

**WPLYW SIŁ PODŁUŻNYCH I ZMIAN TEMPERATURY
NA WIELKOŚĆ SIŁ WEWNĘTRZNYCH I PRZEMIESZCZEŃ
W USTROJACH ŁUKOWYCH LANGERA**

WOJCIECH DZIENISZEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań są ustroje Langerera złożone z belek, łuków i łączników, w których belki przenoszą również rozpór łuków.

Są to układy wielokrotnie hiperstatyczne; wyznaczenia sił wewnętrznych w tych ustrojach można dokonać na podstawie metody sił lub przemieszczeń. Wobec znacznej liczby niewiadomych sił hiperstatycznych obliczenia statyczne tych ustrojów są skomplikowane i wymagają znacznego nakładu pracy.

Uproszczenie obliczeń statycznych może być dokonane przez zastąpienie rzeczywistego schematu ustroju schematem zastępczym. W schemacie tym łączniki, przenoszące jedynie siły osiowe, rozmieszczone są w sposób ciągły i równomierny.

Problem analizy sił wewnętrznych w ustrojach złożonych z belek łuków i łączników stanowiących rodzaj błony nierozciągliwej był przedmiotem rozważań wielu prac i miał następujące etapy rozwojowe.

W roku 1923 G. PIGEAUD w podręczniku statyki budowlanej, [1], przedstawił niektóre zależności między siłami wewnętrznymi w ustrojach płaskich złożonych z dwóch prętów, połączonych łącznikami rozmieszczonymi w sposób ciągły o stałym przekroju normalnym na jednostkę długości.

Rozwinięciem zagadnienia Pigeaud, zajmował się S. BELŻECKI zmierzając do wprowadzenia wzorów na siły wewnętrzne we wszystkich trzech elementach składowych tego rodzaju ustrojów, [2].

W roku 1952 F. SZELĄGOWSKI przedstawił wzory do obliczeń statycznych układów belkowych wzmocnionych łukami w pracy, [3]. S. R. SPARKES i S. CHANDRANGSU w 1953 roku opracowali szczegółową metodę analizy statycznej ustrojów łukowych, [4]. R. DĄBROWSKI w monografii ustrojów Langerera podał m.in. wzory do wyznaczenia sił w wieszakach przy występowaniu momentów zginających w łukach, [5]. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT i J. KOSMOWSKI w obszernym opracowaniu przedstawili zagadnienie statyki ustrojów łukowych oraz wyniki pomiarów uzyskane na modelach, [6]. Interesującą metodę wyznaczania sił wewnętrznych w ustrojach złożonych z belek, łuków i łączników przedstawił W. NOWACKI w II tomie «*Mechaniki Budowlanej*», [7]. Z. WASIUTYŃSKI w podręczniku o mostach, [8], wiele miejsca poświęcił statyce ustrojów łukowych podając cały szereg oryginalnych rozwiązań. W roku 1960 Z. KORDECKI wprowadził dalsze uzupełnienia w swojej pracy doktorskiej [9]

napisanej pod kierunkiem T. Kozłowskiego, dowodząc paru nieznanych własności tych ustrojów, jak np. znikania momentów występujących w połączeniu łuku z belką ustroju Langerera w przypadku założenia nieodkształcalności osiowej wszystkich elementów składowych.

Celem niniejszej pracy jest określenie wpływu sił podłużnych oraz zmian temperatury na wielkości sił wewnętrznych i przemieszczeń pionowych. Wpływ odkształcalności osiowej wszystkich elementów ma niewątpliwie istotne znaczenie, szczególnie w ustrojach stosowanych we współczesnym budownictwie mostowym; ustroje te m.in. charakteryzują się tym, że pola przekrojów normalnych belek, łuków i łączników są dostatecznie małe, a ponadto łuki tych ustrojów są płaskie. Nadawanie małych wyniosłości łukom tych ustrojów wynika z celowości sprężania belek, zaś dążenie do zmniejszenia pól przekrojów normalnych przy jednoczesnym stosowaniu materiałów o większej wytrzymałości prowadzi do zmniejszenia ciężaru własnego.

Założenie o nieodkształcalności osiowej belek, łuków i łączników prowadzi do wypaczenia wyników i nie może być przyjmowane w obliczeniach statycznych tych ustrojów. Niestety, uwzględnienie odkształcalności osiowej wszystkich elementów składowych komplikuje rozwiązanie zagadnienia, którego nie można przedstawić w tak prostej postaci jak w przypadku pominięcia wpływu sił podłużnych.

2. Oznaczenia

- x, y współrzędne,
- y_a rzędna osi łuku,
- y_c wysokość łączników,
- a odcięta położenia obciążenia wzdłuż belki,
- u, v składowe przemieszczeń,
- l rozpiętość podporowa ustroju,
- f wzniesienie osi łuku,
- p obciążenie na jednostkę długości,
- t przyrost temperatury lub wskaźnik oznaczający zależność od temperatury,

$\xi = x/l$ współrzędna bezwymiarowa,

$a = a/l$ współrzędna bezwymiarowa punktu przyłożenia obciążenia wzdłuż belki,

α^t współczynnik rozszerzalności cieplnej,

φ kąt pochylenia stycznej do osi łuku,

A pole przekroju,

J moment bezwładności przekroju,

E współczynnik sprężystości odkształceń liniowych,

H, P odpowiednio siła skupiona pozioma i pionowa,

M, N, T odpowiednio moment zginający, siła podłużna, siła poprzeczna,

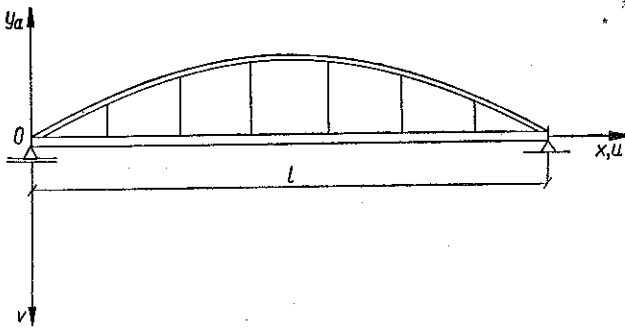
M_A, M_B momenty zginające w punktach A lub B .

a, b, c wskaźniki oznaczające przynależność do łuku, belki lub łączników.

Wskaźniki M_A , M_B , p_c , P , H i t umieszczone nad symbolami M_a , T_a , N_a , M_b i T_b , wskazują na przyczynę powstania sił wewnętrznych w belce lub w łuku, np: $M_a^{p_c}$, $M_b^{p_c}$, umieszczone zaś nad symbolami v_a , v_b wskazują na przyczynę powstania przemieszczeń osi łuku lub osi belki, np: $v_a^{p_c}$, $v_b^{p_c}$. Wskaźniki H , p_c , M_A i M_B umieszczone po dwa przy symbolu δ wskazują: pierwszy — kierunek działania, a drugi — przyczynę powstania odkształcenia δ , np: $\delta_{H p_c}$, $\delta_{M_A p_c}$.

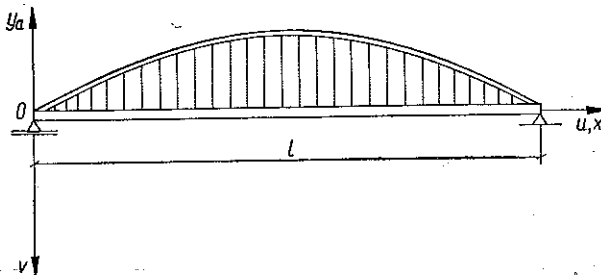
3. Założenia. Zależności podstawowe

1. Rzeczywisty układ statyczny ustroju (rys. 1) zastąpiono schematem (rys. 2), w którym pionowe łączniki są rozmieszczone w sposób ciągły o stałym przekroju normalnym na jednostkę długości.



Rys. 1

2. Łączniki przenoszą jedynie siły osiowe.
3. Oś łuku jest parabolą drugiego stopnia o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ i małej wyniosłości.
4. Siły wewnętrzne ustroju, wywołane obciążeniami zewnętrznymi działającymi na belkę, mogą być wyznaczone przez superpozycję sił wewnętrznych, wywołanych pionową siłą skupioną P o zmiennym położeniu wzdłuż przęsła.



Rys. 2

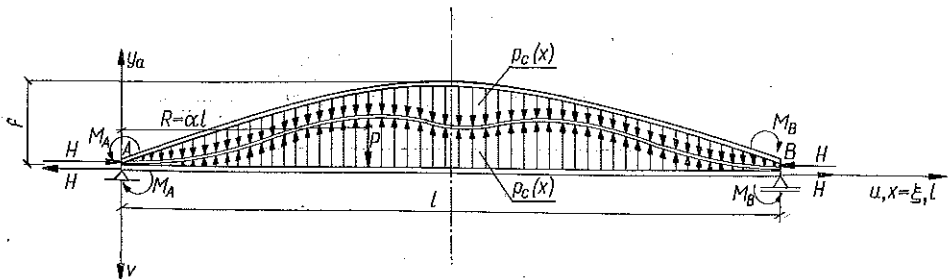
5. Pominięto wpływ sił poprzecznych na odkształcenia.
 6. Układy odniesienia xOy , uOv przyjęto jak na rys. 1 i 2.
- Zagadnienie określenia wielkości sił wewnętrznych w rozpatrywanych ustrojach sprowadza się do wyznaczenia niewiadomej funkcji oddziaływania łączników na

łuk i belkę $p_c(x)$ oraz rozporu H i momentów zginających występujących w połączeniach belki z łukiem M_A i M_B . Podstawą do wyznaczenia funkcji oddziaływania łączników $p_c(x)$ na łuk i belkę jest warunek ciągłości przemieszczeń pionowych osi łuku, osi belki i łączników:

$$(3.1) \quad v_b - v_a = v_c.$$

Warunek ten natury czysto geometrycznej może być bezpośrednio wyprowadzony na podstawie twierdzenia Menabrea o minimum potencjału sił wewnętrznych w ustroju, pozostającym w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych w następujący sposób:

Rozpatrzmy zastępczy izostacyjny schemat ustroju przedstawionego na rys. 3.



