

## ZGINANIE I WYBOCZENIE RAM PRZESTRZENNYCH ZŁOŻONYCH Z PRĘTÓW O ZMIENNYCH SZTYWNOŚCIACH ZGINANIA I SKRĘCANIA

EDWARD KRYNICKI, ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

### Wstęp

Ustroje prętowe o zmiennych sztywnościach zginania i skręcania znajdują duże zastosowanie w różnych konstrukcjach inżynierskich. Z tego względu opracowanie odpowiednich wzorów, umożliwiających łatwe wykonywanie obliczeń statycznych tych ustrojów, ma istotne znaczenie dla praktyki inżynierskiej.

Niektóre rozwiązania ściśle, dotyczące zginania i wyboczenia ustrojów prętowych, złożonych z elementów o zmiennych sztywnościach zginania podano w monografii [1] F. BLEICHA, monografii [2] A. F. SMIRNOWA oraz w pracy [3] F. TÖLKEGO. Rozwiązania te obejmują jednak tylko zginanie i wyboczenie ustrojów płaskich oraz dotyczą wyłącznie pewnych szczególnych warunków brzegowych i uniemożliwiają wyznaczenie sił krytycznych w przypadkach ram przesuwnych.

Rozprawa niniejsza stanowi jedno z kolejnych opracowań autorów z zagadnień statyki i stateczności sprężystej ustrojów prętowych złożonych z elementów o zmiennych sztywnościach.

W pracy tej podano rozwiązanie zagadnienia zginania i wyboczenia sprężystego ram przestrzennych, złożonych z następujących elementów: 1) prętów jednolitych o zmiennych przekrojach poprzecznych kwadratowych lub kołowych oraz 2) elementów kratowych o zmiennych sztywnościach zginania i skręcania przekrojów poprzecznych. Rozwiązania otrzymano przy zastosowaniu metody przemieszczeń.

W tym celu wykorzystano wzory transformacyjne metody przemieszczeń, wyprowadzone w poprzednich pracach [4 i 5] dla przypadków zginania i wyboczenia wyżej wymienionych elementów oraz wyprowadzono wzory transformacyjne dla prętów skręcanych o rozważanych rodzajach przekrojów poprzecznych.

W pracy podano przykłady dotyczące zginania i wyboczenia sprężystego ram przestrzennych oraz wyboczenia z płaszczyzny ram płaskich o zmiennych sztywnościach zginania i skręcania.

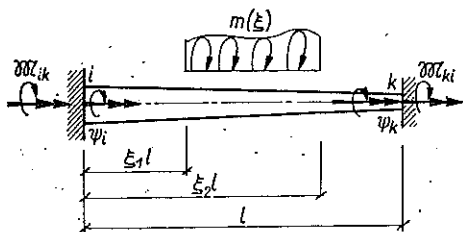
Wyprowadzone wzory transformacyjne metody przemieszczeń mogą być zastosowane do wyznaczania sił przekrojowych i obciążeń krytycznych w przypadku ram hal przemysłowych, konstrukcji wieżowych i estakadowych, niektórych elementów mostowych i różnych konstrukcji szkieletowych.

### 1. Uwagi ogólne

Rozważmy pręt  $i - k$  o wymiarach poprzecznych dowolnie zmiennych wzdłuż osi pręta, którego końce  $i$  i  $k$  mogą się obracać w płaszczyźnie prostopadłej do osi

pręta o dowolne kąty  $\psi_i$  i  $\psi_k$ . Ponadto pręt obciążony jest dowolnym momentem skręcającym  $m(\xi)$  w płaszczyźnie prostopadłej do osi (rys. 1).

Równanie różniczkowe kąta skręcania pręta  $\psi(\xi)$  jest następujące:



Rys. 1

$$(1.1) \quad \frac{d}{l^2 d\xi} \left[ GC(\xi) \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right] + m(\xi) = 0,$$

gdzie  $\xi = x/l$ ,  $\psi(\xi)$  oznacza kąt skręcania przekroju,  $G$  moduł odkształcenia postaciowego oraz  $C(\xi)$  wielkość (w  $\text{cm}^4$ ) zależną od kształtu przekroju.

Całkę ogólną równania (1.1) napiszemy w postaci

$$(1.2) \quad \psi(\xi) = \psi_0(\xi) + \bar{\psi}(\xi),$$

gdzie  $\psi_0(\xi)$  jest całką ogólną równania jednorodnego

$$(1.3) \quad \frac{d}{l^2 d\xi} \left[ GC(\xi) \frac{d\psi_0(\xi)}{d\xi} \right] = 0,$$

natomiast  $\bar{\psi}(\xi)$  jest całką szczególną równania (1.1), którą dla dowolnej funkcji obciążenia  $m(\xi)$  wyrażamy za pomocą wzoru

$$(1.4) \quad \bar{\psi}(\xi) = l^2 \int \left[ \frac{1}{GC(\xi)} \int m(\xi) d\xi \right] d\xi.$$

Momenty skręcające występujące na końcach pręta  $i$  i  $k$  pod wpływem obrotu podpór wyznaczamy ze wzorów

$$(1.5) \quad M_{ik}^0 = - \left[ \frac{GC(\xi)}{l} \frac{d\psi_0(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0}, \quad M_{ki}^0 = \left[ \frac{GC(\xi)}{l} \frac{d\psi_0(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=1}.$$

W dalszych rozważaniach zajmiemy się wyznaczeniem wielkości momentów skręcających  $m(\xi)$ , jakie wystąpią na końcach pręta  $i$  i  $k$  pod wpływem obrotu podpór oraz obciążenia skręcającego działającego między punktami podparcia, przyjmując różne sposoby zmienności wymiarów poprzecznych pręta wzdłuż jego osi.

