

DRGANIA SWOBODNE UKŁADU Z NIELINIOWĄ BEZWEŁADNOŚCIĄ

RYSZARD GRYBOŚ (GLIWICE)

1. Wstęp i założenia

1.1. Zagadnienie stateczności dynamicznej pręta polega na badaniu drgań giętnych pręta dwuprzegubowego, wzbudzonych działaniem podłużnej siły pulsującej. Okazuje się, że gdy częstość wymuszenia p jest równa (lub bliska) podwójnej częstości własnej ω drgań giętnych pręta, to występuje rezonans parametryczny, przy którym amplitudy drgań mogą osiągać wartości zbyt wielkie ze względu na bezpieczeństwo pracy konstrukcji. Mamy tu na myśli tzw. rezonans główny, poza tym mogą wystąpić jeszcze rezonanse wyższych rzędów przy częstościach $p = \omega, 2\omega/3, \omega/2, 2\omega/5$ itd.

Badania teoretyczne nad tym zagadnieniem ograniczają się na ogół do przypadku wymuszenia tzw. siłą bez masy. Jest to jednakże przypadek wyidealizowany, albowiem zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i w warunkach ruchowych sposób realizacji wymuszenia pociąga za sobą na ogół konieczność związania z ruchomym przegubem pręta pewnej masy M . Może to być np. masa wibratora (lub niektórych jego elementów) lub część stropu hali maszyn, jeżeli strop ten podparty jest słupem, który stanowi przedmiot naszego zainteresowania.

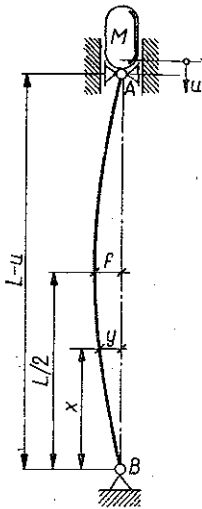
Podobnie rzecz ma się w przypadku pręta stanowiącego element statycznie wyznaczalnej kratownicy. Pręt taki utraciwszy pod działaniem siły pulsującej stateczność wykonuje drgania poprzeczne, które ze względu na zbliżenia końców pręta udzielają się całej pozostałej masie kratownicy. Ścisłe biorąc wszelkim drganiom giętnym pręta, którego jeden koniec ma swobodę poruszania się w kierunku osiowym, towarzyszy zawsze pewien ruch podłużny elementów, który jakościowo daje taki sam efekt co i masa skupiona na końcu, aczkolwiek ilościowo może posiadać znaczenie drugorzędne.

Jest rzeczą oczywistą, że rozpatrując warunki powstawania rezonansu we wszystkich przytoczonych wyżej przypadkach należy brać pod uwagę częstość drgań własnych nie samego pręta, lecz układu pręt + masa skupiona. Ta ostatnia bowiem współuczestnicząc w ruchu pręta wpływa na wspomnianą częstość w stopniu nieraz bardzo znacznym, zresztą zależnym od stosunku masy skupionej do masy samego pręta.

1.2. Ruch masy M przejawia się w przemieszczeniach $u(t)$, będących wielkościami małymi drugiego rzędu w odniesieniu do ugięć $y(x, t)$ (rys. 1). Zgodnie ze znaną zależnością przybliżoną mamy bowiem

$$(1.1) \quad u \approx \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx,$$

gdzie $x \in [0, L]$ jest współrzędną dowolnego przekroju pręta. Towarzysząca ruchowi tej masy siła bezwładności $-M(d^2 u/dt^2)$ sprawia, że równanie, swobodnych (nie tłumionych) drgań poprzecznych pręta przyjmuje postać (por. np. [1], § 14)



Rys. 1

$$(1.2) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f + \kappa_* f \left[\frac{d^2 f}{dt^2} f + \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \right] = 0,$$

gdzie f oznacza ugięcie przekroju środkowego, ω częstość własną pręta bez masy skupionej, κ_* stałą zależną od M, L i masy pręta m_p .

Wyraz nieliniowy występujący w tym równaniu jest charakterystyczny dla tzw. nieliniowej bezwładności. Nieliniowość tego typu jako pierwsi analizowali N. M. KRYŁOW i N. N. BOGOLUBOW [11] w związku z badaniem swobodnych drgań kolumny. Następnie J. J. GOLDENBLAT [12] wskazywał na konieczność uwzględniania tej nieliniowości przy rezonansie parametrycznym¹.

Dużo uwagi temu zagadnieniu poświęcił W. W. BOŁOTIN w kilku swych pracach, których uwieńczeniem była obszerna monografia [1]. Wspomniany autor uwzględniając wpływ nieliniowej bezwładności na stateczność dynamiczną pręta posługiwał się metodą Galerkina.

1.3. Celem niniejszej pracy jest analiza drgań swobodnych pręta z masą skupioną na końcu, tzn. określenie ich częstości oraz amplitudy, a także analiza stateczności tych drgań. Dla większej ogólności rozważań uwzględniać będziemy ewentualne wstępne zakrzywienie osi pręta oraz nieliniowo-sprężyste własności materiału.

Drgania swobodne takiego układu można wzbudzić przez nadanie prętowi początkowej prędkości lub wstępnego ugięcia. Pierwszy sposób wzbudzenia można zrealizować za pomocą impulsu poprzecznego bądź też podłużnego. W tym ostatnim przypadku niezbędne jest oczywiście istnienie pewnej krzywizny wstępnej pręta.

Impuls podłużny może być przekazany prętowi np. za pośrednictwem uderzenia masą M w przegub ruchomy z pewną prędkością skierowaną wzdłuż osi pręta. Dla zachowania warunków zagadnienia należy przy tym założyć, że uderzenie było płastyczne, tzn. iż w jego rezultacie masa została trwale związana z przegubem ruchomym.

Analiza tego przypadku, niewątpliwie bardzo ważnego z punktu widzenia potrzeb praktyki, nastrocza jednak duże trudności natury matematycznej. Należy bowiem pamiętać, że w pręcie zostaną wówczas wzbudzone drgania podłużno-giętne, przy czym można przypuszczać, że «udział» drgań podłużnych (w sensie przenoszonej energii) będzie tym większy, im mniejsze było zakrzywienie wstępne pręta.

W pracy niniejszej nie będziemy zajmować się zagadnieniem sprzężonych drgań podłużno-giętnych, zakładając m.in. nieskończenie wielką prędkość propagacji

¹ Cytujemy wg [1]; żadna z wymienionych wyżej prac nie była dostępna autorowi.

zaburzeń sprężystych (założenie pierwsze). Założenie takie przyjmuje się z reguły w technicznej teorii drgań giętnych. W danym przypadku jest ono równoznaczne z pominięciem drgań podłużnych pręta. Z tego względu dokładność naszych rozważań będzie tym większa, im mniejsza będzie częstość drgań giętnych w porównaniu z częstością drgań podłużnych. Warunek ten jest spełniony dla prętów dostatecznie smukłych; będzie to zatem nasze drugie założenie.

1.4. Drganiami poprzecznym pręta z masą skupioną na końcu towarzyszy siła osiowa, okresowo zmienna, równa sile bezwładności masy M , wykonującej ruch okresowy wraz z przesuwnym przegubem.

Dzięki tej sile przemieszczenie u należy traktować jako rezultat zarówno ugięcia, jak i ściskania pręta, tzn.

$$u = u_g + u_c.$$

Składnik pierwszy określony jest za pomocą wzoru (1.1), składnik drugi można obliczyć za pomocą elementarnego wzoru Hooke'a przy założeniu, że wypadkowe naprężenie normalne nigdzie nie przekroczyło granicy proporcjonalności (założenie trzecie).