Rys. 3

W rozpatrywanym przypadku twierdzenie Menabrea przybiera postać

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2E} \left[\left(\frac{M_a^2}{J_a} + \frac{N_a^2}{A_a} \right) \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{M_b^2}{J_b} + \frac{H^2}{A_b} \right] + \frac{p_c^2 y_c}{2E_c A_c} \right\} dx =$$

$$= \int_0^l F \left(M^{p_c}, \frac{dM^{p_c}}{dx}, \frac{d^2 M^{p_c}}{dx^2} \right) dx = \min,$$

gdzie przyjęliśmy następujące oznaczenia:

$$(3.2) \quad M_a = M^{p_c} + M_a^H - M^{M_A M_B},$$

$$M_b = M_b^p + M^{M_A M_B} - M^{p_c},$$

$$M_a^{M_A M_B} = -M_b^{M_A M_B} = -M^{M_A M_B}, \quad M_a^{p_c} = -M_b^{p_c} = -M^{p_c},$$

$$N_a = -H \cos \varphi - \left(\frac{dM^{p_c}}{dx} - \frac{dM^{M_A M_B}}{dx} \right) \sin \varphi = -\frac{H}{\cos \varphi} - (T_a^{p_c} - T_a^{M_A M_B}) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$p_c = -\frac{d^2 M^{p_c}}{dx^2}.$$

Funkcja M^{pc} , dla której funkcjonal U osiąga wartość równą minimum, musi być rozwiązaniem równania Eulera-Poissona

$$\frac{\partial F}{\partial M^{pc}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \frac{dM^{pc}}{dx}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \frac{d^2 M^{pc}}{dx^2}} = 0,$$

które w danym przypadku ma postać

$$\frac{M_a}{EJ_a} \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{EA_a} \frac{d}{dx} (N_a \operatorname{tg} \varphi) - \frac{M_b}{EJ_b} - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{p_c y_c}{E_c A_c} \right) = 0.$$

Korzystając ze znanych zależności różniczkowych przemieszczeń pionowych osi belki i osi łuku

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 v_b}{dx^2} &= -\frac{M_b}{EJ_b}, \\ \frac{d^2 v_a}{dx^2} &= -\frac{M_a}{EJ_a} \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{N}{EA_a} \operatorname{tg} \varphi \right), \end{aligned}$$

znajdziemy

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} - \frac{d^2 v_a}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{p_c y_c}{E_c A_c} \right),$$

skąd po dwukrotnym całkowaniu uzyskujemy warunek ciągłości przemieszczeń pionowych (3.1)

$$v_b - v_a = v_c = \frac{p_c y_c}{E_c A_c}.$$

Całkowite przemieszczenia pionowe osi belki i osi łuku we wzorze (3.1) możemy przedstawić jako sumy przemieszczeń składowych:

$$v_b = v_b^p + v_b^{MA^M_B} + v_b^{pc}, \quad v_a = v_a^H + v_a^{MA^M_B} + v_a^{pc}.$$

Stąd

$$(3.4) \quad v_b^p - v_a^H + v_b^{MA^M_B} - v_a^{MA^M_B} + v_b^{pc} - v_a^{pc} = \frac{p_c y_c}{E_c A_c}.$$

Wprowadzimy z kolei następujące założenie upraszczające: pominiemy przy wyznaczaniu przemieszczeń pionowych osi łuku w wyrażeniu, uwzględniającym wpływ sił podłużnych na odkształcenia, drugi składnik występujący we wzorze (3.2)₅:

$$N_a = -\frac{H}{\cos \varphi} - (T_a^{pc} - T_a^{MA^M_B}) \operatorname{tg} \varphi \approx -\frac{H}{\cos \varphi} \approx -H.$$

Przyjęte uproszczenie jest uzasadnione z dwóch powodów: 1) wiadomo, że siły poprzeczne w łuku T_a^{pc} i $T_a^{MA^M_B}$ są małe w porównaniu z rozpresem, 2) ustroje roz-

patrywane cechuje dostatecznie małą wyniosłość łuku, a więc i małe kąty pochylenia stycznych do osi łuku. Stąd $ds \approx dx$, $\cos \varphi \approx 1$.

Uwzględniając te uproszczenia otrzymujemy następujące zależności dla przemieszczeń składowych osi łuku i osi belki:

$$(3.5) \quad J_a v_a^{M_A M_B} = -J_b v_b^{M_A M_B}, \quad J_a v_a^{p_c} = -J_b v_b^{p_c}.$$

Po uwzględnieniu (3.5) w (3.4) warunek (3.1) przybierze postać

$$(3.6) \quad v_b^p(x, a) + \frac{J_a + J_b}{J_a} [v_b^{M_A M_B}(x) + v_b^{p_c}(x)] - v_a^H(x) = \frac{p_c(x) y_c(x)}{E_c A_c}.$$

4. Siły wewnętrzne i przemieszczenia

W punkcie tym zajmiemy się wyznaczaniem sił wewnętrznych i przemieszczeń spowodowanych działaniem pionowej siły skupionej P ustawionej na belce. Rozpocznemy od wyznaczenia funkcji oddziaływania łączników na łuk i belkę $p_c(x)$ na podstawie wzoru (3.6).

Po wprowadzeniu nowej zmiennej niezależnej $\xi = x/l$ wzór (3.6) przybiera postać

$$(4.1) \quad \frac{p_c(\xi) y_c(\xi)}{E_c A_c} = v_b^p(\xi, a) + \frac{J_a + J_b}{J_a} [v_b^{M_A M_B}(\xi) + v_b^{p_c}(\xi)] - v_a^H(\xi).$$

Ugięcie belki wywołane obciążeniem $p_c(\xi)$ przedstawimy w postaci

$$v_b^{p_c}(\xi) = l \int_0^1 v_b^1(\xi, \bar{a}) p_c(\bar{a}) d\bar{a},$$

przy czym

$$v_b^1(\xi, \bar{a}) = \frac{l^3}{EJ_b} [-(1 - \bar{a}) \xi^3 + (1 - \bar{a}) \bar{a} (2 - \bar{a}) \xi + \eta (\xi - \bar{a})^3]$$

oznacza linię wpływową ugięcia w przekroju ξ (jest to linia związana działaniem siły $P = 1$ ustawionej w przekroju \bar{a}), η oznacza funkcję posiadającą tę własność, że

$$\text{jeśli } \xi < \bar{a} \leq 1, \quad 0 \leq \xi < \bar{a}, \quad \text{to } \eta = 0;$$

$$\text{jeśli } 0 \leq \bar{a} < \xi, \quad \bar{a} < \xi \leq 1, \quad \text{to } \eta = 1.$$

Po podstawieniu wyrażenia na $p_c(\bar{a})$ ze wzoru (4.1) pod całkę mamy

$$(4.2) \quad v_b^{p_c}(\xi) = l E_c A_c \int_0^1 \frac{v_b^1(\xi, \bar{a})}{y_c(\bar{a})} \left\{ v_b^p(\bar{a}, a) + \frac{J_a + J_b}{J_a} [v_b^{M_A M_B}(\bar{a}) + v_b^{p_c}(\bar{a})] - v_a^H(\bar{a}) \right\} d\bar{a}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób niejednorodne równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju względem funkcji $v_b^c(\xi)$; znanymi funkcjami występującymi w równaniu są następujące:

$$\begin{aligned}
 y_c(\bar{a}) &= y_a(\bar{a}) = 4f\bar{a}(1 - \bar{a}), \\
 v_a^H(\bar{a}) &= \frac{HfI^2}{3EJ_a}(-\bar{a} + 2\bar{a}^3 - \bar{a}^4) + \frac{H}{EA_a}y_a(\bar{a}), \\
 (4.3) \quad v_b^{M_A M_B}(\bar{a}) &= \frac{I^2}{6EJ_b}[\bar{a}(M_B + 2M_A) - (M_B - M_A)\bar{a}^3 - 3M_A\bar{a}^2], \\
 v_b^P(\bar{a}, \alpha) &= \frac{PI^3}{6EJ_b}[-(1 - \alpha)\bar{a}^3 + (1 - \alpha)\alpha(2 - \alpha)\bar{a} + \eta(\bar{a} - \alpha)^3],
 \end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 \eta &= 0, & \text{gdy } \bar{a} < \alpha \leq 1, & \quad 0 \leq \bar{a} < \alpha; \\
 \eta &= 1, & \text{gdy } 0 \leq \alpha < \bar{a}, & \quad \alpha < \bar{a} \leq 1.
 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu równania całkowego (4.2) względem funkcji $v_b^c(\xi)$ oddziaływanie łączników na łuk i belkę wyznaczyć możemy ze wzoru

$$-\frac{EJ_b}{I^4} \frac{d^4 v_b^c}{d\xi^4} = p_c(\xi).$$

Zajmiemy się z kolei rozwiązaniem równania całkowego (4.2). Funkcję $v_b^1(\xi, \bar{a})$ możemy przedstawić za pomocą szeregu sinusowego Fouriera, [7],

$$v_b^1(\xi, \bar{a}) = \frac{2I^3}{EJ_b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi \sin i\pi\bar{a}}{\pi^4 i^4}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do równania całkowego (4.2) znajdziemy rozwiązanie w postaci

$$(4.4) \quad v_b^c(\xi) = L_1 \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\sin i\pi\xi}{\pi^4 i^4},$$

gdzie

$$C_i = 4f \int_0^1 \frac{\sin i\pi\bar{a}}{y_c(\bar{a})} \left\{ v_b^P(\bar{a}, \alpha) + \frac{J_a + J_b}{J_a} [v_b^{M_A M_B}(\bar{a}) + v_b^c(\bar{a})] - v_a^H(\bar{a}) \right\} d\bar{a}, \quad i = 1, 2, \dots$$

są nieznanymi współczynnikami, zaś

$$L_1 = \frac{I^4 A_c}{2f} \frac{E_c}{E} \frac{J_a + J_b}{J_a J_b}.$$

Uwzględniając we wzorze na C_i wyrażenie na $v_b^{2c}(\xi)$ znajdziemy

$$(4.5) \quad C_i = 4fL \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\pi^4 n^4} \int_0^1 \frac{\sin i\pi\bar{a} \sin n\pi\bar{a}}{y_c(\bar{a})} d\bar{a} =$$

$$= 4f \int_0^1 \frac{\sin i\pi\bar{a}}{y_c(\bar{a})} \left[v_b^P(\bar{a}, a) + \frac{J_a + J_b}{J_a} v_b^{M_A M_B}(\bar{a}) - v_a^H(\bar{a}) \right] d\bar{a}, \quad i = 1, 2, \dots$$

gdzie

$$L = \frac{J_a + J_b}{J_a} L_1.$$

Funkcje v_a^H , $v_b^{M_A M_B}$ i v_b^P występujące pod całkami (4.5) rozwinięte w szereg sinusowy Fouriera przybierają postać, [7],

$$(4.6) \quad v_a^H(\bar{a}) = -\frac{32HfI^2}{EJ_a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\pi\bar{a}}{n^5 \pi^5} + \frac{32Hf}{EA_a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\pi\bar{a}}{n^3 \pi^3},$$

$$v_b^{M_A M_B}(\bar{a}) = \frac{2M_A l^2}{EJ_b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\bar{a}}{n^3 \pi^3} - \frac{2M_B l^2}{EJ_b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\bar{a}}{n^3 \pi^3} (-1)^n,$$

$$v_b^P(\bar{a}, a) = \frac{2Pl^3}{EJ_b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\bar{a} \sin n\pi a}{n^4 \pi^4}.$$

