

O PEWNYM PRAWIE PEŁZANIA

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

Spośród dużej liczby równań, które zostały zaproponowane dla opisanego zjawiska pełzania metali, dużą użyteczność w praktyce wykazuje równanie zaproponowane w r. 1910 przez ANDRADE. Równanie to ma postać

$$(1) \quad l = l_0 (1 + \beta t^{1/3}) e^{\kappa t},$$

gdzie l_0 , β i κ są to stałe materiałowe.

Prawo to było niejednokrotnie szeroko omawiane np. w [1 i 2] a również w innych pracach. W wyniku doświadczeń stwierdzono, że prawo Andrade nie zawsze prowadzi do prawidłowego opisu pełzania [3, 4]. Szczególnie interesujące wnioski otrzymał WYATT, który stwierdził słuszność wzoru (1) w podwyższonych temperaturach i przy większych wartościach naprężeń. Badania Wyatta zostały przeprowadzone na drutach z miedzi, aluminium i kadmu.

Z wniosków tych wynika, że istnieje pewien obszar temperatur, w którym należy oczekiwać dobrej zgodności wzoru (1) z doświadczeniem.

Dla niskich naprężeń i wyższych temperatur można przyjąć, że stała l_0 jest w przybliżeniu równa początkowej długości pomiarowej próbki. Wówczas wzór (1) przedstawia się w postaci

$$(2) \quad \varepsilon = (1 + \beta t^{1/3}) e^{\kappa t} - 1, \quad \varepsilon = \frac{l}{l_0} - 1$$

lub

$$(3) \quad \varphi = \ln(1 + \beta t^{1/3}) + \kappa t, \quad \varphi = \ln \frac{l}{l_0}.$$

Wielkość stałej κ określa pełzanie ustalone, natomiast stałej β pierwsze stadium pełzania. Jak wykazują doświadczenia [1] obydwie stałe przy ustalonej temperaturze zależą od wartości naprężenia w następujący sposób:

$$\beta = a \int_0^{\sigma} e^{-b^2(\sigma - \sigma_0)^2} \sigma d\sigma, \quad \kappa = e^{c\sigma}, \quad T = \text{const},$$

gdzie a , b , σ_0 i c oznaczają nowe stałe materiałowe.

W dalszej części pracy będzie dyskutowane pierwsze stadium pełzania; wówczas można założyć $\kappa \approx 0$. Przyjęcie $\kappa \approx 0$ jest słuszne dla niskich wartości naprężeń,

gdzie wyraźnie przeważa pełzanie nieustalone (prędkość pełzania zmniejsza się z czasem). Po przyjęciu $\kappa \approx 0$ równanie (2) przedstawi się w postaci

$$(4) \quad \varepsilon = \beta t^{1/3}.$$

Do dalszej dyskusji przyjmijmy bardziej ogólną formę równania (4), dla której wspomniane równanie jest przypadkiem szczególnym. Mamy na myśli równanie

$$(5) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \beta(\sigma) t^\delta,$$

gdzie wartość ε_0 odpowiada odkształceniu natychmiastowemu. Oczywiście w przypadku wzoru Andrade $\delta = 1/3$. Ogólnie, w przypadku opisu krzywych pełzania wartości wykładnika δ mogą zmieniać się w granicach $0 < \delta < 1$ (rys. 1).

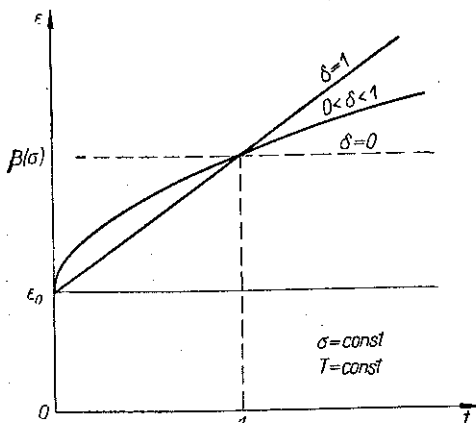
Dla $\delta = 0$ pełzanie nie zachodzi, wydłużenie pozostaje stałe względem czasu i równe $\varepsilon_0 + \beta(\sigma)$. Natomiast w przypadku $\delta = 1$, pełzanie zachodzi ze stałą prędkością.

