

SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK  
W STANIE BŁONOWYM PRZY PEWNYCH TYPACH FIZYCZNEJ NIELINIOWOŚCI

JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

W ostatnich latach sporo uwagi poświęcono wiotkim konstrukcjom powłokowym pracującym tylko na rozciąganie i mogącym pod wpływem obciążeń w istotny sposób zmieniać swą pierwotną formę, jak również ulegać bardzo dużym odkształceniom. Zainteresowanie tymi konstrukcjami wyniknęło przede wszystkim z licznych i różnorodnych zastosowań w inżynierskiej praktyce (np. konstrukcje pneumatyczne [12 i 22]). Rozwiązanie problemów związanych z pracą tego typu konstrukcji wymaga na ogół równoczesnego uwzględnienia takich czynników, jak znaczna nieliniowość fizyczna i geometryczna, istotne zmiany formy, pogłębiająca się ze wzrostem odkształceń, anizotropia materiału, obciążenia dynamiczne i procesy reologiczne. Ponadto wspólną cechą takich konstrukcji jest istnienie maksimum obciążenia, co powoduje powstanie nowego problemu stateczności powłoki przy rozciąganiu (por. np. [7, 9, 11, 15 i 25]) podobnie jak dla pręta rozciąganego [26]. Równoczesne uwzględnienie wyżej wyliczonych czynników jak dotąd okazuje się zadaniem zbyt skomplikowanym. Stąd dotychczasowe prace podają jedynie częściowe, często przybliżone rozwiązania. Prace te poszły w dwóch zasadniczych kierunkach zależnie od przyjętych podstaw fizycznych.

Dla pierwszej grupy podstawą stały się wyniki doświadczeń głównie E. A. DAVISA prowadzonych na cienkościennych cylindrach stalowych [4] i miedzianych [3], poddanych w złożonym stanie naprężenia ciśnieniu wewnętrznemu i rozciąganiu. Rezultatem ich było ustalenie pewnych fenomenologicznych zależności fizycznych, które zostały sprecyzowane przez E. A. DAVISA, a następnie nieco uogólnione przez A. NÁDAIA [18]. Podają one związki, jakie zachodzą w trójosiowym stanie naprężenia przy dużych deformacjach niesprężystych pomiędzy naturalnymi odkształceniami (w mierze logarytmicznej Hencky'ego), a rzeczywistymi naprężeniami oraz analogiczne równania dla teorii płynięcia plastycznego. Na podstawie tych związków fizycznych A. S. GRIGORIEW podał naprzód dla cylindrów [9], a potem dla szerokiej klasy powłok obrotowych w stanie błonowym [10 i 11], dość ogólne równania opisujące ich formę, stan naprężenia i odkształcenia w przypadku obciążeń statycznych. Do podobnych choć mniej ogólnych rezultatów doszedł też W. W. KEPPEN [13]. A. S. GRIGORIEW rozważył również przypadek ortotropii materiału [11] i zaproponował równania, które wykorzystali następnie dla powłok cylindrycznych I. I. FIEDIK [5 i 6] oraz dla kołowej membrany I. S. MAMEDOW [16]. Zagadnieniem powłok cylindrycznych zajmowali się też W. T. LANKFORD i F. SEIBELL [15], Z. MARCINIAR [17] i N. A. WEIL [25], a powłok stożkowych J. ORKISZ [19].

Dużym odkształceniom niesprężystym powłok o dowolnych kształtach, ze specjalnym uwzględnieniem przybliżonych metod wariacyjnych poświęcona jest spora część monografii [22]. Wartość tej pracy obniża jednak stosowanie założeń upraszczających, jak np. pominięcie odkształceń w kierunku grubości powłoki. Prócz cytowanych wyżej prac znany jest w literaturze szereg rozwiązań dotyczących ugięć membrany kołowej.

Podstawą fizyczną drugiej grupy prac stały się związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami, jakie daje dla skończonych deformacji nieliniowo sprężystych tzw. teoria materiałów wysoko elastycznych (por. np. monografia [24]). W takim ujęciu J. E. ADKINS i R. S. RIVLIN [1] rozwiązali zagadnienie dużych odkształceń membrany kołowej, na którą działa stałe parcie normalne.

Rezultaty obliczeń porównano z wynikami eksperymentalnymi, przy czym odkształcenia dochodziły do 5,0 w mierze Cauchy'ego. Powłoce cylindrycznej poświęcona jest praca J. F. FOKINA [7]. Problem ogólnego przypadku powłoki obrotowo-symetrycznej omawiają A. E. GREEN i J. E. ADKINS [8] oraz częściowo R. S. RIVLIN [23]; zagadnieniu temu w nieco innym ujęciu poświęcona jest praca autora [21].

Chociaż równania Davisa-Nádaia dotyczyły plastycznego stanu metali, a równania Rivlina-Mooney'a stanu sprężystego ciała, to jednak zarówno jedno i drugie związki wyrażają nieliniową zależność pomiędzy naprężeniami a deformacjami i, formalnie rzecz biorąc, póki nie rozpatrujemy przypadku obciążenia, możemy za ich pomocą opisać dowolny fizycznie nieliniowy odwracalny lub nieodwracalny proces odkształcenia dowolnego materiału. Obie grupy równań fizycznych, zależne od stopnia przybliżenia, mogą zawierać dowolną liczbę stałych materiałowych. Przypadek odciążenia dla związków fizycznych podanych w pracach [10 i 11] omawia praca [20].