Jednakże uwzględniając oba te składniki razem natrafiamy przy rozwiązywaniu zagadnienia drgań giętnych na znaczne trudności natury matematycznej. Drgania te opisane są bowiem wówczas nieliniowym równaniem różniczkowo-całkowym ze współczynnikami okresowymi, a gdy uwzględnimy jeszcze wstępne zakrzywienie pręta, to równanie staje się ponadto niejednorodne (por. [5], wzór 4.28).

1.5. Zagadnienie upraszcza się zasadniczo, jeżeli pominiemy wpływ siły osiowej na przemieszczenie u , ($u_c \approx 0$), tzn. jeżeli przyjmemy, że przemieszczenie to spowodowane jest wyłącznie zginaniem pręta ($u \approx u_g$); będzie to nasze czwarte założenie. Uproszczenie powyższe, równoznaczne z założeniem nieściśliwości osi pręta, jest tym bliższe rzeczywistości, im mniejsza jest masa skupiona w porównaniu z masą pręta. U podstaw rozważań prowadzących do równania (1.2) leży m.in. powyższe założenie.

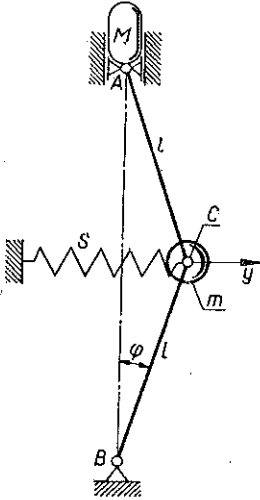
Ograniczenie zakresu rozważań wyłącznie do prętów dostatecznie smukłych pociąga za sobą możliwość poczynienia dalszych założeń upraszczających. Mianowicie można pominąć bezwładność elementów pręta przy przemieszczeniach osiowych (założenie piąte). Błąd wynikający z tego uproszczenia daje się łatwo zniwelować przez wprowadzenie masy $m_{p \text{ red}}$ pręta zredukowanej na przegub ruchomy (wg [1] $m_{p \text{ red}} \approx 0,27 m_p$).

Ponadto można także pominąć bezwładność obrotową elementów pręta oraz wpływ sił poprzecznych (założenie szóste). Jak wiadomo [10] oba te czynniki wnoszą do obliczeń poprawkę, która staje się istotna dopiero dla prętów o bardzo małej smukłości.

Oprócz tego przyjęto następujące założenia: siódme założenie — przekrój poprzeczny pręta jest stały, ósme — pręt jest wstępnie słabo zakrzywiony (beznaprężeniowo), dziewiąte — ugięcia dynamiczne są małe (w sensie ważności przybliżonego wzoru na krzywiznę $1/\rho \approx \partial^2 y / \partial x^2$ oraz założenie dziesiąte — materiał pręta jest jednorodny i izotropowy.

2. Równanie różniczkowe ruchu układu o jednym stopniu swobody

2.1. Równanie (1.2) formalnie opisuje drgania układu o jednym stopniu swobody, posiadającego nieliniową bezwładność. Rozpatrzmy w związku z tym układ przedstawiony na rys. 2. Składa się on z ciężarka o masie M , związanego z przegubem A ,



Rys. 2

oraz z dwóch zupełnie sztywnych i nieważkich prętów, każdy o długości l , połączonych przegubowo w środku masy m , tzn. w punkcie C . Koniec B pręta dolnego osadzony jest w przegubie stałym, natomiast przegub górny A może przesuwać się wzdłuż prostej AB , która jest zorientowana pionowo. Masa m poruszając się po łuku koła o promieniu l ze środkiem w B powoduje rozciąganie lub ściskanie sprężyny S .

Ponieważ pręty AC i BC traktujemy jako sztywne, to opisany układ posiada jeden stopień swobody. Wykażemy dalej, że w równaniu ruchu tego układu występuje wyraz charakterystyczny dla nieliniowej bezwładności, tzn. analogiczny do ostatniego wyrazu równania (1.2). Co więcej, okaże się, że omawiany układ posiada także pewną krytyczną wartość ciężaru $G = Mg$, podobnie jak pręt prosty posiada krytyczną wartość siły ścisającej.

Dzięki temu układ przedstawiony na rys. 2 można będzie traktować jako model pręta dwuprzegubowego z masą skupioną na końcu ruchomym. Rozważania dotyczące tego modelu dają się przeprowadzić stosunkowo łatwo, umożliwiając następnie dokonanie pewnych uogólnień, otrzymane zaś tą drogą wzory odznaczają się większą prostotą, która pozwala na stosowanie ich w praktyce inżynierskiej.

2.2. Określmy najpierw krytyczną wartość ciężaru G . Nie ograniczając ogólności rozważań możemy chwilowo założyć, że sprężyna posiada liniową charakterystykę sprężystą oraz sztywność c , tarcie zaś w przegubach nie istnieje. Niechaj kąt φ , jaki tworzy oś pręta z osią AB , określa położenie układu w stanie wychylenym.

Przyjmuje się, że przemieszczeniom punktu C w kierunku dodatniej półosi y odpowiadają dodatnie wartości kąta φ .

Równowaga układu w położeniu niewychylenym, tzn. dla $\varphi = 0$, możliwa jest przy wszelkich wartościach M, m, c i l . Jest to jednak stan równowagi chwiejnej. Trwała równowaga możliwa jest dla $\varphi = \varphi_r \neq 0$, jednakże przy pewnych ograniczeniach co do wartości parametrów M, m, c i l .

Aby ustalić ten warunek rozpatrzmy równowagę układu w położeniu wychylenym $\varphi = \varphi_r$. Napięcie sprężyny

$$(2.1) \quad S_r = (H + 2G) \operatorname{tg} \varphi_r,$$

gdzie $H = mg$.

Wychyleniu y ciężarka H w kierunku poziomym towarzyszy obniżenie się ciężarka G o u . Równocześnie H obniży się o $u/2$, przy czym (rys. 3)

$$(2.2) \quad \frac{u}{2} = l - \sqrt{l^2 - y^2}.$$

Przyjmując we wzorze (2.1) dla stanu równowagi $S_r = cy_r$ oraz widoczną z rys. 3 zależność

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{y_r}{l - u_r/2}$$

otrzymujemy

$$cy_r = (H + 2G) \frac{y_r}{l - u_r/2},$$

skąd

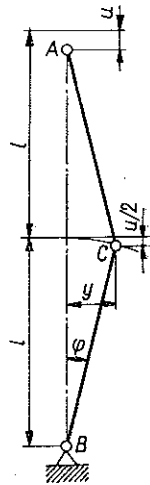
$$u_r = 2l \left(1 - \frac{H + 2G}{cl} \right).$$

Ponieważ zaś ze wzoru (2.2) wynika

$$(2.3) \quad y = \pm \sqrt{u \left(l - \frac{u}{4} \right)},$$

przeto

$$y_r = \pm l \sqrt{1 - \left(\frac{H + 2G}{cl} \right)^2}.$$



Rys. 3

Aby y_r było liczbą rzeczywistą $\neq 0$, musi być

$$1 - \left(\frac{H + 2G}{cl} \right)^2 > 0,$$

skąd wynika, że równowaga układu w położeniu wychylonym możliwa jest tylko wówczas, gdy

$$G < \frac{1}{2}(cl - H).$$

Jest to warunek ograniczający wielkość ciężarka G przy danych wartościach c , l i H . Z warunku $G > 0$ wynika $cl > H$, co oznacza, iż sprężyna musi posiadać dostatecznie dużą sztywność, aby utrzymać ciężarek H w położeniu wychylonym. Jeżeli

$$(2.4) \quad G = \frac{1}{2}(cl - H) \equiv G_{kr},$$

to równowaga układu możliwa jest tylko przy $y_r = 0$, a więc w pionowym położeniu prętów; tę wartość siły G nazywać będziemy ciężarem krytycznym (zaś M_{kr} — masą krytyczną). Jeżeli w szczególnym przypadku $cl = H$, czyli $G_{kr} = 0$, to wobec założenia braku tarcia niemożliwa byłaby równowaga trwała układu dla żadnej dodatniej wartości G . W dalszym ciągu będziemy przyjmować, iż warunek $cl > H$ jest spełniony.