Jeżeli równanie (5) zrózniczkować względem czasu, a następnie czas wyrugować, to dla $\delta = 1/3$ otrzymujemy

$$(6) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{3} [\beta(\sigma)]^3 (\varepsilon - \varepsilon_0)^{-2}$$

lub po zlogarytmowaniu

$$(7) \quad \log \dot{\varepsilon} = 3 \log \frac{\beta(\sigma)}{\sqrt{3}} - 2 \log (\varepsilon - \varepsilon_0).$$



Rys. 1. Graniczne kształty krzywych pełzania przy zmianie wartości wykładnika δ we wzorze $\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta(\sigma) t^\delta$

Z otrzymanej zależności wynika, że na płaszczyźnie $\log \dot{\varepsilon}$, $\log \varepsilon$ krzywe pełzania przedstawiają się jako proste o współczynniku kierunkowym równym -2 . Współczynnik ten (oznaczony przez p) zależy w następujący sposób od wykładnika δ ze wzoru (5):

$$-p = \frac{1 - \delta}{\delta}, \quad 0 < \delta < 1.$$

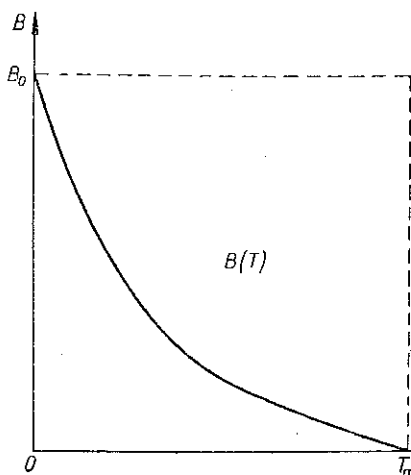
Ze wzoru (7) równocześnie wynika, że we wspomnianych współrzędnych logarytmicznych zmiana naprężenia powoduje równoległe przesunięcie prostych, natomiast nie zmienia ich pochylenia.

Wyniki wielu doświadczeń przeprowadzonych przez różnych autorów wskazują, że otrzymywane współczynniki kierunkowe mogą znacznie różnić się wartościami od $p = -2$. I tak np. dla miedzi w temperaturze pokojowej (w skali temperatury homologicznej $\theta \approx 0,22$, $\theta = T/T_m$, gdzie T_m oznacza temperaturę topnienia w skali absolutnej, T temperaturę badania w tej samej skali) $p = -300$, dla stopu aluminium w temperaturze pokojowej $p = -40$. Dla innego stopu aluminium 61ST (wg ASTM) również w temperaturze pokojowej $p = -27,6$ (dane wg [5]). Rów-

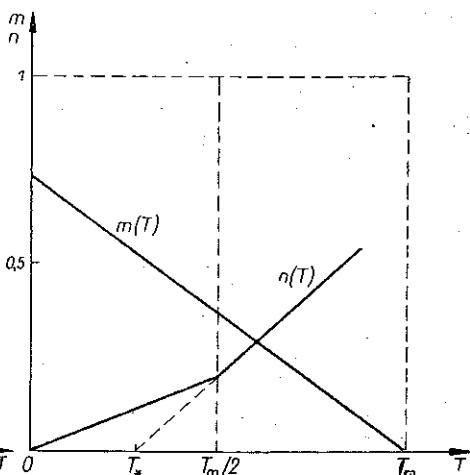
nocześnie stwierdzono na drodze doświadczalnej, że współczynnik kierunkowy p można uznać za niezależny od naprężenia.

CRUSSARD stwierdził, że wykładnik δ może zmieniać się od 0,15 do 0,80 w zależności od temperatury [4], co odpowiada zmianie współczynnika kierunkowego p od $-5,7$ do $-0,25$.

Z doświadczeń Crussarda i Wyatta wynika więc, że p zależy w sposób wyraźny od temperatury i wartość $p = -2$ może być miarodajna w pewnym określonym zakresie temperatur, przy czym bezwzględna wartość p zmniejsza się ze wzrostem temperatury.