Po podstawieniu tych szeregów do (4.5) oraz po wykonaniu całkowań otrzymujemy:

$$(4.7) \quad A_i = L \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \frac{a_{in}}{n^4 \pi^4} = \frac{2Pl^3}{EJ_b} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{in} \sin n\pi a}{\pi^4 n^4} +$$

$$+ \frac{32HfI^2}{EJ_a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{in}}{\pi^5 n^5} - \left[\frac{32Hf}{EA_a} - \frac{2l^2(J_a + J_b)}{EJ_a J_b} (M_A + M_B) \right] \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{in}}{\pi^3 n^3},$$

$i = 1, 3, \dots$

$$B_i = L \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n \frac{a_{in}}{n^4 \pi^4} = \frac{2Pl^3}{EJ_b} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_{in} \sin n\pi a}{n^4 \pi^4} +$$

$$+ \frac{2l^2(J_a + J_b)}{EJ_a J_b} (M_A - M_B) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_{in}}{\pi^3 n^3}, \quad i = 2, 4, \dots$$

przy czym

$$C_i = A_i, \quad \text{jeśli} \quad i = 1, 3, \dots,$$

$$C_i = B_i, \quad \text{jeśli} \quad i = 2, 4, \dots$$

Współczynniki liczbowe a_{in} występujące pod znakami sum są określone za pomocą wzorów

$$(4.8) \quad a_{in} = 4f \int_0^1 \frac{\sin i\pi\bar{a} \sin n\pi\bar{a}}{y_c(\bar{a})} d\bar{a} = \int_0^1 \frac{\sin i\pi\bar{a} \sin n\pi\bar{a}}{\bar{a}(1-\bar{a})} d\bar{a} = \\ = \frac{1}{2} (\cos \pi i \cos \pi n + 1) \left[\ln \left(\frac{i+n}{|i-n|} \right) + Ci(\pi|i-n|) - Ci(\pi(i+n)) \right],$$

jeśli $i \neq n$ oraz

$$a_{ii} = 4f \int_0^1 \frac{\sin^2 i\pi\bar{a}}{y_c(\bar{a})} d\bar{a} = \int_0^1 \frac{\sin^2 i\pi\bar{a}}{\bar{a}(1-\bar{a})} d\bar{a} = \gamma + \ln 2\pi i - Ci(2\pi i),$$

jeśli $i = n$,

przy czym

$$Ci(z) = \gamma + \ln z - \int_0^z \frac{1 - \cos t}{t} dt,$$

zaś $\gamma \approx 0,577215$ jest stałą Eulera.

Zależności (4.7) stanowią dwa nieskończone układy równań algebraicznych liniowych i niejednorodnych względem niewiadomych A_i i B_i . Rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$(4.9) \quad A_i = -\frac{\pi^4}{L\Delta} \left\{ \frac{2Pl^3}{EJ_b} \sum_{k,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{kn} \Delta_{ki}}{\pi^4 n^4} \sin n\pi\alpha + \frac{32Hfl^2}{EJ_a} \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{ki} a_{kn}}{n^5 \pi^5} + \right. \\ \left. + \left[\frac{2l^2}{EJ_b} \frac{J_a + J_b}{J_a} (M_A + M_B) - \frac{32Hf}{EA_a} \right] \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{ki} a_{kn}}{n^3 \pi^3} \right\}, \quad i = 1, 3, \dots,$$

przy czym Δ oznacza wyznacznik główny układu równań (4.7)₁

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(a_{11} - \frac{\pi^4}{L} \right), & \frac{a_{13}}{3^4}, & \dots & \frac{a_{1k}}{k^4}, & \dots \\ a_{31}, & \left(\frac{a_{33}}{3^4} - \frac{\pi^4}{L} \right), & \dots & \frac{a_{3k}}{k^4}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}, & \frac{a_{k3}}{3^4}, & \dots & \left(\frac{a_{kk}}{k^4} - \frac{\pi^4}{L} \right), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

Δ_{ki} zaś podwyznacznik, który powstaje z wyznacznika głównego układu przez skreślenie k -rzędu i i -tej kolumny i pomnożenie uzyskanego w ten sposób wyznacznika przez $(-1)^{i+k}$. Wskaźnik k przyjmują tylko wartości nieparzyste. Podobnie

$$B_i = -\frac{\pi^4}{L\bar{\Delta}} \left[\frac{2Pl^3}{EJ_b} \sum_{k,n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_{kn} \bar{\Delta}_{ki}}{\pi^4 n^4} \sin n\pi\alpha + \frac{2l^2}{EJ_b} \frac{(J_a + J_b)}{J_a} (M_A - M_B) \sum_{n,k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_{kn} \bar{\Delta}_{ki}}{n^3 \pi^3} \right], \quad i = 2, 4, \dots,$$

przy czym $\bar{\Delta}$ oznacza wyznacznik główny układu równań (4.7)₂

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \left(\frac{a_{22}}{2^4} - \frac{\pi^4}{L} \right), & \frac{a_{22}}{4^4}, & \dots & \frac{a_{2k}}{k^4}, & \dots \\ \frac{a_{42}}{2^4}, & \left(\frac{a_{44}}{4^4} - \frac{\pi^4}{L} \right), & \dots & \frac{a_{4k}}{k^4}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{k2}}{2^4}, & \frac{a_{k4}}{4^4}, & \dots & \left(\frac{a_{kk}}{k^4} - \frac{\pi^4}{L} \right), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

zaś $\bar{\Delta}_{ki}$ odpowiednie minory pomnożone przez $(-1)^{i+k}$. Wskaźniki k przyjmują tylko wartości parzyste.

W zastosowaniach wystarczy ograniczyć się do wyznaczenia kilku współczynników A_i i B_i .

Po wyznaczeniu współczynników A_i, B_i przemieszczenia pionowe osi belki wywołane oddziaływaniem łączników możemy wyznaczyć według wzoru (4.4).

Przy przyjętych założeniach moment zginający belki i łuku wywołany oddziaływaniem łączników oraz siły osiowe łączników określone są za pomocą wzorów:

$$(4.10) \quad M_a^p = -M_b^p = -\frac{L_1 EJ_b}{l^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \sin i\pi\xi}{\pi^2 i^2},$$

$$(4.11) \quad p_c = -\frac{L_1 EJ_b}{l^4} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin i\pi\xi.$$

Pozostają więc do wyznaczenia niewiadome wielkości momentów zginających M_A, M_B oraz rozporu H . Wielkości te wyznaczmy korzystając z układu równań kanonicznych metody sił.

Współczynniki przy niewiadomych, będące uogólnionymi przemieszczeniami δ_{ik} wyznaczono na podstawie wzoru Maxwella-Mohra

$$\delta_{ik} = \sum_{r=1}^{r=n} \int_0^{s_r} \left(\frac{M_i M_k}{E_r J_r} + \frac{N_i N_k}{E_r A_r} \right) ds_r.$$

W rozpatrywanym przypadku i przy przyjętych założeniach układ równań kanonicznych metody sił posiada postać

$$\left[\frac{8f^2 l}{15EJ_a} + \frac{l(A_a + A_b)}{EA_a + A_b} \right] H + \frac{l f}{3EJ_a} (M_A + M_B) + \delta_{Hp_c}(H, M_A, M_B) = 0,$$

$$\frac{l f}{3EJ_a} H + \frac{l(J_a + J_b)}{3EJ_a J_b} M_A + \frac{l(J_a + J_b)}{6EJ_a J_b} M_B + \frac{Pl^2}{6EJ_b} (1 - \alpha) \alpha (2 - \alpha) + \delta_{M_A p_c}(H, M_A, M_B) = 0,$$

$$\frac{l f}{3EJ_a} H + \frac{l(J_a + J_b)}{6EJ_a J_b} M_A + \frac{l(J_a + J_b)}{3EJ_a J_b} M_B + \frac{Pl^2}{6EJ_b} (1 - \alpha^2) + \delta_{M_B p_c}(H, M_A, M_B) = 0$$

lub też

$$\left[\frac{8f^2 l}{15EJ_a} + \frac{l(A_a + A_b)}{EA_a A_b} \right] H + \frac{l f}{3EJ_a} (M_A + M_B) + \delta_{Hp_c} = 0,$$

$$(4.12) \quad \frac{2l f}{3EJ_a} H + \frac{l(J_a + J_b)}{2EJ_a J_b} (M_A + M_B) + \frac{Pl^2}{2EJ_b} (1 - \alpha) \alpha + \delta_{M_A p_c} + \delta_{M_B p_c} = 0,$$

$$\frac{(J_a + J_b) l}{6EJ_a J_b} (M_A - M_B) + \frac{Pl^2}{6EJ_b} \alpha (1 - \alpha) (1 - 2\alpha) + \delta_{M_A p_c} - \delta_{M_B p_c} = 0.$$

Uogólnione przemieszczenia δ_{Hp_c} , $\delta_{M_A p_c}$ i $\delta_{M_B p_c}$ możemy wyznaczyć korzystając ze wzorów

$$\delta_{Hp_c} = -\frac{4fl}{EJ_a} \int_0^1 \xi(1-\xi) M_a^{p_c}(\xi) d\xi + \frac{l}{E_c A_c} \int_0^1 p_c(\xi) p_c^{H-1}(\xi) y_c(\xi) d\xi,$$

$$\delta_{M_A p_c} = \frac{l(J_a + J_b)}{EJ_a J_b} \int_0^1 (1-\xi) M_b^{p_c}(\xi) d\xi + \frac{l}{E_c A_c} \int_0^1 p_c(\xi) p_c^{M_A-1}(\xi) y_c(\xi) d\xi,$$

$$\delta_{M_B p_c} = \frac{l(J_a + J_b)}{EJ_a J_b} \int_0^1 \xi M_b^{p_c}(\xi) d\xi + \frac{l}{E_c A_c} \int_0^1 p_c(\xi) p_c^{M_B-1}(\xi) y_c(\xi) d\xi.$$