## 2. Pręt o przekroju poprzecznym kwadratowym lub kołowym

Wymiary poprzeczne pręta  $b$  (bok kwadratu lub średnica koła) zmieniają się według funkcji

$$(2.1) \quad b(\xi) = b_s (\mu_i \xi' + \mu_k \xi),$$

gdzie  $b_s$  jest średnią geometryczną wymiarów  $b_i$  i  $b_k$ :

$$(2.2) \quad b_s = \sqrt{b_i b_k},$$

$$(2.3) \quad \mu_i = \frac{b_i}{b_s}, \quad \mu_k = \frac{b_k}{b_s}, \quad \xi' = 1 - \xi.$$

Ponieważ wielkość  $C(\xi)$  wyraża się w  $\text{cm}^4$ , zatem jest proporcjonalna do czwartej potęgi wymiarów poprzecznych  $b(\xi)$ . Możemy więc napisać następującą zależność:

$$(2.4) \quad C(\xi) = C_s (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^4,$$

gdzie

$$(2.5) \quad C_s = \sqrt{C_i C_k}.$$

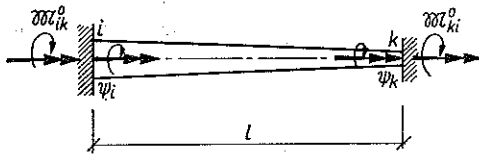
Łatwo zauważyć, że wielkości (2.3) spełniają związki

$$(2.6) \quad \mu_i = \sqrt[4]{\frac{C_i}{C_s}}, \quad \mu_k = \sqrt[4]{\frac{C_k}{C_s}}, \quad \mu_i \mu_k = 1.$$

Uwzględniając wyrażenie (2.4) w równaniu (1.3) oraz wykonując całkowanie znajdujemy całkę ogólną równania jednorodnego (1.3)

$$(2.7) \quad \psi_0(\xi) = \frac{1}{3(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3} C_1 + C_2.$$

Stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  występujące w równaniu (2.7) obliczone z warunków brzegowych (rys. 2)



Rys. 2

$$(2.8) \quad \psi_0(0) = \psi_i, \quad \psi_0(1) = \psi_k$$

wynoszą

$$(2.9) \quad C_1 = -\frac{3}{\mu_i^2 + \mu_k^2 + 1} (\psi_i - \psi_k),$$

$$C_2 = \frac{\mu_i^3}{\mu_i^3 - \mu_k^3} \psi_i - \frac{\mu_k^3}{\mu_i^3 - \mu_k^3} \psi_k.$$

Momenty skręcające występujące w przekrojach przyporowych  $i$  i  $k$ , obliczone na podstawie wzorów (1.5), wynoszą odpowiednio

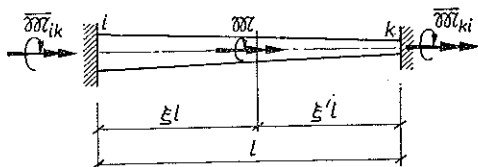
$$(2.10) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_{ik}^0 &= \frac{GC_s}{l} \frac{3}{1 + \mu_i^2 + \mu_k^2} (\psi_i - \psi_k), \\ \mathfrak{M}_{ki}^0 &= -\frac{GC_s}{l} \frac{3}{1 + \mu_i^2 + \mu_k^2} (\psi_i - \psi_k). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że dla pręta o stałym przekroju ( $\mu_i = \mu_k = 1$ ,  $C_s = C$ ) wzory transformacyjne (2.10) przyjmują znaną postać (por. np. [6], str. 742):

$$(2.11) \quad \mathfrak{M}_{ik}^0 = \frac{GC}{l} (\psi_i - \psi_k), \quad \mathfrak{M}_{ki}^0 = -\frac{GC}{l} (\psi_i - \psi_k).$$

Następnie wyznaczmy wzory na momenty skręcające wyjściowe, tj. momenty występujące na końcach pręta pod wpływem obciążenia skręcającego, działającego między punktami podparcia pręta.

W przypadku obciążenia momentem skupionym  $\mathfrak{M}$ , działającym w odległości  $\xi l$  od podpory i (rys. 3) momenty wyjściowe obliczamy korzystając z ogólnej całki (2.7) równania jednorodnego (1.3).



Rys. 3

Uwzględniając stałe całkowania (2.9) w (2.7) otrzymujemy równanie kąta skręcenia w dowolnym przekroju pręta wywołanego skręceniem podpór:

$$(2.12) \quad \psi(\xi) = \frac{1}{\Delta} \{ \psi_i [1 - \mu_i^3 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3] - \psi_k [1 - \mu_k^3 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3] \},$$

gdzie

$$(2.13) \quad \Delta = (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3 (\mu_k^3 - \mu_i^3).$$

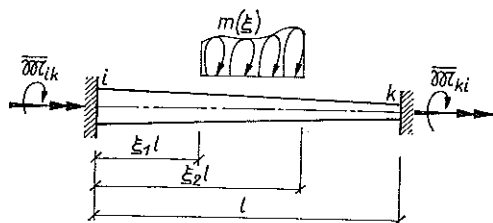
Na podstawie twierdzenia Maxwella otrzymujemy

$$(2.14) \quad \psi(\xi) \mathfrak{M} = -\overline{\mathfrak{M}}_{ik} \psi_i - \overline{\mathfrak{M}}_{ki} \psi_k.$$