2.3. Przejdźmy do badania ruchu układu. Odnośne równanie różniczkowe wyprowadzimy na podstawie równania Lagrange'a

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}.$$

Tutaj T oznacza energię kinetyczną, Q_y siłę uogólnioną, F funkcję dysypacji; kropką oznaczono różniczkowanie względem czasu t .

Energia kinetyczna układu wobec założenia nieważkości prętów AC i BC wynosi

$$(2.6) \quad T = \frac{m}{2} \left[\dot{y}^2 + \left(\frac{\dot{u}}{2} \right)^2 \right] + \frac{M}{2} \dot{u}^2.$$

Ponieważ przemieszczenia y i u powiązane są za pomocą wzoru (2.3), przeto i prędkości \dot{y} i \dot{u} nie są od siebie niezależne. Jeżeli rozpatrywać będziemy wyłącznie małe drgania układu, to wzór (2.3) możemy zastąpić zależnością przybliżoną

$$(2.7) \quad u \approx \frac{y^2}{l}.$$

Wynika ona wprost ze wzoru (2.2), jeżeli po rozwinięciu wyrażenia $\sqrt{l^2 - y^2}$ w szereg zachowamy tylko dwa pierwsze wyrazy.

Różniczkując (2.7) otrzymujemy

$$(2.8) \quad \dot{u} = \frac{2}{l} y \dot{y}.$$

Podstawienie w (2.6) daje

$$(2.6') \quad T = \frac{m}{2} \left[1 + \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right] \dot{y}^2 + \frac{2M}{l^2} y^2 \dot{y}^2.$$

Dla wyznaczenia siły uogólnionej mamy następujący wzór na pracę przygotowaną:

$$(2.9) \quad \delta L_p = G \delta u - S \delta y + H \frac{\delta u}{2}.$$

Założmy, że sprężyna ma nieliniową charakterystykę typu DUFFINGA. Ponadto ciężarek H posiada wstępne wychylenie y_w , przy czym sprężyna znajduje się wówczas w stanie nienapiętym (odpowiada to beznapięniowemu wygięciu wstępnemu pręta). W tym przypadku o wielkości siły S w sprężynie decyduje różnica wychyleń $y - y_w$; zatem

$$S = c(y - y_w) + c_1(y - y_w)^3, \quad c > 0.$$

Stała c_1 , charakteryzująca nieliniowość sprężystą, może być dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy sprężyna jest twarda, czy też miękka. Ponadto przez analogię do wzoru (2.8) piszemy $\delta u = \frac{2}{l} y \delta y$. Wzór (2.9) przyjmuje teraz postać

$$\delta L_p = \left[2G \frac{y}{l} - c(y - y_w) - c_1(y - y_w)^3 + H \frac{y}{l} \right] \delta y,$$

a ponieważ $\delta L_p = Q_y \delta y$, przeto

$$Q_y = (2G + H - cl) \frac{y}{l} + cy_w - c_1 (y - y_w)^3.$$

Jeżeli zamiast cl wstawimy wyrażenie $2G_{kr} + H$, wynikające z równości (2.4), to otrzymamy ostatecznie następujący wzór na siłę uogólnioną:

$$(2.10) \quad Q_y = -2(G_{kr} - G) \frac{y}{l} + cy_w - c_1 (y - y_w)^3.$$

Wszelkie opory tarcia w układzie zredukujemy do zastępczego oporu wiskotycznego, stawianego ciężarkowi H przy przemieszczeniach poziomych y . W tym przypadku funkcja dysypacji

$$(2.11) \quad F = \frac{1}{2} b \dot{y}^2,$$

gdzie $b > 0$ jest zastępczą stałą tarcia wiskotycznego.

2.4. Podstawiamy funkcje (2.6.1), (2.10) i (2.11) do równania (2.5); po wykonaniu niezbędnych działań otrzymuje się

$$\left[m \left(1 + \frac{y^2}{l^2} \right) + 4M \frac{y^2}{l^2} \right] \ddot{y} + (m + 4M) \frac{y \dot{y}^2}{l^2} + 2(G_{kr} - G) \frac{y}{l} - cy_w + c_1 (y - y_w)^3 + b \dot{y} = 0.$$

Wprowadźmy nową współrzędną q oraz bezwymiarową zmienną niezależną τ :

$$(2.12) \quad q \equiv \frac{y}{l} = \sin \varphi, \quad \tau \equiv t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ponadto przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \mu &\equiv \frac{M}{m} = \frac{G}{H}, & \mu_{kr} &\equiv \frac{M_{kr}}{m} = \frac{G_{kr}}{H}, & \omega^2 &\equiv 2(\mu_{kr} - \mu), \\ \kappa &\equiv 1 + 4\mu, & \zeta &\equiv 1 + 2\mu_{kr}, \\ \beta &\equiv \frac{b \sqrt{lg}}{2H}, & \gamma &\equiv \frac{c_1 l^3}{2H}, & q_w &\equiv \frac{y_w}{l}. \end{aligned}$$

Oznaczając jak poprzednio kropką różniczkowanie względem nowej zmiennej τ , otrzymuje się następujące równanie ruchu układu:

$$(2.14) \quad \ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega^2 q + \kappa q (\ddot{q} q + \dot{q}^2) + 2\gamma (q - q_w)^3 - \zeta q_w = 0.$$

Wyraz czwarty jest identyczny z odpowiednim wyrazem równania (1.2) i określa nieliniową bezwładność rozpatrywanego układu. Dwa następne wyrazy pojawiają się wskutek nieliniowej sprężystości oraz początkowego wychylenia ciężarków.

Równanie powyższe nie daje się scałkować w postaci zamkniętej, aczkolwiek jego pierwszą całkę (dla $\beta \equiv 0$) można uzyskać przez kwadraturę. Rozpatrzmy kilka przypadków szczególnych równania (2.14).

3. Układ zachowawczy ze sprężyną liniową bez wychylenia wstępnego

3.1. Przyjmując w (2.14) $\beta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$, $q_w \equiv 0$ otrzymujemy równanie analogiczne jak (1.2), mianowicie

$$(3.1) \quad \ddot{q} + \omega^2 q + \kappa q (\ddot{q} q + \dot{q}^2) = 0.$$

Zastąpimy go układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$(3.2) \quad \frac{dq}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{(\omega^2 + \kappa v^2) q}{1 + \kappa q^2}.$$

Eliminując z nich τ otrzymamy równanie różniczkowe trajektorii fazowych:

$$(3.3) \quad \frac{dv}{dq} = -\frac{(\omega^2 + \kappa v^2) q}{(1 + \kappa q^2) v},$$

w którym można dokonać rozdziału zmiennych. W tym celu przepisemy to równanie w postaci

$$\frac{2\kappa v dv}{\omega^2 + \kappa v^2} = -\frac{2\kappa q dq}{1 + \kappa q^2}$$

lub

$$\frac{d(\kappa v^2)}{\omega^2 + \kappa v^2} = -\frac{d(\kappa q^2)}{1 + \kappa q^2}.$$

Nie naruszając równości dodajemy w licznikach powyższych ułamków odpowiednie wyrażenia $d(\omega^2) = 0$ oraz $d(1) = 0$ ($\omega^2 = \text{const}$). Dzięki temu otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{d(\omega^2 + \kappa v^2)}{\omega^2 + \kappa v^2} = -\frac{d(1 + \kappa q^2)}{1 + \kappa q^2},$$

które po scałkowaniu daje

$$(3.4) \quad (1 + \kappa q^2)(\omega^2 + \kappa v^2) = h.$$

Równanie to wyraża zasadę zachowania energii, przeto stała całkowania h oznacza całkowitą energię mechaniczną układu lub ściślej — odpowiednią wielkość bezwymiarową. Ponieważ w rozdziale niniejszym rozpatrujemy układ zachowawczy, $\beta \equiv 0$, przeto h jest także energią początkową układu.