Celem niniejszej pracy jest pewne uogólnienie podanych w pracach [10 i 11] równań obrotowo-symetrycznych powłok i rozwiązanie na tej podstawie przykładowo paru konkretnych nowych zadań. Wspomniane uogólnienia dotyczą rozważenia ciała o dowolnej charakterystyce nieliniowej zamiast stosowanego dotąd dwuparametrowego modelu ze wzmocnieniem potęgowym, dopuszczenia dowolnego obrotowo-symetrycznego obciążenia stycznego obok przyjmowanego dotąd obciążenia normalnego, uwzględnienia przypadku powłoki o skokowo lub w sposób ciągły [13] zmiennej grubości ścianki w stanie nieodkształconym. Odpowiada to założeniom pracy [21], lecz przy innych podstawach fizycznych.

### 1. Założenia wstępne i równania wyjściowe

Rozważa się równowagę powłoki w stanie błonowym. Powłoka jest gładka, obrotowo-symetryczna przed i po odkształceniu, które może być znaczne i prowadzić do istotnych zmian formy. W stanie nieobciążonym powłoka zachowuje taką formę, jaką miałaby pod wpływem niewielkiego stałego parcia wewnętrznego. Jej grubość w stanie nieodkształconym i obciążenie zewnętrzne są dowolne obrotowo-symetryczne; materiał jest izotropowy, nieściśliwy oraz o dowolnej charakterystyce

fizycznej. Powłoka jest wiotka i nie przenosi naprężeń ściskających, wobec czego mogą zajść dwa przypadki [10 i 21]: oba naprężenia główne są dodatnie ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ) — naprężenie pierścieniowe  $\sigma_2$  przyjmuje wartość zero i powstają fałdy ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ). Ponadto przyjęto zwykłe założenia teorii powłok w stanie błonowym.

1.1. Rozważmy naprzód przypadek  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ . Podstawowy układ równań różniczkowych powłoki otrzymujemy ze związków fizycznych, geometrycznych i równań równowagi. W niniejszej pracy jako punkt wyjścia do określenia związków fizycznych przyjęto równania Nádai-Davisa [4 i 18]:

$$(1.1) \quad \varepsilon_1 = \Phi [\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \varepsilon_2 = \Phi [\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)], \quad \varepsilon_3 = \Phi [\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

gdzie

$$(1.2) \quad \Phi = \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

We wzorach tych wielkości

$$(1.3) \quad \varepsilon_j = \ln(1 + e_j), \quad j = 1, 2, 3$$

są odkształceniami głównymi w mierze Hencky'ego, a  $e_j$  w mierze Cauchy'ego;  $\sigma_j$  są rzeczywistymi naprężeniami głównymi.

Zakładamy, że w powłoce panuje płaski stan naprężenia i jeśli przyjąć że 1 oznacza kierunek południkowy, 2 równoleżnikowy, a 3 normalny do powłoki, to ze wzorów (1.1) znajdziemy

$$(1.4) \quad \sigma_1 = \frac{2}{3\Phi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \sigma_2 = \frac{2}{3\Phi}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \sigma_3 = 0,$$

przy czym

$$(1.5) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Wprowadzając bezwymiarowe wielkości naprężeń

$$(1.6) \quad p_1 = \frac{\sigma_1}{M}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{M}$$

oraz oznaczając

$$(1.7) \quad \Psi = \frac{2}{3\Phi M},$$

gdzie  $M$  jest stałą o wymiarze naprężenia, otrzymamy z (1.4) i (1.5) poszukiwane związki fizyczne dla powłoki:

$$(1.8) \quad p_1 = -\Psi(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad p_2 = \Psi(\varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Funkcję  $\Psi = \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  przyjmiemy w dwóch wariantach. W pierwszym założymy, że wzmocnienie materiału da się opisać związkiem pomiędzy intensywno-

nościami rzeczywistych naprężeń  $\sigma_i$  i naturalnych odkształceń  $\varepsilon_i$  [4] i przedstawimy go ogólnie w postaci

$$(1.9) \quad \sigma_i = \frac{3}{2} K_I \Psi_I(\varepsilon_i) \varepsilon_i,$$

gdzie  $K_I$  oznacza stałą materiałową, przy czym przy przejściu do wielkości bezwymiarowych przyjmujemy

$$(1.10) \quad M = K_I.$$

Dla płaskiego stanu naprężenia mamy

$$(1.11) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3}$$

oraz

$$(1.12) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

W konkretnych zastosowaniach zależność (1.9) aproksymuje się najczęściej za pomocą krzywych dwuparametrowych, np. dla potęgowego wzmocnienia [4 i 11] mamy

$$(1.13) \quad \sigma_i = K_I \varepsilon_i^\mu, \quad \Psi_I = \frac{2}{3} \varepsilon_i^{\mu-1},$$

a przy wzmocnieniu liniowym

$$(1.14) \quad \sigma_i = K_I (1 + A \varepsilon_i), \quad \Psi_I = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\varepsilon_i} + A \right),$$

gdzie  $\mu$  i  $A$  oznaczają bezwymiarowe stałe.