Po podstawieniu pod całkami wyrażeń na $M_a^{p_c}(\xi)$, $M_b^{p_c}(\xi)$ i $p_c(\xi)$ oraz po wykonaniu całkowań po przekształceniach znajdziemy

$$(4.13) \quad \delta_{Hp_c} = \frac{16fL_1 J_b}{l J_a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_i}{\pi^5 i^5} + \frac{4fl}{E_c A_c} \left(\frac{EJ_b L_1}{l^4} \right)^2 \sum_{n,i=1,3,\dots}^{\infty} A_n A_i^{H-1} b_{ni},$$

$$\delta_{M_A p_c} + \delta_{M_B p_c} = \frac{2L_1(J_a + J_b)}{l J_a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_i}{\pi^3 i^3} + \frac{8fl}{E_c A_c} \left(\frac{EJ_b L_1}{l^4} \right)^2 \sum_{n,i=1,3,\dots}^{\infty} A_n A_i^{M_A-1} b_{ni},$$

$$\delta_{M_A p_c} - \delta_{M_B p_c} = \frac{2L_1(J_a + J_b)}{l J_a} \sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} \frac{B_i}{\pi^3 i^3} + \frac{8fl}{E_c A_c} \left(\frac{EJ_b L_1}{l^4} \right)^2 \sum_{n,i=2,4,\dots}^{\infty} B_n B_i^{M_A-1} b_{ni},$$

przy czym

$$A_i^{H=1} = -\frac{\pi^4}{L\Delta} \left(\frac{32fl^2}{EJ_a} \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{ki} a_{kn}}{n^5 \pi^5} - \frac{32f}{EA_a} \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{ki} a_{kn}}{n^3 \pi^3} \right),$$

$$A_i^{M_A=1} = A_i^{M_B=1} = -\frac{2\pi^4 l^2 (J_a + J_b)}{L\Delta EJ_a J_b} \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{ki} a_{kn}}{n^3 \pi^3},$$

$$B_i^{M_A=1} = -B_i^{M_B=1} = -\frac{2\pi^4 l^2 (J_a + J_b)}{L\Delta EJ_a J_b} \sum_{n,k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{ki} a_{kn}}{n^3 \pi^3}.$$

Współczynniki liczbowe b_{in} występujące pod znakami sum są określone za pomocą wzorów

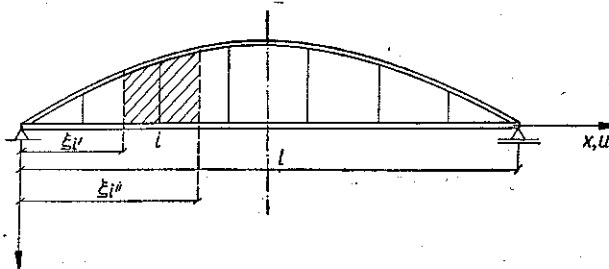
$$(4.14) \quad b_{in} = b_{ni} = \int_0^1 \xi (1 - \xi) \sin i\pi\xi \sin n\pi\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{[(-1)^{i-n} + 1]}{(i-n)^2 \pi^2} + \frac{[(-1)^{i+n} + 1]}{(i+n)^2 \pi^2} \right\} \quad \text{przy } i \neq n,$$

$$b_{ii} = \int_0^1 (1 - \xi) \xi \sin^2 \pi i \xi d\xi = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi^2 i^2} \quad \text{przy } i = n.$$

Po podstawieniu (4.13) do układu równań (4.12) a następnie po rozwiązaniu tego układu względem M_A , M_B i H otrzymamy wielkości rozporu i momentów podporowych belki i łuku wywołanych działaniem siły P o zmiennym ustawieniu.

Znając funkcję oddziaływania łączników na belkę i łuk oraz wartości M_A , M_B i H , możemy wyznaczyć wielkości dowolnych sił wewnętrznych oraz przemieszczeń ustroju korzystając z podstawowych zależności wyprowadzonych w p. 3.



Rys. 4

W przypadku ustrojów spotykanych w praktyce, w których liczba łączników jest skończona, siły osiowe w łącznikach obliczamy jako całki oznaczone (por. rys. 4)

$$(4.15) \quad P_i = l \int_{\xi_i'}^{\xi_i''} p_c(\xi) d\xi$$

przy wykorzystaniu wzoru (4.11).

Wyprowadzone wzory pozwalają ocenić wpływ odkształcalności osiowej wszystkich elementów ustroju na wielkości sił wewnętrznych.

W celu porównania wyników zestawimy zależności dotyczące sił wewnętrznych i przemieszczeń w założeniu nieodkształcalności osiowej belki, łuku i łączników. Przy tym założeniu warunek ciągłości przemieszczeń pionowych osi belki i osi łuku (3.1) wyraża równość ugięć belki i łuku w dowolnym przekroju pionowym,

$$(4.16) \quad v_b = v_a,$$

przy czym ugięcia łuku są wywołane jedynie momentami zginającymi. Po podstawieniu funkcji na v_b i v_a do (4.16) można natychmiast określić ugięcie belki spowodowane oddziaływaniem łączników:

$$(4.17) \quad v_b^c(x) = -\frac{J_a}{J_a+J_b} \left[v_b^p(x, a) + \frac{J_b+J_a}{J_a} v_b^{M_A M_B}(x) - v_a^H(x) \right].$$

Ugięcia belki i łuku mają przeto postać

$$(4.18) \quad v_b(x) = v_a(x) = \frac{J_b}{J_a+J_b} [v_b^p(x, a) - v_a^H(x)].$$

Stąd łatwo określić jest momenty zginające belki i łuku, które wyrażają się prostymi wzorami:

$$(4.19) \quad M_a = \frac{J_a}{J_a+J_b} [M_b^p(x, a) - Hy_a(x)],$$

$$M_b = \frac{J_b}{J_a+J_b} [M_b^p(x, a) - Hy_a(x)].$$

Niewiadome wielkości rozporu oraz momentów utwierdzenia wyznaczyć możemy z układu równań kanonicznych metody sił:

$$(4.20) \quad H = \frac{5}{8} \frac{Pl}{f} (\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha), \quad M_A = M_B \equiv 0,$$

przy czym $\alpha = a/l$ jest argumentem określającym położenie siły skupionej P wzdłuż przęsła.

Wyrażenie na siły osiowe łączników przybiera postać

$$(4.21) \quad p_c = -\frac{d^4 v_b}{d\xi^4} \frac{EJ_b}{l^4} = \frac{J_a}{J_a+J_b} \frac{P}{l} \delta(\xi - \alpha) + \frac{8f}{l^2} \frac{J_b}{J_a+J_b} H(\alpha),$$

przy czym $\xi = x/l$. We wzorze tym $\delta(\xi - \alpha)$ oznacza funkcję Diraca.

Wyprowadzone wzory na siły wewnętrzne w rozpatrywanych ustrojach przy założeniu nieodkształcalności osiowej wszystkich elementów są niezmiernie proste. Nieśtetę, pominięcie wpływu sił podłużnych prowadzi do błędnego określenia przemieszczeń pionowych i sił wewnętrznych w rozpatrywanych ustrojach. Błędy te omówimy w p. 7. na przykładzie liczbowym.

5. Siły wewnętrzne i przemieszczenia termiczne

Rozpatrzmy wpływ temperatury łuku, belki oraz łączników na wielkość sił wewnętrznych w rozpatrywanych urządzeniach.

Niech temperatura łuku, belki i łączników wzrośnie odpowiednio o t_a , t_b i t_c . Warunek ciągłości przemieszczeń przybiera w tym przypadku postać

$$(5.1) \quad \alpha_c^t y_c t_c + v_c = v_b - v_a.$$

Po podstawieniu do równości (5.1) funkcji v_b , v_a i v_c znajdziemy

$$\frac{y_c p_c}{E_c A_c} + \alpha_c^t y_c t_c = \frac{J_a + J_b}{J_a} v_b^{MA} - v_a^H - v_a^{t_a} + \frac{J_a + J_b}{J_a} v_b^{pc}$$

lub

$$(5.2) \quad p_c = \frac{E_c A_c}{h_c} \left[\alpha_c^t y_c t_c + \frac{J_a + J_b}{J_a} (v_b^{MA} + v_b^{pc}) - v_a^H - v_a^{t_a} \right].$$

Ugięcie belki wywołane oddziaływaniem łączników $p_c(\xi)$ wyrazimy podobnie jak w p. 4 w postaci

$$(5.3) \quad v_b^{pc}(\xi) = l E_c A_c \int_0^1 \frac{v_b^1(\xi, \bar{a})}{y_c(\bar{a})} \left\{ \frac{J_a + J_b}{J_a} [v_b^{MA}(\bar{a}) + v_b^{pc}(\bar{a})] - v_a^{Ht_a}(\bar{a}) + \alpha_c^t t_c y_c(\bar{a}) \right\} d\bar{a},$$

przy czym

$$v_a^{Ht_a}(\bar{a}) = \frac{Hfl^3}{3EJ_a} (-\bar{a} + 2\bar{a}^3 - \bar{a}^4) + \frac{y_a(\bar{a})}{EA_a} H - \alpha_a^t t_a y_a(\bar{a}),$$

$$v_b^{MA}(\bar{a}) = \frac{M_A l^2}{2EJ_b} \bar{a}(1 - \bar{a}),$$

gdzież

$$M_A = M_B.$$

Rozwiązując równanie (5.3) metodą opisaną w p. 4 otrzymujemy

$$(5.4) \quad v_b^{pc}(\xi) = L_1 \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_i \sin i\pi\xi}{\pi^4 i^4},$$

gdzie

$$A_i = -\frac{\pi^4}{L\Delta} \left\{ \frac{32Hfl^2}{EJ_a} \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{kt} a_{kn}}{n^5 \pi^5} + \left[\frac{4l^2(J_a + J_b)}{J_a J_b E} M_A - \frac{32Hf}{EA_a} + 32f(\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c) \right] \sum_{n,k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\Delta_{kt} a_{kn}}{n^3 \pi^3} \right\}, \quad i = 1, 3, \dots$$

Wyznaczniki Δ i Δ_{ik} oraz współczynniki a_{kn} są określone za pomocą wzorów (4.8) i (4.9). W zastosowaniach praktycznych ograniczamy się do wyznaczenia kilku współczynników A_i .