Jeżeli zatem warunki początkowe ruchu ciężarka H mają postać $q = q_0$, $v = v_0$, to na mocy równania (3.4) można napisać

$$(3.5) \quad h = (1 + \kappa q_0^2)(\omega^2 + \kappa v_0^2),$$

a następnie

$$(3.6) \quad (1 + \kappa q^2) v^2 + \omega^2 q^2 = (1 + \kappa q_0^2) v_0^2 + \omega^2 q_0^2.$$

Stąd mamy następujące równanie trajektorii fazowych:

$$(3.7) \quad v = \pm \left(\frac{c_0^2 - \omega^2 q^2}{1 + \kappa q^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$(3.8) \quad c_0^2 \equiv v_0^2 + (\omega^2 + \kappa v_0^2) q_0^2.$$

Amplitudalne wychylenia $Q \equiv \max |q|$ wystąpią wówczas, gdy $v = 0$. Z warunku tego wynika, że

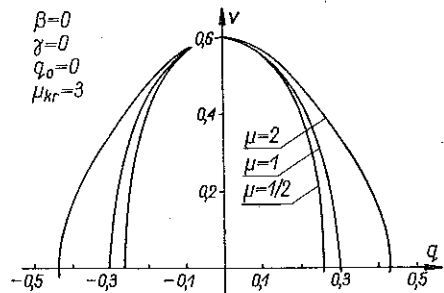
$$(3.9) \quad Q = \frac{c_0}{\omega} = \left\{ \frac{[1 + (1 + 4\mu) q_0^2] v_0^2}{2(\mu_{kr} - \mu)} + q_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Na rysunku 4 przedstawiono przykładowo trajektorie fazowe wykreślone za pomocą wzoru (3.7) dla $\mu_{kr} = 3$, $q_0 = 0$ oraz dla kilku wartości.

Drgania reprezentowane przez te trajektorie są symetryczne zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. Na rysunku pokazano nie tylko połowę płaszczyzny fazowej.

3.2. Wyprowadźmy jeszcze wzór na okres drgań własnych układu T_μ . Punktem wyjścia jest równość

$$d\tau = \frac{dq}{|v|} = \left(\frac{1 + \kappa q^2}{c_0^2 - \omega^2 q^2} \right)^{\frac{1}{2}} dq.$$



Rys. 4

Czas przejścia ciężarka H z położenia $q = 0$ do położenia amplitudalnego $q = Q$ wynosi

$$T_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^Q d\tau,$$

przy czym ze względu na podwójną symetrię trajektorii fazowych jest to czas równy 1/4 okresu T_μ . Wobec tego uwzględniając, że $c_0 = \omega Q$, mamy

$$T_\mu = 4T_1 = \frac{4}{\omega} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^Q \left(\frac{1 + \kappa q^2}{Q^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{2}} dq.$$

Podstawienie $q = Q \sin \psi$ sprowadza powyższą całkę do postaci

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \psi} d\psi \equiv E^+ \left(k, \frac{1}{2} \pi \right),$$

tj. do pełnej całki eliptycznej drugiego rodzaju o module $k = Q \sqrt{\kappa}$.

Na ogół w tablicach funkcji eliptycznych podane są tylko wartości funkcji

$$E^-\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

różniącej się od $E^+(k, \psi)$ znakiem przed k^2 . Dla $k < 1$ można posługiwać się rozwinięciem w szereg

$$E^+\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{384}k^6 - \dots\right).$$

Wobec tego poszukiwany okres drgań własnych rozpatrywanego układu dynamicznego wynosi

$$(3.10) \quad T_\mu = \frac{4}{\omega} \sqrt{\frac{l}{g}} E^+\left(k, \frac{1}{2}\pi\right).$$

3.3. Równanie (3.1) i wszystkie wynikające z niego wzory odnoszą się do niezbyt dużych wartości q . W przeciwnym razie wzór przybliżony $u \approx y^2/l$ staje się mało dokładny. Narzuca to w konsekwencji pewne ograniczenie na zakres prędkości początkowych v_0 lub wychyleń początkowych q_0 , objętych naszymi rozważaniami. Można bez trudu wyznaczyć tę wartość v_{0m} lub q_{0m} , przy której błąd w określeniu przemieszczenia u za pomocą wzoru wyżej przytoczonego nie przekroczy pewnej ustalonej wartości dopuszczalnej. Przemieszczenie ciężarka G wyznaczone za pomocą wzoru dokładnego (2.2) oznaczmy przez u_d , a odpowiednią wartość przybliżoną przez u_p .

Błąd względny wynikający z tego przybliżenia

$$B = \frac{u_d - u_p}{u_d} = \frac{(2l - 2\sqrt{l^2 - y^2}) - y^2/l}{2l - 2\sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Dla amplitudy wychyleń

$$B = \frac{2 - 2\sqrt{1 - Q^2} - Q^2}{2 - 2\sqrt{1 - Q^2}}.$$

Jeżeli błąd dopuszczalny oznaczmy symbolem B_m , to warunek $B \leq B_m$ prowadzi do następującej nierówności:

$$Q^2 [Q^2 - 4B_m (1 - B_m)] \leq 0.$$

Ponieważ Q^2 nie może być ujemne, przeto

$$Q \leq 2 \sqrt{B_m (1 - B_m)} \equiv Q_m.$$

O ile np. zażądamy, aby wzór przybliżony (2.7) dawał wyniki obarczone błędem nie większym niż 5% ($B_m = 0,05$), to otrzymamy $Q_m = 0,436$. Odpowiada to odchyleniu prętów od pionu o kąt

$$\varphi_m = \arcsin Q_m \approx 26^\circ.$$

Przyjmując we wzorze (3.9) $Q = Q_m$ można przy danym q_0 wyznaczyć odpowiednią wartość $v_{0m}(q_0, B_m)$ lub przy danym v_0 odpowiednie $q_{0m}(v_0, B_m)$. Będą to wartości parametrów początkowych dopuszczalne ze względu na założony błąd B_m . Np. dla $B_m = 0,05$, $q_0 = 0$ otrzymuje się

$$v_{0m} = 0,616 \sqrt{\mu_{kr} - \mu}, \quad \text{a dla } v_0 = 0 \quad \text{mamy} \quad q_{0m} = Q_m = 0,436.$$

4. Stateczność drgań układu ze sprężyną liniową

4.1. Jedną z charakterystycznych cech układów nieliniowych jest możliwość wzbudzenia w nich drgań niestatecznych.

Zbadajmy, czy ewentualność taka istnieje w układzie liniowo-sprężystym, posiadającym nieliniową bezwładność oraz dodatnią dysypację energii ($\beta > 0$). Problem ten rozstrzygniemy za pomocą drugiej metody Lapunowa [9].