Przy założeniu, że wzmocnienie materiału jest określone przez zależność pomiędzy maksymalnym spośród głównych odkształceń postaciowych  $\gamma$ , a odpowiednim głównym naprężeniem stycznym  $\tau$  [3 i 10] przyjmujemy ogólnie

$$(1.15) \quad \tau = K_{II} \Psi_{II}(|\gamma|) \gamma,$$

gdzie  $K_{II}$  oznacza stałą materiałową, przy czym przy przejściu do bezwymiarowych wielkości przyjmujemy

$$(1.16) \quad M = 2K_{II}.$$

Rozważyć tu należy dwa przypadki:

$$\text{a) } \sigma_1 > \sigma_2 \quad \text{oraz} \quad \text{b) } \sigma_2 \geq \sigma_1.$$

W przypadku a) z (1.8) przy uwzględnieniu (1.5), (1.6), (1.15) i (1.16) mamy

$$(1.17) \quad p_1 = \Psi_{II}(|\gamma_{13}|) \gamma_{13}, \quad p_2 = \Psi_{II}(|\gamma_{13}|) (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

Przy aproksymacji funkcji (1.15) wzmocnieniem potęgowym [3 i 10] znajdziemy

$$(1.18) \quad \sigma_1 = 2K_{II} \gamma_{13}^\mu, \quad \Psi_{II} = \gamma_{13}^{\mu-1},$$

a przy aproksymacji wzmocnieniem liniowym

$$(1.19) \quad \sigma_1 = 2K_{II}(1+\gamma_{13}), \quad \Psi_{II} = \gamma_{13}^{-1} + A.$$

W przypadku b) mamy odpowiednio

$$(1.20) \quad p_1 = \Psi_{II}(|\gamma_{23}|)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad p_2 = \Psi_{II}(|\gamma_{23}|)\gamma_{23}, \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Przy aproksymacji związku (1.15) wzmocnieniem potęgowym znajdziemy

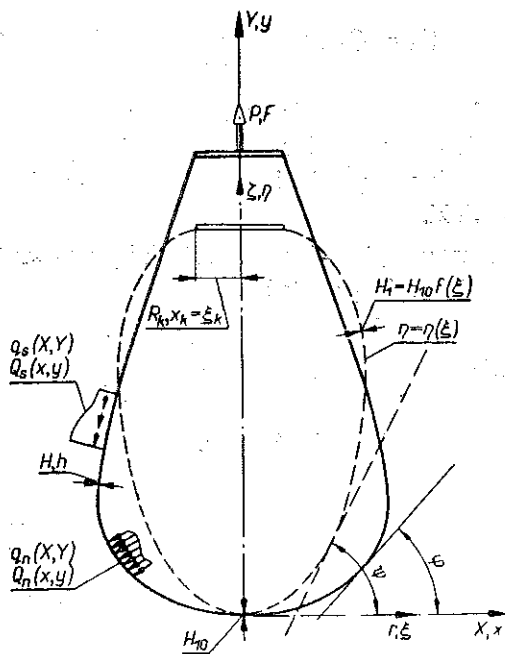
$$(1.21) \quad \sigma_2 = 2K_{II}\gamma_{23}^\mu, \quad \Psi_{II} = \gamma_{23}^{\mu-1},$$

a przy aproksymacji teŝe funkcji wzmocnieniem liniowym

$$(1.22) \quad \sigma_2 = 2K_{II}(1+\gamma_{23}), \\ \Psi_{II} = \gamma_{23}^{-1} + A.$$

Jeśli w równaniach (1.14), (1.19) i (1.22) przyjmiemy  $A=0$ , to otrzymamy odpowiednie przypadki idealnej plastyczności przy skończonych odkształceniach. Związki geometryczne zgodnie z rysunkiem 1 napiszemy tak samo jak w pracach [10 i 11]:

$$(1.23) \quad e_1 = \frac{dS_1 - dS_{10}}{dS_{10}}, \quad e_2 = \frac{X-r}{r}, \\ e_3 = \frac{H - H_1}{H_1},$$



Rys. 1

przy czym  $dS_{10}$  i  $dS_1$  oznaczają długości elementu południka w powłoce przed i po odkształceniu,  $r$  i  $H_1$  oraz  $X$  i  $H$  odpowiednio promień i zmienną grubość powłoki przed odkształceniem i po odkształceniu.

Równania równowagi przyjęto w postaci podanej w pracy [21] zgodnie z oznaczeniami na rys. 1:

$$(1.24) \quad \frac{d}{dX}(XH\sigma_1 \sin \varphi) = X[q_n(X, Y) + q_s(X, Y) \operatorname{tg} \varphi], \\ \frac{d}{dX}(XH\sigma_1) = H\sigma_2 + \frac{Xq_s(X, Y)}{\cos \varphi}.$$

Wielkości  $q_n(X, Y)$  i  $q_s(X, Y)$  oznaczają obciążenie na jednostkę powierzchni odpowiednio w kierunku normalnym i stycznym do powłoki. Przy  $q_s(X, Y) = 0$  odpowiadają one równaniami podanym przez ALEKSIEJEWĄ [2].

W dalszym ciągu dla prostoty będziemy posługiwać się wielkościami bezwymiarowymi (rys. 1):

$$(1.25) \quad x = \frac{X}{R_1}, \quad y = \frac{Y}{R_1}, \quad h = \frac{H}{H_{10}},$$

$$\xi = \frac{r}{R_1}, \quad \eta = \frac{\zeta}{R_1}, \quad f = \frac{H_1}{H_{10}}, \quad u = \frac{h}{f},$$

$$Q_n = Q_n(x, y) = \frac{R_1}{MH_{10}} q_n(X, Y), \quad Q_s = Q_s(x, y) = \frac{R_1}{MH_{10}} q_s(X, Y),$$

gdzie  $\xi, \eta$  oznaczają współrzędne punktu powłoki przed, a  $x, y$  po deformacji,  $R_1$  dowolny rozmiar charakteryzujący powłokę przed odkształceniem,  $H_{10}$  grubość początkową powłoki w dowolnym ustalonym punkcie np. przy krawędzi dna powłoki.

