktyce projektowanie belek oraz sprawdzanie wytrzymałości opierają się najczęściej na takim właśnie rozumowaniu.

Potencjał przy uwzględnieniu tylko zginania wyraża się zatem wzorem

$$(6.5) \quad U_{Mp} = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M_p^2}{a^2 b} dx,$$

zaś warunki uboczne (4.3) będą miały postać

$$(6.6) \quad \sigma'_1 = \frac{N}{2b} + \frac{M_q - M_0}{ab} = \underline{\sigma}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{2b} + \frac{-M_q - M_p + M_0}{ab} = \underline{\sigma}.$$

Stąd analogicznie do p. 4 wyznaczmy dwie funkcje niewiadome

$$(6.7) \quad y = \frac{a}{2} + \frac{M_q}{N} + \frac{M_p}{2N}, \quad N = 2\underline{\sigma}b + \frac{M_p}{a}.$$

Potencjał przy uwzględnieniu zginania i ścinania wyrazi się następująco:

$$(6.8) \quad U_p = U_{Mp} + U_{Tp} = \frac{1}{E} \int_0^l F dx,$$

gdzie

$$F = \frac{M_p^2}{a^2 b} + \frac{E}{G} \frac{T_p^2}{ag}.$$

Warunek stałej objętości ma postać (4.2). Uwzględniając ten warunek sprowadzamy nasze zagadnienie do najprostszego zadania wariacyjnego, w którym poszukujemy minimum funkcjonału z funkcją podcałkową

$$(6.9) \quad F^* = \frac{M_p^2}{a^2 b} + \frac{E T_p^2}{G ag} + (ag + 2\bar{b} + nN) \lambda.$$

Warunkiem koniecznym, aby ten funkcjonał przyjmował wartości minimalne dla funkcji  $g(x)$  i  $\bar{b}(x)$ , jest spełnienie przez te funkcje równań  $F_b^* = 0$ ,  $F_g^* = 0$ . Z tych równań znajdujemy funkcje

$$(6.10) \quad \bar{b} = \frac{M_p}{a} \sqrt{\frac{1}{2\lambda(1+n\sigma)}},$$

$$(6.11) \quad g = \frac{|T_p|}{a} \sqrt{\frac{E}{G\lambda}},$$

przy czym tylko dodatnie znaki przed pierwiastkami odpowiadają warunkom zadania.

Po podstawieniu funkcji (6.10) i (6.11) do równania (4.2) i po wykonaniu całkowania otrzymamy

$$V = \frac{1}{4} pl^2 \sqrt{\frac{E}{G\lambda}} + \frac{pl^3}{12a} \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda} (1+n\sigma)} + n \right);$$

stąd stałą  $\lambda$  występującą we wzorach (6.10) i (6.11) można wyznaczyć z równania

$$(6.12) \quad \lambda = \left( \frac{apl^2}{12Va - npl^3} \right)^2 \left[ g \frac{E}{G} + \frac{2l}{a} (1+n\sigma) + \frac{6l}{a} \sqrt{\frac{2E}{G} (1+n\sigma)} \right].$$

W ten sposób wszystkie cztery niewiadome funkcje  $\bar{b}$ ,  $g$ ,  $N$  i  $y$  mogą być wyrażone przez znane parametry kształtu belki, stałe charakteryzujące materiał oraz przez daną objętość całkowitą materiału.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] A. BRANDT, *Pewne twierdzenie z zakresu kształtowania wytrzymałościowego belek sprężonych*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963).
- [2] Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji*, Rozpr. Inżyn., 2, 10 (1962).
- [3] Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Rev., 5, 16 (1963).
- [4] A. BRANDT, *Kształtowanie belek sprężonych przez wyrównywanie skrajnych naprężeń*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
- [5] H. G. HOPKINS, *Limits of economy of material in plates*, J. Appl. Mech., nr 55-APM-2.
- [6] E. T. ONAT, W. SCHUMANN, R. T. SHIELD, *Design of circular plates for minimum weight*, J. Appl. Math. Phys., 6, 7 (1957).
- [7] W. PRAGER, R. T. SHIELD, *Minimum weight design of circular plates under arbitrary loading*, J. Appl. Math. Phys., 4, 10 (1959).
- [8] R. T. SHIELD, *Plate design for minimum weight*, Quart. Appl. Math., 2, 18 (1960).

## Резюме

ПРИМЕРЫ РАЦИОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ  
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК

Темой статьи, имеющей связь с предыдущими работами автора, [1], является рациональное проектирование предварительно напряженных балок. В п. 2 дается решение задачи такого проектирования балки прямоугольного сечения, путем выравнивания крайних, нормальных напряжений. Рассуждения, заключающиеся в п. 3 касаются также прямоугольной балки, проектирование которой проводилось из условия минимума потенциала упругих сил, возникающих под влиянием полезных нагрузок. В п. 4 приводится определение оптимальной формы двутавровой балки при использовании того же условия. В п. 5 при определении оптимальной формы двутавровой балки учитывается пренебрегаемый до сих пор элемент, которым являются поперечные силы. В заключение дается приближенный способ определения влияния поперечных сил на форму двутавровой балки. Отдельные решения заключают числовые примеры и диаграммы функций, определяющих форму балки.

## Summary

## EXAMPLES OF DESIGN OF PRESTRESSED BEAMS

The subject matter of this paper, which is a continuation of the author's former works is the research of the optimum form of a prestressed concrete beam. Sec. 2 brings a solution of the design problem of a rectangular beam by equalizing normal stresses at the ends. The considerations of Sec. 3 concern a rectangular beam designed for minimum potential of elastic forces produced by the useful load. Sec. 4 discusses the design of a double-tee beam with the same condition. In Sec. 5 devoted also to the design of a double-tee beam is considered a factor originating from the shear forces and hitherto disregarded. In the last section is described an approximate method for determining the influence of shear forces on the form of a double-tee beam. Each particular solution is illustrated by numerical examples and diagrams of the functions obtained expressing the form of the beams.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji 17 marca 1963 r.*