

ANALIZA STATECZNOŚCI ZAMKNIĘTEJ ORTOTROPOWEJ POWŁOKI WALCOWEJ
POD DZIAŁANIEM CIŚNIENIA HYDROSTATYCZNEGO

ZBIGNIEW NOWAK (KRAKÓW)

1. Rys historyczny zagadnienia

Zagadnieniu stateczności zamkniętej, cienkościennej, izotropowej powłoki walcowej kolistej o brzegach wolno podpartych poświęcono w literaturze światowej szereg prac teoretycznych oraz badań eksperymentalnych. Po raz pierwszy problem ten został rozwiązany w ujęciu liniowym przez R. MISESA [1]. To samo zagadnienie, lecz już w ujęciu geometrycznie nieliniowym, rozwiązali następnie, niemal jednocześnie, W. A. NASH [2] i F. S. ISANBAJEWA [3]. Praca [2] jest o tyle ogólniejsza od [3], że uwzględniono w niej wpływ na wielkość ciśnienia krytycznego tzw. «początkowych odstępstw» (w języku angielskim «initial imperfections») powierzchni środkowej powłoki od kształtu geometrycznego walca kołowego. Ten sam problem stateczności został później podjęty i w nieliniowym ujęciu rozwiązany przez J. KEMPNERA, K. A. V. PANDALAI, S. A. PATELA i J. CROUZET-PASCALA [4]. Seria badań eksperymentalnych, przeprowadzonych przez E. WENKA, R. C. SLANKARDA i W. A. NASHA [5] oraz W. A. NAGAJEWA [6] wykazała, że otrzymane w pracach [2 i 3] wielkości tzw. dolnych ciśnień krytycznych (por. p. 11) są niższe aniżeli stwierdzone doświadczalnie. Wreszcie A. S. WOLMIR [7] rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową (w języku angielskim «finite deflection theory») problem stateczności cienkościennej, zamkniętej, izotropowej powłoki walcowej o brzegach wolno podpartych, poddanej działaniu jedynie równomiernego zewnętrznego ciśnienia promieniowego. Ważnymi zaletami cytowanej pracy są: a) uwzględnienie wpływu początkowych odstępstw powierzchni środkowej powłoki od kształtu geometrycznego walca kołowego na wielkość ciśnienia krytycznego; b) weryfikacja otrzymanych wyników na drodze eksperymentalnej. Przypadek stateczności zamkniętej powłoki izotropowej o brzegach utwierdzonych, poddanej działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego, został rozwiązany na gruncie teorii liniowej (ale na dwóch zupełnie odmiennych drogach) znowu niemal równocześnie przez W. A. NASHA [8] i P. P. BIJLAARDA [9].

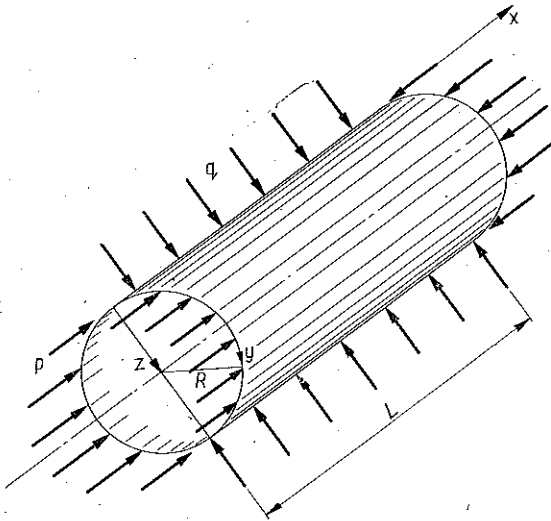
Jedyną pracą, w której rozpatrzono w ujęciu liniowym i nieliniowym stateczność cienkościennej zamkniętej powłoki walcowej kolistej, wykazującej tzw. «ortotropię naturalną» (tj. wykonanej z materiału ortotropowego) i poddanej działaniu równomiernego ciśnienia p wzdłuż tworzących oraz równomiernego zewnętrznego ciśnienia promieniowego q jest praca O. N. LEŃKI [10]. Ważną zaletą tej ostatniej jest sporządzenie wykresów umożliwiających (dla szczególnego przypadku powłoki

izotropowej) znalezienie ciśnienia krytycznego q , przy różnych stosunkach p/q dla różnych wartości bezwymiarowego parametru geometrycznego $e = Rh/L^2$ powłoki (por. p. 13).

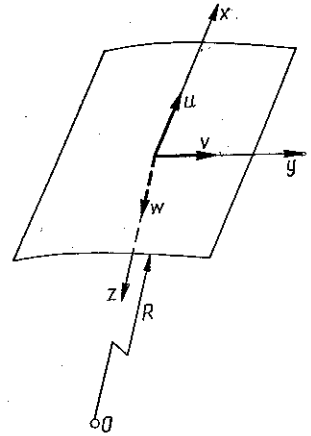
2. Przyjęte założenia i oznaczenia

Celem niniejszej pracy jest analiza w ujęciu geometrycznie liniowym i nieliniowym stateczności oraz odkształceń ponadkrytycznych zamkniętej, cienkościennej walcowej powłoki kółistej, wykazującej ortotropię naturalną i poddanej działaniu wszechstronnemu (tj. na dennice i pobocznicę powłoki) ciśnienia zewnętrznego o stałym natężeniu. Zakładając będziemy, że:

a) brzegi powłoki połączone są z podporami (wręgami) w sposób sztywny, uniemożliwiający obrót przekrojów brzegowych względem osi y (rys. 1);



Rys. 1



Rys. 2

b) punkty przekrojów brzegowych nie mogą się przemieszczać w kierunku promieniowym (przypadek gdy punkty przekrojów brzegowych mogą przemieszczać się w kierunkach promieniowych na odległość skończoną został rozpatrzony w pracy autora [11]);

c) brzegi powłoki mogą przemieszczać się w kierunku równoległym do tworzących nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki;

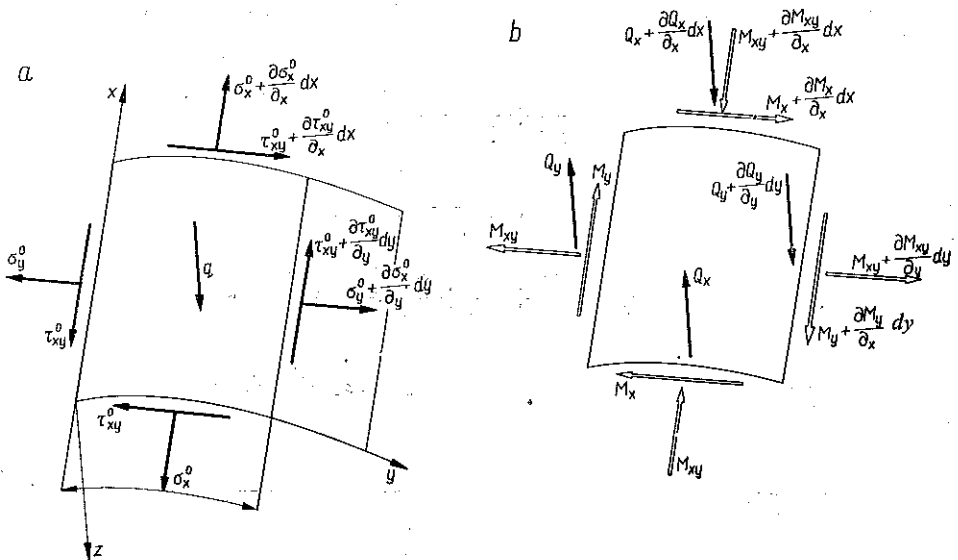
d) przed przyłożeniem obciążenia powierzchnia środkowa powłoki posiada kształt geometrycznego walca kołowego.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

x, y, z osie ortogonalnego układu współrzędnych krzywoliniowych, zorientowane jak na rys. 2,

$R = \text{const}$ promień krzywizny nieodkształconej powierzchni środkowej,

- L długość powłoki,
- $h = \text{const}$ grubość powłoki,
- $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ składowe błonowego stanu naprężenia wg rys. 3a,
- $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ składowe błonowego stanu odkształcenia,
- u, v, w składowe odpowiednio względem osi x, y, z wektora przemieszczenia dowolnego punktu M powierzchni środkowej (rys. 1),
- M_x, M_y, M_{xy} momenty w przekrojach $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$ odniesione do jednostek długości mierzonych wzdłuż osi x i y (tzw. momenty przekrojowe), rys. 3b,
- Q_x, Q_y odpowiednie siły poprzeczne odniesione jak wyżej,
- $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ zmiany krzywizn oraz tzw. «krzywizna skręcania», wywołane odpowiednio momentami M_x, M_y, M_{xy} ,
- $q = \text{const}$ natężenie obciążenia zewnętrznego, normalnego do powierzchni środkowej oraz dennej powłoki,
- p «zredukowane ciśnienie zewnętrzne» o kierunku równoległym do tworzących nieodkształconej powierzchni środkowej, równomiernie rozłożone na przekrojach brzegowych $x = 0$ i $x = L$.