Przy powyższych oznaczeniach i przy uwzględnieniu (1.3) równania geometryczne (1.23) przyjmą postać

$$(1.26) \quad \varepsilon_1 = \ln \left( \frac{dx \cos \psi}{d\xi \cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u,$$

a ponadto jak widać z rys. 1

$$(1.27) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \psi.$$

Równania równowagi (1.24) można napisać w postaci

$$(1.28) \quad \frac{d}{dx} (hp_1 x \sin \varphi) = x (Q_n + Q_s \operatorname{tg} \varphi),$$

$$\frac{d}{dx} (hp_1 x) = hp_2 + \frac{x Q_s}{\cos \varphi}.$$

Równania (1.5), (1.8), (1.26), (1.27) i (1.28) w najogólniejszym przypadku dadzą się sprowadzić do układu czterech równań różniczkowych z niewiadomymi funkcjami  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$  i  $u(\xi)$ .

W powyższym układzie trzy równania, niezależnie od rodzaju związków fizycznych (postać funkcji  $\Psi$ ), można napisać w postaci

$$(1.29) \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{\xi \cos \varphi}{ux \cos \psi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{ux \cos \psi},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{B \cos \varphi} \frac{dx}{x \frac{d\xi}{d\xi}} \left[ E \sin \varphi - \frac{Q_n x}{fu\Psi} \right].$$

Czwarte natomiast w przypadku zależności typu (1.9) ma postać

$$(1.30) \quad \frac{du}{d\xi} = u \frac{\frac{1}{\xi}(1+BDT) - \frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} \left[ 1+D(1+BT) + \frac{xQ_s}{fu\Psi \cos \varphi} \right] - \frac{B}{f} \frac{df}{d\xi}}{B(1+BT)+2},$$

gdzie

$$(1.31) \quad T = \frac{2\Psi'(\varepsilon_t)}{3\Psi(\varepsilon_t) \varepsilon_t}, \quad \Psi'(\varepsilon_t) = \frac{d\Psi(\varepsilon_t)}{d\varepsilon_t},$$

przy tym w szczególnych przypadkach wzmocnienia potęgowego (1.13) i liniowego (1.14) mamy odpowiednio

$$(1.32) \quad T = \frac{2(\mu - 1)}{3\varepsilon_t^2}, \quad T = -\frac{2}{3\varepsilon_t^2(1+A\varepsilon_t)}.$$

W przypadku zależności typu (1.15) i dla  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  znajdziemy

$$(1.33) \quad \frac{du}{d\xi} = u \frac{\frac{1}{\xi}(1-BT) - \frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} \left[ 1+D-BT + \frac{xQ_s}{fu\Psi \cos \varphi} \right] - \frac{B}{f} \frac{df}{d\xi}}{B(1-2T)+2},$$

przy czym

$$(1.34) \quad T = \frac{\Psi'(\gamma)}{\Psi(\gamma)}, \quad \Psi'(\gamma) = \frac{d\Psi(\gamma)}{d\gamma},$$

a w szczególności dla związków (1.18) i (1.19) odpowiednio

$$(1.35) \quad T = \frac{1-\mu}{B}, \quad T = \frac{1}{B(1-AB)}.$$

Jeśli  $\sigma_2 \geq \sigma_1$ , to

$$(1.36) \quad \frac{du}{d\xi} = u \frac{\frac{1}{\xi}(1+BT) - \frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} \left[ 1+D+BT + \frac{xQ_s}{fu\Psi \cos \varphi} \right] - \frac{B}{f} \frac{df}{d\xi}}{B(1-T)+2},$$

przy czym dla (1.21) i (1.22) odpowiednio

$$(1.37) \quad T = \frac{\mu-1}{E}, \quad T = -\frac{1}{E(1+AE)}.$$

We wzorach (1.30), (1.33), (1.35), (1.36) i (1.37) wprowadzono oznaczenia

$$(1.38) \quad B = -\gamma_{13} = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = \ln \frac{xu^2}{\xi}, \quad D = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \ln \frac{x^2 u}{\xi^2},$$

$$E = \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \ln \frac{x}{\xi u}.$$

W szczególnym przypadku, gdy  $Q_s = 0$  i  $Q_n = Q = \text{const}$ . Trzecie z równań (1.29) daje się scałkować i napisać w postaci

$$(1.39) \quad \sin \varphi = \frac{xQ}{2fp_1 u} + \frac{F}{2fp_1 ux},$$

przy czym

$$(1.40) \quad F = P/H_{10} MR_1$$

jest bezwymiarowym odpowiednikiem wypadkowej  $P$  sił zewnętrznych działających bezpośrednio na dno lub krawędź powłoki (rys. 1).