Rys. 2. Schematyczne przedstawienie przyjętej funkcji $B(T)$



Rys. 3. Schematyczne przedstawienie przyjętych funkcji $m(T)$ i $n(T)$

Aby dać odpowiedź, w jakim obszarze temperatur prawo Andrade jest słuszne, skorzystamy z uogólnionego prawa DAVISA [6]. Prawo to zostało uogólnione dla przypadku zmiennej temperatury w pracy [7] i wówczas może zostać zapisane w następującej postaci:

$$(8) \quad \sigma = B(T) \varepsilon^{m(T)} \dot{\varepsilon}^{n(T)},$$

gdzie $B(T)$ oznacza moduł plastyczności, $m(T)$ wykładnik umocnienia i $n(T)$ czułość na prędkość odkształcenia. Jak stwierdzono, wszystkie wymienione funkcje zależą od temperatury. Dla polikrystalicznych metali o siatce regularnej płaskocentrycznej, które nie wykazują starzenia odkształceniowego [8], funkcje $B(T)$, $m(T)$ i $n(T)$ mają postać

$$B(T) = C \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right), \quad T_0 \approx -3T_m,$$

$$m(T) = m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right),$$

dla przypadku niskich temperatur $T \leq 0,5 T_m$

$$n(T) = \alpha T, \quad \theta \leq 0,5,$$

dla przypadku wysokich temperatur $T \geq 0,5 T_m$

$$n(T) = \gamma (T - T_*), \quad \theta \geq 0,5,$$

gdzie $C, q, m_0, \alpha, \gamma$ i T_* oznaczają stałe materiałowe, a T bieżącą temperaturę w skali absolutnej. W przypadku opisu krzywej umocnienia dla $\theta \leq 0,5$ należy znać następujące stałe materiałowe: C, q, m_0, α i T_m . Natomiast w przypadku $\theta \geq 0,5$ stałe C, q, m_0, γ, T_* i T_m .

Po uwzględnieniu postaci funkcji $B(T), m(T)$ i $n(T)$ we wzorze (7) i obliczeniu prędkości odkształcenia mamy

$$(9) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma_*}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha T}} \exp \left[\frac{q}{\alpha T (3T_m - T)} \right] \varepsilon^{-\frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right)}, \quad \theta \leq 0,5,$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma_*}{C} \right)^{\frac{1}{\gamma(T-T_*)}} \exp \left[\frac{q}{\gamma (T - T_*) (3T_m - T)} \right] \varepsilon^{-\frac{m_0}{\gamma T_m} \left(\frac{T_m - T}{T - T_*} \right)}, \quad \theta \geq 0,5,$$

gdzie przez σ_* oznaczono ustalone naprężenie podczas procesu pełzania.

Wzory (9) przedstawiają się w postaci logarytmicznej następująco:

$$(10) \quad \log \dot{\varepsilon} = \log \left\{ \left(\frac{\sigma_*}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha T}} \exp \left[\frac{q}{\alpha T (3T_m - T)} \right] \right\} - \frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right) \log \varepsilon, \quad \theta \leq 0,5,$$

$$\log \dot{\varepsilon} = \log \left\{ \left(\frac{\sigma_*}{C} \right)^{\frac{1}{\gamma(T-T_*)}} \exp \left[\frac{q}{\gamma (T - T_*) (3T_m - T)} \right] \right\} - \frac{m_0}{\gamma T_m} \left(\frac{T_m - T}{T - T_*} \right) \log \varepsilon, \quad \theta \geq 0,5$$

skąd otrzymujemy współczynniki kierunkowe p krzywych pełzania we współrzędnych $\log \dot{\varepsilon}, \log \varepsilon$:

$$(11) \quad p \equiv -\frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right), \quad \theta \leq 0,5,$$

$$p \equiv -\frac{m_0}{\gamma T_m} \left(\frac{T_m - T}{T - T_*} \right), \quad \theta \geq 0,5;$$

stąd

$$(12) \quad T = T_m \frac{1 - p \frac{\gamma T_*}{m_0}}{1 - p \frac{\gamma T_m}{m_0}} \quad \text{lub} \quad \theta = \frac{1 - p \frac{\gamma T_*}{m_0}}{1 - p \frac{\gamma T_m}{m_0}}.$$