Rys. 3

Niech będzie dana zamknięta powłoka walcowa kolista (której brzegi spełniają założenia a), b) i c), wykazująca ortotropię naturalną i poddana działaniu wszechstronnego zewnętrznego ciśnienia hydrostatycznego o stałym natężeniu q .

Zakładając będziemy, że:

1) materiał powłoki jest ortotropowy, przy czym główne kierunki sprężystości pokrywają się z liniami głównymi krzywizn nieodkształconej powierzchni środkowej (tj. z kierunkiem tworzącej i łuku przekroju poprzecznego),

2) materiał powłoki jest jednorodny wzdłuż grubości,

3) powłoka jest cienkościenna, tj. taka, której grubość h jest mała w porównaniu z promieniem krzywizny R . W praktyce można powłokę uznać za cienkościenną, gdy $h/R < 1/30$.

4) odkształcenia powłoki po utracie stateczności są sprężyste (tzn. problem jest fizycznie liniowy).

U podstaw przybliżonej, nieliniowej teorii małowyniosłych powłok cienkościennych, którą będziemy w niniejszej pracy stosować, leżą, jak wiadomo [12], następujące hipotezy, upraszczające znacznie podstawowe związki i równania tej teorii:

a) element liniowy powłoki prostopadły do jej powierzchni środkowej przed odkształceniem pozostaje prosty i normalny do odkształconej powierzchni środkowej oraz nie zmienia swojej długości (hipoteza «prostych normalnych» Kirchhoffa);

b) składowa w wektora przemieszczenia (którą w dalszych rozważaniach nazywać będziemy «ugięciem») jest rzędu grubości powłoki, podczas gdy równocześnie pozostałe dwie składowe u i v są małe w porównaniu z w (hipoteza Donnella [13]).

Na podstawie hipotezy b) składowe stanu odkształcenia $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ powierzchni środkowej związane są ze składowymi u, v, w wektora przemieszczenia następującymi związkami [12]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R}, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić przez podstawienie, że $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ i γ_{xy}^0 nie są od siebie niezależne, lecz spełniają następujące równanie:

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

zwane równaniem zwartości wewnętrznej (nierozdzielności).

Własności sprężyste jednorodnej wzdłuż grubości, ortotropowej powłoki walcowej kolistej określone są pięcioma stałymi sprężystości: modułami Younga E_1 i E_2 oraz współczynnikami Poissona ν_1 i ν_2 odpowiednio w głównych kierunkach sprężystości, i modułem Kirchhoffa G .

Z wymienionych stałych tylko cztery są niezależne, gdyż zachodzi znany związek [12]:

$$(2.3) \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Ze względu na założenie 4, związki między składowymi σ_x , σ_y , τ_{xy} stanu naprężenia powierzchni środkowej powłoki oraz składowymi jej stanu odkształcenia określają równania Hooke'a:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x^0 - \nu_1 \sigma_y^0), \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{E_2} (\sigma_y^0 - \nu_2 \sigma_x^0), \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{1}{G} \tau_{xy}^0. \end{aligned}$$

Wprowadzając teraz funkcję naprężeń $\Phi(x, y)$ zdefiniowaną następująco:

$$(2.5) \quad \sigma_x^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^0 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

dla

$$(x, y) \in \Gamma \begin{cases} 0 \leq x \leq L, \\ 0 \leq y \leq 2\pi R \end{cases}$$

otrzymamy z równania (2.2) przy uwzględnieniu związków (2.4) następujące równanie różniczkowe:

$$(2.6) \quad \delta_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

gdzie

$$\delta_1 = \frac{1}{E_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{E_2}, \quad 2\delta_3 = \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}.$$

Równanie (2.6) zawiera dwie funkcje niewiadome $w(x, y)$ i $\Phi(x, y)$. Drugie równanie różniczkowe, które muszą spełniać te funkcje wyprowadza się z równań równowagi wewnętrznej elementu powłoki [12]. W metodzie energetycznej Ritz-Timoszenki, którą będziemy w niniejszej pracy stosować, równanie to nie jest wykorzystywane i dlatego rezygnujemy z jego przytoczenia.

3. Całkowita energia sprężysta powłoki

Powłokę cienkościenną nazywać będziemy «wiotką» (termin rosyjski: «gibkaja oboloczka»), jeżeli pod działaniem układu sił zewnętrznych powstaje w niej «mieszany» następujący stan naprężenia, przy czym

a) stan ten jest złożony po pierwsze ze stanu błonowego, określonego trójką naprężeń σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 , równomiernie rozłożonych wzdłuż grubości; stan ten określa się w teorii powłok często również trójką tzw. sił przekrojowych:

$$(3.1) \quad N_x^0 = \sigma_x^0 h, \quad N_y^0 = \sigma_y^0 h, \quad N_{xy}^0 = \tau_{xy}^0 h,$$

tj. sił wewnętrznych, odniesionych do jednostek długości mierzonych wzdłuż osi x, y ;

b) stan ten jest złożony, po drugie, ze stanu giętno-skrętnego, określonego naprężeniami $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ zmiennymi wzdłuż grubości. Ten ostatni stan naprężenia opisuje się w teorii powłok najczęściej trójką tzw. «momentów przekrojowych» M_x, M_y, M_{xy} , określonych w sposób następujący:

$$(3.2) \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau'_{xy} z dz.$$

Całkowita energia zmagazynowana w odkształconej sprężystości powłoki wynosi

$$(3.3) \quad \mathfrak{E} = U + V$$

gdzie U oznacza energię potencjalną odkształcenia sprężystego oraz V zmianę potencjału wszystkich rodzajów obciążeń działających na powłokę.

Z drugiej strony

$$(3.4) \quad U = U_b + U_g,$$

przy czym U_b jest energią odkształcenia sprężystego, wywołanego błonowym stanem naprężenia, zaś U_g energią odkształcenia sprężystego, wywołanego giętno-skrętnym stanem naprężenia. Ponadto

$$(3.5) \quad V = -W,$$

gdzie W jest algebraiczną sumą prac wszystkich rodzajów obciążeń działających na powłokę.

Jak wiadomo z teorii sprężystości, jednostkowa energia potencjalna odkształcenia sprężystego określona jest za pomocą wzoru

$$(3.6) \quad \bar{U} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

Ale wg hipotezy a), p. 2, mamy

$$\sigma_z = 0, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

więc dla powłoki cienkościenniej wzór (3.6) sprowadza się do postaci

$$(3.7) \quad \bar{U} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}).$$

Całkowita energia potencjalna odkształcenia sprężystego wyrazi się więc dla zamkniętej powłoki walcowej kolistej za pomocą wzoru

$$(3.8) \quad U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz.$$

Mamy więc

$$(3.9) \quad U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^0 \varepsilon_x^0 + \sigma_y^0 \varepsilon_y^0 + \tau_{xy}^0 \gamma_{xy}^0) dx dy dz,$$

albo wykonując całkowanie względem zmiennej z i uwzględniając (3.1) otrzymamy

$$(3.9') \quad U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (N_x^0 \varepsilon_x^0 + N_y^0 \varepsilon_y^0 + N_{xy}^0 \gamma_{xy}^0) dx dy.$$

Wprowadzając teraz do (3.9) funkcje (2.4) i uwzględniając (2.5) znajdziemy

$$(3.10) \quad U_b = \frac{h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ \delta_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + 2\delta_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \delta_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{G} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy.$$

Mamy dalej

$$(3.11) \quad U_g = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma'_x \varepsilon'_x + \sigma'_y \varepsilon'_y + \tau'_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy dz,$$

gdzie $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \gamma'_{xy}$ są składowymi giętno-skrętnego stanu odkształcenia, które określone są (analogicznie jak w teorii płyt) za pomocą wzorów

$$(3.12) \quad \varepsilon'_x = z \kappa_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon'_y = z \kappa_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma'_{xy} = z \kappa_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Według uogólnionego prawa Hooke'a

$$(3.13) \quad \sigma'_x = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon'_x + \nu_2 \varepsilon'_y) = -\frac{E_1 z}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma'_y = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon'_y + \nu_1 \varepsilon'_x) = -\frac{E_2 z}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau'_{xy} = G \gamma'_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Wprowadzając do (3.11) związki (3.12) i (3.13) znajdujemy

$$(3.14) \quad U_q = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4D_s \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy,$$

gdzie

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}$$

oznaczają odpowiednio sztywności zginania w głównych kierunkach sprężystości,

$$D_s = \frac{Gh^3}{12}$$

sztywność skręcania, przy czym

$$D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_s = D_2 \nu_1 + 2D_s.$$

4. Praca sił zewnętrznych

Przy nieliniowej analizie stateczności zamkniętej, ortotropowej powłoki walcowej kolistej, poddanej działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego o stałym natężeniu q za pomocą metody energetycznej Ritza-Timoszenki, zachodzi konieczność obliczenia pracy sił zewnętrznych przy utracie stateczności powłoki. Poniżej wyprowadzono wzory na tę pracę przy interesujących nas rodzajach obciążenia.

