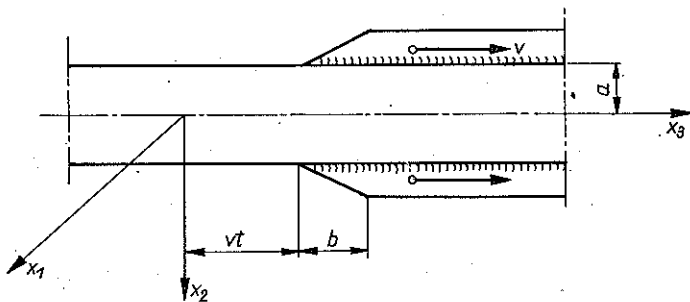


PEWIEN PRZYPADEK NIEUSTALONEGO ROZKŁADU TEMPERATURY
W DŁUGIM WALCU

TADEUSZ ROŻNOWSKI (WARSZAWA)

W niniejszej pracy rozpatrzmy niestabilny rozkład temperatury w długim walcu, którego połowa poboczniczy została nagle ogrzana do temperatury zmieniającej się wzdłuż poboczniczy według wykresu skarpy, przy czym odpowiednie pole temperatury dla $t > 0$ zaczyna przesuwać się równoległe do osi walca x_3 ze stałą prędkością v (rys. 1).



Rys. 1

Przyjmujemy oznaczenia z pracy [1]. W bezwymiarowym układzie współrzędnych walcowych ϱ, ζ równanie ciepła napiszemy w postaci

$$(1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{\theta} = 0, \quad 0 \leq \varrho < 1, \quad -\infty < \zeta < \infty, \quad 0 < \tau < \infty.$$

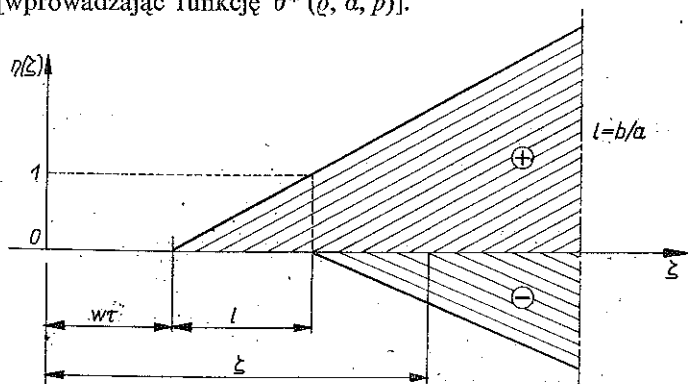
Warunki początkowe i brzegowe (rys. 2) określone są za pomocą następujących formuł:

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}(\varrho, \zeta, 0) &= 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \quad -\infty < \zeta < \infty; \\ \bar{\theta}(1, \zeta, \tau) &= \frac{1}{l} [(\zeta - w\tau) \eta(\zeta - w\tau) - (\zeta - l - w\tau) \eta(\zeta - l - w\tau)], \\ &0 < \tau < \infty, \end{aligned}$$

gdzie

$$\eta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \lambda > 0, \\ 0 & \text{dla } \lambda < 0. \end{cases}$$

Do rozwiązania równania (1) z warunkami (2) zastosujemy najpierw transformację wykładniczą Fouriera, [wprowadzając funkcję $\theta_1(\varrho, \alpha, \tau)$], a następnie transformację Laplace'a [wprowadzając funkcję $\theta^*(\varrho, \alpha, p)$].



Rys. 2

Równanie (1) po wykonaniu obu transformacji przyjmie postać

$$(3) \quad \frac{d^2 \theta^*}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\theta^*}{d\varrho} - (\alpha^2 + p) \theta^* = 0.$$

Warunki początkowe i brzegowe przekształcą się w pierwszej fazie w wyrażenia

$$(4) \quad \theta_1(\varrho, \alpha, 0) = 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1;$$

$$\theta_1(1, \alpha, \tau) = \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [(\zeta - w\tau) \eta(\zeta - w\tau) - (\zeta - l - w\tau) \eta(\zeta - l - w\tau)] e^{i\alpha\zeta} d\zeta$$

a następnie

$$(4.1) \quad \theta_1(1, \alpha, \tau) = \left[\frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \delta(\alpha) e^{i\alpha} \right] e^{i\alpha w\tau} = A(\alpha, l) e^{i\alpha w\tau},$$

$$(5) \quad \theta^*(1, \alpha, p) = A(\alpha, l) \frac{1}{p - i\alpha w},$$

gdzie $\delta(\alpha)$ oznacza deltę Diraca.