Z otrzymanych wzorów wynika, że współczynnik kierunkowy p krzywych pełzania na płaszczyźnie $\log \dot{\varepsilon}, \log \varepsilon$ zależy zarówno od temperatury, jak również od stałych materiałowych, charakteryzujących zdolność do umacniania się metalu (stała m_0) oraz wrażliwość na prędkość odkształcenia (stała γ). Jednak na bieżącą wartość p wpływa tylko temperatura. Spostrzeżenia te pokrywają się z obserwacjami doświadczalnymi.

Na podstawie doświadczalnie wyznaczonych wartości stałych γ , T_* oraz m_0 można obliczyć taką temperaturę T_A , przy której $p = -2$. Otrzymana wartość T_A wyznaczy w przybliżeniu temperaturę, w otoczeniu której należy spodziewać się, że prawo Andrade jest spełnione w sposób ścisły. Z punktu widzenia zachowania się metali polikrystalicznych wartość temperatury T_A nie może być uważana za wartość ścisłą, gdyż stałe materiałowe γ i m_0 zależą również od wielkości ziarna, domieszek stopowych itp. Można jedynie w tym przypadku mówić o pewnym przedziale temperatury.

W celu obliczenia konkretnej wartości θ_A ($\theta_A = T_A/T_m$) skorzystamy z wartości liczbowych wymienionych stałych materiałowych dla aluminium i miedzi, które zostały podane w pracy [7]. Dla aluminium mamy: $0,50 \leq m_0 \leq 0,70$, $\gamma = 3,60 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{K}$, $400^\circ\text{K} \leq T_* \leq 460^\circ\text{K}$, $T_m = 933^\circ\text{K}$. Dla miedzi natomiast: $0,5 \leq m_0 \leq 0,70$, $\gamma = 2,61 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{K}$, $500^\circ\text{K} \leq T_* \leq 680^\circ\text{K}$, $T_m = 1356^\circ\text{K}$. Minimalne i maksymalne wartości θ_A znajdziemy podstawivszy odpowiednie wartości stałych oraz $p = -2$. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

dla aluminium

$$(\theta_A)_{\min} = 0,67, \quad (\theta_A)_{\max} = 0,75,$$

co w skali Celsjusza odpowiada przedziałowi temperatur od 352°C do 427°C ;

dla miedzi mamy:

$$(\theta_A)_{\min} = 0,629, \quad (\theta_A)_{\max} = 0,683,$$

co w skali Celsjusza odpowiada przedziałowi temperatur od 580°C do 653°C .

Tak więc otrzymano przybliżone przedziały temperatur, w których należy oczekiwać spełnienia prawa Andrade podczas pierwszego stadium pełzania przy niskich wartościach naprężeń.

Dla pełniejszego obrazu omawianego zagadnienia obliczmy δ z podanego uprzednio wzoru $-p = 1 - \delta/\delta$:

$$(13) \quad \delta = \frac{1}{1-p}.$$

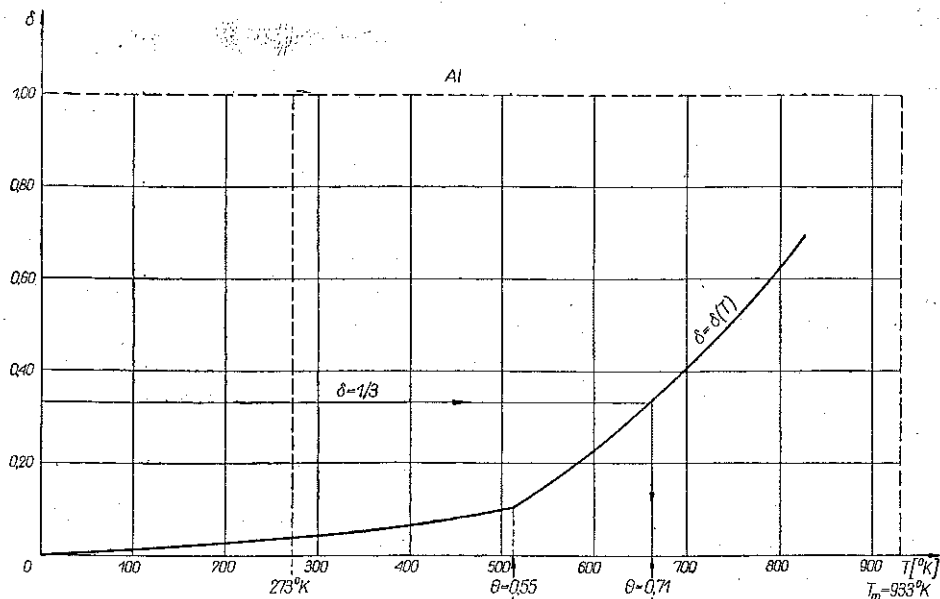
Po podstawieniu wartości p ze wzorów (11) mamy odpowiednio