Niewiadome wielkości momentu podporowego $M_A = M_B$ oraz rozpór wyznaczmy korzystając z układu równań kanonicznych metody sił. W rozpatrywanym przypadku i przy przyjętych założeniach układ ten przybiera postać

$$(5.5) \quad \left[\frac{8fl^2}{15J_a} + \frac{l(A_a + A_b)}{A_a A_b} \right] H + \frac{2lf}{3EJ_a} M_A + l(\alpha_b^t t_b - \alpha_a^t t_a) + \delta_{Hp_c} = 0,$$

$$\frac{lf}{3EJ_a} H + \frac{l(J_a + J_b)}{2EJ_a J_b} M_A + \delta_{M_A, p_c} = 0,$$

przy czym

$$\delta_{Hp_c} = \frac{16fL_1}{l} \frac{J_b}{J_a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_i}{\pi^5 i^5} + \frac{4fl}{E_c A_c} \left(\frac{EJ_b L_1}{l^4} \right)^2 \sum_{n,i=1,3,\dots}^{\infty} A_n A_i^{H-1} b_{ni},$$

$$\delta_{M_A, p_c} = \frac{L_1(J_a + J_b)}{lJ_a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_i}{\pi^3 i^3} + \frac{4fl}{E_c A_c} \left(\frac{EJ_b L_1}{l^4} \right)^2 \sum_{n,i=1,3,\dots}^{\infty} A_n A_i^{M_A-1} b_{ni}.$$

Współczynniki A_i^{H-1} i $A_i^{M_A-1}$ oraz b_{ni} zostały określone uprzednio w p. 5.

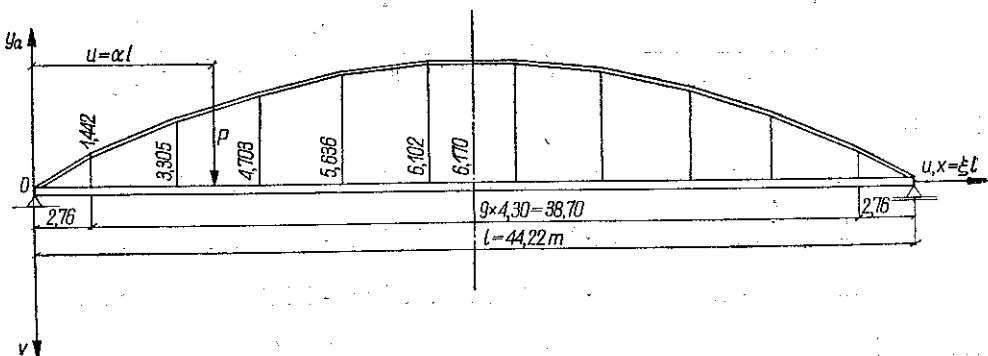
Rozwiązując układ równań (5.5) względem H oraz $M_A = M_B$ otrzymamy rozpór i momenty występujące w połączeniach łuku i belki, odpowiadające danym przyrostom temperatury łuku, belki i łączników.

Mając funkcję $v_p^c(\xi)$, a więc i $p_c(\xi)$, oraz znając H i M_A możemy wyznaczyć wielkości dowolnych sił wewnętrznych oraz przemieszczeń z zależności podstawowych. Warto zauważyć, że w przypadku szczególnym $t_a = t_b = t_c$ oraz przy założeniu $\alpha_a^t = \alpha_b^t = \alpha_c^t$ w ustroju nie powstają siły wewnętrzne.

6. Przykład liczbowy

Do przykładu liczbowego niech posłuży schemat przedstawiony na rys. 5.

Przyjmujemy następujące dane: $l = 44,22$ m, $f = 6,17$ m, $y_c = 24,68 \xi (1 - \xi)$ [m], $J_b = 0,638209$ m⁴, $J_a = 0,033690$ m⁴, $A_b = 4,0852$ m², $A_a = 1,0782$ m², $A_c = \frac{10 \cdot 0,020104}{44,22} = 0,004546$ m.



Rys. 5

Załóżmy, że belka i łuk są wykonane z betonu, natomiast wieszaki są stalowe. Przyjmijmy $E_b = 3 \cdot 10^6$ T/m², $E_c = 21 \cdot 10^6$ T/m²; stąd $E_c/E_b = 7$.

Wyznaczamy C_i ograniczając się do $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ponieważ $L = 308144$, $\pi^4/L = 0,000316$, przeto ze wzorów (4.8) i (4.9) otrzymujemy

$$A_1 = -\frac{\pi^4}{EL} \left\{ \frac{2Pl^3}{J_b \pi^4} \theta_1(\alpha) + 1,00016 \frac{32fl^2}{J_a \pi^5} H + 1,00041 \left[\frac{2l^2(J_a + J_b)}{J_a J_b \pi^3} (M_A + M_B) - \frac{32f}{A_a \pi^3} H \right] \right\},$$

$$A_2 = -\frac{\pi^4}{EL} \left\{ \frac{2Pl^3}{J_b \pi^4} \theta_2(\alpha) + 0,340428 \frac{32fl^2}{J_a \pi^5} H + 3,04982 \left[\frac{2l^2(J_a + J_b)}{J_a J_b \pi^3} (M_A + M_B) - \frac{32f}{A_a \pi^3} H \right] \right\},$$

$$A_3 = -\frac{\pi^4}{EL} \left\{ \frac{2Pl^3}{J_b \pi^4} \theta_3(\alpha) + 0,240484 \frac{32fl^2}{J_a \pi^5} H + 5,42190 \left[\frac{2l^2(J_a + J_b)}{J_a J_b \pi^3} (M_A + M_B) - \frac{32f}{A_a \pi^3} H \right] \right\},$$

przy czym

$$\theta_1(\alpha) = 1,000143 \sin \pi\alpha + 0,0000397021 \sin 3\pi\alpha + 0,0000294177 \sin 5\pi\alpha,$$

$$\theta_2(\alpha) = 0,00322412 \sin \pi\alpha + 1,009395 \sin 3\pi\alpha + 0,00368895 \sin 5\pi\alpha,$$

$$\theta_3(\alpha) = 0,018046 \sin \pi\alpha + 0,0284748 \sin 3\pi\alpha + 1,06367 \sin 5\pi\alpha.$$

Podobnie

$$B_2 = -\frac{\pi^4}{EL} \left[\frac{2Pl^3}{J_b \pi^4} \theta_2(\alpha) + 1,941699 \frac{2l^3(J_a + J_b)}{J_a J_b \pi^3} (M_A - M_B) \right],$$

$$B_4 = -\frac{\pi^4}{EL} \left[\frac{2Pl^3}{J_b \pi^4} \theta_4(\alpha) - 0,509206 \frac{2l^3(J_a + J_b)}{J_a J_b \pi^3} (M_A - M_B) \right],$$

$$B_6 = -\frac{\pi^4}{EL} \left[\frac{2Pl^3}{J_b \pi^4} \theta_6(\alpha) - 3,753828 \frac{2l^3(J_a + J_b)}{J_a J_b \pi^3} (M_A - M_B) \right],$$

przy czym

$$\theta_2(\alpha) = 1,001779 \sin 2\pi\alpha + 0,000392713 \sin 4\pi\alpha + 0,000486754 \sin 6\pi\alpha,$$

$$\theta_4(\alpha) = 0,00628590 \sin 2\pi\alpha + 1,02783 \sin 4\pi\alpha + 0,0127765 \sin 6\pi\alpha,$$

$$\theta_6(\alpha) = 0,0394077 \sin 2\pi\alpha + 0,0646754 \sin 4\pi\alpha + 1,14203 \sin 6\pi\alpha.$$

Rozpór i momenty utwierdzenia wyznaczamy z układu równań (4.12). W tym celu wyznaczamy δ_{HP_c} , $\delta_{M_A P_c}$ i $\delta_{M_B P_c}$ korzystając ze wzorów (4.13) i (4.14). Po

wykonaniu rachunków otrzymujemy

$$\delta_{Hv_c} = -\frac{1}{E} [P(1877,45 \sin \pi\alpha + 7,87964 \sin 3\pi\alpha + 0,701224 \sin 5\pi\alpha) + 25313,5 H + 2698,98 (M_A + M_B)],$$

$$\delta_{M_A v_c} + \delta_{M_B v_c} = -\frac{1}{E} [P(395,400 \sin \pi\alpha + 14,7699 \sin 3\pi\alpha + 3,22616 \sin 5\pi\alpha) + 5398,34 H + 646,083 (M_A + M_B)],$$

$$\delta_{M_A v_c} - \delta_{M_B v_c} = -\frac{1}{E} [P(49,5101 \sin 2\pi\alpha + 6,47768 \sin 4\pi\alpha + 2,01464 \sin 6\pi\alpha) + 120,632 (M_A + M_B)].$$

Równania (4.12) przyjmują więc postać

$$1387,5 H + 0,50 (M_A + M_B) = P(1877,45 \sin \pi\alpha + 7,87964 \sin 3\pi\alpha + 0,701224 \sin 5\pi\alpha),$$

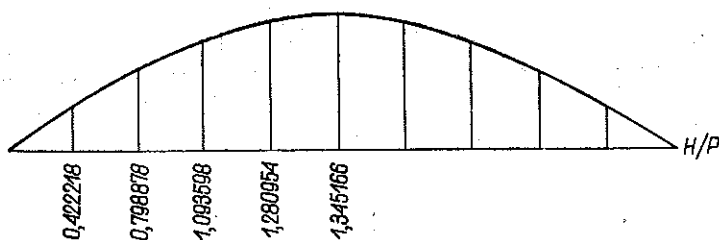
$$0,86 H + 44,836 (M_A + M_B) = -P 1531,94 (1 - \alpha) \alpha + P(395,400 \sin \pi\alpha + 14,7699 \sin 3\pi\alpha + 3,22616 \sin 5\pi\alpha),$$

$$109,674 (M_A - M_B) = -510,649 P(1 - \alpha) \alpha (1 - 2\alpha) + P(49,5011 \sin 2\pi\alpha + 6,47768 \sin 4\pi\alpha + 2,01464 \sin 6\pi\alpha).$$

Skąd

$$H = 0,001231 P(1 - \alpha) \alpha + P(1,34994 \sin \pi\alpha + 0,005560 \sin 3\pi\alpha + 0,000479 \sin 5\pi\alpha),$$

$$M_A = \frac{1}{2} [-0,019 H - 34,1670 (1 - \alpha) \alpha P - 4,65606 (1 - \alpha) \alpha (1 - 2\alpha) P + (8,81860 \sin \pi\alpha + 0,329413 \sin 3\pi\alpha + 0,071953 \sin 5\pi\alpha + 0,451429 \sin 2\pi\alpha + 0,059063 \sin 4\pi\alpha + 0,018369 \sin 6\pi\alpha) P].$$



Rys. 6

Wykres linii wpływowej rozporu H przedstawiono na rys. 6.