1.2. Przejdźmy do rozważenia przypadku  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ . Za A. S. GRIGORIEWEM [10] wprowadźmy pewną fikcyjną gładką powierzchnię, którą utworzyłby układ nici przymocowanych z jednej strony do dna powłoki, a z drugiej do granicy strefy, gdzie  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ . Wprowadzone poprzednio wielkości  $X$  i  $Y$  (rys. 1) będą obecnie oznaczały współrzędne punktu tej fikcyjnej powierzchni. Powierzchnia rzeczywista będzie pofałdowana. Równania równowagi ustalamy dla elementu rzeczywistej powierzchni powłoki o długości  $dS_1$  i skończonej szerokości:

$$(1.41) \quad S_2 = r\theta_0 (1 + e_2)$$

odpowiadającej jednej fałdzie (o kącie środkowym  $\theta_0$ ); otrzymamy

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dX}(HS_2 \sigma_1 \sin \varphi) &= X\theta_0 [q_n(X, Y) + q_s(X, Y) \operatorname{tg} \varphi], \\ \frac{d}{dX}(HS_2 \sigma_1) &= \frac{X\theta_0 q_s(X, Y)}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Przyjęto przy tym, iż siły zewnętrzne działają na powierzchnię fikcyjną, a naprężenia na rzeczywistą oraz że kąt  $\varphi$  dla obu powierzchni jest jednakowy.

W równaniach geometrycznych (1.23) wyrażenia dla  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_3$  zostają zachowane, natomiast  $\varepsilon_2$  obliczamy z warunku

$$(1.43) \quad p_2 = 0,$$

skąd na podstawie (1.8) mamy

$$(1.44) \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad 1 + \varepsilon_2 = u.$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe (1.25) na podstawie związków (1.41), (1.43) i (1.44) równania równowagi (1.42) możemy napisać w postaci

$$(1.45) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(hp_1 u\xi \sin \varphi) &= x(Q_n + Q_s \operatorname{tg} \varphi), \\ \frac{d}{dx}(hp_1 u\xi) &= \frac{x Q_s}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Równania fizyczne (1.8) przyjmą postać

$$(1.46) \quad p_1 = -3\Psi\varepsilon_3, \quad p_2 = 0,$$



przy czym na zależności typu (1.9) i (1.15) odpowiednio znajdziemy

$$(1.47) \quad \Psi = \Psi_I(\varepsilon_i), \quad \varepsilon_i = -2\varepsilon_3$$

oraz

$$(1.48) \quad \Psi = \Psi_{II}(\gamma_{13}), \quad \gamma_{13} = -3\varepsilon_3.$$

Dla konkretnych typów aproksymacji krzywej rzeczywistej za pomocą funkcji (1.13), (1.14), (1.18) i (1.19) mamy kolejno

$$(1.49) \quad \begin{aligned} \Psi_I &= \frac{2}{3}(-2 \ln u)^{\mu-1}, & \Psi_I &= \frac{2}{3} \left( A - \frac{1}{2 \ln u} \right), \\ \Psi_{II} &= (-3 \ln u)^{\mu-1}, & \Psi_{II} &= A - \frac{1}{3 \ln u}. \end{aligned}$$

Podobnie jak w strefie, gdzie  $\sigma_1 > 0$  i  $\sigma_2 > 0$ , równania (1.5), (1.26), (1.27), (1.42), (1.45) i (1.46) dają się sprowadzić do układu czterech następujących równań różniczkowych:

$$(1.50) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\cos \varphi}{u^2 \cos \psi}, & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\sin \varphi}{u^2 \cos \psi}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{xQ_n}{fp_1 u^4 \xi \cos \psi}, & \frac{du}{d\xi} &= G(u) \left( \frac{xQ_s}{fp_1 u^4 \xi \cos \psi} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.51) \quad G(u) = u \left( 2 + \frac{1}{\ln u} + \frac{u}{\Psi} \frac{d\Psi}{du} \right)^{-1}.$$

Dla konkretnych postaci funkcji  $\Psi$  wg (1.43) funkcja  $G$  wynosi odpowiednio

$$(1.52) \quad \begin{aligned} G &= \frac{u \ln u}{\mu + 2 \ln u}, & G &= \frac{u(2A \ln u - 1)}{2A(1 + 2 \ln u) - 2}, \\ G &= \frac{u \ln u}{\mu + 2 \ln u}, & G &= \frac{u(3A \ln u - 1)}{3A(1 + 2 \ln u) - 2}. \end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, gdy  $Q_s = 0$ , czwarte z równań (1.50) daje się scałkować i jak to wynika z (1.45) przyjmuje postać

$$(1.53) \quad fp_1 u^2 \xi = C^*,$$

przy czym  $C^*$  jest stałą wyznaczoną z warunku ciągłości na granicy stref. Jeśli ponadto  $Q_n = Q = \text{const}$ , to z trzeciego równania (1.50) mamy [por. (1.45)]

$$(1.54) \quad \sin \varphi = \frac{Qx^2 + F}{2C^*},$$

gdzie  $F$  określone jest za pomocą wzoru (1.40). W tym przypadku, jak to pokazał A. S. GRIGORIEW, układ (1.50) daje się scałkować efektywnie.

## 2. Przykłady

Otrzymane wyżej dwa podstawowe układy równań powłoki (1.29) i (1.50) stanowią rozwiązanie pierwszej części postawionego w pracy zagadnienia. W ogólnym przypadku, jak już powiedzieliśmy, dają się one scałkować tylko numerycznie. Warunki brzegowe przy całkowaniu tego typu, układów omówiono szczegółowo w pracach [10, 11, 19 i 21] i dlatego nie będziemy tu bliżej analizować tego zagadnienia. W niniejszej pracy przytoczymy natomiast dwa przykłady konkretnych numerycznych rozwiązań układu równań (1.29) metodą Adamsa [14], przy zachowaniu różnic skończonych do drugiej włącznie.