W tym celu równanie ruchu, które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, należy zastąpić układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{q} \equiv \frac{dq}{d\tau} = P(q, v), \quad \dot{v} \equiv \frac{dv}{d\tau} = Q(q, v).$$

Istota wspomnianej metody polega na znalezieniu takiej funkcji ciągłej $V = V(q, v)$, która spełniałaby następujące warunki:

$$V(0, 0) = 0,$$

$$(4.1) \quad V(q, v) > 0 \quad \text{dla wszelkich } q \neq 0, v \neq 0,$$

$$\dot{V}(q, v) < 0 \quad \text{dla wszelkich } q \neq 0, v \neq 0, \quad \text{przy czym}$$

$$(4.2) \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial V}{\partial v} \dot{v} = P(q, v) \frac{\partial V}{\partial q} + Q(q, v) \frac{\partial V}{\partial v}.$$

Istnienie takiej funkcji, jak wykazał Lapunow, jest wystarczającym warunkiem asymptotycznej stateczności drgań, opisywanych danym równaniem różniczkowym.

4.2. Przechodząc do przypadku określonego powyżej weźmy pod uwagę równanie (3.3), w którym dodatkowo uwzględnimy tłumienie

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-(\omega^2 + \kappa v^2)q - 2\beta v}{(1 + \kappa q^2)v},$$

skąd

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{q} &= v + \kappa q^2 v \equiv P(q, v), \\ \dot{v} &= -\omega^2 q - 2\beta v - \kappa q v^2 \equiv Q(q, v). \end{aligned}$$

Niechaj

$$(4.4) \quad V(q, v) = \omega^2 q^2 + v^2 + \kappa q^2 v^2.$$

Nie trudno zauważyć, iż funkcja powyższa spełnia dwa pierwsze warunki (4.1), tzn. mamy $V(0, 0) = 0$, $V(q, v) > 0$ dla wszelkich $q \neq 0$, $v \neq 0$, albowiem $\omega^2 > 0$, $\kappa > 0$.

W celu zbadania trzeciego warunku obliczamy

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 2q(\omega^2 + \kappa v^2), \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 2v(1 + \kappa q^2).$$

Podstawiając powyższe oraz funkcje (4.3) w (4.2) otrzymujemy

$$\dot{V} = 2q(\omega^2 + \kappa v^2)(v + \kappa q^2 v) + 2v(1 + \kappa q^2)(-\omega^2 q - 2\beta v - \kappa q v^2) = -4\beta v^2(1 + \kappa q^2).$$

Ponieważ $\beta > 0$, przeto $\dot{V} < 0$ dla wszelkich $q \neq 0$, $v \neq 0$, czyli ostatni warunek (4.1) jest także spełniony. Wykazaliśmy więc, że (4.4) jest funkcją Lapunowa.

Nie trudno zauważyć, iż w danym przypadku przedstawia ona całkowitą energię mechaniczną h układu (z dokładnością do stałych κ i ω^2); mianowicie porównując ze sobą wzory (3.4) i (4.4) widzimy, że $\kappa V = h - \omega^2$.

Punktem równowagi dynamicznej układu odpowiada równoczesne spełnienie warunków $P(q, v) = 0$, $Q(q, v) = 0$. Z równań (4.3) wynika, iż jedynym takim punktem jest $q = 0$, $v = 0$. Istnienie funkcji Lapunowa dowodzi, iż obszar w otoczeniu początku układu na płaszczyźnie fazowej jest obszarem drgań asymptotycznie statecznych.

5. Układ zachowawczy z wychyleniem wstępnym

5.1. Weźmy pod uwagę równanie (2.14), opisujące ruch układu w najogólniejszym przypadku. Jeżeli pominąć tłumienie, to pierwszą całkę tego równania można również uzyskać przez kwadraturę. Przekształćmy wyraz określający nieliniową bezwładność następująco:

$$q(\ddot{q}q + \dot{q}^2) = q(q\dot{q})' = q \frac{d}{d\tau}(qv) = q \frac{d(qv)}{dq} \frac{dq}{d\tau} = qv \frac{d(qv)}{dq}.$$

Podstawiając ponadto w równanie (2.14) $\ddot{q} = v dv/dq$ oraz $\beta \equiv 0$ otrzymujemy po pomnożeniu przez dq

$$v dv + \omega^2 q dq + \kappa q v d(qv) + 2\gamma(q - q_w)^3 dq - \zeta q_w dq = 0.$$

Całkowanie daje równanie energii

$$(5.1) \quad v^2 + \omega^2 q^2 + \kappa q^2 v^2 + \gamma(q - q_w)^4 - 2\zeta q_w q = h_1,$$

przy czym dla $q(0) = q_0$, $v(0) = v_0$ mamy

$$(5.2) \quad h_1 = v_0^2 + \omega^2 q_0^2 + \kappa q_0^2 v_0^2 + \gamma(q_0 - q_w)^4 - 2\zeta q_w q_0.$$

5.2. Niewielkie wychylenie wstępne układu z nieliniową bezwładnością może wywierać znaczny wpływ na amplitudę drgań. Załóżmy dla prostoty, iż sprężyna jest liniowa ($\gamma \equiv 0$). Równanie trajektorii fazowych ma postać

$$(5.3) \quad v = \pm \left(\frac{h_1 + 2\zeta q_w q - \omega^2 q^2}{1 + \kappa q^2} \right)^{1/2}.$$

Amplitudalne wychylenia Q wyznaczmy z równania

$$h_1 + 2\zeta q_w Q - \omega^2 Q^2 = 0.$$

Mianowicie

$$(5.4) \quad Q_{\pm} = \frac{\zeta q_w}{\omega^2} \pm \left[\left(\frac{\zeta q_w}{\omega^2} \right)^2 + \frac{h_1}{\omega^2} \right]^{1/2}, \quad h_1 > 0.$$

Znak plus przed pierwiastkiem odpowiada amplitudzie mierzonej w kierunku zgodnym z wychyleniem ciężarka H , znak minus — w kierunku przeciwnym. Na rysunku 6 (s. 229) przedstawione są trajektorie fazowe obrazujące wpływ tego wychylenia oraz prędkości początkowej na amplitudę drgań.

5.3. Zanalizujemy budowę wzoru (5.4). Jeżeli w równaniu (2.4) odrzucimy wszystkie wyrazy zawierające funkcję przemieszczenia q (a także wyraz zawierający γ), to otrzymamy $\omega^2 q - \zeta q_w = 0$, skąd wynika, że wyrażenie

$$(5.5) \quad \frac{\zeta q_w}{\omega^2} = Q_{st}$$

określa wychylenie poziome ciężarka H , spowodowane statycznym działaniem ciężaru G . Niechaj $q_0 = 0$, czyli $h_1 = v_0^2$. Oznaczając $Q_+ \equiv Q_{dyn}$ możemy napisać na podstawie wzorów (5.4) i (5.5)

$$(5.6) \quad Q_{dyn} = Q_{st} + (Q_{st}^2 + \alpha Q_{st} v_0^2)^{1/2}, \quad \alpha \equiv 1/\zeta q_w.$$

O ile np. ciężarek G przyłożymy do przegubu A nagle, jednak bez prędkości początkowej ($v_0 = 0$), to układ zacznie drgać, przy czym amplituda drgań ciężarka H wyniesie $Q_{dyn} = 2Q_{st}$.

Widzimy tu pełną analogię ze znanymi wynikami elementarnej teorii drgań giętych belki dwuprzegubowej, wzbudzonych uderzeniem poprzecznym w przekrój środkowy belki.

Przeprowadzając przybliżone rozważania energetyczne wyprowadza się tam wzór na dynamiczną strzałkę ugięcia, który ma postać identyczną ze wzorem (5.6), a różni się jedynie budową współczynnika α [por. np. [10], § 66, wzór (d)].

6. Stateczność drgań układu ze sprężyną nieliniową

6.1. W p. 4 udowodniliśmy, że istnienie nieliniowej bezwładności w układzie liniowo-sprężystym nie wpływa w sposób istotny na charakter jego drgań, które są asymptotycznie stateczne, niezależnie od warunków początkowych. Odmienna sytuacja może zaistnieć w układzie posiadającym sprężynę nieliniową.