Jest widoczne, że

$$(6) \quad \lim_{l \rightarrow 0} A(\alpha, l) = \sqrt{2\pi} \delta_+(\alpha),$$

gdzie $\delta_+(\alpha)$ jest funkcją Heisenberga, zatem rozważane zagadnienie daje, jako przypadek szczególny, wyniki pracy [2].

¹ Zależności (4.1) oraz (6) wyprowadzono z równości

$$\frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \left[\int_{w\tau}^{l+w\tau} (\zeta - w\tau) e^{i\alpha\zeta} d\zeta + l e^{i\alpha(l+w\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\zeta - l - w\tau) e^{i\alpha(\zeta - l - w\tau)} d\zeta \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha(l+w\tau)} + \frac{1}{l\alpha^2} [e^{i\alpha(l+w\tau)} - e^{i\alpha w\tau}] + 2\pi \delta_+(\alpha) e^{i\alpha(l-w\tau)} \right\}.$$

Rozwiązaniem równania (3) ograniczonym dla $\varrho = 0$ i spełniającym (5) jest funkcja

$$(7) \quad \theta^*(\varrho, a, p) = \frac{I_0 [(a^2 + p)^{1/2} \varrho]}{I_0 [(a^2 + p)^{1/2}]} \frac{A(a, l)}{p - iaw}.$$

Przystąpimy obecnie do retransformacji odpowiednich funkcji. Odwrotna transformacja Laplace'a funkcji (7) po wykorzystaniu wyników otrzymanych w [2] [por. wzory (7) i (10)] prowadzi do funkcji

$$(8) \quad \theta_1(\varrho, a, \tau) = A(a, l) \left\{ \frac{I_0 [(a^2 + iaw)^{1/2} \varrho]}{I_0 [(a^2 + iaw)^{1/2}]} e^{iaw\tau} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + a^2 + iaw} e^{-(\omega_n^2 + a^2)\tau} \right\}.$$

Odwrotna transformacja wykładnicza Fouriera funkcji $\theta_1(\varrho, a, \tau)$ określa poszukiwane rozwiązanie:

$$(9) \quad \bar{\theta}(\varrho, \zeta, \tau) = \bar{\theta}_1(\varrho, \tau) + \bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau) + \bar{\theta}_3(\varrho, \zeta, \tau),$$

gdzie

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}_1(\varrho, \tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{I_0 [(a^2 + iaw)^{1/2} \varrho]}{I_0 (a^2 + iaw)^{1/2}} e^{-ia(\zeta - l - w\tau)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \frac{1}{\omega_n^2 + a^2 + iaw} e^{-(\omega_n^2 + a^2)\tau - ia(\zeta - l)} \right] \delta(a) da, \\ \bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau) &= \frac{1}{2\pi l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0 [(a^2 + iaw)^{1/2} \varrho]}{I_0 [(a^2 + iaw)^{1/2}]} [e^{-ia(\zeta - l - w\tau)} - e^{-ia(\zeta - w\tau)}] \frac{da}{a^2}, \\ \bar{\theta}_3(\varrho, \zeta, \tau) &= -\frac{2}{2\pi l} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \frac{1}{\omega_n^2 + a^2 + iaw} e^{-(\omega_n^2 + a^2)\tau} \times \\ &\quad \times [e^{-ia(\zeta - l)} - e^{-ia\zeta}] \frac{da}{a^2}. \end{aligned}$$

Obliczymy poszczególne człony wyrażenia (9). Pierwszy człon wyrazi się za pomocą wzoru

$$(11) \quad \bar{\theta}_1(\varrho, \tau) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n \varrho)}{\omega_n J_1(\omega_n)} e^{-\omega_n^2 \tau}.$$

Aby obliczyć całkę $\bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau)$, skorzystamy ze wzoru (17) podanego w pracy [2]. Jest widoczne, że może być ona otrzymana z zależności (17) przez odpowiednie całkowanie:

$$(12) \quad \bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau) = \frac{1}{l} \int_0^l dp \left\{ -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \frac{\omega_n}{a_n \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp [a_n (\zeta - p - w\tau)] \right\} \eta(w\tau + p - \zeta) + \frac{1}{l} \int_0^l dp \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_n}{a_{-n} \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2}} \exp [a_{-n} (\zeta - p - w\tau)] \right\} \eta(\zeta - p - w\tau),$$

gdzie

$$a_n = \left[\left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2} - \frac{w}{2} \right], \quad a_{-n} = - \left[\left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2} + \frac{w}{2} \right].$$