Oznaczmy przez  $w$  którąkolwiek z niewiadomych układu (1.29), a przez  $\Delta\xi$  krok całkowania numerycznego. Wówczas mamy

$$(2.1) \quad w_{n+1} = w_n + \Delta w_n,$$

gdzie

$$(2.2) \quad w_n = \omega_n + \frac{1}{2} \Delta\omega_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2\omega_{n-2},$$

przy czym

$$(2.3) \quad \omega_n = \left[ \frac{dw}{d\xi} \right]_n \Delta\xi, \quad \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n, \quad \Delta^2\omega = \Delta\omega_{n+1} - \Delta\omega_n.$$

Widać stąd, że dla całkowania numerycznego należy znać  $w_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega_0$  i  $\Delta^2\omega_0$ . W naszym przypadku dwie pierwsze wielkości potrafimy określić przyjmując  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $u_0$  i  $Q_{n0}$ , (zamiast  $\varphi_0$ ) i korzystając z równań (1.29). Natomiast dwie dalsze wielkości można wyznaczyć bądź to przez rozkład w szereg niewiadomej funkcji wokół punktu  $\xi_0$ , bądź to przez proces iteracyjny, przy czym korzystamy ze wzorów [14]:

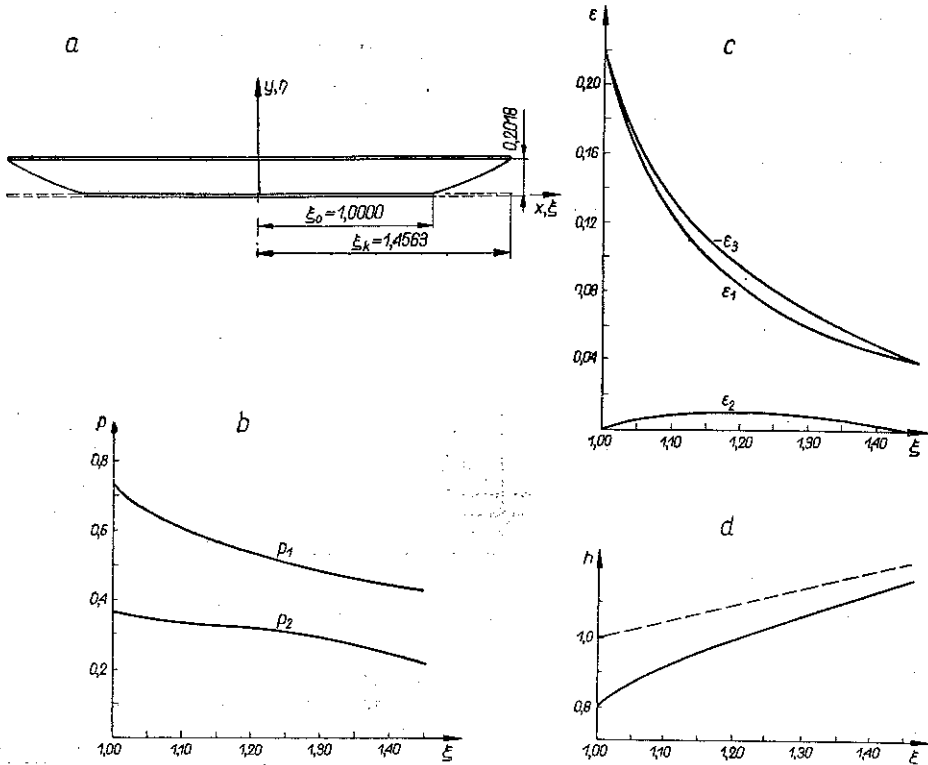
$$(2.4) \quad \Delta w_0 = w_0 + \frac{1}{2} \Delta\omega_0 - \frac{1}{12} \Delta^2\omega_0, \quad \Delta w_1 = \omega_1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\omega_0.$$

Powyższe postępowanie iteracyjne prowadzi się dla wszystkich niewiadomych naraż. Obliczeń dokonuje się metodą półodwrotną, gdyż w wyniku określenia z góry pewnej wartości  $u_0$  i założenia kształtu powłoki nieodkształconej  $\eta = \eta(\xi)$  ostateczne jej wymiary otrzymuje się dopiero po zakończeniu całkowania numerycznego zależnie od warunków brzegowych. Np. gdy  $x = \xi = \xi_k$  [10, 11 i 19], to znajdujemy  $\xi_k$  (rys. 1).

2.1. Jako pierwszy przykład rozpatrzono membranę pierścieniową, której oba brzegi zamocowane są na przesuwanych, ale sztywnych krążkach (rys. 2), na którą działa stałe parcie wewnętrzne. Do obliczeń przyjęto następujące dane:  $\mu = 1/3$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $x_0 = 1,0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $Q_s = 0$ ,  $Q_n = 0,35$ ,  $u_0 = 0,8$ . Założono przy tym, że przed odkształceniem grubość membrany zmienia się liniowo od krążka środko-

wego, tak iż  $f = (1 + \xi)/2$ . W wyniku obliczeń prowadzonych na podstawie związków fizycznych (1.13) otrzymano (rys. 2) brakujący wymiar membrany  $\xi_k = x_k = 1,4563$ , wielkość odstepu den po deformacji 0,2018 oraz wykresy naprężeń, odkształceń, a wreszcie formę powstałej powłoki i grubość jej ścianki po odkształceniu.