W tym przypadku nie daje się wyznaczyć wprost funkcji Lapunowa. Zbadajmy przeto stateczność takiego układu stosując tzw. pierwszą metodę Lapunowa [2]. W metodzie tej staramy się wprost określić rozwiązanie równania ruchu po uprzednim zlinearyzowaniu go, a następnie z charakteru tych rozwiązań wnioskujemy o stateczności drgań.

Jeżeli równanie ruchu jakiegoś układu dynamicznego zastąpimy dwoma równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu

$$(6.1) \quad \dot{q} = P(q, v), \quad \dot{v} = Q(q, v),$$

to po wyeliminowaniu z nich czasu otrzymujemy równanie trajektorii fazowych

$$(6.2) \quad \frac{dv}{dq} = \frac{Q(q, v)}{P(q, v)}.$$

Stany równowagi dynamicznej układu odpowiadają punktom osobliwym równania (6.2). Współrzędne tych punktów są przeto miejscami zerowymi równań

$$(6.3) \quad P(q, v) = 0, \quad Q(q, v) = 0.$$

Chcąc zbadać stateczność równowagi układu w otoczeniu pewnego punktu osobliwego o współrzędnych (q_*, v_*) , badamy zachowanie się punktu reprezentującego (q, v) na płaszczyźnie fazowej przy jego małych wychyleniach (ξ, η) z położenia równowagi. Przyjmując przeto

$$q = q_* + \xi, \quad v = v_* + \eta$$

rozwijamy funkcje $P(q, v)$ i $Q(q, v)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu osobliwego (q_*, v_*) i w ten sposób otrzymujemy

$$(6.4) \quad \begin{aligned} P(q, v) &= P(q_*, v_*) + A\xi + B\eta + R_1(\xi, \eta), \\ Q(q, v) &= Q(q_*, v_*) + D\xi + E\eta + R_2(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Tutaj

$$(6.5) \quad A \equiv \left[\frac{\partial P}{\partial q} \right]_{\substack{q=q_* \\ v=v_*}}, \quad B \equiv \left[\frac{\partial P}{\partial v} \right]_{\substack{q=q_* \\ v=v_*}}, \quad D \equiv \left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]_{\substack{q=q_* \\ v=v_*}}, \quad E \equiv \left[\frac{\partial Q}{\partial v} \right]_{\substack{q=q_* \\ v=v_*}},$$

a R_1 i R_2 są funkcjami zawierającymi wariacje ξ, η w potęgach wyższych od 1. W pierwszym przybliżeniu funkcje te pomijamy. Jeżeli uwzględnimy ponadto równości (6.3), to zamiast (6.1) otrzymamy zlinearyzowany układ równań różniczkowych pierwszego przybliżenia:

$$\dot{\xi} = A\xi + B\eta, \quad \dot{\eta} = D\xi + E\eta.$$

Poszukując rozwiązań w postaci $\xi = C e^{s\tau}$, $\eta = C k e^{s\tau}$ (C, k i s są to stałe) dochodzi się ostatecznie do równania charakterystycznego

$$(6.6) \quad s^2 - (A + E)s + AE - BD = 0.$$

Lapunow wykazał, że o ile oba pierwiastki tego równania posiadają różne od zera części rzeczywiste, to równowaga układu dynamicznego jest stała, gdy części rzeczywiste obu pierwiastków są ujemne. O ile zaś choćby jeden z nich posiada dodatnią część rzeczywistą, to układ jest wg Lapunowa dynamicznie niestateczny.

Charakter punktów osobliwych (prostych) równania (6.2) można również ustalić na podstawie rozwiązania równań pierwszego przybliżenia.

6.2. Załóżmy, iż rozpatrywany układ z nieliniową bezwładnością posiada oprócz tego nieliniową sprężynę, wychylenia zaś wstępne nie ma. To ostatnie założenie nie ogranicza zbytnio ogólności rozważań, albowiem małe wychylenie wstępne zmienia wprawdzie nieco kształt trajektorii fazowych, nie może jednak wywrzeć istotnego wpływu na stateczność drgań. Równania (6.3) mają w tym przypadku postać

$$(6.7) \quad \begin{aligned} P(q, v) &\equiv v + \kappa q^2 v = 0, \\ Q(q, v) &\equiv -\omega^2 q - 2\beta v - \kappa q v^2 - 2\gamma q^3 = 0. \end{aligned}$$

Wyznamy współrzędne punktów osobliwych. Nie trudno zauważyć, że jednym z nich jest punkt $q_* = 0, v_* = 0$ podobnie jak w układzie ze sprężyną liniową.

O ile sprężyna jest nieliniowa i ma miękką charakterystykę, czyli $\gamma < 0$, to oprócz tego istnieją jeszcze dwa inne punkty osobliwe o współrzędnych

$$(6.8) \quad q'_* = \pm \frac{\omega}{\sqrt{-2\gamma}}, \quad v'_* = 0, \quad \gamma < 0,$$

a więc położone są na osi odciętych symetrycznie względem początku układu.

Zbadajmy, jakiego typu są te osobliwości. Nieliniowość sprężysta nie zmienia charakteru drgań wokół położenia równowagi $q_* = 0, v_* = 0$, a zatem na mocy wyników uzyskanych w p. 4 możemy stwierdzić, że początek układu współrzędnych jako punkt osobliwy jest statecznym ogniskiem lub, o ile pominiemy tłumienie, staje się punktem wirowym.

Przechodząc do dwóch pozostałych osobliwości obliczamy najpierw cztery stałe (6.5) opierając się na wzorach (6.7):

$$A = 2q_* v_*, \quad B = 1 + \kappa q_*^2, \quad D = -\omega^2 - \kappa v_*^2 - 6\gamma q_*^2, \quad E = -2\beta - \kappa v_*^2,$$

a po podstawieniu (6.8)

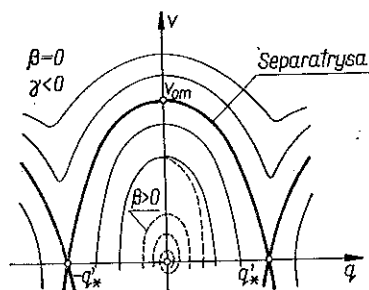
$$\begin{aligned} A' &= 0, & B' &= 1 - \frac{\kappa \omega^2}{2\gamma}, \\ D' &= 2\omega^2, & E' &= -2\beta. \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne (6.6)

$$s^2 + 2\beta s - 2\omega^2 \left(1 - \frac{\kappa \omega^2}{2\gamma}\right) = 0$$

posiada pierwiastki

$$s_{\pm} = -\beta \pm \left[\beta^2 + 2\omega^2 \left(1 - \frac{\kappa \omega^2}{2\gamma}\right) \right]^{1/2}.$$



Rys. 5

Dla $\gamma < 0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest $> \beta^2$, przeto $s_+ > 0$, natomiast $s_- < 0$. Fakt, iż oba pierwiastki są rzeczywiste i różnią się znakiem dowodzi, że analizowany punkt osobliwy jest siodłem, czyli odpowiada drganiom niestatecznym. Trajektorie fazowe mają w tym przypadku przebieg pokazany na rys. 5.

Reasumując stwierdzamy, że w układzie dynamicznym, który oprócz nieliniowej bezwładności posiada także nieliniową miękką charakterystykę sprężystą, możliwe jest wzbudzenie drgań niestacycznych.