A. Praca zewnętrznego ciśnienia promieniowego. Niech q oznacza natężenie zewnętrznego ciśnienia promieniowego. Zakładając, że w procesie utraty stateczności $q = \text{const}$ obliczymy poszukiwaną pracę ze wzoru

$$(4.1) \quad W_q = -q \Delta v,$$

gdzie $\Delta v (< 0)$ oznacza zmianę objętości powłoki przy utracie jej stateczności. Mamy

$$(4.2) \quad \Delta v = v_k - v_0,$$

przy czym v_k oznacza objętość końcową, a v_0 objętość początkowa walca pełnego, którego pobocznica pokrywa się z powierzchnią środkową powłoki.

Mamy¹ wg rys. 4

$$V_0 = \frac{1}{2} R \int_0^L \int_0^{2\pi R} dx dy$$

¹ Na rysunku 4 przedstawiono ogólniejszy przypadek, gdy powierzchnia środkowa powłoki posiada «ugięcie wstępne» $w_0(x, y)$. W naszym przypadku $w_0(x, y) \equiv 0$.

oraz

$$dV_k = \frac{1}{2} (R - w) dx dy'.$$

Ale

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{R-w}{R}, \quad dy' = \frac{1}{R} (R-w) dy,$$

czyli

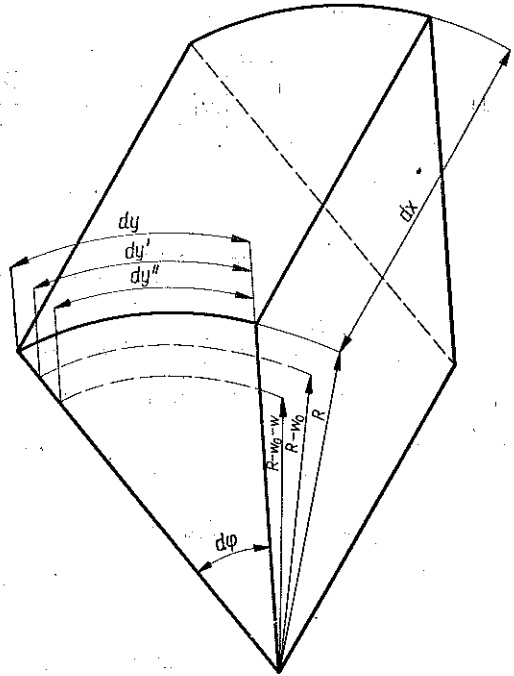
$$V_k = \frac{1}{2R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (R-w)^2 dx dy.$$

Zatem

$$\Delta V = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(w - \frac{w^2}{2R} \right) dx dy$$

i ostatecznie

$$(4.3) \quad W_q = q \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(w - \frac{w^2}{2R} \right) dx dy.$$



Rys. 4

Wzór (4.3) jest dokładniejszy od wzoru

$$(4.4) \quad W_q = q \int_0^L \int_0^{2\pi R} w dx dy$$

stosowanego we wszystkich pracach radzieckich [10 i 12], i jest równoważny wzorowi wprowadzonemu na bardzo zawilej drodze przez W.A.NASHA [8].

B. Praca ciśnienia osiowego. Niechaj p będzie natężeniem ciśnienia osiowego (tj. o kierunku równoległym do tworzących) równomiernie rozłożonego na przekrojach brzegowych powłoki. Zakładając znowu, że w procesie utraty stateczności $p = \text{const}$ obliczymy poszukiwaną pracę ze wzoru

$$(4.5) \quad W_p = ph \int_0^L \Delta L dy,$$

gdzie ΔL jest całkowitym skróceniem długości (czyli zbliżeniem brzegów) powłoki.

Mamy z drugiej strony

$$(4.6) \quad \Delta L = - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

Zatem

$$(4.7) \quad W_p = -ph \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy.$$

Z pierwszego z równań (2.1) otrzymujemy

$$(4.8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

co po uwzględnieniu (2.4) daje

$$(4.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Otrzymujemy więc w rezultacie

$$(4.10) \quad W_p = ph \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \right] dx dy.$$

5. Przybliżona postać funkcji ugięcia

Przyjmijmy następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności rozpatrywanej powłoki:

$$(5.1) \quad w(x, y) = h (\psi_1 \sin^2 ax \cos \beta y + \psi_2 \sin^2 ax),$$

gdzie $a = \pi/L$, $\beta = m/R$ (m oznacza tutaj liczbę pełnych fal obwodowych przy utracie stateczności), a ψ_1 i ψ_2 są to na razie nieokreślone bezwymiarowe parametry.

Pierwszy wyraz w nawiasie funkcji (5.1) odpowiada rozwiązaniu problemu liniowego i został zaproponowany przez W. A. NASHA w cytowanej już pracy [8], drugi zaś odzwierciedla dające się zaobserwować w badaniach eksperymentalnych [6] symetryczne przemieszczenie punktów powłoki w kierunku jej wklęsłości (tzw. «wgięcie» powłoki, po rosyjsku: «wmiatina»).

Funkcja (5.1) spełnia geometryczne warunki brzegowe przyjętego w p. 2 sposobu zamocowania brzegów, tj. dla $x = 0$ lub $x = L$ mamy

$$(5.2) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Spełnienie przez funkcję (5.1) statycznych warunków brzegowych nie jest w metodzie Ritza-Timoszenki konieczne [14].

6. Określenie funkcji naprężeń

Podstawiając funkcję (5.1) do równania (2.6) otrzymujemy dla wyznaczenia przybliżonej postaci funkcji naprężeń $\Phi(x, y)$ następujące równanie różniczkowe (już liniowe, o stałych współczynnikach i niejednorodne):

$$(6.1) \quad \delta_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = A_1 \cos 4ax + A_2 \cos 2ax + \\ + A_3 \cos 2\beta y + A_4 \cos \beta y + A_5 \cos 4ax \cos \beta y + A_6 \cos 2ax \cos 2\beta y + \\ + A_7 \cos 2ax \cos \beta y,$$

gdzie:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} A_1 &= -\frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \psi_1^2 h^2, & A_5 &= A_4, \\ A_2 &= \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \psi_1^2 h^2 - \frac{2\alpha^2}{R} \psi_2 h, & A_6 &= -A_1, \\ A_3 &= A_1, & A_7 &= \alpha^2 \beta^2 \psi_1 \psi_2 h^2 - \frac{2\alpha^2}{R} \psi_1 h, \\ A_4 &= -\frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \psi_1 \psi_2 h^2, \end{aligned}$$

Całką szczególną równania (6.1) odpowiadającą rozpatrywanemu przez nas zagadnieniu, ma postać

$$(6.3) \quad \Phi(x, y) = B_1 \cos 4ax + B_2 \cos 2ax + B_3 \cos 2\beta y + B_4 \cos \beta y + \\ + B_5 \cos 4ax \cos \beta y + B_6 \cos 2ax \cos 2\beta y + B_7 \cos 2ax \cos \beta y - \frac{1}{2} tx^2 - \frac{1}{2} py^2,$$

gdzie p i t są średnimi wartościami naprężeń normalnych w kierunkach, odpowiednio, tworzącej i obwodowym.

Zastąpimy obecnie ciśnienie zewnętrzne o natężeniu q , działające na dennice powłoki, równoważnym mu statycznie ciśnieniem (równym, jak łatwo wykazać, — p) równomiernie rozłożonym na przekroju brzegowym powłoki. Z równości parę na powierzchnię dennicy i przekroju brzegowego mamy $p \cdot 2\pi Rh = q \pi R^2$, stąd

$$(6.4) \quad p = qR/2h.$$

Średnie naprężenie obwodowe t jest na razie jeszcze nie znane. Stałe B_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) wyliczone z równania (6.1) metodą porównania współczynników przy identycznych funkcjach zmiennych x, y po obu stronach tego równania, określone są za pomocą wzorów:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} B_1 &= -\frac{\beta^2}{512\alpha^2 \delta_2} \psi_1^2 h^2, & B_2 &= \frac{\beta^2}{32\alpha^2 \delta_2} \psi_1^2 h^2 - \frac{1}{8R\alpha^2 \delta_2} \psi_2 h, \\ B_3 &= -\frac{\alpha^2}{32\beta^2 \delta_1} \psi_1^2 h^2, & B_4 &= -\frac{\alpha^2}{2\beta^2 \delta_1} \psi_1 \psi_2 h^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_5 &= -\frac{\alpha^2 \beta^2}{2(256 \alpha^4 \delta_2 + 32 \alpha^2 \beta^2 \delta_3 + \beta^4 \delta_1)} \psi_1 \psi_2 h^2, \\
 (6.5) \quad B_6 &= \frac{\alpha^2 \beta^2}{32(\alpha^4 \delta_2 + 2 \alpha^2 \beta^2 \delta_3 + \beta^4 \delta_1)} \psi_1^2 h^2, \\
 [c. d.] \quad B_7 &= \frac{\alpha^2 \beta^2}{16 \alpha^4 \delta_2 + 8 \alpha^2 \beta^2 \delta_3 + \beta^4 \delta_1} \psi_1 \psi_2 h^2 - \\
 &\quad - \frac{2 \alpha^2}{R(16 \alpha^4 \delta_2 + 8 \alpha^2 \beta^2 \delta_3 + \beta^4 \delta_1)} \psi_1 h.
 \end{aligned}$$