$$(14) \quad \delta = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right)}, \quad \theta \leq 0,5,$$

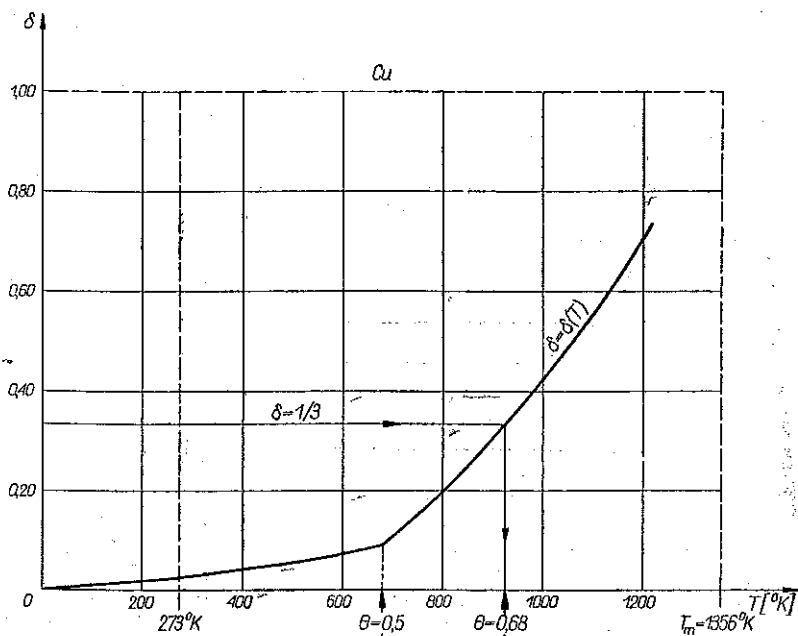
$$\delta = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{\gamma T_m} \left(\frac{T_m - T}{T - T_*} \right)}, \quad \theta \geq 0,5.$$

Otrzymujemy więc bezpośrednią zależność $\delta = \delta(T)$ wykładnika δ ze wzoru (5) jako funkcję temperatury absolutnej. Na rysunku 4 i rys. 5 przedstawiono wykresy $\delta = \delta(T)$ odpowiednio dla aluminium i miedzi przy uśrednionych wartościach wymienionych uprzednio stałych. Otrzymane wykresy pokazują, w jaki sposób wykładnik δ zwiększa się wraz ze wzrostem temperatury, przy czym $\delta = 1/3$ wy-

znacza na wykresach wartości T_A . Wynoszą one odpowiednio dla aluminium $\theta_A \approx 0,71$, dla miedzi $\theta_A \approx 0,68$ i oczywiście znajdują się wewnątrz obliczonych uprzednio przedziałów.