Mnożąc obydwie strony równania (2.12) przez  $\mathfrak{M}$ , a następnie przyrównując współczynniki występujące przy tych samych wyrazach po prawych stronach znaków równości w równaniach (2.11) i (2.14), otrzymujemy następujące wzory na momenty wyjściowe:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_{ik} &= \mathfrak{M} \frac{1 - \mu_i^3 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3}{(\mu_i^3 - \mu_k^3) (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3}, \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ki} &= -\mathfrak{M} \frac{1 - \mu_k^3 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3}{(\mu_i^3 - \mu_k^3) (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3}. \end{aligned}$$

W przypadku dowolnego momentu skręcającego  $m(\xi)$  działającego na pewnym odcinku pręta (rys. 4) momenty skręcające wyjściowe obliczamy na podstawie wzorów (2.15). Przyjmując  $\mathfrak{M} = m(\xi) l d\xi$  i wykonując całkowanie w granicach od  $\xi_1$ , do  $\xi_2$  otrzymujemy

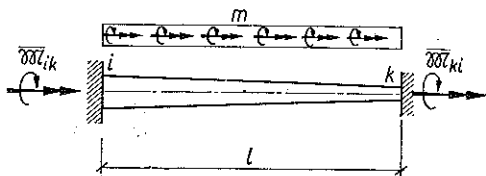


Rys. 4

$$(2.16) \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ik} = l \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1 - \mu_i^3 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3}{(\mu_i^3 - \mu_k^3) (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3} m(\xi) d\xi,$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ki} = -l \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1 - \mu_k^3 (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3}{(\mu_i^3 - \mu_k^3) (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^3} m(\xi) d\xi.$$

W przypadku momentów równomiernie rozłożonych wzdłuż całej długości pręta (rys. 5) momenty skręcające wyjściowe otrzymujemy na drodze całkowania wzorów (2.16).



Rys. 5

Przyjmując  $m(\xi) = m$ ,  $\xi_1 = 0$  oraz  $\xi_2 = 1$ , otrzymujemy

$$(2.17) \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ik} = \frac{ml}{2} \frac{\mu_i + \mu_k - 2\mu_i^3}{\mu_i^3 - \mu_k^3},$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ki} = -\frac{ml}{2} \frac{\mu_i + \mu_k - 2\mu_k^3}{\mu_i^3 - \mu_k^3}.$$

W przypadku stałego przekroju ( $\mu_i = \mu_k = 1$ ) wzory (2.15) sprowadzają się do następującej znanej postaci:

$$(2.18) \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ik} = -\mathfrak{M}\xi', \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ki} = -\mathfrak{M}\xi;$$

wzory zaś (2.17) do postaci

$$(2.19) \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ik} = \overline{\mathfrak{M}}_{ki} = -\frac{ml}{2}.$$

## 3. Pręt kratowy o liniowo zmiennym rozstawieniu pasów

W tym przypadku zachodzi zależność

$$(3.1) \quad C(\xi) = C_s (\mu_i \xi' + \mu_k \xi)^2,$$

gdzie

$$\mu_i = \sqrt{\frac{C_i}{C_s}}, \quad \mu_k = \sqrt{\frac{C_k}{C_s}}.$$

Uwzględniając (3.1) w równaniu (1.3) po dwukrotnym całkowaniu otrzymujemy

$$(3.2) \quad \psi(\xi) = \frac{1}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} C_1 + C_2.$$

Stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczone z warunków brzegowych (2.8) wynoszą

$$(3.3) \quad C_1 = -(\psi_i - \psi_k), \quad C_2 = \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_k} \psi_i - \frac{\mu_k}{\mu_i - \mu_k} \psi_k.$$

Momenty skracające obliczone na podstawie wzorów (1.5) wyrażają się następująco:

$$(3.4) \quad \mathfrak{M}_{ik}^0 = \frac{GC_s}{l} (\psi_i - \psi_k), \quad \mathfrak{M}_{ki}^0 = -\frac{GC_s}{l} (\psi_i - \psi_k).$$

*Momenty skracające wyjściowe.* Dla obciążenia momentem  $\mathfrak{M}$  w odległości  $\xi l$  od podpory  $i$  (por. rys. 3) momenty wyjściowe obliczone analogicznie jak dla pręta pełnego wynoszą odpowiednio

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_{ik} &= -\mathfrak{M} \frac{(\mu_i^2 \xi' + \xi) - 1}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)}, \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ki} &= -\mathfrak{M} \frac{1 - (\xi' + \mu_k^2 \xi)}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)}. \end{aligned}$$

W przypadku momentów rozłożonych w sposób ciągły na pewnym odcinku pręta otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_{ik} &= -l \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(\mu_i^2 \xi' + \xi) - 1}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} m(\xi) d\xi, \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ki} &= -l \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1 - (\xi' + \mu_k^2 \xi)}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} m(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Dla  $m(\xi) = m$ ,  $\xi_1 = 0$  oraz  $\xi_2 = 1$  otrzymujemy następujące wzory na momenty skracające wyjściowe:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \overline{M}_{ik} &= -ml \frac{\mu_i^2 - 1 - 2 \ln \mu_i}{(\mu_i - \mu_k)^2}, \\ \overline{M}_{ki} &= -ml \frac{\mu_k^2 - 1 - 2 \ln \mu_k}{(\mu_i - \mu_k)^2}. \end{aligned}$$

W przypadku stałego przekroju ( $\mu_i = \mu_k = 1$ ) wzory (3.5) sprowadzają się do postaci (2.18), wzory zaś (3.7) do postaci (2.19).