7. Obliczenie energii potencjalnej odkształcenia sprężystego

Podstawiając funkcję (6.3) do wzoru (3.10) i wykonując odpowiednie całkowania otrzymamy następujące wyrażenie dla energii potencjalnej odkształcenia sprężystego, wywołanego błonowym stanem naprężenia:

$$\begin{aligned}
 (7.1) \quad U_b &= \frac{\pi R L h}{4} [16 \alpha^4 \delta_2 (32 B_1^2 + 2 B_2^2 + 16 B_5^2 + B_6^2 + B_7^2) + \\
 &\quad + 8 \alpha^2 \beta^2 \delta_3 (4 B_5^2 + 4 B_6^2 + B_7^2) + \beta^4 \delta_1 (32 B_3^2 + 2 B_4^2 + B_5^2 + 16 B_6^2 + B_7^2) + \\
 &\quad + 4(\delta_1 p^2 - 2 \nu_1 \delta_1 p t + \delta_2 t^2)].
 \end{aligned}$$

Wprowadzając teraz funkcję (5.1) do wzoru (3.14) znajdziemy następujące wyrażenie na energię potencjalną odkształcenia sprężystego, wywołanego giętno-skrętnym stanem naprężenia:

$$(7.2) \quad U_g = \frac{\pi R L h}{4} [4 \alpha^4 D_1 (\psi_1^2 + 2 \psi_2^2) + \beta^2 D_2 (2 \nu_1 \alpha^2 + \frac{3}{4} \beta^2) \psi_1^2 + 4 D_s \alpha^2 \beta^2 \psi_1^2] h.$$

8. Obliczenie pracy sił zewnętrznych

Po podstawieniu funkcji (5.1) i (6.3) do wzorów (4.10) i (4.3) otrzymujemy odpowiednio

$$(8.1) \quad W_p = \frac{\pi R L h}{4} p [8 \delta_1 (p - \nu_1 t) + \alpha^2 (\psi_1^2 + 2 \psi_2^2) h^2],$$

$$(8.2) \quad W_q = \frac{\pi R L h}{4} q \left[4 \psi_2 - \frac{3}{4 R} (\psi_1^2 + 2 \psi_2^2) \right].$$

9. Określenie

Wprowadzimy obecnie następującą pomocniczą definicję: *wyrazem okręgowym* nazywać będziemy każdą funkcję $\varphi(x, y)$, określoną w obszarze płaskim: $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq 2\pi R$, dla której

$$(9.1) \quad \int_0^L \int_0^{2\pi R} \varphi(x, y) dx dy = 0.$$

W przeciwnym przypadku funkcję $\varphi(x, y)$ nazywać będziemy *wyrazem nieokresowym*.

W celu obliczenia średniego naprężenia obwodowego t wykorzystamy warunek «zamkniętości» powłoki, z którego wynika wprost, że funkcja $v(x, y)$ a więc i $\partial v/\partial y$ musi być okresową funkcją zmiennej y . Oznacza to dalej, że suma wyrazów nieokresowych w wyrażeniu $\partial v/\partial y$ musi być równa zeru.

Z drugiego z równań (2.1) mamy

$$(9.2) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R},$$

z równania (2.4) zaś przy uwzględnieniu (2.5) otrzymujemy

$$\varepsilon_y^0 = \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{E_2} (t - \nu_2 p) + \text{wyrazy okresowe.}$$

Zatem

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\delta_2 (t - \nu_2 p) - \frac{3\beta^2}{32} \psi_1^2 h^2 + \frac{1}{2R} \psi_2 h + \text{wyrazy okresowe.}$$

Musi więc być

$$\frac{1}{2R} \psi_2 h - \frac{3\beta^2}{32} \psi_1^2 h^2 - \delta_2 (t - \nu_2 p) = 0$$

stąd

$$(9.3) \quad t = \nu_2 p + \frac{1}{2R\delta_2} \psi_2 h - \frac{3\beta^2}{32\delta_2} \psi_1^2 h^2.$$

Widzimy więc, że w przypadku, gdy punkty przekrojów brzegowych powłoki nie mogą przemieszczać się w kierunku promieniowym, średnia wartość naprężenia obwodowego t nie jest (dla ustalonej wartości q) stała i równa qR/h (jak to otrzymano w pracy autora [11]), lecz okazuje się funkcją zmiennych ψ_1 i ψ_2 . W konsekwencji tego przyjęcie w przypadku, gdy dla $x=0$ lub $x=L$ mamy $w=0$, dla t wartości qR/h (jak to ma miejsce w niemal wszystkich pracach dotyczących rozpatrywanego zagadnienia; np. [14]) jest, zdaniem autora, błędne.

Podstawiając teraz do wzoru (8.1) wyrażenie (9.3) otrzymamy

$$(9.4) \quad W_p = \frac{\pi RLh}{4} p \left\{ 8\delta_1 (1 - \nu_1 \nu_2) p + \left[a^2 (\psi_1^2 + 2\psi_2^2) h^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - \nu_2 \left(\frac{4}{R} \psi_2 h - \frac{3\beta^2}{4} \psi_1^2 h^2 \right) \right] \right\}.$$

całkowiita praca sił zewnętrznych wyrazi się w tym przypadku za pomocą wzoru

$$(9.5) \quad W = \frac{\pi RLh}{4} \left\{ 2\delta_1 (1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{qR}{h} \right)^2 + \left(\frac{qR}{h} \right) \left[\left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{3}{8} \nu_2 \beta^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{4R^2} \right) \psi_1^2 h^2 + \left(a^2 - \frac{3}{2R^2} \right) \psi_2^2 h^2 + \frac{2}{R} (2 - \nu_2) \psi_2 h \right] \right\}.$$

Wreszcie energia potencjalna odkształcenia sprężystego, wywołanego błonowym stanem naprężenia określona jest obecnie za pomocą wzoru

$$(9.6) \quad U_b = \frac{\pi RLh}{4} \left[16\alpha^4 \delta_2 (32B_1^2 + B_2^2 + 16B_5^2 + B_6^2 + B_7^2) + \right. \\ \left. + 8\alpha^2 \beta^2 \delta_3 (4B_3^2 + 4B_6^2 + B_7^2) + \beta^4 \delta_1 (32B_3^2 + 2B_4^2 + \right. \\ \left. + B_5^2 + 16B_6^2 + B_7^2) + \delta_1 (1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{qR}{h} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \delta_2 \psi_2^2 h^2 + \right. \\ \left. + \frac{g\beta^4}{8 \cdot 32 \delta_2} \psi_1^4 h^4 - \frac{3\beta^2}{8R\delta_2} \psi_1^2 \psi_2 h^3 \right].$$

Podstawiając funkcje (9.6), (9.5) oraz (7.2) do wzoru

$$\vartheta = U_b + U_g - W$$

otrzymamy następujące wyrażenie na całkowitą energię sprężystą powłoki w rozpatrywanym przez nas przypadku obciążenia:

$$(9.7) \quad \vartheta = \frac{\pi RLh}{4} \left\{ 16\alpha^4 \delta_2 (32B_1^2 + B_2^2 + 16B_5^2 + B_6^2 + B_7^2) + \right. \\ \left. + 8\alpha^2 \beta^2 \delta_3 (4B_3^2 + 4B_6^2 + B_7^2) + \beta^4 \delta_1 (32B_3^2 + 2B_4^2 + \right. \\ \left. + B_5^2 + 16B_6^2 + B_7^2) + [4\alpha^4 D_1 (\psi_1^2 + 2\psi_2^2) + \right. \\ \left. + \beta^2 D_2 \left(2\nu_1 \alpha^2 + \frac{3}{4} \beta^2 \right) \psi_1^2 + 4\alpha^2 \beta^2 D_s \psi_1^2 \right] h + \\ \left. + \frac{1}{R^2} \delta_2 \psi_2^2 h^2 + \frac{9\beta^4}{8 \cdot 32 \delta_2} \psi_1^4 h^4 - \frac{3\beta^2}{8R\delta_2} \psi_1^2 \psi_2 h^3 + \right. \\ \left. - \delta_1 (1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{qR}{h} \right)^2 - \left(\frac{qR}{h} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{3}{8} \nu_2 \beta^2 - \frac{3}{4R^2} \right) \psi_1^2 h^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\alpha^2 - \frac{3}{2R^2} \right) \psi_2^2 h^2 + \frac{2}{R} (2 - \nu_2) \psi_2 h \right] \right\}.$$