Podobną membranę, lecz o stałej grubości ścianek rozpatrzono w pracy [19].



Rys. 2

2.2. Jako następny przykład rozważano powłokę stożkową również zakończoną dwoma sztywnymi tarczami kołowymi i poddaną ciśnieniu wewnętrznemu, ale o skokowo zmiennej grubości ścianki, przy czym

$$(2.5) \quad f = a + b \mathbb{1}(\xi - \xi_j),$$

gdzie  $\mathbb{1}(\xi)$  oznacza funkcję Heavisida'a. Pochodna

$$(2.6) \quad \frac{df}{d\xi} = b\delta(\xi - \xi_j)$$

przyjmuje wartość zera wszędzie poza punktem  $\xi = \xi_j$ , gdzie osiąga wartość  $\infty$  i wobec tego przy obliczaniu przyrostu  $\Delta u$  w tym punkcie nie można posługiwać się wzorem (2.2).

Jak wynika z zestawienia wzorów (1.30), (1.33) i (1.36) pochodną  $du/d\xi$  można napisać za pomocą jednego wzoru

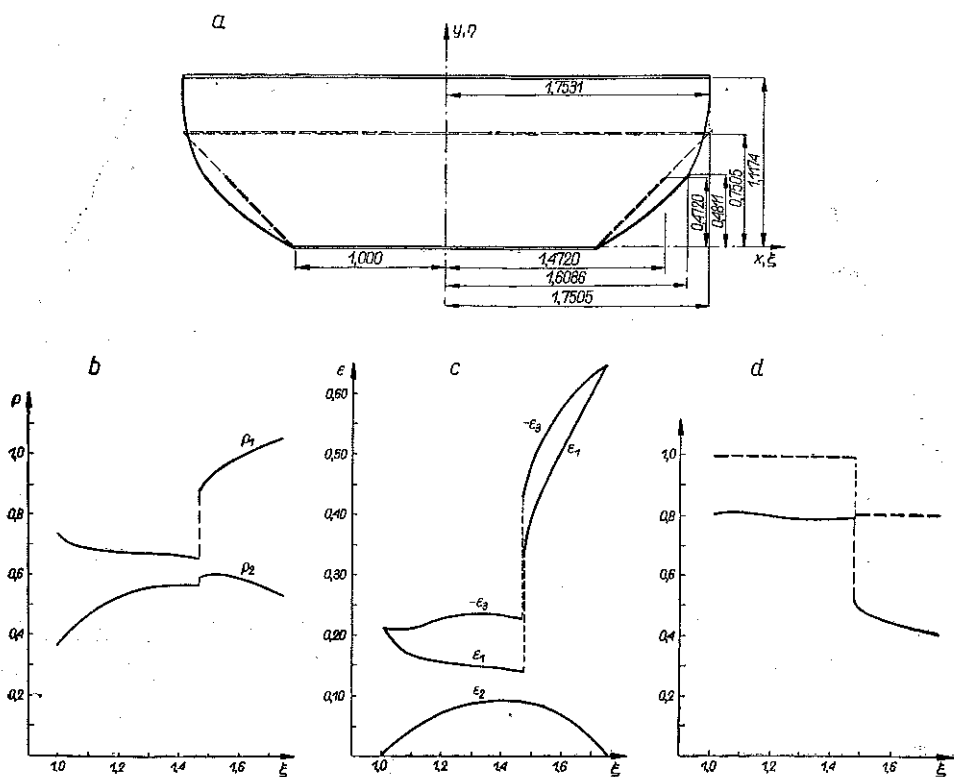
$$(2.7) \quad \frac{du}{d\xi} = u \frac{N_1 - \frac{B}{f} \frac{df}{d\xi}}{N_2},$$

gdzie postać  $N_1$  i  $N_2$  wynika z porównania (2.7) odpowiednio z (1.30), (1.33) i (1.36). Oddzielając część regularną i osobliwą funkcji (2.7) i przyjmując oznaczenia

$$(2.8) \quad \omega_j = u \frac{N_1}{N_2} \Delta \xi, \quad g(\xi_j) = \frac{uB}{N_2}$$

możemy napisać

$$(2.9) \quad \Delta u_j = \omega_j + \frac{1}{2} \Delta \omega_{j-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \omega_{j-2} + g(\xi_j) \frac{b}{a}.$$



Rys. 3

W rozważonym w pracy konkretnym przykładzie przyjęto model ciała ze wzmocnieniem potęgowym wykorzystując wzory (1.30) i (1.32). Ponadto przyjęto następujące dane liczbowe:

$$\mu = 1/3, \quad \psi = 45^\circ, \quad x_0 = 1,0, \quad y_0 = 0, \quad Q_s = 0, \quad Q_n = 0,5, \quad u_0 = 0,8, \\ \xi_j = 1,4720, \quad a = 1, \quad b = -0,2.$$