Z postaci wyrażenia na M_A wnioskujemy, że momenty zginające występujące w połączeniu łuku i belki w tym przypadku przybierają wartości bliskie zeru.

Mając określone wartości na H , M_A i M_B możemy wyznaczyć rzędne funkcji $A_i(a) = \bar{A}_i(1-a)$ oraz $B_i(a) = -\bar{B}_i(1-a)$ dla dowolnego a . Rzędne tych funkcji w obranych przekrojach podano w następującym zestawieniu:

$$\bar{A}_i(a) = -\frac{L_1 E}{\pi^4} A_i(a)$$

$$\bar{B}_i(a) = -\frac{L_1 E}{\pi^4} B_i(a)$$

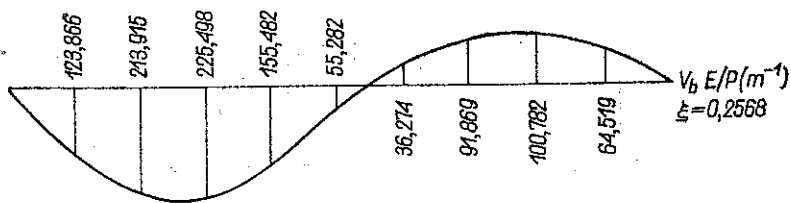
a	$\bar{A}_1(a)$	$\bar{A}_3(a)$	$\bar{A}_5(a)$	a	$\bar{B}_2(a)$	$\bar{B}_4(a)$	$\bar{B}_6(a)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	935,863	383,617	341,502	0,1	82,359	138,533	163,123
0,2	1581,811	642,287	361,336	0,2	133,035	84,017	-83,386
0,3	2165,375	737,818	340,474	0,3	132,953	-84,515	-93,956
0,4	2536,601	730,399	567,550	0,4	82,218	-134,161	146,012
0,5	2663,833	713,390	706,657	0,5	0	0	0

Wyznamy przemieszczenia pionowe osi łuku, osi belki i wydłużenia łączników w przekroju $\xi = 0,2568$, wywołane siłą skupioną P o zmiennym ustawieniu wzdłuż przęsła. Obrany przekrój odpowiada położeniu trzeciego łącznika od lewej podpory.

Równanie linii wpływowej ugięcia belki w przekroju $\xi = 0,2568$ wyraża się wzorem

$$v_b E = P [-382,38(1-a) + 5798,74(1-a)a(2-a) + \\ + 22580 \eta (0,2568 - a)^3 - 0,7205 \bar{A}_1 + 0,0624 \bar{B}_2 + 0,0821 \bar{A}_3 - \\ - 0,0003 \bar{B}_4 - 0,0012 \bar{A}_5 - 0,0007 \bar{B}_6] + 169,890 M_A + 122,487 M_B,$$

przy czym $\eta = 0$, gdy $0,2568 < a \leq 1$; oraz $\eta = 1$, gdy $0 \leq a < 0,2568$. Wykres funkcji $E v_b / P$ przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7

Równanie linii wpływowej ugięcia łuku w przekroju $\xi = 0,2568$ wyraża się wzorem

$$v_a E = 27126,1 H - 3218,3 M_A - 2320,3 M_B + P (13,6487 \bar{A}_1 + 1,1820 \bar{B}_2 + \\ + 1,5552 \bar{A}_3 - 0,0056 \bar{B}_4 - 0,0227 \bar{A}_5 - 0,0132 \bar{B}_6).$$

Wykres funkcji $v_a E/P$ przedstawiono na rys. 8.

Napiszemy równanie linii wpływowej wydłużenia łącznika w przekroju $\xi=0,2568$.

Siła osiowa w łączniku

$$P_c = -\frac{EJ_b L_1}{l^3} \int_{\xi=0,2082}^{\xi=0,3055} \left(\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} A_i \sin i\pi\xi + \sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} B_i \sin i\pi\xi \right) d\xi \approx$$

$$\approx \frac{J_b \pi^3}{l^3} P (0,2127 \cdot \bar{A}_1 + 0,3007 \bar{B}_2 + 0,1949 \bar{A}_3 - 0,02450 \bar{B}_4 -$$

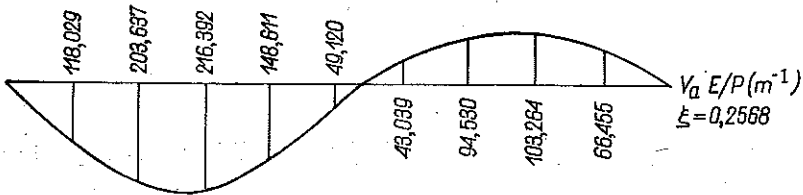
$$- 0,2155 \bar{A}_5 - 0,2624 \bar{B}_6),$$

wydłużenie zaś łącznika

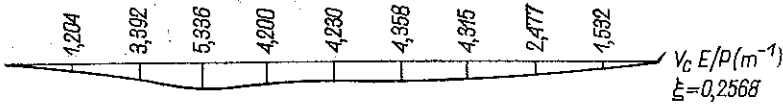
$$v_c = \frac{4,07 P_c}{7 \cdot 0,020104 E} = 0,007648 (0,2127 \bar{A}_1 + 0,3007 \bar{B}_2 + 0,1949 \bar{A}_3 -$$

$$- 0,02450 \bar{B}_4 - 0,2155 \bar{A}_5 - 0,2624 \bar{B}_6) P.$$

Wykres funkcji $v_c E/P$ przedstawiono na rys. 9.



Rys. 8



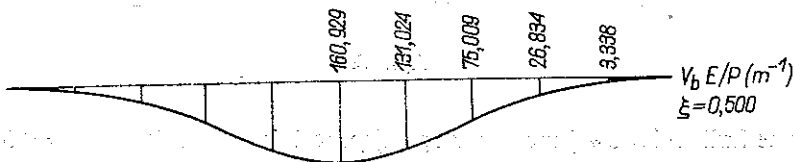
Rys. 9

Równanie linii wpływowej ugięcia belki w przekroju $\xi = 0,5$ ma postać

$$v_b E = P [-2822,6 (1 - \alpha) + 11290,4 (1 - \alpha) \alpha (2 - \alpha) + 22580,8 \eta (0,5 - \alpha)^3 -$$

$$- \bar{A}_1 + 0,0123 \bar{A}_3 - 0,0016 \bar{A}_5] + 191,493 (M_A + M_B).$$

Wykres funkcji $v_b E/P$ przedstawiono na rys. 10.



Rys. 10

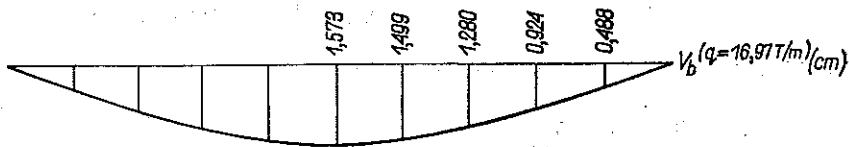
Równanie linii ugięcia belki pod obciążeniem równomiernie rozłożonym $p = 16,97 \text{ T/m}$ ma postać

$$v_b = pl \int_0^1 [v_b^1(\xi, a) + v_b^{M_A M_B}(\xi, a) + v_b^{p_e}(\xi, a)] da,$$

lub

$$v_b = \frac{pl}{E} [5645,21 (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) - 13,5340 \xi (1 - \xi) - 1704,3187 \sin \pi\xi - 7,1160 \sin 3\pi\xi - 0,6443 \sin 5\pi\xi].$$

Wykres ugięć belki (w cm) przy $p = 16,97 \text{ t/m}$, $E = 3 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ przedstawiono na rys. 11.

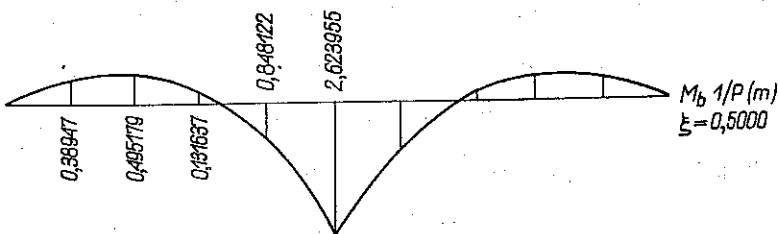


Rys. 11

Równanie linii wpływowej momentu zginającego belki w przekroju $\xi = 0,5$ jest następujące:

$$M_b = 44,22 P [(1 - a) \frac{1}{2} - \eta (0,5 - a)] - 0,5 (M_A + M_B) - 0,003221 P \left(\bar{A}_1 - \frac{1}{9} \bar{A}_3 + \frac{1}{25} \bar{A}_5 \right).$$

Wykres linii wpływowej momentu zginającego belki przedstawiono na rys. 12.



Rys. 12

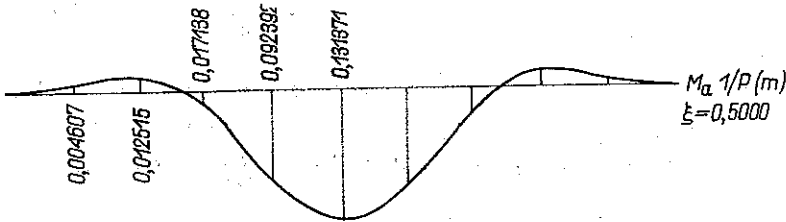
Równanie linii wpływowej momentu zginającego łuku w przekroju $\xi = 0,5$

$$M_a = -6,17 H + 0,5 (M_A + M_B) + 0,003221 P \left(\bar{A}_1 - \frac{1}{9} \bar{A}_3 + \frac{1}{25} \bar{A}_5 \right).$$

Wykres linii wpływowej momentu zginającego łuku przedstawiono na rys. 13. Momenty zginające belki i łuku, wywołane obciążeniem równomiernie rozłożonym $p = 16,97 \text{ t/m}$

$$M_b = 977,70 \text{ pl}\xi (1 - \xi) - M_A - 0,003221 \left(\bar{A}_1 \sin \pi\xi + \frac{\bar{A}_3}{9} \sin 3\pi\xi + \frac{\bar{A}_5}{25} \sin 5\pi\xi \right),$$

$$M_a = -24,68 H (1 - \xi) \xi + M_B + 0,003221 \left(\bar{A}_1 \sin \pi\xi + \frac{\bar{A}_3}{9} \sin 3\pi\xi + \frac{\bar{A}_5}{25} \sin 5\pi\xi \right),$$



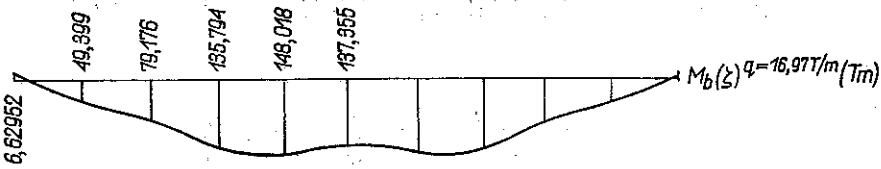
Rys. 13

przy czym

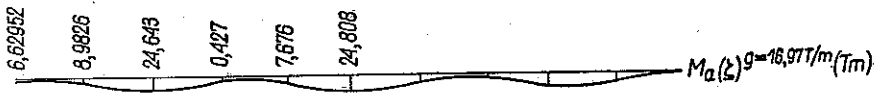
$$H = 0,860843 \text{ pl} = 645,986 \text{ T}, \quad M_B = M_A = 6,62952 \text{ Tm},$$

$$\bar{A}_1 = 1704,31 \text{ pl}, \quad \bar{A}_3 = 576,400 \text{ pl}, \quad \bar{A}_5 = 402,695 \text{ pl}.$$

Wykresy momentów zginających belki i łuku przedstawiono na rys. 14 i 15.