10. Bezwymiarowy parametr całkowitej energii sprężystej powłoki

Wprowadzimy teraz następujące bezwymiarowe parametry:

parametr całkowitej energii sprężystej powłoki,

$$\vartheta = \frac{4gR}{\sqrt{E_1 E_2} \pi h^3 L};$$

parametr liczby pełnych fal obwodowych

$$\theta = \frac{m^2 h}{R};$$

parametr charakteryzujący kształt powstających fal przy utracie stateczności

$$\eta = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \left(\frac{\pi R}{mL} \right)^2;$$

parametr ciśnienia hydrostatycznego

$$\bar{q} = \frac{q}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{R}{h} \right)^2$$

oraz parametry sprężystości

$$A = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}} - \sqrt{2\nu_1 \nu_2},$$

$$B = \frac{4G}{\sqrt{E_1 E_2}} (1 - \nu_1 \nu_2) + 2\sqrt{\nu_1 \nu_2},$$

$$\vartheta = \frac{1}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}.$$

Wówczas bezwymiarowy parametr całkowitej energii sprężystej wyrazi się w rozpatrywanym przez nas przypadku obciążenia powłoki następująco:

$$(10.1) \quad \bar{\Xi} = C_1 \psi_1^4 + C_2 \psi_1^2 \psi_2^2 - C_3 \psi_1^2 \psi_2 + C_4 \psi_1^2 + \\ + C_5 \psi_2^2 - \frac{1}{\omega} (1 - \nu_1 \nu_2) \bar{q}^2 - (C_6 \psi_1^2 + C_7 \psi_2^2 + C_8 \psi_2) \bar{q},$$

gdzie

$$C_1 = \frac{\eta \theta^2}{64} \left(2\eta\omega + \frac{35}{8} \frac{1}{\eta\omega} + \frac{1}{\eta\omega + A + \frac{1}{\eta\omega}} \right),$$

$$C_2 = \frac{\eta \theta^2}{64} \left(32\eta\omega + \frac{1}{16\eta\omega + A + \frac{1}{16\eta\omega}} + \frac{16}{4\eta\omega + A + \frac{1}{4\eta\omega}} \right),$$

$$C_3 = \eta \theta \left(\frac{5}{8} \frac{1}{\eta\omega} + \frac{1}{4\eta\omega + A + \frac{1}{4\eta\omega}} \right),$$

$$(10.2) \quad C_4 = \eta \theta^2 \left[\frac{1}{\theta^2 \left(4\eta\omega + A + \frac{1}{4\eta\omega} \right)} + \vartheta \left(4\eta\omega + B + \frac{3}{4} \frac{1}{\eta\omega} \right) \right],$$

$$C_5 = \eta \theta \left(\frac{3}{2\theta} \frac{1}{\eta\omega} + 8\vartheta\theta\eta\omega \right),$$

$$C_6 = \frac{1}{2} \eta \theta + \frac{3}{8} \nu_2 \theta - \frac{3}{4} \varphi,$$

$$C_7 = \eta \theta - \frac{3}{2} \varphi, \quad C_8 = 2(2 - \nu_2),$$

przy czym $\varphi = h/R$.

11. Rozwiązanie zagadnienia nieliniowego

Podstawione zagadnienie rozwiążemy metodą energetyczną Ritza-Timoszenki. W tym celu napiszemy warunek konieczny istnienia minimum całkowitej energii sprężystej (10.1) rozpatrywanej powłoki w odniesieniu do parametrów ψ_1 i ψ_2 [12]:

$$(11.1) \quad \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \psi_2} = 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób następujący układ dwóch nieliniowych równań algebraicznych z dwiema niewiadomymi ψ_1 i ψ_2 oraz parametrem \bar{q} :

$$(11.2) \quad \begin{cases} a_1 \psi_1^2 + a_2 \psi_2^2 - 2a_3 \psi_2 + a_4 - a_6 \bar{q} = 0, \\ a_2 \psi_1^2 \psi_2 - a_3 \psi_1^2 + a_5 \psi_2 - (a_7 \psi_2 + a_8) \bar{q} = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(11.3) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{\theta}{32} \left(2\eta\omega + \frac{35}{8} \frac{1}{\eta\omega} + \frac{1}{\eta\omega + A + \frac{1}{\eta\omega}} \right), \\ a_2 &= \frac{\theta}{64} \left(32\eta\omega + \frac{1}{16\eta\omega + A + \frac{1}{16\eta\omega}} + \frac{16}{4\eta\omega + A + \frac{1}{4\eta\omega}} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8} \frac{1}{\eta\omega} + \frac{1}{4\eta\omega + A + \frac{1}{4\eta\omega}} \right), \\ a_4 &= \frac{1}{\theta \left(4\eta\omega + A + \frac{1}{4\eta\omega} \right)} + \vartheta\theta \left(4\eta\omega + B + \frac{3}{4} \frac{1}{\eta\omega} \right), \\ a_5 &= \frac{3}{2\theta} \frac{1}{\eta\omega} + 8\vartheta\theta\eta\omega, \quad a_6 = \frac{1}{2} + \frac{3\nu_2}{8\eta} - \frac{3}{4} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^2, \\ a_7 &= 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^2, \quad a_8 = \frac{2(2-\nu)}{\eta\theta}, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\lambda} = L/R$.

Układ równań (11.2) określa dowolne, możliwe postacie stanów równowagi rozpatrywanej powłoki. Nas interesować będą obecnie te ponadkrytyczne (tj. po utracie stateczności) stany równowagi (czyli dla $\psi_1 \neq 0$ i $\psi_2 > 0$), które odpowiadają minimalnej wielkości ciśnienia \bar{q} . Przyjmiemy następującą definicję: dolnym ciśnieniem krytycznym \bar{q}_a nazywać będziemy tę najmniejszą wielkość bezwymiarowego parametru ciśnienia \bar{q} , przy której możliwy jest ponadkrytyczny stan równowagi rozpatrywanej powłoki przy skończonych ugięciach sprężystych.

Jak widać z powyższej definicji poszukiwanie \bar{q}_a prowadzi do rozwiązania geometrycznie nieliniowego zagadnienia stateczności analizowanej powłoki, a konkretnie do rozwiązania układu równań (11.2) przy założeniu $\psi_1 \neq 0$ oraz $\psi_2 > 0$.

Proponujemy następującą rzadko stosowaną w pracach dotyczących podobnego zagadnienia metodę rozwiązywania układu równań (11.2), eliminując konieczność rozwiązywania ciągu równań trzeciego stopnia.

Z pierwszego z równań (11.2) otrzymujemy

$$(11.4) \quad \psi_1^2 = \frac{a_6 \bar{q} - a_2 \psi_2^2 + 2a_3 \psi_2 - a_4}{a_1}.$$

Podstawiając (11.4) do drugiego z równań (11.2) znajdziemy po prostych przekształceniach

$$(11.5) \quad \bar{q} = \frac{a\psi_2^3 - b\psi_2^2 + c\psi_2 - d}{e\psi_2 - f},$$

gdzie

$$(11.6) \quad \begin{aligned} a &= a_2^2, & b &= 3a_2 a_3, & c &= a_2 a_4 + 2a_3^2 - a_1 a_5, \\ d &= a_3 a_4, & e &= a_2 a_6 - a_1 a_7, & f &= a_3 a_6 + a_1 a_8. \end{aligned}$$

Dalszy tok postępowania zmierzającego do określenia dolnego ciśnienia krytycznego \bar{q}_a jest następujący: 1) na drodze eksperymentalnej określamy parametry sprężystości $E_1 E_2, \nu_1$ i G , 2) przyjmujemy parametry geometryczne h, R, L powłoki, 3) dla przyjętego ciągu rosnącego $\{m_n\} = m_1, m_2, \dots, m_n$ ($m_1 \geq 2$) liczb pełnych fali obwodowych obliczamy ciągi współczynników $\{a_{2n}\}, \{a_{3n}\}, \dots, \{a_{8n}\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \dots, \{f_n\}$ ze wzorów (11.3) i (11.6); 4) w układzie współrzędnych ψ_2, \bar{q} wykreślamy w oparciu o (11.5) rodzinę krzywych

$$(11.7) \quad \bar{q}_i = f(\psi_2, m_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

a następnie konstruujemy (o ile to jest możliwe) obwiednię tej rodziny. Rzędna najniższego punktu tej obwiedni jest poszukiwanym dolnym ciśnieniem krytycznym dla danych parametrów geometrycznych i sprężystych powłoki:

$$(11.8) \quad \bar{q}_a = \min(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n).$$

Opisaną powyżej metodą znajdujemy wielkość dolnego ciśnienia krytycznego w przybliżeniu pierwszym.

Aby znaleźć \bar{q}_a w przybliżeniu drugim należałoby jeszcze dodatkowo wykreślić drugą rodzinę krzywych:

$$(11.9) \quad \bar{q}_i^* = f_1(\psi_2, m_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

otrzymaną z warunku

$$(11.10) \quad \frac{\partial \bar{\exists}}{\partial m} = 0.$$

Rzędna najniższego punktu krzywej będącej miejscem geometrycznym punktów przecięcia krzywych (11.7) i (11.9) (odpowiadających jednakowym wartościom m_i), określi wielkość dolnego ciśnienia krytycznego w «przybliżeniu drugim».