Podamy jeszcze wartości  $C$  dla rozpatrywanych przekrojów poprzecznych prętów. Dla przekroju kołowego  $C$  jest identyczne z biegunowym momentem bezwładności

$$(3.8) \quad C = I_0 = \frac{\pi R^4}{2},$$

gdzie  $R$  jest promieniem koła. Dla przekroju kwadratowego  $C$  wyraża się wzorem

$$(3.9) \quad C = 0,318 \frac{b^4}{3},$$

gdzie  $b$  oznacza bok kwadratu.

#### 4. Przykłady

**4.1. Wzory transformacyjne dotyczące zginania i wyboczenia prętów o zmiennym momencie bezwładności.** Ponieważ w przykładach wykorzystane będą wzory transformacyjne metody przemieszczeń w przypadku zginania i wyboczenia prętów pełnych, przytoczymy je tutaj opierając się na pracy [4] bez podania sposobu ich wyprowadzenia.

*Pręt obustronnie utwierdzony.* Dla zginania mamy:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} M_{ik} &= \frac{2EI_s}{l} [2\mu_i^2 \varphi_i + \varphi_k - (2\mu_i^2 + 1) \psi], \\ M_{ki} &= \frac{2EI_s}{l} [\varphi_i + 2\mu_k^2 \varphi_k - (2\mu_k^2 + 1) \psi], \\ T_{ik} = T_{ki} &= -\frac{2EI_s}{l^2} [(2\mu_i^2 + 1) \varphi_i + (2\mu_k^2 + 1) \varphi_k - 2(1 + \mu_i^2 + \mu_k^2) \psi]; \end{aligned}$$

dla wyboczenia

$$(4.2) \quad \begin{aligned} M_{ik} &= \frac{EI_s}{l} \{ \mu_i^2 \alpha(\sigma) \varphi_i + \beta(\sigma) \varphi_k - [\mu_i^2 \alpha(\sigma) + \beta(\sigma)] \psi \}, \\ M_{ki} &= \frac{EI_s}{l} \{ \beta(\sigma) \varphi_i + \mu_k^2 \alpha(\sigma) \varphi_k - [\beta(\sigma) + \mu_k^2 \alpha(\sigma)] \psi \}, \\ T_{ik} = T_{ki} &= -\frac{EI_s}{l^2} \{ [\mu_i^2 \alpha(\sigma) + \beta(\sigma)] \varphi_i + [\beta(\sigma) + \mu_k^2 \alpha(\sigma)] \varphi_k - \\ &\quad - [\delta(\sigma) + (\mu_k - \mu_i)^2 \alpha(\sigma)] \psi \}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.3) \quad I_s = \sqrt{I_i I_k}, \quad \mu_i = \sqrt[4]{\frac{I_i}{I_s}}, \quad \mu_k = \sqrt[4]{\frac{I_k}{I_s}},$$

$$(4.4) \quad \psi = \frac{y_k - y_i}{l}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{SI^2}{EI_s}},$$

$$a(\sigma) = \sigma \frac{\sin \sigma - \sigma \cos \sigma}{2(1 - \cos \sigma) - \sigma \sin \sigma},$$

$$(4.5) \quad \beta(\sigma) = \sigma \frac{\sigma - \sin \sigma}{2(1 - \cos \sigma) - \sigma \sin \sigma},$$

$$\delta(\sigma) = \sigma^3 \frac{\sin \sigma}{2(1 - \cos \sigma) - \sigma \sin \sigma}.$$

Pręt utwierdzony w węźle  $i$  oraz podparty przegubowo-przesuwnie w węźle  $k$ . Dla zginania mamy

$$(4.6) \quad M_{ik} = \frac{EI_s}{l} 3\mu_i^2 (\varphi_i - \psi),$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EI_s}{l^2} 3\mu_i^2 (\varphi_i - \psi);$$

dla wyboczenia

$$(4.7) \quad M_{ik} = \frac{EI_s}{l} \mu_i^2 \alpha'(\sigma) (\varphi_i - \psi),$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EI_s}{l^2} \mu_i^2 \{ \alpha'(\sigma) \varphi_i - [\alpha'(\sigma) - \mu_k^2 \sigma^2] \psi \},$$

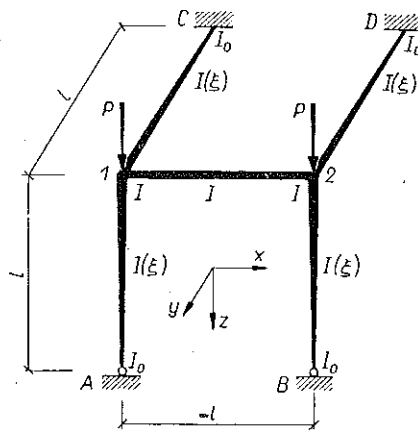
gdzie

$$(4.8) \quad \alpha'(\sigma) = \sigma^2 \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma - \sigma \cos \sigma}.$$