Rys. 14



Rys. 15

7. Wpływ zmian temperatury

Wyznamy rozpór oraz momenty zginające w połączeniach łuku i belki spowodowane przyrostem temperatury kolejno łączników, łuku i łączników o 5°C w założeniu, że $\alpha_a^t = \alpha_b^t = \alpha_c^t = 0,000012$.

Niewiadome wielkości H i $M_A = M_B$, wyznaczamy na podstawie wzorów wprowadzonych w p. 5. Współczynniki A_i przybierają postać:

$$A_1 = -\frac{\pi^4}{LE} \left\{ 1,000163 \frac{32fl^2}{J_a \pi^5} H + \frac{1,000410}{\pi^3} \left[\frac{4l^2 (J_a + J_b)}{J_a J_b} M_A - \frac{32f}{A_a} H + 32fE (\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c) \right] \right\},$$

$$A_3 = -\frac{\pi^4}{EL} \left\{ 0,340428 \cdot \frac{32fl^2}{J_a \pi^5} H + \frac{3,04982}{\pi^3} \left[\frac{4l^2(J_a + J_b)}{J_a J_b} M_A - \frac{32f}{A_a} H + 32fE(\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c) \right] \right\},$$

$$A_5 = -\frac{\pi^4}{EL} \left\{ 0,240484 \cdot \frac{32fl^2}{J_a \pi^5} H + \frac{5,41901}{\pi^3} \left[\frac{4l^2(J_a + J_b)}{J_a J_b} M_A - \frac{32f}{A_a} H + 32fE(\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c) \right] \right\}.$$

Rozpór i momenty $M_A = M_B$ wyznaczamy z układu równań następujących:

$$26701,0 \frac{H}{E} + 4398,96 \frac{M_A}{E} + l(\alpha_b^t t_b - \alpha_a^t t_a) + \delta_{H,p_c} = 0,$$

$$2699,43 \frac{H}{E} + 690,919 \frac{M_B}{E} + \delta_{M_A,p_c} = 0,$$

przy czym

$$\delta_{H,p_c} = -\frac{1}{E} [25313,5 H + 4397,96 M_A + 91,568 \cdot 10^6 (\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c)],$$

$$\delta_{M_A,p_c} = -\frac{1}{E} [2699 H + 323,341 M_A + 10,7427 \cdot 10^6 (\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c)].$$

Stąd też

$$1387,5 H + M_A + El(\alpha_b^t t_b - \alpha_a^t t_a) - 91,568 \cdot 10^6 (\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c) = 0,$$

$$0,43 H + 22,418 M_A - 10,7427 \cdot 10^6 (\alpha_a^t t_a - \alpha_c^t t_c) = 0.$$

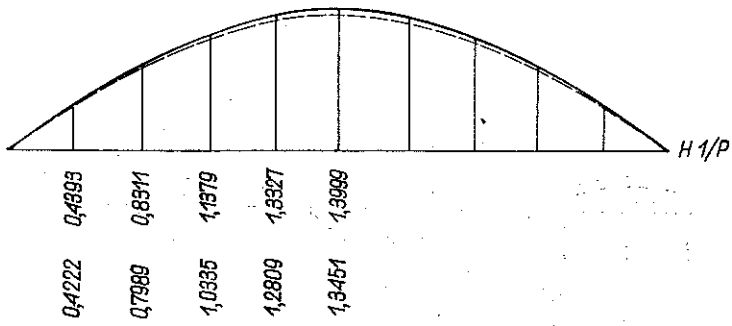
Rozwiązując układ równań względem H oraz M_A , otrzymujemy:

$$\text{w przypadku } t_a = t_b = 0, \quad t_c = 5^\circ\text{C} \quad M_A = -28,676 \text{ Tm}, \quad H = -4,02 \text{ T};$$

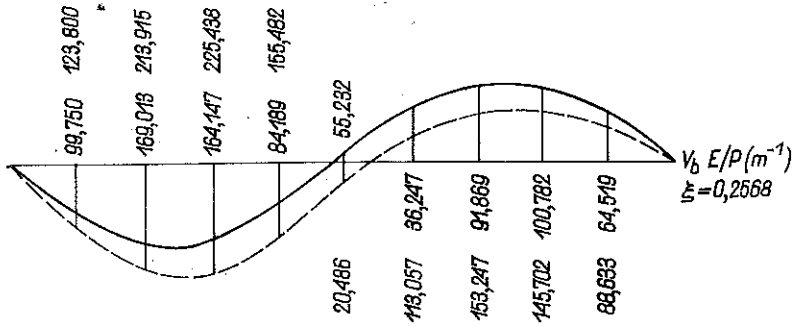
$$\text{w przypadku } t_b = 0, \quad t_a = t_c = 5^\circ\text{C} \quad H = 5,7367 \text{ T}, \quad M_A = -0,11003 \text{ Tm}.$$

8. Omówienie wyników liczbowych uzyskiwanych na podstawie różnych wzorów

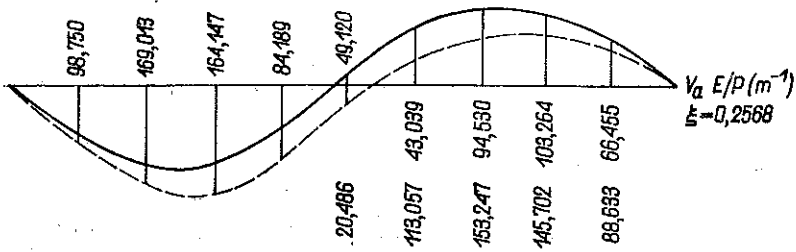
W punkcie tym zestawimy na wykresach wielkości niektórych sił wewnętrznych i przemieszczeń obliczone na podstawie wzorów (4.16)-(4.21) przy założeniu nieodkształcalności osiowej elementów składowych ustroju (linia ciągła) oraz wielkości odpowiednich sił i przemieszczeń, obliczone przy uwzględnieniu odkształcalności osiowej wszystkich elementów (linia przerywana). Porównanie wyników pozwoli ocenić wpływ sił podłużnych w rozpatrywanych ustrojach na rozkład sił wewnętrznych i przemieszczeń. Wykresy linii wpływowych rozporu przedstawiono na rys. 16. Wykresy linii wpływowych ugięcia belki i łuku w przekroju $\xi = 0,2568$ oraz ugięcia belki w przekroju $\xi = 0,5$ przedstawiono kolejno na rys. 17, 18 i 19.