6.3. Zastanówmy się, jakie warunki początkowe należy zrealizować, aby nie wystąpiły drgania niestacyczne.

Dla uzyskania odpowiedzi na to pytanie wykorzystamy równanie energii (5.1); dla $q_w = 0$ ma ono postać

$$v^2 + \omega^2 q^2 + \kappa q^2 v^2 + \gamma q^4 = h_1,$$

przy czym

$$h_1 = v_0^2 + \omega^2 q_0^2 + \kappa q_0^2 v_0^2 + \gamma q_0^4.$$

Przyjmując $v = 0$ otrzymuje się równanie dla wyznaczenia amplitudy Q ; rozwiązanie go daje

$$Q_{\pm}^2 = -\frac{\omega^2}{2\gamma} \left[1 \pm \left(1 + \frac{4\gamma h_1}{\omega^4} \right)^{1/2} \right], \quad \gamma < 0.$$

Aby Q_{\pm}^2 było liczbą rzeczywistą, wyrażenie podpierwiastkowe musi być liczbą nieujemną, skąd wynika

$$h_1 \leq \frac{\omega^4}{-4\gamma}$$

lub

$$(6.9) \quad v_0^2 + \omega^2 q_0^2 + \kappa q_0^2 v_0^2 + \gamma q_0^4 \leq \frac{\omega^4}{-4\gamma}.$$

Jest to warunek, jaki muszą spełniać parametry początkowe q_0 i v_0 , aby w rozpatrywanym układzie wzbudzone zostały drgania stateczne. Np. dla $q_0 = 0$ otrzymujemy

$$(6.10) \quad |v_0| \leq \frac{\omega^2}{2\sqrt{-\gamma}} \equiv v_{0m},$$

zaś dla $v_0 = 0$

$$(6.10') \quad |q_0| \leq \frac{\omega}{\sqrt{-2\gamma}} \equiv q_{0m}.$$

Ten ostatni wzór określa oczywiście odcięte punktów osobliwych (6.8). Warunkom początkowym (6.10) odpowiada na płaszczyźnie fazowej krzywa, separująca obszar trajektorii reprezentujących ruch nieokresowy od obszaru trajektorii otaczających stateczny punkt osobliwy, leżący w początku układu (węzeł lub punkt wirowy).

7. Układ rozpraszający ze sprężyną nieliniową i wychyleniem wstępnym

7.1. Rozpatrzmy jeszcze pokrótce przypadek ogólny, kiedy układ rozpraszający z wychyleniem wstępnym posiada nieliniową charakterystykę sprężystą. Wówczas równania (6.3) mają postać

$$v + \kappa q^2 v = 0, \quad -\omega^2 q - 2\beta v - \kappa q v^2 - 2\gamma (q - q_w)^3 + \zeta q_w = 0.$$

Punkty osobliwe, jak poprzednio, leżą na osi q , tzn. $v_* = 0$, przeto ich odcięte są pierwiastkami równania trzeciego stopnia

$$(7.1) \quad 2\gamma q^3 - 6\gamma q_w q^2 + (\omega^2 + 6\gamma q_w^2) q - (2\gamma q_w^3 + \zeta q_w) = 0.$$

Jak widać, tłumienie wiskotyczne nie ma wpływu na położenie punktów osobliwych, a tym samym na położenie równowagi rozpatrywanego układu dynamicznego.

Obliczmy wyróżnik $D = D_1^2 + D_2^3$, którego znak będzie decydował o ilości rzeczywistych pierwiastków równania (7.1). Znajdujemy

$$D_1 = \left(1 - \frac{\zeta q_w}{\omega^2}\right) \frac{\omega^2 q_w}{4\gamma},$$

przy czym ze względu na to, że $\zeta q_w \omega^{-2}$ jest liczbą rzędu wielkości q_w , a więc $\ll 1$, przeto można przyjąć $D_1 \approx (1/4) \omega^2 q_w \gamma^{-1}$. Ponadto $D_2 = (1/6) \omega^2 \gamma^{-1}$, wobec czego

$$(7.2) \quad D \approx \frac{\omega^4}{\gamma^2} \left(\frac{q_w^2}{16} + \frac{\omega^2}{216\gamma} \right).$$

W związku z dwoistością znaku stałej γ należy rozpatrzyć oddzielnie dwa przypadki.

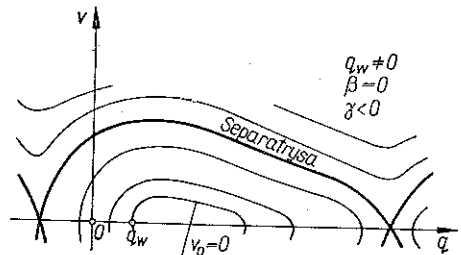
7.2. Twarda charakterystyka sprężysta ($\gamma > 0$). Wówczas $D_2 > 0$, a zatem i $D > 0$, czyli równanie (7.1) posiada jeden rzeczywisty pierwiastek, któremu odpowiada jeden punkt osobliwy równania różniczkowego (6.2).

Przez analogię do przypadku omówionego w p. 6.2 możemy stwierdzić, iż jest to stateczne ognisko.

7.3. Miękką charakterystyka sprężysta ($\gamma < 0$). Teraz $D_2 < 0$, przy czym ze wzoru (7.2) widoczne jest, iż dla $\gamma \leq \gamma_0$ ($\gamma_0 \equiv -2/27 \omega^2 q_w^{-2}$) mamy $D \geq 0$. Weźmy najpierw pod uwagę przypadek $\gamma > \gamma_0$. Gdy $D < 0$, to istnieją trzy rzeczywiste pierwiastki równania (7.1), czyli trzy punkty osobliwe, przy czym dwa z nich są siodłami, trzeci zaś ogniskiem. Obraz płaszczyzny fazowej jest w zasadzie podobny do przedstawionego na rys. 5, aczkolwiek naruszona zostaje symetria względem osi rzędnych; ognisko nie leży teraz już w początku układu współrzędnych ($q_* \neq 0$), a także punkty siodłowe rozmieszczone są w różnych odległościach od ogniska (rys. 6).

Dla takiego układu można również wyznaczyć pewne graniczne wartości parametrów początkowych q_{0m}, v_{0m} , których przekroczenie wywoła niestateczne drgania układu (por. p. 6.3)

Jeżeli chodzi o przypadek $\gamma < \gamma_0$ ($D > 0$), to odpowiada mu jeden punkt osobliwy, który jest siodłem, a więc układ jest w tym przypadku dynamicznie niestateczny w sensie Lapunowa. Zauważmy jednak, iż dla $q_w \ll 1$ stała γ_0 jest na ogół bardzo dużą liczbą (ujemną), czyli przypadek $\gamma < \gamma_0$ dotyczy układu z nadzwyczaj miękką charakterystyką sprężystą i jako taki nie posiada większego znaczenia praktycznego.



Rys. 6

3. Przykłady liczbowe

8.1. Rozpatrzmy najpierw przykład, który zilustruje nam wpływ masy związanej z ruchomym przegubem pręta na okres jego drgań poprzecznych. Dany jest pręt dwuprzegubowy, wykonany z rurki stalowej ($E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm²) o średnicach $d_z/d_w = 2/1,6$ cm i długości $2l = 100$ cm. Z przegubem ruchomym związany jest ciężarek $G = 36$ kG.