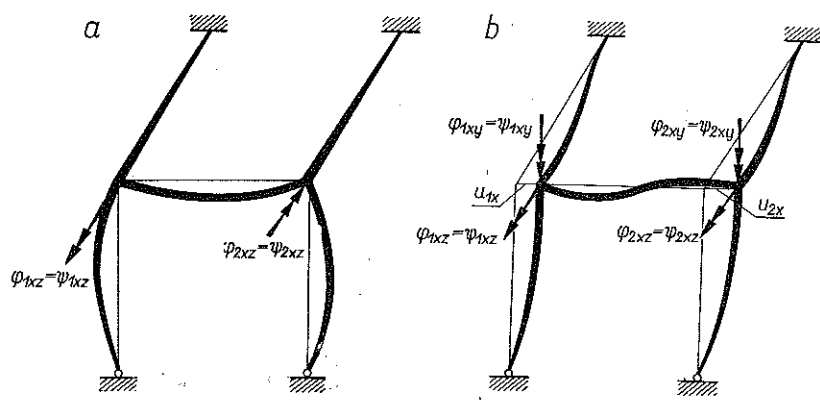
**4.2. Przykład 1.** Rozważmy wyboczenie przestrzennego ustroju ramowego, przedstawionego na rys. 6. Ustrój ten składa się z prętów pełnych o liniowo zmiennych wymiarach poprzecznych. Możliwe są tu cztery postacie wyboczenia, mianowicie: symetryczna i antysymetryczna w płaszczyźnie  $xz$  (rys. 7) oraz w płaszczyźnie  $zy$  (rys. 8). Zbadamy każdą z tych postaci wyboczenia.

Ze względu na symetrię układu względem płaszczyzny  $zy$ , przechodzącej przez środek rygla 1–2, przy obliczaniu siły krytycznej w każdej postaci wyboczenia wystarczy rozpatrzyć równowagę tylko jednego węzła.

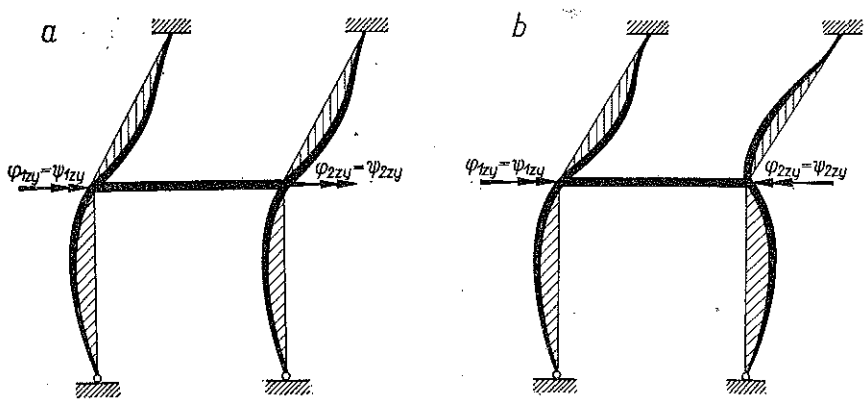




Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

W przypadku wybożenia symetrycznego w płaszczyźnie  $xz$  (rys. 7a) warunek równowagi węzła 1 napiszemy następująco:

$$(4.9) \quad M_{1A}^{xz} + M_{12}^{xz} + \mathfrak{M}_{1C} = 0.$$

Momenty występujące w równaniu (4.9) wyrażają się za pomocą wzorów

$$(4.10) \quad \begin{aligned} M_{1A}^{xz} &= \frac{EI_s}{l} \mu_1^2 \alpha'(\sigma) \varphi_{1xz}, \\ M_{12}^{xz} &= \frac{2EI}{l} (2\varphi_{1xz} + \varphi_{2xz}), \\ \mathfrak{M}_{1C} &= \frac{GC_s}{l} \frac{-3}{1 + \mu_1^2 + \mu_c^2} \psi_{1xz}. \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenie (4.10) do równania (4.9) oraz uwzględniając, że w tym przypadku  $\varphi_{2xz} = -\varphi_{1xz}$  oraz  $\psi_{1xz} = \varphi_{1xz}$ , otrzymujemy

$$(4.11) \quad \left[ \frac{EI_s}{l} \mu_1^2 \alpha'(\sigma) + \frac{2EI}{l} + \frac{GC_s}{l} \frac{3}{1 + \mu_1^2 + \mu_c^2} \right] = 0.$$

Przyjmując

$$\frac{I_0}{I} = 0,25$$

znajdujemy

$$\frac{C_0}{C} = 0,25, \quad I_s = \sqrt{0,25 I^2} = 0,5 I, \quad C_s = \sqrt{0,25 C^2} = 0,5 C,$$

$$\mu_1 = 1,1892, \quad \mu_c = 0,8409.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$I = \frac{b^4}{12}, \quad C = 0,118 \frac{b^4}{3}, \quad G = 0,425 E$$

znajdujemy

$$\frac{C}{I} = 1,272, \quad \frac{G}{E} = 0,425.$$

Uwzględniając powyższe wartości liczbowe w równaniu (4.11) otrzymujemy równanie

$$(4.12) \quad 0,7071 \alpha'(\sigma) + 2,2598 = 0,$$

które jest spełnione dla  $\sigma = 3,7394$ .

Zatem siła krytyczna w tym przypadku wynosi  $P_{kr} = 6,9915 EI/l^2$ .

Rozważmy następnie przypadek wyboczenia antysymetrycznego w płaszczyźnie  $xz$  (rys. 7b).