12. Rozwiązanie zagadnienia liniowego

Jeżeli brzegi rozpatrywanej powłoki nie mogą przemieszczać się w kierunku promieniowym (por. założenie b , p. 2), to założenie (przyjęte w pracy autora [11]), że stan naprężenia w powłoce przed utratą stateczności jest bionowy, nie jest spełnione. Przyłożenie obciążenia q wywołuje bowiem w stanie podkrytycznym od razu mieszany stan naprężenia (por. p. 3). W konsekwencji tego powierzchnia środkowa powłoki przed utratą stateczności nie posiada już kształtu geometrycznego walca kołowego, lecz pojawiają się skończone symetryczne wgłęcia w kierunku jej wklęsłości, które opiszemy przybliżoną funkcją

$$(12.1) \quad w_p(x, y) = h\psi_2 \sin^2 ax,$$

przy czym ψ_2 jest wielkością skończoną. Dopiero w momencie utraty stateczności przyjmujemy, że kształt powierzchni środkowej powłoki opisany jest przybliżoną funkcją

$$(12.2) \quad w(x, y) = h\psi_1 \sin^2 ax \cos \beta y + w_p(x, y)$$

z tym zastrzeżeniem, że w rozpatrywanym przez nas obecnie ujęciu liniowym należy założyć, iż ψ_1 jest wielkością nieskończenie małą. W związku z tym należy w wyrażeniu (10.1) na bezwymiarowy parametr $\bar{\epsilon}$ całkowitej energii sprężystej powłoki odrzucić wyrazy zawierające parametr ψ_1 w potęgde wyższej niż 2, a następnie minimalizować $\bar{\epsilon}$ względem parametrów ψ_1 i ψ_2 . Można również postąpić prościej, mianowicie przyjąć od razu w równaniach (11.2) $\psi_1 = 0$.

Otrzymujemy wtedy:

$$(12.3) \quad a_2 \psi_2^2 - 2a_3 \psi_2 + a_4 - a_6 \bar{q} = 0,$$

$$(12.4) \quad a_5 \psi_2 - (a_7 \psi_2 + a_8) \bar{q} = 0.$$

Układ równań jednoczesnych (12.3) i (12.4) z niewiadomymi ψ_2, q można rozwiązać dwiema metodami: 1) na drodze wykresnej, 2) na drodze analitycznej.

W pierwszym przypadku z równań (12.3) i (12.4) otrzymujemy kolejno

$$(12.5) \quad \bar{q} = \frac{a_2 \psi_2^2 - 2a_3 \psi_2 + a_4}{a_6},$$

$$(12.6) \quad \bar{q} = \frac{a_5 \psi_2}{a_7 \psi_2 + a_8}.$$

W układzie współrzędnych ψ_2, \bar{q} wykreślamy (dla ustalonej wartości parametru m) krzywe (12.5) i (12.6). Rzędne punktów przecięcia tych krzywych określają w ogólnym przypadku trójkę pierwiastków $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$.

Przyjmujemy następującą definicję: górnym ciśnieniem krytycznym \bar{q}_0 nazywać będziemy tę najmniejszą wielkość bezwymiarowego parametru ciśnienia zewnętrznego \bar{q} , przy której możliwe są jednocześnie dwie postacie równowagi sprężystej rozpatrywanej powłoki: a) pierwotna — opisana funkcją (12.1) i b) druga, nieskoń-

czenie bliska pierwotnej, ale opisana już funkcją (12.2). W świetle powyższej definicji interesować nas będzie tylko

$$(12.7) \quad \bar{q}^{(i)} = \min(\bar{q}_1^{(i)}, \bar{q}_2^{(i)}, \bar{q}_3^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Postępując jak wyżej dla różnych $m_i \geq 2$ znajdziemy

$$\bar{q}_g = \min(\bar{q}^{(1)}, \bar{q}^{(2)}, \dots, \bar{q}^{(n)})$$

(wchodzą oczywiście w rachubę jedynie pierwiastki $\bar{q}_k^{(i)} > 0$, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots, n$).

Ze względu na małą dokładność autor zrezygnował z tej metody.

W drugim przypadku z równania (12.4) znajdujemy

$$(12.8) \quad \bar{q} = \frac{a_5 \psi_2}{a_7 \psi_2 + a_8}.$$

Podstawiając (12.8) do równania (12.3) otrzymamy równanie trzeciego stopnia postaci

$$(12.9) \quad d_1 \psi_2^3 + d_2 \psi_2^2 + d_3 \psi_2 + d_4 = 0,$$

gdzie

$$(12.10) \quad \begin{aligned} d_1 &= a_2 a_7, & d_2 &= a_2 a_8 - 2a_3 a_7, \\ d_3 &= a_4 a_7 - 2a_3 a_8 - a_5 a_6, & d_4 &= a_4 a_8. \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie (12.10) (w obliczonych w p. 14 przykładach autor posługiwał się bardzo dokładnymi tablicami amerykańskimi [17]) znajdujemy odpowiednie jego pierwiastki $\psi_2^{(1)}$, $\psi_2^{(2)}$ i $\psi_2^{(3)}$. W większości przypadków wszystkie trzy pierwiastki są rzeczywiste, przy czym dwa z nich są dodatnie, a jeden ujemny.

Niech np.:

$$\psi_2^{(1)} > \psi_2^{(2)} > 0, \quad \psi_2^{(3)} < 0.$$

Pierwiastek $\psi_2^{(3)}$ można odrzucić od razu, gdyż wobec założonego wgięcia powierzchni środkowej powłoki w kierunku wklęsłości, musi być $\psi_2 > 0$. Pierwiastkowi $\psi_2^{(1)}$ odpowiada większa wartość naprężenia krytycznego obliczona z równania (12.8). Pozostaje więc pierwiastek $\psi_2^{(2)}$, któremu odpowiada najmniejsza wartość bezwymiarowego parametru ciśnienia krytycznego (dla przyjętej wartości m).

Tok postępowania, zmierzającego do określenia bezwymiarowego parametru górnego ciśnienia krytycznego \bar{q}_g można opisać następującym schematem:

a) na drodze eksperymentalnej określamy dla danego materiału powłoki parametry sprężystości E_1, E_2, ν_1 i G ,

b) przyjmujemy parametry geometryczne h, L i R powłoki,

c) dla przyjętego ciągu rosnącego $\{m_n\} = m_1, m_2, \dots, m_n$ ($m_1 \geq 2$) obliczamy ciągi współczynników $\{d_{1n}\}$, $\{d_{2n}\}$, ..., $\{d_{4n}\}$ ze wzorów (12.10),

d) rozwiązujemy ciąg równań sześciennych (12.9) znajdując ciąg odpowiednich jego pierwiastków $\{\psi_{2n}^{(2)}\}$,

e) ze wzoru (12.8) obliczamy ciąg bezwymiarowych parametrów ciśnienia krytycznego $\{\bar{q}_n\}$,

f) szukamy bezwymiarowy parametr górnego ciśnienia krytycznego

$$\bar{q}_g = \min(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n).$$

We wszystkich znanych autorowi, a cytowanych już pracach [2 i 3] dotyczących rozpatrywanego problemu przyjmowano (mimo założenia b), p. 2), że w momencie utraty stateczności ψ_1 i ψ_2 są nieskończenie małe, co jest poważnym błędem.

Przedstawione wyżej ujęcie liniowe rozpatrywanego zagadnienia jest zdaniem autora poprawne.

13. Powłoka izotropowa

Dla szczególnego przypadku powłoki izotropowej mamy

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu,$$

zatem

$$A = B = 2, \quad \omega = 1, \quad \vartheta = \frac{1}{12(1-\nu^2)}, \quad \bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2.$$

Wprowadzając jeszcze bezwymiarowy parametr geometryczny powłoki

$$(13.1) \quad \varrho = \frac{Rh}{L^2}$$

doprowadzimy wzory (11.3) do postaci:

$$(13.2) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{\pi^2}{32} \left[2 + \frac{35}{8\eta^2} + \frac{1}{(\eta+1)^2} \right] \varrho, \\ a_2 &= \frac{\pi^2}{2} \left[2 + \frac{1}{(16\eta+1)^2} + \frac{4}{(4\eta+1)^2} \right] \varrho, \\ a_3 &= \frac{\eta}{2} \left[\frac{5}{8\eta^2} + \frac{4}{(4\eta+1)^2} \right], \\ a_4 &= \frac{1}{\pi^2 \varrho} \frac{4\eta^2}{(4\eta+1)^2} + \nu\pi^2 \left(4 + \frac{2}{\eta} + \frac{3}{4\eta^2} \right) \varrho, \\ a_5 &= \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{3}{2(\pi^2 \varrho)^2} + 16\nu \right] \varrho, \quad a_6 = \frac{1}{2} + \frac{3\nu}{8\eta} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^2, \\ a_7 &= 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^2, \quad a_8 = \frac{2(2-\nu)}{\pi^2 \varrho}. \end{aligned}$$

14. Przykład liczbowy

A. Ujęcie liniowe. W celu znalezienia konkretnych wartości⁸⁾ bezwymiarowego parametru górnego ciśnienia krytycznego obliczono konkretny przykład liczbowy dla trzech typów powłok: a) bardzo krótkiej, b) krótkiej i c) średniej długości. We wszystkich trzech przypadkach przyjęto $\nu = 0,3$, parametry zaś geometryczne powłoki zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Typ powłoki	R/h	L/R	ϱ
Bardzo krótka	180	1,0	$\frac{1}{180}$
Krótką		3,0	$\frac{1}{1620}$
Średniej długości		6,0	$\frac{1}{6480}$

Wielkości górnych ciśnień krytycznych obliczono na podstawie schematu podanego w p. 12.