Rys. 4. Wartości wykładnika δ jako funkcji temperatury dla aluminium. Do obliczeń przyjęto następujące wartości stałych: $m_0 = 0,6$, $\alpha = 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{K}$, $\gamma = 3,60 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{K}$ oraz $T_* = 425 \text{ K}$



Rys. 5. Wartości wykładnika δ jako funkcji temperatury dla miedzi. Do obliczeń przyjęto następujące wartości stałych: $m_0 = 0,6$, $\alpha = 4,45 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{K}$, $\gamma = 2,61 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{K}$ oraz $T_* = 560 \text{ K}$

Z przedstawionej dyskusji prawa Andrade wynika, że jest ono słuszne w pierwszym stadium pełzania dla podwyższonych temperatur, które dla aluminium i miedzi wynoszą w przybliżeniu w skali temperatury homologicznej $\theta_A \approx 0,65$. Należy jednak pamiętać, że stałe materiałowe γ , T_* i m_0 , dla których obliczono podane zakresy θ_A , uzyskano przy większych prędkościach odkształcenia niż te, które spotyka się w procesach pełzania. Równocześnie różne wielkości ziarna i ewentualne małe domieszki innych metali uwzględniono jedynie szacunkowo. Z tego względu otrzymane przedziały temperatur θ_A noszą charakter orientacyjny.

Na podkreślenie zasługuje fakt, że przedziały te leżą powyżej połowy temperatury topnienia, a więc w zakresie pełzania przy wysokich temperaturach.

Ze względu na to, że większość technicznie uzasadnionych przypadków badań na pełzanie prowadzi się właśnie w takich temperaturach, prawo Andrade można uznać za przydatne w praktycznych zastosowaniach dla ograniczonego ich przedziału.

Literatura cytowana w tekście

1. E. N. DA C. ANDRADE, *Creep and recovery*, American Society for Metals (a seminar on creep and recovery of metals held during the thirty eight national metal congress, Cleveland, 1956), Cleveland, Ohio 1957.
2. E. N. DA C. ANDRADE, *The validity of the $\beta t^{1/3}$ law of flow of metals*, Phil. Mag., 7, 84 (Dec. 1 62), 2003.
3. O. H. WYATT, *Transient creep in pure metals*, Proc. Phys. Soc., Section B, 66 (1953), 459.
4. B. JAOUŁ, *Etude de la plasticité et application aux métaux*, Dunod, Paris 1965.
5. J. D. LUBAHN, R. P. FELGAR, *Plasticity and creep of metals*, J. Wiley, New-York-London 1961.
6. E. A. DAVIS, *Creep and relaxation of oxygen-free copper*, J. Appl. Mech., 10 (June 1943), A101.
7. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inżyn., 3, 13 (1965).
8. J. KLEPACZKO, *Wpływ prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia dla aluminium*, Rozpr. Inżyn., 3, 12 (1964), 455.

Резюме

ОБ НЕКОТОРОМ ЗАКОНЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе проводится дискуссия, касающаяся закона ползучести металлов, предположенного Андраде. Дискуссия основывается на обобщенном для случая переменной температуры законе Э. А. Дависа [6]

$$\sigma = B(T) \dot{\epsilon}^{m(T)} \epsilon^{n(T)},$$

где $B(T)$, $m(T)$ и $n(T)$ обозначает соответственно, модуль пластичности, показатель упрочнения и чувствительность к скорости деформации. Эти все величины зависят, от абсолютной температуры. Этот закон является правильным для поликристаллически технически чистых металлов, с регулярно плоскоцентрической сеткой, как напр. Al, Cu и Pb.

В результате дискуссии констатируется, что в случае первой стадии ползучести, закон Андраде, в определенном пространстве повышенных температур, является правильным. Для алюминия и меди, эти области находятся в окрестности температуры, в гомологическом масштабе равном $\theta_A \approx 0,65$.

Summary

ON A CERTAIN CREEP LAW

The paper contains a discussion of the creep law of metals proposed by Andrade. The discussion is based on the law of E. A. DAVIS [6] generalized to the case of a variable temperature

$$\sigma = B(T) \varepsilon^{m(T)} \dot{\varepsilon}^n(T),$$

where $B(T)$, $m(T)$, $n(T)$ denote the plastic modulus, the strain hardening exponent and the strain-rate sensitivity, respectively. These quantities depend all on the absolute temperature.

This law is valid for technically pure polycrystalline metals of rectangular plane-centric network, such as Al, Cu and Pb.

As a result of discussion it is found that for the first stage of creep Andrade's law is valid in a definite region of elevated temperatures. For aluminium and copper these regions are located near the temperature $\theta_A \approx 0,65$ in the homologous scale.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1964 r.