W wyniku obliczeń otrzymano brakujące wymiary powłoki  $l_0 = 0,7505$ ,  $l = 1,1174$ ,  $x_k = \xi_k = 1,7505$ . Na rysunku 3 pokazano wykresy naprężeń i odkształceń, kształt powłoki oraz jej grubość przed (linia przerywana) i po odkształceniu (linia ciągła). Porównując powyższe rezultaty z wynikami obliczeń zamieszczonymi w pracy [19] dla podobnej powłoki, lecz o stałej grubości ścianki przed odkształceniem, łatwo zauważyć wpływ skokowej zmiany grubości ścianki.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. E. ADKINS, R. S. RIVLIN, *Large elastic deformations of isotropic materials*, IX The deformation of thin shells, Phil. Trans. R. Soc., A 244 (1952), 505-531.
2. С. А. Алексеев, *Расчет круглой упругой мембраны под равномерной поперечной нагрузкой*, Инж. Сб., 25 (1959).
3. E. A. DAVIS, *Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses*, Trans. ASME, 65 (1943), s. A-187.
4. E. A. DAVIS, *Yielding and fracture of medium carbon steel under combined stress*, J. Appl. Mech., 1 (1945).
5. И. И. Федяк, *Безмоментные ортотропные оболочки вращения при больших деформациях*, Труды Всесоюзной Конференции по теории пластин и оболочек, Киев 1962.
6. И. И. Федяк, *Некоторые задачи равновесия ортотропных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Теория оболочек и пластин, Изд. АН Арм. ССР, Еревань 1964.
7. Я. Ф. Фокин, *К вопросу о напряженном состоянии безмоментных цилиндрических оболочек при больших удлинениях*, Изв. ВУЗов, МВС и СО СССР, Строит. и Арх., 6, 1964.
8. A. E. GREEN, J. E. ADKINS, *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, Oxford University Press, 1960.
9. А. С. Григорьев, *Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., 6, 21 (1957).
10. А. С. Григорьев, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., 6, 25 (1961).
11. A. S. GRIGORIEV, *The stress state and the carrying capacity of flexible plates and shells at large deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN, Warszawa 1964, repr. Non-classical Shell Problems, Proc. IASS Symp., Warsaw, Sept. 1963.
12. А. Б. Губенко, и другие, *Пневматические строительные конструкции*, Гос. Изд. лит. по строят. арх. и строят. мат., Москва 1963.
13. В. В. Кепшен, *Конечные деформации безмоментной оболочки вращения под действием гидростатического давления*, Сб. Расчеты на прочность, Машгиз, М., 6, 1960.
14. А. Н. Крылов, *Лекции о приближенных вычислениях*, Изд. АН СССР, Ленинград 1933.
15. W. T. LANKFORD, E. SEIBELL, *Some problems in unstable plastic flow under biaxial tensions*, Metals Technol., August 1947.
16. И. С. Мамедов, *Большие прогибы ортотропной мембраны*, Инж. Ж. АН СССР, 1, 3 (1963).
17. Z. MARCINIAK, *Analiza stateczności cienkościennej powłoki walcowej poddanej rozciąganiu w stanie plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 10 (1959).
18. A. NADAI, *Theory of flow and fracture of solids*, New York-Toronto-London 1950.
19. Я. Оркиш, *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, Инж. Ж. АН СССР, 5, 1965.
20. J. ORKISZ, *Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 3 (1965).
21. Я. Оркиш, *Равновесие безмоментных оболочек вращения из каучукоподобных материалов*, Изв. АН СССР ОТН, 4, 1965.

22. F. OTTO, R. TROSTEL, *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ulstein Fachverlag, Frankfurt-Berlin 1962.
23. R. S. RIVLIN, *Some topics in finite elasticity*, Struct. Mech., Oxford 1960.
24. L. TRELOAR, *The physics of rubber elasticity*, Oxford 1948.
25. N. A. WEIL, *Tensile instability of thin-walled cylinders of finite length*, Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press Ltd, 5, 1963, 487-506.
26. Я. Г. Пановко, И. И. Губанова, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Изд. Наука, Москва 1964.

## Резюме

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ПРИ НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ФИЗИЧЕСКОЙ  
НЕЛИНЕЙНОСТИ

В работе рассматривается, вопрос больших деформаций гибких осесимметрических оболочек вращения при некоторых типах физической нелинейности. Привятые в работе физические зависимости вытекают из уравнений Надаи-Девиса.

Результатом работы являются системы дифференциальных уравнений, описывающие поведение рассматриваемых оболочек, в случаях, когда оба главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  положительны и в так наз. зоне складок, где окружное напряжение  $\sigma_2 = 0$ . Эти уравнения численно интегрированы методом Адамса для двух конкретных случаев а именно: мембраны и конической оболочки переменной первоначальной толщины при нагружению внутренним постоянным давлением. Работа является некоторым обобщением работ А. С. Григорьева [10] и [11], ввиду физической модели тела, наличия касательной нагрузки и переменной толщины стенки в недеформированном состоянии.

## Summary

FINITE DEFORMATION OF AXIALLY SYMMETRIC SHELLS IN A MEMBRANE  
STATE OF STRESS FOR SOME TYPES OF PHYSICAL NONLINEARITY

This paper is devoted to the problem of finite deformation of flexible axially-symmetric shells in a membrane state of stress in the case of physical nonlinearity of certain types. The physical relations used in the present paper follow from the Nádai-Davis equations.

As a result we obtain sets of differential equations describing the behaviour of the shells when both if principal stresses  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  are positive and in the «zone of folds», in which the circumferential stress  $\sigma_2 = 0$ . These equations are integrated numerically by the Adams method in two particular cases of a plane membrane and a conical shell of variable thickness. The present paper presents some generalization of the works of A. S. GRIGOREV [10, 11] from the viewpoint of the physical type of the body, the existence of tangential load and the variability of the wall thickness in the undeformed state.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
KATEDRA STATYKI BUDOWLI  
I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 września 1964 r.