W tym przypadku warunki równowagi węzła 1 przedstawiamy następująco:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} M_{1A}^{xz} + M_{12}^{xz} + \mathfrak{M}_{1C} &= 0, \\ M_{1C}^{xy} + M_{12}^{xy} + \mathfrak{M}_{1A} &= 0, \\ T_{1A}^{xz} + T_{2B}^{xz} + T_{1C}^{xy} + T_{2D}^{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Momenty występujące w równaniach (4.13) wyrażają się za pomocą wzorów

$$(4.14) \quad \begin{aligned} M_{1A}^{xz} &= \frac{EI_s}{l} \mu_1^2 \alpha'(\sigma) \left( \varphi_{1xz} - \frac{u_{1x}}{l} \right), \\ M_{12}^{xz} &= \frac{2EI}{l} (2\varphi_{1xz} + \varphi_{2xz}), \\ M_{1C}^{xy} &= \frac{2EI_s}{l} \left[ 2\mu_1^2 \varphi_{1xy} - (2\mu_1^2 + 1) \frac{u_{1x}}{l} \right], \\ M_{12}^{xy} &= \frac{2EI}{l} (2\varphi_{1xy} + \varphi_{2xy}), \\ \mathfrak{M}_{C1} &= \frac{GC_s}{l} \frac{3}{1 + \mu_1^2 + \mu_C^2} \psi_{1xz}, \\ \mathfrak{M}_{1A} &= 0, \end{aligned}$$

a siły poprzeczne

$$(4.15) \quad \begin{aligned} T_{1A}^{xz} = T_{2B}^{xz} &= -\frac{EI_s}{l_2} \mu_1^2 \left\{ \alpha'(\sigma) \varphi_{1xz} - [\alpha'(\sigma) - \mu_A^2 \sigma^2] \frac{u_{1x}}{l} \right\}, \\ T_{1C}^{xy} = T_{2D}^{xy} &= -\frac{2EI_s}{l_2} \left[ (2\mu_1^2 + 1) \varphi_{1xy} - 2(1 + \mu_1^2 + \mu_C^2) \frac{u_{1x}}{l} \right]. \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (4.14), (4.15) do równań (4.13) oraz uwzględniając, że  $\varphi_{1xz} = \psi_{1xz} = \varphi_{2xz} = \psi_{2xz}$ ,  $\varphi_{1xy} = \psi_{1xy} = \varphi_{2xy} = \psi_{2xy}$ ,  $I_s = 0,5 I$ ,  $C_s = 0,5 C$ , otrzymujemy następujący układ równań jednorodnych:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \left[ \mu_1^2 \alpha'(\sigma) + 12 + \frac{GC}{EI} \frac{3}{1 + \mu_1^2 + \mu_C^2} \right] \varphi_{1xz} - \mu_1^2 \alpha'(\sigma) \frac{u_{1x}}{l} &= 0, \\ (2\mu_1^2 + 6) \varphi_{1xy} - (2\mu_1^2 + 1) \frac{u_{1x}}{l} &= 0, \\ -\mu_1^2 \alpha'(\sigma) \varphi_{1xz} - (2\mu_1^2 + 1) \varphi_{1xy} + [\alpha'(\sigma) - \mu_A^2 \sigma^2 + 2(1 + \mu_1^2 + \mu_C^2)] \frac{u_{1x}}{l} &= 0, \end{aligned}$$

który po uwzględnieniu poprzednio przyjętych wartości liczbowych przyjmuje postać

$$(4.17) \quad \begin{aligned} & [1,4142 \alpha'(\sigma) + 12,5196] \varphi_{1xz} - 1,4142 \alpha'(\sigma) \frac{u_{1z}}{l} = 0, \\ & 8,8284 \varphi_{1xy} - 3,8284 \frac{u_{1x}}{l} = 0, \\ & -1,4142 \alpha'(\sigma) \varphi_{1xz} - 3,8284 \varphi_{1xy} + [\alpha'(\sigma) - 0,7071 \sigma^2 + 6,2426] \frac{u_{1x}}{l} = 0. \end{aligned}$$

Z przyrównania do zera wyznacznika głównego układu równań (4.17) otrzymujemy równanie

$$(4.18) \quad -5,1717 [\alpha'(\sigma)]^2 + 167,7404 \alpha'(\sigma) - 8,8283 \sigma^2 \alpha'(\sigma) - 78,1548 \sigma^2 + 506,4870 = 0.$$

Drogą prób znajdujemy wartość  $\sigma = 2,7642$ , która spełnia równanie (4.18). Zatem siła krytyczna wynosi  $P_{kr} = 3,8204 EI/l^2$ .

Rozważmy następnie przypadek wybożenia symetrycznego w płaszczyźnie  $yz$  (rys. 8a).

Warunek równowagi węzła 1 zapisujemy w postaci

$$(4.19) \quad M_{1A}^{yz} + M_{1C}^{yz} + \mathfrak{M}_{12} = 0.$$

Momenty powyższe wyrażają się za pomocą wzorów

$$(4.20) \quad \begin{aligned} M_{1A}^{yz} &= \frac{EI_s}{l} \mu_1^2 \alpha'(\sigma) \varphi_{1yz}, \\ M_{1C}^{yz} &= \frac{2EI_s}{l} 2\mu_1^2 \varphi_{1yz}, \\ \mathfrak{M}_{12} &= \frac{GC}{l} (\psi_{1xy} - \psi_{2yz}). \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (4.20) do równania (4.19) oraz uwzględniając, że  $\psi_{1yz} = \psi_{2yz}$ , ( $\mathfrak{M}_{12} = 0$ ) otrzymujemy

$$(4.21) \quad \alpha'(\sigma) = -4.$$

Równanie (4.21) jest spełnione dla  $\sigma = 3,8219$ . Zatem siła krytyczna wynosi  $P_{kr} = 7,3034 EI/l^2$ .