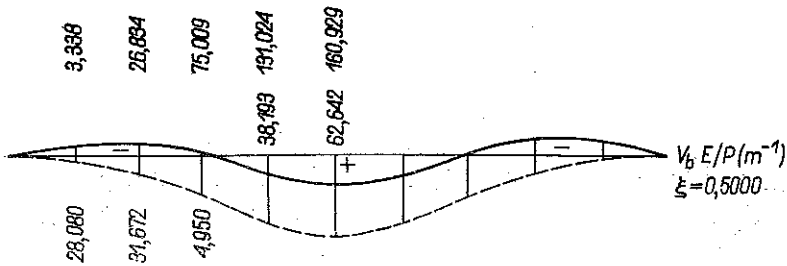
Rys. 16



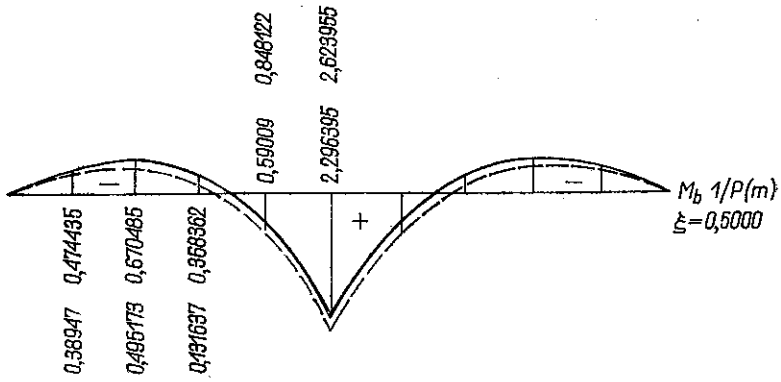
Rys. 17



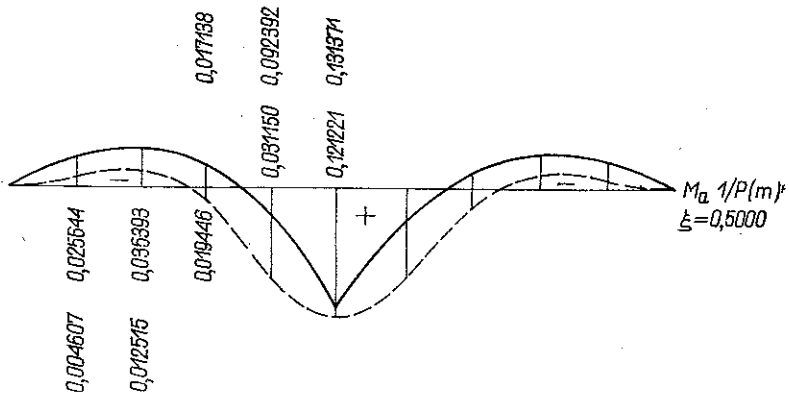
Rys. 18



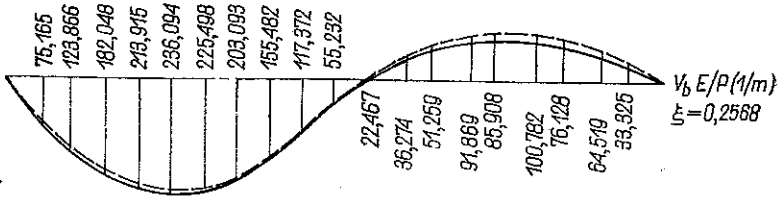
Rys. 19



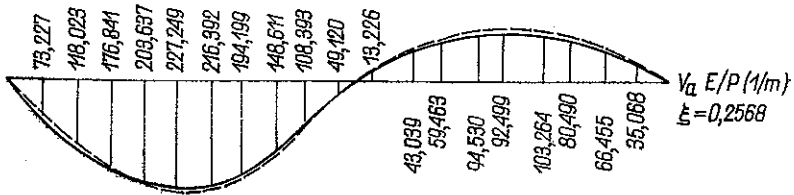
Rys. 20



Rys. 21



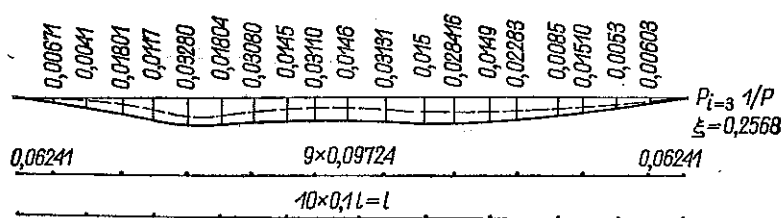
Rys. 22



Rys. 23

Mniej istotnym, aczkolwiek niezbyt małym, okazuje się też wpływ odkształcalności osiowej ustroju na wielkości sił wewnętrznych. Na przykład na momenty zginające belki i łuku wpływ ten ilustrują wykresy linii wpływowych, przedstawione kolejno na rys. 20 i 21. (Wykresy momentów zginających łuku przedstawiono w skali dwudziestokrotnie większej niż w belce).

Na zakończenie dla porównania wyników przedstawimy na wykresach wielkości niektórych przemieszczeń i siły osiowej w jednym z łączników obliczone za pomocą wzorów wyprowadzonych w niniejszej pracy (linia przerywana) oraz odpowiednie wielkości statyczne, które uzyskano w pracy [10] na podstawie obliczenia metodą przemieszczeń układu przedstawionego na rys. 5 (linia ciągła). Wykresy linii wpływowych ugięć belki w przekroju $\xi = 0,2568$ przedstawiono na rys. 22.



Rys. 24

Wykresy linii wpływowych ugięcia łuku w przekroju $\xi = 0,2568$ przedstawiono na rys. 23. Wykresy linii wpływowych siły osiowej w trzecim łączniku od lewej podpory ilustruje rys. 24.

9. Wnioski

Z rozważań oraz przykładu wynika szereg wniosków, z których bardziej istotne uporządkujemy i zestawimy.

1. Z przeprowadzonej analizy wynika bezpośrednio, że wpływ odkształcalności osiowej elementów ustroju na rozkład sił wewnętrznych i przemieszczeń pionowych w rozpatrywanych ustrojach jest istotny. W przypadku uwzględnienia sił podłużnych przemieszczenia pionowe belki i łuku są wielokrotnie większe niż w przypadku pominięcia odkształcalności osiowej elementów ustroju.

2. W ustrojach, których stosunek sztywności łuku EJ_a do sztywności belki EJ_b jest mały, momenty zginające łuku są też małe w porównaniu z momentami zginającymi w belce. Jednak wobec małej sztywności łuku nie można go traktować jako wyłącznie przenoszącego siły osiowe, bowiem stanowi on element niewątpliwie zginany w tym samym stopniu co belka.

3. W przypadku szczególnym obciążenia ustroju obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym na belce (obciążenie to jest zwykle traktowane jako obciążenie ciężarem własnym) w belce i w łuku występują momenty zginające, łuk i belka doznają też przemieszczeń pionowych. Natomiast w założeniu nieodkształcalności

osiowej elementów ustroju wielkości momentów zginających, a więc i przemieszczenia pionowe osi belki i łuku są tożsamościowo równe zeru.

4. W założeniu nieodkształcalności osiowej elementów ustroju wielkości momentów zginających występujących w połączeniach łuku i belki są tożsamościowo równe zeru. Wielkości momentów tych są na ogół różne od zera w przypadku uwzględnienia wpływu sił podłużnych. A więc momenty podporowe są wyłącznie spowodowane odkształcalnością osiową elementów ustroju i zależą od jej wielkości. Istotny wpływ na wielkości tych momentów mają wydłużenia łączników.

5. Wpływ zmian temperatury również jest istotny, bowiem np. w przypadku uwzględnienia zmian temperatury łączników wielkości momentów zginających w łuku mają niewątpliwy wpływ na wymiarowanie jego przekroju.

6. Przedstawiona metoda w niniejszym opracowaniu prowadzi do wyników zbliżonych z wynikami uzyskiwanymi w obliczeniach tych wysoce hiperstatycznych ustrojów metodami sił lub przemieszczeń. Pozwala ominąć żmudną drogę wyznaczania współczynników jednostkowych przemieszczeń układów zastępczych równań kanonicznych metody sił, a następnie wielokrotnego rozwiązywania tych układów w celu wyznaczania rzędnych linii wpływowych odpowiednich wielkości sił wewnętrznych lub przemieszczeń. Oczywiście zbliżność wyników zależy od gęstości rozmieszczenia łączników w ustrojach rzeczywistych i jest tym lepsza im rozstaw łączników jest mniejszy. Jednak bezpośrednio z przeprowadzonej analizy liczbowej wynika, że w przypadku przyjęcia możliwie małego rozstawu łączników z zachowaniem tego samego przekroju na jednostkę długości przemieszczenia pionowe wszystkich elementów ustroju są mniejsze niż w przypadku, gdy ten rozstaw będzie większy. Wynika stąd wniosek, że przy tej samej objętości materiału łączników przez odpowiednie ich rozmieszczenia możemy uzyskać mniejszą odkształcalność elementów, a więc większą sztywność ustroju.

Literatura cytowana w tekście

- [1] G. PIGEAUD, *Résistance des matériaux et élasticité*, Paris 1923.
- [2] S. BŁĘŻECKI, Rękopis z 1928 r. w bibliotece Kat. Bud. Mostów Polit. Warszawskiej.
- [3] F. SZELAĞOWSKI, *Obliczanie układu belkowego wzmocnionego łukiem*, Inżyn. Budown., 6, 1952.
- [4] S. CHANDRANGSU, S. R. SPARKES, *A study of the bowstring arch having extensible suspension rods and different ratios of tiebeam to arch-rib stiffness*, Proc. Inst. Civil Engin., Part III, 2, 3 (1953).
- [5] R. DĄBROWSKI, *Dźwigary Langer'a*, skrypt w Polit. Gdańskiej 1952.
- [6] Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, J. KOSMOWSKI, *Metody analizy statycznej mostów łukowych*, Zeszyty Naukowe Polit. Warszawskiej, Budownictwo, 11, 1958.
- [7] W. NOWACKI, *Mechanika Budowli*, tom I, II, PWN, 1957 Warszawa.
- [8] Z. WASIUTYŃSKI, *Mosty łukowe*, PWN, Łódź 1959.
- [9] Z. KORDECKI, *Analiza pracy statycznej dźwigara łukowego z belką usztywniającą i pionowymi wieżakami*, praca doktorska w Polit. Krakowskiej.
- [10] J. GRYCZ, *Analiza odkształceń mostu przez Orz*, prace Kat. Bud. Mostów Polit. Warszawskiej, 1956.
- [11] *Таблицы интегрального синуса и косинуса*, Изд. АН СССР 1954.
- [12] Ф. П. ТОЛСТОВ, *Ряды Фурье*, Москва 1960.
- [13] F. G. TRIKONI, *Integral Equations*, New York 1957.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ И ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ВЕЛИЧИНУ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В АРОЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛАНГЕРА

Рассматриваются системы, состоящие из балок, арок и соединителя, в которых балки переносят также разпор арок. Точный расчет таких систем, называемых системами Лангера, очень трудоемок. Время, затраченное на проведение этого расчета, можно уменьшить вводя эквивалентную схему с соединителями, распределенными непрерывно, а не точно.

Исследуется влияние наружных нагрузок и термических изменений на внутренние усилия и перемещения системы в случае учета осевой деформируемости всех составных элементов.

Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго порядка по отношению неизвестной функции v_b^{pc} , определяющей прогиб балки, вызванный силами существующими в соединителях.

В числовом примере дается несколько диаграмм линий влияния внутренних сил и перемещений, которые сравниваются с точными результатами (при точечном соединении арки с балкой) и решениями, получаемыми при пренебрежении осевой деформируемостью.

Из рассуждений вытекает, между прочим, что влиянием осевой деформируемости нельзя пренебречь и что в случае большого числа соединителей, введение непрерывного соединения балки с аркой приводит к достаточно точным результатам.

S u m m a r y

THE INFLUENCE OF LONGITUDINAL FORCES AND TEMPERATURE CHANGES ON THE MAGNITUDE OF INTERNAL FORCES AND DISPLACEMENTS IN LANGER ARCH STRUCTURES

The subject of the considerations are structures composed of beams, arches and connecting elements of which the beams carry also the horizontal force of the arcs. Accurate computation of such structures, called Langer structures, requires considerable labour, which can be reduced by introducing a suitable scheme with distributed connecting elements.

The influence of the external load and temperature changes on the internal forces and displacements of such a system is analysed in the case of axial deformability of all the component elements. The problem reduces to the solution of a Fredholm integral equation of the second kind for the function determining the deflection of the beam due to the forces in the connecting elements.

In the numerical example a few diagrams are made for the influence numbers of integral forces and displacements, which are compared with accurate results (with concentrated connection between the arch and the beam) and the solutions obtained by rejecting axial deformability.

From the considerations it follows, among other things, that the influence of axial deformability of elements cannot be rejected and that in the case of a great number of connecting elements the introduction of distributed connection of the beam with the arch leads to results of sufficient accuracy.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1961 r.