Biorąc pod uwagę pewne własności funkcji Heaviside'a, m.in.

$$\eta(x) + \eta(-x) = 1, \quad \eta(0) = \frac{1}{2},$$

po pewnych przekształceniach otrzymamy

$$(13) \quad \bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \frac{1}{a_n^2 \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2}} \times \\ \times [e^{a_n(\zeta-l-w\tau)} - e^{a_n(\zeta-w\tau)}], \quad \zeta - w\tau \leq 0,$$

$$\bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau) = -\frac{1}{2} + \frac{\zeta - w\tau}{l} + \frac{w}{4l} (1 - \varrho^2) - \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n) \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2}} \times \\ \times \left[\frac{1}{a_n^2} e^{a_n(\zeta-l-w\tau)} - \frac{1}{a_{-n}^2} e^{a_{-n}(\zeta-w\tau)} \right], \quad 0 \leq \zeta - w\tau \leq l,$$

$$\bar{\theta}_2(\varrho, \zeta, \tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} \frac{1}{a_{-n}^2 \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{1/2}} \times \\ \times [e^{a_{-n}(\zeta-w\tau-l)} - e^{a_{-n}(\zeta-w\tau)}], \quad \zeta - w\tau \geq l.$$

Skorzystaliśmy tutaj z tożsamości

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n \varrho)}{\omega_n^3 J_1(\omega_n)} = \frac{1}{8} (1 - \varrho^2).$$

Dla obliczenia (10)₃ przekształcimy to wyrażenie do postaci

$$(15) \quad \bar{\theta}_3(\varrho, \zeta, \tau) = -\frac{2}{2\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} e^{-\omega_n^2 \tau} \times \\ \times \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\omega_n^2 + \alpha^2 - i\alpha\omega} + \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha\omega} \right) (\cos \alpha\mu_1 - \cos \alpha\mu_2) \frac{e^{-\alpha^2 \tau}}{\alpha^2} + \right. \\ \left. + i \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \alpha^2 - i\alpha\omega} - \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha\omega} \right) (\sin \alpha\mu_1 - \sin \alpha\mu_2) \frac{e^{-\alpha^2 \tau}}{\alpha^2} \right] d\alpha$$

lub

$$(16) \quad \bar{\theta}_3(\varrho, \zeta, \tau) = -\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n \varrho)}{J_1(\omega_n)} e^{-\omega_n^2 \tau} \left[\frac{2}{\omega_n^2 \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha\mu_1 - \cos \alpha\mu_2}{\alpha^2} \times \right. \\ \times e^{-\alpha^2 \tau} d\alpha - \frac{2\omega}{\omega_n^4 \pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha\mu_1 - \sin \alpha\mu_2}{\alpha} e^{-\alpha^2 \tau} d\alpha + \\ + \frac{1}{a_n^2 \left(\omega_n^2 + \frac{\omega^2}{4} \right)^{1/2} \pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha\mu_1 - a_n \cos \alpha\mu_1 - (\alpha \sin \alpha\mu_2 - a_n \cos \alpha\mu_2)}{\alpha^2 + a_n^2} e^{-\alpha^2 \tau} d\alpha - \\ \left. - \frac{1}{a_{-n}^2 \left(\omega_n^2 + \frac{\omega^2}{4} \right)^{1/2} \pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha\mu_1 - a_{-n} \cos \alpha\mu_1 - (\alpha \sin \alpha\mu_2 - a_{-n} \cos \alpha\mu_2)}{\alpha^2 + a_{-n}^2} e^{-\alpha^2 \tau} d\alpha \right],$$

gdzie $\mu_1 = \zeta - l$, $\mu_2 = \zeta$.

Jeżeli zauważymy, że dla dowolnych parametrów $\mu_2 > \mu_1$ [3] mamy

$$(17) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha\mu_1 - \cos \alpha\mu_2}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 \tau} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) d\xi = \\ = 2\sqrt{\tau} \left[(\mu_2 - \mu_1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\mu_1^2} - e^{-\mu_2^2}) + \mu_1 \operatorname{erfc}(\mu_1) - \mu_2 \operatorname{erfc}(\mu_2) \right]$$

i wykonamy całkowania w (16), to otrzymamy na $\bar{\theta}_3$ wzór prawdziwy w całym zakresie zmienności parametru ζ :