W celach porównawczych obliczono również wielkości górnych ciśnień krytycznych \bar{q}^* dla powłok o tych samych parametrach geometrycznych i sprężystych, lecz o brzegach wolno podpartych.

Za podstawę przyjęto w tym przypadku wzór

$$(14.1) \quad \bar{q}^* = \frac{1}{\pi^2 \varrho} \frac{\eta^2}{(\eta+1)^2} + \vartheta \pi^2 \frac{(\eta+1)^2}{\eta^2} \varrho, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\eta} - \left(\frac{3}{\pi}\right)^2,$$

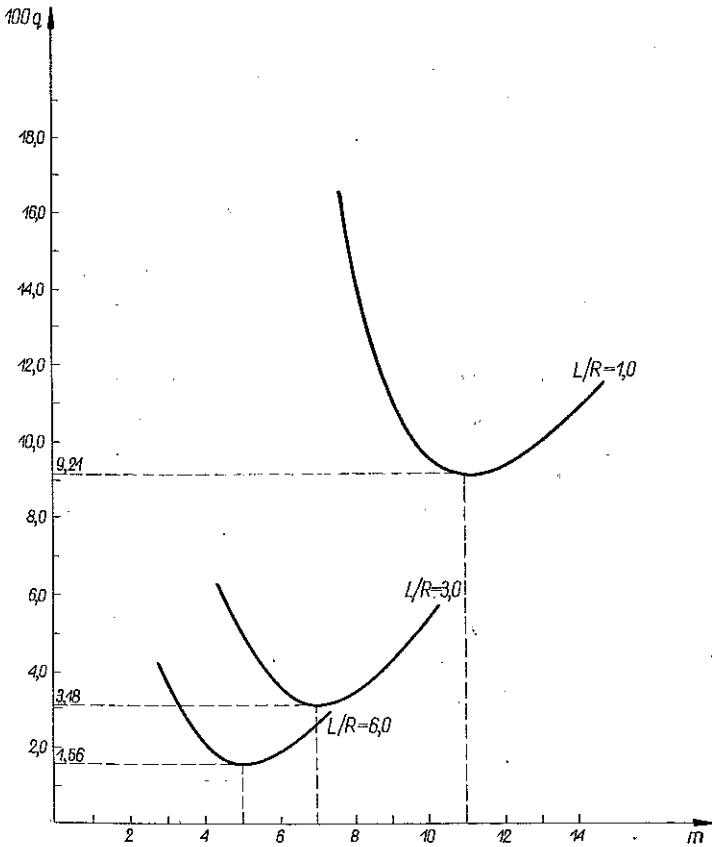
wyprowadzony w cytowanej już pracy [8], który jest praktycznie równoważny wzorowi R. Misesa [1]. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 2, w której m i m^* oznaczają liczby pełnych fal przy utracie stateczności odpowiednio dla powłoki o brzegach utwierdzonych i wolno podpartych.

Tablica. $R/h = 180, \nu = 0,3$

L/R	$100 \bar{q}_g$	m	$100 \bar{q}_g^*$	m^*	\bar{q}_g/q_g^*
1,0	9,208	11	7,306	10	1,260
3,0	3,177	7	2,412	6	1,317
6,0	1,563	5	1,228	4	1,294

Na rysunku 5 przedstawione są wykresy funkcji $\bar{q} = \bar{q}(m)$ dla rozpatrywanych trzech typów powłok.

B. Ujęcie nieliniowe. Przy obliczaniu konkretnej wartości bezwymiarowego parametru dolnego ciśnienia krytycznego \bar{q}_d ograniczono się (ze względu na duże trudności natury rachunkowej) jedynie do powłoki bardzo krótkiej, przy której



Rys. 5

wpływ sposobu zamocowania brzegów zaznacza się wyraźnie. Przyjęto więc za podstawę obliczeń dane

$$\nu = 0,3, \quad \frac{R}{h} = 180, \quad \frac{L}{R} = 1,0.$$

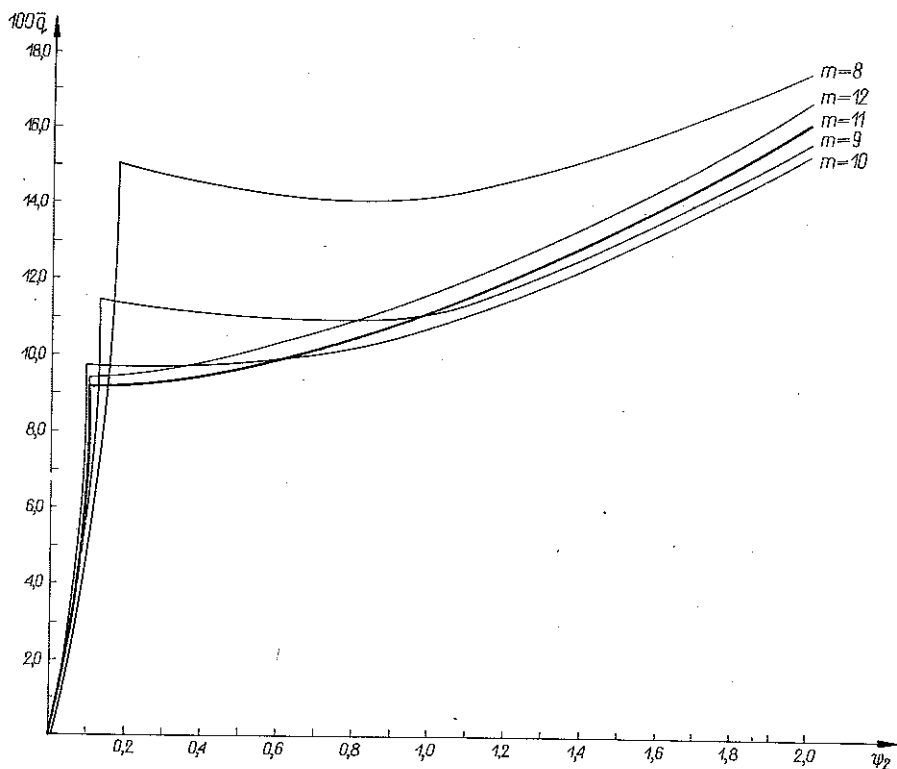
Na rysunku 6 przedstawiono rodzinę krzywych (11.7), przy wykreślaniu której dobierano $\psi_2 > \psi_{2l}$, gdzie ψ_{2l} jest wartością ψ_2 , dla której $\psi_1 = 0$ [obliczona ze wzoru (11.3), dla odpowiednich wartości m]. Jak widać z rys. 6 funkcje (11.7) z wyjątkiem $m = 8, 9$ są rosnące, nie wykazując minimum. Oznacza to, że dla rozpatrywanego przykładu $\bar{q}_d = \bar{q}_g = 9,208$.

Na rysunku 7 przedstawiony jest wykres funkcji

$$\psi_1 = \psi_1(\psi_2) = \sqrt{\frac{a_6 \bar{q} - a_2 \psi_2^2 + 2a_3 \psi_2 - a_4}{a_1}}$$

dla $m = 11$.

Autor obliczył również wielkość dolnego ciśnienia krytycznego \bar{q}_d dla powłoki o tych samych parametrach geometrycznych i sprężystych, lecz o brzegach wolno



Rys. 6

podpartych. Oparto się na równaniach wyprowadzonych przez W. A. NASHA w cytowanej już pracy [2].

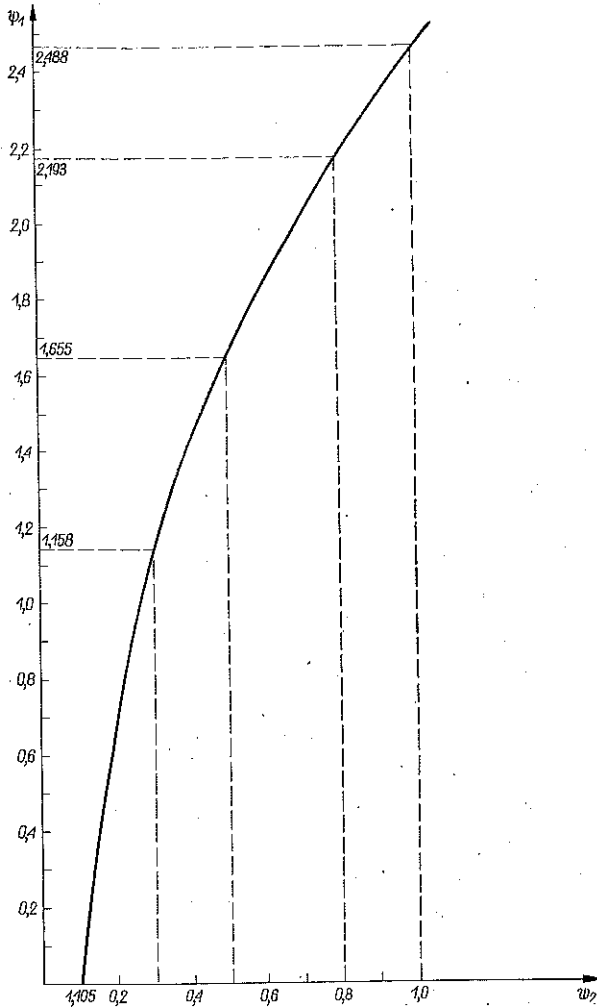
Otrzymano $100\bar{q}_d^* = 5,786$, zatem $\bar{q}_d^*/\bar{q}_g^* = 0,792$.