Obliczamy: ciężar pręta $H_P = 0,9$ kG, sztywność na zginanie $EI = 0,926 \cdot 10^6$ kG cm², siła krytyczna $P_E = \pi^2 EI (2l)^{-2} = 915$ kG, okres podstawowych drgań własnych poprzecznych ([10] wzór (135))

$$(8.1) \quad T_P^0 = \frac{4l}{\pi} \left(\frac{2lH_P}{EIg} \right)^{1/2} = 0,020 \text{ sek.}$$

Aby obliczyć okres T_P analogicznych drgań dla pręta z ciężarkiem G , skorzystamy ze wzorów wyprowadzonych w p. 3.2 traktując materiał pręta jako liniowo-sprężysty. Ze względu na zapewnienie podobieństwa modelu do pręta rzeczywistego dobieramy tak parametry H i c modelu, aby w obu wymienionych układach uzyskać jednakowe obciążenia krytyczne oraz okresy drgań własnych odpowiednich układów liniowych (tzn. bez ciężarków G). Warunek pierwszy oznacza $P_E = G_{kr}$, warunek drugi: $T_P^0 = T_M^0$, gdzie T_M^0 jest okresem drgań swobodnych modelu o jednym stopniu swobody bez ciężarka G (tzn. dla $\mu = 0$). Korzystając ze wzoru (3.10) znajdziemy

$$(8.2) \quad T_M^0 = \frac{4}{\omega_0} \sqrt{\frac{l}{g}} E^+ \left(k_0, \frac{1}{2} \pi \right),$$

gdzie $k_0 \equiv (k)_{\mu=0} = Q$ oznacza bezwymiarową amplitudę, a

$$(8.3) \quad \omega_0 \equiv (\omega)_{\mu=0} = \sqrt{2\mu_{kr}} = \sqrt{2G_{kr}/H} = \sqrt{2P_E/H}.$$

Załóżmy, iż wzbudzenie drgań pręta nastąpiło na skutek wstępnego wygięcia jego osi wg równania $y(x, 0) = y_0 \sin(\pi x/2l)$ bez prędkości początkowej. Wówczas amplitudą drgań będzie y_0 i odpowiednio $Q = y_0/l$. Niechaj $y_0 = 1$ cm, zatem $k_0 = Q = 1/50$. W dalszym ciągu mamy $E^+(k_0, \frac{1}{2} \pi) \approx \frac{1}{2} \pi (1 + \frac{1}{2} \cdot 50^{-2}) \approx \frac{1}{2} \pi$, wobec czego wzór (8.2) przyjmuje postać

$$T_M^0 = \pi \left(\frac{2lH}{P_E g} \right)^{1/2}.$$

Porównanie ze wzorem (8.1) daje po przekształceniach

$$H = \frac{4}{\pi^2} H_P \approx 0,4 H_P = 0,4 \cdot 0,9 = 0,36 \text{ kG.}$$

W dalszym ciągu znajdujemy $\mu = G/H = 100$, $\mu_{kr} = P_E/H = 2540$, $\omega = [2(\mu_{kr} - \mu)]^{1/2} = 69,9$, $\varkappa = 1 + 4\mu = 401$, $k = Q \sqrt{\varkappa} \approx 0,4$, $E^+(0,4; \frac{1}{2} \pi) \approx \frac{1}{2} \pi (1 + 0,08) = 0,54 \pi$. Ostatecznie okres drgań własnych układu z nieliniową bezwładnością wynosi

$$T_P = \frac{4}{\omega} \sqrt{\frac{l}{g}} E^+ \left(k, \frac{\pi}{2} \right) = 0,022 \text{ sek.}$$

Porównanie z wartością (8.1), uzyskaną dla pręta bez ciężarka G , wykazuje, iż obecność tego ostatniego zwiększa okres drgań poprzecznych pręta w danym przypadku o 10%.

8.2. Dla zilustrowania wpływu krzywizny wstępnej pręta na wielkość amplitudy weźmy pod uwagę pręt określony w przykładzie poprzednim przyjmując jednakże, iż został on wygięty wstępnie beznaprężeniowo. Niechaj równoważne wychylenie wstępne ciężarka H w modelu na rys. 2 wynosi $y_w = 0,5$ cm, czyli $q_w = y_w/l = 0,01$. Załóżmy ponadto, że ciężarkowi temu nadano prędkość początkową $V_0 = 2$ m/sek, czemu odpowiada $v_0 = V_0(lg)^{-1/2} = 0,9$, zaś $q_0 = 0$.

Ponieważ $\zeta = 1 + 2\mu_{kr} = 5081$, $\alpha = (\zeta q_w)^{-1} = 50,81^{-1}$, przeto ze wzoru (5.5) obliczamy $Q_{st} = \zeta q_w \omega^{-2} = 0,0104$, a następnie ze wzoru (5.6) bezwymiarową amplitudę $Q_w = Q_{st} + (Q_{st}^2 + \alpha v_0^2 Q_{st})^{1/2} = 0,0169$.

Gdyby nie było wychylenia wstępnego, to ze wzoru (3.9) otrzymalibyśmy dla takich samych warunków początkowych $Q = v_0 \omega^{-1} = 0,0130$.

Wzrost amplitudy, spowodowany istnieniem krzywizny wstępnej pręta, wynosi w tym przypadku 30%.

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Москва 1956.
2. Н. В. БУТЕНИН, *Элементы теории нелинейных колебаний*, Москва 1962.
3. W. J. CUNNINGHAM, *Introduction to nonlinear analysis*, New York-Toronto-London 1958
4. I. N. M'C DUFF, J. R. CURRERI, *Vibration control*, New York-Toronto-London 1958.
5. R. GRYBÓŚ, *Drgania poprzeczne pręta dwuprzegubowego z masą skupioną na końcu*, Z.N. Pol. Śl. nr 72, Gliwice 1963.
6. N. J. HOFF, *Buckling and stability*, J. of the Royal Aeron. Soc., 58 (1954).
7. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
8. N. MINORSKY, *Modern trends in nonlinear mechanics*, Advances in Appl. Mech., 1 (1948).
9. J. LA SALLE, S. LEFSCHETZ, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, New York 1961.
10. S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, New York-Toronto-London 1955.
11. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, *Исследование колебаний конструкций*, 1935.
12. Ю. Ю. ГОЛЬДЕНБЛАТ, *Динамическая устойчивость сооружений*, 1948.

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

Рассматриваются свободные демпфированные колебания системы, представленной на рис. 2. Движение этой системы описано аналогичным уравнением как и свободные демпфированные колебания двухшарнирного стержня с массой сосредоточенной на конце стержня, если пренебречь сжимаемостью стержня. Как известно [1] упомянутое уравнение имеет характеристический член выражающий так наз. нелинейную инерционностью.

Рассуждения обобщаются на случай предварительно изогнутого стержня, обладающего кроме того нелинейной упругой характеристикой типа Дюффинга. Первый интеграл соответствующего дифференциального уравнения был получен по квадратуре, благодаря чему, движение системы представлено в фазовой плоскости.

Исследуя устойчивость колебаний линейно-упругой системы без предварительного отклонения, приводится функция Ляпунова в явном виде. В общем случае исследование устойчивости проводится на основании так наз. первого метода Ляпунова.

На числовых примерах показано влияние нелинейной инерционности и предварительной кривизны на собственную частоту (основную), а также на амплитуду поперечных колебаний стержня с добавочной массой на конце.

Приведенные формулы отличаются большой простотой, благодаря чему могут быть без труда использованы на практике.

S u m m a r y

NATURAL VIBRATION OF A SYSTEM WITH A NONLINEAR INERTION

The object of this analysis is the natural damped vibration of a system as represented in Fig. 2. The motion of this system is described by the same equation as the natural damped vibration of a bar with two hinges and a concentrated mass at the moving end, if the bar is assumed to be incompressible. It is known [1] that this equation has a expression characteristic for a nonlinear inertion.

The present considerations are generalized to the case of the bar having an initial curvature and a nonlinear elastic characteristic of the Duffing type. A first integral of the relevant differential equation is obtained by quadratures, thus enabling the representation of the motion in the phase plane.

For a study of the stability of vibration of a linearly elastic system with no initial deflection, the Lapunov function is obtained in an evident form. In the general case the stability is investigated on the basis of Lapunov's first method.

Numerical examples show the influence of a nonlinear inertion and an initial curvature on the (fundamental) natural frequency and the amplitude of lateral vibration of a bar having an additional mass at the end.

The equations obtained are characterized by considerable simplicity which enables convenient application to engineering problems.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 czerwca 1964 r.