$$(18) \quad \bar{\theta}_3(\varrho, \zeta, \tau) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n)}{J_1(\omega_n)} \exp(-\omega_n^2 \tau) \left\{ \frac{1}{2a_n^2 \left(\omega_n^2 + \frac{\omega^2}{4} \right)^{1/2}} \times \right. \\ \times \left[\exp(a_n^2 \tau + a_n(\zeta - l)) \operatorname{erfc} \left(a_n \sqrt{\tau} + \frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}} \right) - \exp(a_n^2 \tau + a_n \zeta) \times \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{erfc} \left(a_n \sqrt{\tau} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] + \frac{1}{2a_{-n}^2 \left(\omega_n^2 + \frac{\omega^2}{4} \right)^{1/2}} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \times \left[\exp(a_{-n}^2 \tau + a_{-n}(\zeta - l)) \operatorname{erfc}\left(-a_{-n} \sqrt{\tau} - \frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}}\right) - \exp(a_{-n}^2 \tau + a_{-n} \zeta) \times \right. \\
 & \times \operatorname{erfc}\left(-a_{-n} \sqrt{\tau} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) \left. \right] - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\omega_n^2} + \frac{2\sqrt{\tau}}{\omega_n^2 \sqrt{\pi}} \left[e^{-\left(\frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} \right] - \\
 & - \left(\frac{\zeta - l}{\omega_n^2} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{\zeta}{\omega_n^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{w}{\omega_n^4} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Jest rzeczą widoczną z wyprowadzonych wzorów (11), (13) i (18), że funkcja temperatury jest wszędzie ciągła wewnątrz walca, w szczególności w przekrojach $\zeta - w\tau = 0$ oraz $\zeta - w\tau = l$. Na brzegu $\varrho = 1$ jest również spełniony warunek (2). Jeśli $l \rightarrow 0$, otrzymujemy jako przypadek szczególny wzór na temperaturę podany w pracy [2]¹.

Literatura cytowana w tekście

1. T. ROŻNOWSKI, *Non steady state of temperature in a long circular cylinder with heat moving over the lateral surface*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 5, 1964, 273.
2. T. ROŻNOWSKI, *Non steady state of temperature in a long cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 13 (1965), 45.
3. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford at the Clarendon Press, Sec. edit. 1959.
4. Г. С. МАКАР, *Напряженное состояние в бесконечном цилиндре, вызванное движущимся осесимметричным температурным полем*, Вопросы Механики Реального Твёрдого Тела, В. 3, Киев 1964.
5. T. NAKADA and S. HASHIMOTO, *Heat conduction in a semi-infinite solid heated by a moving heat source along the boundary*, Bull. JSME, 12, 6 (1963), 59.
6. R. MUKI, K. AKIYAMA, Y. NAKANO and K. BANZAI, *Thermal stresses in an infinite circular cylinder exposed to moving heat sources*, Bull. JSME, 27, 7 (1964), 506.

Резюме

НЕКОТОРЫЙ СЛУЧАЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассматривается неустановившееся распределение температуры в длинном цилиндре, на половине боковой поверхности которого начиная с момента $t = 0$ возникает изменное температурное поле, характеризующееся передвигающейся с постоянной скоростью v диаграммой откоса. Получено решение задачи методом интегральных преобразований.

¹ W czasie oddawania pracy do druku ukazały się artykuły [4 i 6], w których autorzy rozpatrują m. in. przepływ ciepła w nieskończonym walcu przy założeniu quasi-ustalonego rozkładu temperatury i wymiany ciepła na pobocznicy. Jeśli przyjąć w wymienionych pracach, że prędkość v zmierza do zera, autorzy otrzymują zwykłe równanie Laplace'a na temperaturę; w naszej pracy nie otrzymujemy tego przypadku szczególnego. To samo dotyczy nieco wcześniejszej pracy [5].

Результаты представлены в виде рядов бесселевых функций и функций погрешности, используя, сопоставленные в таблицах интегралы и вычисленные в работе [2]. Исследуется поведение функции температуры в сечениях фронта, передвигающейся диаграммы и через край откоса. Рассматриваются некоторые частные случаи.

Summary

A CASE OF NONSTATIONARY TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A LONG CYLINDER

A half of the lateral surface of the cylinder is assumed to have been heated suddenly to a temperature varying according to the graph of the trapezoidal form along the lateral surface. At $t > 0$ the given temperature field starts moving with constant velocity v . The problem has been solved by means of integral transformations.

The results are represented in the form of series of Bessel and error functions, the values of the integrals being taken from the tables. The temperature function is analysed in sections passing through the front of the moving temperature field and through the edge of the trapezoidal form. Some particular cases are considered.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1964 r.