Rozważmy jeszcze przypadek wybożenia antysymetrycznego w płaszczyźnie  $yz$  (rys. 8b).

Warunek równowagi węzła 1 sformułowany jest za pomocą równania (4.19), a momenty występujące w tym równaniu za pomocą wzorów (4.20).

Podstawiając wyrażenia (4.20) do równania (4.19) oraz uwzględniając, że  $\psi_{1yz} = -\psi_{2yz} = \varphi_{1yz}$  oraz  $I_s = 0,5 I$  otrzymujemy

$$(4.22) \quad \mu_1^2 \alpha'(\sigma) + 4\mu_1^2 + \frac{GC}{EI} = 0,$$

a po uwzględnieniu wartości liczbowych

$$(4.23) \quad \alpha'(\sigma) = -4,3823.$$

Równanie (4.23) jest spełnione dla  $\sigma = 3,8489$ . Zatem siła krytyczna wynosi  $P_{kr} = 7,407 EI/l^2$ .

Dla porównania wyników wyznaczmy siłę krytyczną w przypadku ramy płaskiej.

Warunki równowagi węzła 1 przy wyboczeniu antysymetrycznym w płaszczyźnie  $xz$  napiszemy następująco:

$$(4.24) \quad M_{1A} + M_{12} = 0, \quad T_{1A} + T_{2B} = 0,$$

gdzie

$$M_{1A} = \frac{EI_s}{l} \mu_1^2 \alpha'(\sigma) \left( \varphi_1 - \frac{u_1}{l} \right),$$

$$(4.25) \quad M_{12} = \frac{2EI}{l} (2\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$T_{1A} = T_{2B} = -\frac{EI_s}{l^2} \mu_1^2 \left\{ \alpha'(\sigma) \varphi_1 - [\alpha'(\sigma) - \mu_A^2 \sigma^2] \frac{u_1}{l} \right\}.$$

Podstawiając wyrażenia (4.25) do równania (4.24) i uwzględniając, że  $\varphi_2 = \varphi_1$  oraz  $I_s = 0,5 I$ , otrzymujemy

$$(4.26) \quad \begin{aligned} & [\mu_1^2 \alpha'(\sigma) + 12] \varphi_1 - \mu_1^2 \alpha'(\sigma) \frac{u_1}{l} = 0, \\ & -\mu_1^2 \alpha'(\sigma) \varphi_1 + [\alpha'(\sigma) - \mu_A^2 \sigma^2] \frac{u_1}{l} = 0. \end{aligned}$$

Z przyrównania do zera wyznacznika głównego układu równań (4.26) otrzymujemy równanie

$$(4.27) \quad [\alpha'(\sigma)]^2 (\mu_1^2 - \mu_A^4) + \alpha'(\sigma) (12 - \sigma^2) - 12\mu_A^2 \sigma^2 = 0,$$

które po podstawieniu wartości liczbowych przybiera postać

$$(4.28) \quad -0,5858 [\alpha'(\sigma)]^2 + \alpha'(\sigma) (12 - \sigma^2) - 8,4852 \sigma^2 = 0.$$

Drogą prób znajdujemy  $\sigma = 1,5463$ , która spełnia równanie (4.28). Zatem siła krytyczna wynosi  $P_{kr} = 1,1955 EI/l^2$ .

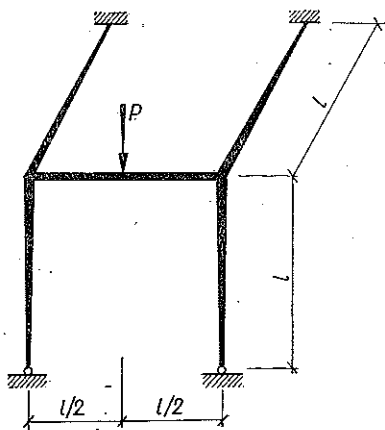
Zestawienia otrzymanych wyników dokonano w tablicy 1.

Tablica 1

Wyboczenie w płaszczyźnie		Siła krytyczna podzielona przez $\frac{EI}{l^2}$
xz	symetryczne	6,9915
	antysymetryczne	3,8204
yz	symetryczne	7,3034
	antysymetryczne	7,4070
xz	antysymetryczne (dla ramy płaskiej)	1,1955

4.4. Przykład 2. Rozważmy zginanie ustroju przestrzennego, opisanego w przykładzie poprzednim, lecz obciążonego w sposób przedstawiony na rys. 9.

Ze względu na symetrię rozpatrujemy tylko węzeł 1, którego warunek równowagi ma postać



Rys. 9

$$(4.29) \quad M_{1A} + M_{12} + \mathfrak{M}_{1C} = 0.$$

Momenty występujące w równaniu (4.29) wyrażają się za pomocą wzorów

$$(4.30) \quad \begin{aligned} M_{1A} &= \frac{EI_s}{l} \cdot 3\mu_1^2 \varphi_1, \\ M_{12} &= \frac{2EI}{l} (2\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{Pl}{8}, \\ \mathfrak{M}_{1C} &= \frac{GC_s}{l} \frac{3}{1 + \mu_1^2 + \mu_c^2} \psi_1. \end{aligned}$$