15. Wnioski

Z obliczonego przykładu liczbowego można wyciągnąć następujące wnioski:

1. W przeciwieństwie do powłoki ściskanej równomiernie wzdłuż tworzących (por. [15]), gdzie utwierdzenie brzegów wywiera minimalny wpływ na wielkość górnego ciśnienia krytycznego, w przypadku izotropowej powłoki walcowej, poddanej działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego, utwierdzenie brzegów wywiera bardzo znaczny wpływ zwiększając wielkość górnego ciśnienia krytycznego (w porównaniu z powłoką o brzegach wolno podpartych) przeciętnie aż o $\sim 30\%$. Wynika stąd, że powłoka walcowa o brzegach utwierdzonych jest znacznie mniej narażona na utratę stateczności aniżeli powłoka o tych samych parametrach geometrycznych i sprężystych, lecz o brzegach wolno podpartych; z punktu więc widzenia «wytrzymałości» na wyoboczenie utwierdzenie brzegów jest korzystniejsze.

2. Liczba fal obwodowych powstających przy utracie stateczności jest w przypadku powłoki o brzegach utwierdzonych większa niż dla powłoki o brzegach wolno podpartych.



Rys. 7

3. Wzrost długości powłoki wywołuje zmniejszenie wielkości górnego ciśnienia krytycznego oraz liczby fal obwodowych przy utracie stateczności zarówno w przypadku powłoki o brzegach utwierdzonych jak i wolno podpartych.

4. W przypadku bardzo krótkiej powłoki o brzegach utwierdzonych dolne ciśnienie krytyczne jest równe górnemu, podczas gdy dla powłoki o tych samych parametrach geometrycznych i sprężystych, lecz o brzegach wolno podpartych wynosi ono tylko 79% wielkości ciśnienia górnego. Wynika to stąd, że dla bardzo krótkiej powłoki izotropowej o brzegach utwierdzonych «obszar niestateczności» (pod

którym rozumiemy przedział (\bar{q}_a, \bar{q}_g) nie istnieje. Stanowi to ceną wskazówkę dla konstruktora, który przy projektowaniu krótkich powłok walcowych o brzegach utwierdzonych, poddanych działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego «stałym» natężeniu, może określać «zapas» stateczności takiej powłoki w odniesieniu do górnego ciśnienia krytycznego.

16. Obraz utraty stateczności

Na podstawie podanego przykładu liczbowego można przedstawić następujący różniący się poważnie od prezentowanych w innych pracach [2 i 3] obraz utraty stateczności bardzo krótkiej, izotropowej powłoki walcowej kolistej o brzegach utwierdzonych, wszechstronnie ściskanej.

Niechaj ciśnienie \bar{q} wzrasta w sposób ciągły od wielkości początkowej $\bar{q} = 0$. W powłoce powstaje od razu mieszany stan naprężenia, który wywołuje symetryczne wgięcie powłoki w stronę jej wklęsłości, którego amplituda ψ_2 powiększa się w miarę wzrostu q . Dla wszystkich wartości $\bar{q} < \bar{q}_g$ powłoka znajduje się w równowadze trwałej. Oznacza to, że przy krótkotrwałym działaniu pewnego czynnika zaburzającego (np. niewielkiego wzrostu Δq ciśnienia q) w powłoce obserwujemy dodatkowe wgięcie ΔW , które jednak zanika po ustaniu czynnika zaburzającego. Dopiero gdy $\bar{q} \geq \bar{q}_g$ krótkotrwałe działanie czynnika zaburzającego wywołuje «skokową» utratę stateczności. Powłoka «przeskakuje» do nowej postaci równowagi stałej, przy której wgięcie powłoki powiększa się, a równocześnie tworzą się fale w kierunku obwodowym (por. rys. 6 i 7). Dalszy niewielki wzrost q powoduje już znaczne ugięcia (rys. 7), których narastanie prowadzi do zniszczenia powłoki.

Uwaga końcowa

W p. 14 podaliśmy przykład liczbowy dla powłoki izotropowej o brzegach utwierdzonych. Autor zrezygnował z zamieszczenia przykładu liczbowego dla powłoki wykazującej ortotropię naturalną (np. błony fotograficznej, z której często wykonuje się modele powłok do eksperymentalnego badania ich stateczności). Obliczenie bowiem takiego przykładu wymagałoby jedynie przyjęcia konkretnych wartości parametrów geometrycznych i sprężystych, np. dla błony fotograficznej wg pracy [18],

$$E_1 = 30,1 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right], \quad E_2 = 22,6 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right], \quad \nu_2 = 0,23, \quad G = 9,06 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right],$$

i sprowadziłyby się tylko do numerycznych obliczeń, zresztą według schematu podanego dokładnie w p. 11. Nie byłoby ponadto możliwości przeprowadzenia analizy porównawczej z powłoką o tych samych parametrach geometrycznych i sprężystych (w cytowanej już pracy [10] ograniczono się również do obliczenia konkretnego przykładu dla powłoki izotropowej). Pozostałby jedynie przykład dla powłoki, wykazującej ortotropię konstrukcyjną, tj. wykonanej z materiału izotropowego, ale usztywnionej gęsto rozłożonymi sprężystymi żebrami podłużnymi i pierścieniowymi. W tym ostatnim przypadku stosowane w niniejszej pracy równania muszą ulec, jak to wykazał Tieriebuszko [16], poważnej korekcie.

Литература цитована в текście

1. R. MISES, *Der kritische Aussendruck für allseits belastete zylindrische Rohre*, Fest. zum 70 Geburtstag Von Prof. dr. Ar. Stodola, Zurich 1929.
2. W. A. NASH, *Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 4, 22 (1955).
3. Ф. С. Исанбаева, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии*, Изд. Казаньского Филиала АН СССР, 7, 1955.
4. J. KEMPNER, K. A. PANDALA, S. A. PATEL, J. CROUZET-PASCAL, *Postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 4, 24 (1959), 253-264.
5. E. WENK, R. C. SLANKARD, W. A. NASH, *Experimental analysis of the buckling of cylindrical shells subject to external hydrostatic pressure*, Proc. Soc. Exper. Stress Anal., 1, 12 (1954).
6. В. А. Нагаев, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при внешнем поперечном давлении*, Машиностроение, 6 (1958), 46-53.
7. А. С. Волимир, *О влиянии неправильностей на устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем давлении*, ДАН СССР, 2, 113 (1957).
8. W. A. NASH, *Buckling of thin cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 1, 19 (1954).
9. P. P. VIJLAARD, *Buckling stress of thin cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 21, 12 (1954).
10. О. Н. Ленько, *Об устойчивости цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми силами и внешним давлением*, Сборник Расчет пространственных конструкций, 5, Москва 1959.
11. Z. NOWAK, *Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej pod ciśnieniem hydrostatycznym*, Arch. Bud. Masz., (w druku).
12. А. С. Волимир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.
13. L. H. DONNEL, *A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending*, Trans. ASME, 56 (1934).
14. А. С. Волимир, *Устойчивость упругих систем*, Москва 1963.
15. С. В. Александровский, *Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах*, Расчет пространственных конструкций, 3 (1955).
16. О. И. Теребушко, *К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических, подкрепленных конструкций*, 6 (1962).
17. H. E. SALZER, C. H. RICHARDS, I. ARSHAM: *«Table for the solution of cubic equations»*, New York 1958.
18. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек*, Физ. Мат. Гид., Москва 1961.

Резюме

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В работе анализируется, в линейном и нелинейном представлении, устойчивость высокой, тонкостенной, замкнутой цилиндрической круговой оболочки, проявляющей натуральную ортогтропию, подверженной действию всестороннего наружного давления постоянного напряжения.

В отличие от других работ предполагается, что края оболочки защемлены и не имеют возможности передвигаться в радиальном направлении. Это последнее предположение требует иного линейного представления. Используя метод Ритца-Гимошенки определяется величина верхнего и нижнего критических давлений.

Решается конкретный числовой пример для изотропной оболочки и, проводится сравнительный анализ, полученных результатов с оболочкой, обладаемой теми же самыми геометрическими параметрами и параметрами упругости, но свободно опертыми краями.

S u m m a r y

STABILITY ANALYSIS OF A CLOSED ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL UNDER THE ACTION OF HYDRAULIC PRESSURE

The object of the paper is a linear and nonlinear stability analysis of a thin-walled, closed, circularly cylindrical shallow shell showing natural orthotropy and subjected to a constant pressure.

In contrast with other papers it is assumed that the edges of the shell are clamped and cannot be displaced radially. Making use of the Ritz-Timoshenko method the upper and lower critical pressure are determined.

The numerical example concerns an isotropic shell. A comparative analysis of results is given for the shell above and another shell, of the same geometric and elastic properties, but resting on simple supports.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
WYDZIAŁ MECHANICZNY
KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1964 r.