Uwzględniając (4.30) w równaniu (4.29) przy  $\varphi_2 = -\varphi_1$  i  $\psi_1 = \varphi_1$  otrzymujemy

$$(4.31) \quad \left[ 1,5 \mu_1^2 + 2 + \frac{GC}{EI} \frac{1,5}{1 + \mu_1^2 + \mu_c^2} \right] \varphi_1 - \frac{Pl^2}{8EI} = 0,$$

a podstawiając wartości liczbowe

$$(4.32) \quad 4,3811 \varphi_1 = \frac{Pl^2}{8EI}$$

znajdujemy

$$(4.33) \quad \varphi_1 = 0,0285 \frac{Pl^2}{EI}.$$

Zatem wielkości momentów wynoszą:

$$(4.34) \quad M_{1A} = 0,0606 Pl, \quad M_{12} = -0,0680 Pl, \quad \mathfrak{M}_{1C} = 0,0074 Pl.$$

W przypadku ramy płaskiej w równaniu (4.29) należy przyjąć  $\mathfrak{M}_1 = 0$ . Otrzymujemy wówczas

$$(4.35) \quad 4,1213 \varphi_1 = \frac{Pl^2}{8EI}$$

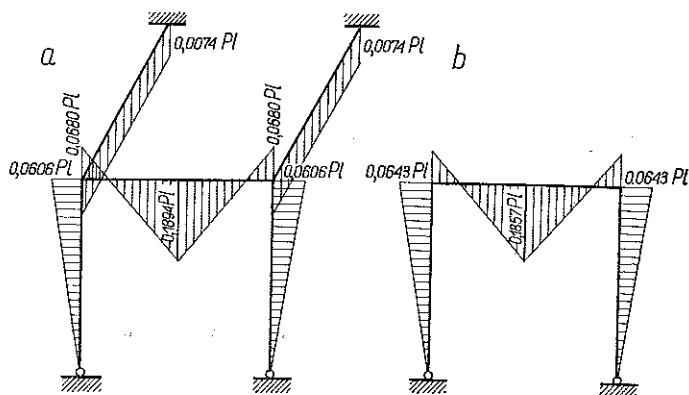
oraz

$$(4.36) \quad \varphi_1 = 0,03033 \frac{Pl^2}{EI}$$

Momenty zaś wynoszą

$$(4.37) \quad M_{1A} = 0,06434 Pl, \quad M_{12} = -0,06434 Pl.$$

Wykres momentów w przypadku ramy przestrzennej przedstawiono na rys. 10a, w przypadku zaś ramy płaskiej na rys. 10b.



Rys. 10

#### Literatura cytowana w tekście

1. Ф. Блех, *Устойчивость математических конструкций*, tłum. z ang., Москва 1959.
2. А. Ф. Смирнов, *Устойчивость и колебания сооружений*, Г.Т.Ж.И., Москва 1958.
3. F. TOELKE, *Über die Bemessung von Druckstäben mit veränderlichen Querschnitt*, Bauingenieur, nr 29/1930, Verlag von J. Springer, Berlin.
4. E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Stability and bending of frames composed of bars with variable cross-sections*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11 (1963), 68, 689.
5. E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Buckling and bending of frame structures consisting of latticed bars with variable bending rigidity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série, Sci. Techn., 12 (1963), 79, 793.
6. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, tom 2, PWN, Warszawa 1959.

## Резюме

### ИЗГИБ И ВЫПУЧИВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ СОСТОЯЩИХ ИЗ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ НА ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ

Стержневые системы, с переменной жесткостью на изгиб и кручение, находят широкое применение в различных инженерных конструкциях. Поэтому, выведение соответствующих формул, дающих возможность без труда проводить статические расчеты этих систем, имеет существенное практическое значение.

В настоящей работе дается решение изгиба и упругого выпучивания пространственных рам, состоящих из следующих элементов:

- 1) однородных стержней переменного сечения, поперечных квадратных или круговых,
- 2) квадратных элементов с переменной жесткостью на изгиб и кручение поперечных сечений.

Получено решение применяя метод перемещений.

При рассмотрении рам использовано формулы преобразования метода перемещений, выведенные в предыдущих работах авторов для случаев изгиба и выпучивания выше приведенных элементов; выведено формулы преобразования для стержней, подверженных кручению с рассматриваемыми формулами поперечных сечений.

Даются примеры, касающиеся изгиба и упругого выпучивания пространственных рам и выпучивания из плоскости плоских рам, с переменной жесткостью на изгиб и кручение.

Выведенные формулы преобразования метода перемещений можно использовать для определения сил в сечениях и критических нагрузок, в случае рам промышленных цехов, конструкций мачт и эстакад, некоторых элементов мостов и различных каркасных конструкций.

## Summary

### BENDING AND BUCKLING OF SPATIAL FRAME STRUCTURES COMPOSED OF BARS WITH VARIABLE FLEXURAL AND TORSIONAL RIGIDITY

Bar structures of variable flexural and torsional rigidities find wide application in various structures. For this reason the obtainment of equations enabling easy computation of such structures is essential for engineering:

- The problem of bending and elastic buckling stated in the title is solved for structures composed of
- 1) square or round bars with variable cross-section,
  - 2) lattice elements with variable flexural and torsional rigidities.

The slope deflections of the method of displacements, derived in previous paper of the present authors for bending and buckling of the above elements are made use of. Similar equations are derived for torsion.

The examples concern bending and elastic buckling of spatial frame structures and lateral buckling of plane frames with variable bending and torsional rigidity. The slope deflections of the method of displacement derived in the present paper can be applied to the determination of section forces and critical loads in the case of frames of industrial halls, tower and trestle structures. some bridge elements and various frame structures.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 września 1964 r.*