

PRZYBLIŻONE OKREŚLANIE ODKSZTAŁCEŃ PŁYT I POWŁOK PLASTYCZNYCH
W OPARCIU O NIESTOWARZYSZONE PRAWO PŁYNIĘCIA

J. A. KÖNIG (WARSZAWA)

1. Sformułowanie problemu

Jedną z podstawowych zależności teorii ośrodka ciągłego (zarazem jedyną odróżniającą ośrodki od siebie) jest równanie stanu, tj. prawo wiążące tensory odkształcenia i naprężenia (oraz ew. ich pewne pochodne). Wraz z pozostałymi równaniami mechaniki pozwala ono określić przebieg zachodzących w ośrodku procesów mechanicznych.

Spośród materiałów niesprężystych materiał plastyczny wyróżnia fakt, że prawo stanu (zwane w tym przypadku prawem płynięcia) określa prędkość odkształcenia jedynie z dokładnością do nieujemnego skalarnego mnożnika:

$$(1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^P, \dots, \theta)}{\partial \sigma_{ij}};$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^P$ oznacza prędkość odkształceń plastycznych, g funkcję skalarną zwaną potencjałem plastycznym, θ temperaturę, natomiast naprężenia w stanie plastycznym muszą spełniać oprócz równań równowagi i warunków brzegowych jeszcze warunek $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^P, \dots, \theta) = 0$ zwany warunkiem plastyczności. Przyjmuje się zwykle (np. w oparciu o postulat Druckera [5]) identyczność funkcji f i g (tzw. stowarzyszone prawo płynięcia), zatem spełnione są wtedy związki

$$(2) \quad \begin{aligned} f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^P, \dots, \theta) &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{Pl} &= \lambda \partial f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^P, \dots, \theta) / \partial \sigma_{ij}, \end{aligned}$$

które łatwo uogólnić na przypadek, gdy funkcja f jest odcinkowo-liniowa (por. [8]). Materiał nazywamy idealnie plastycznym, gdy f i g są funkcjami jedynie stanu naprężenia, tj. $f = f(\sigma_{ij})$, $g = g(\sigma_{ij})$. Dla metali ciągliwych (dla których idealna plastyczność jest dobrym przybliżeniem), najbliższy rzeczywistości wydaje się w świetle badań doświadczalnych (por. np. [7]) warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$(3) \quad \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2;$$

(s_{ij} oznacza dewiator stanu naprężenia, k granicę plastyczności przy czystym ścinaniu). Jednakże w zadaniach, w których kierunki główne są z góry znane, prostszy matematycznie (ze względu na liniowość równań) będzie warunek Treski:

$$(4) \quad \max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad i \neq j.$$

Pełne rozwiązanie zadania w teorii plastyczności polega na znalezieniu mnożnika obciążenia, przy którym nastąpi nieograniczone płynięcie (tzw. nośność graniczna), rozkładu naprężeń spełniających równanie równowagi, warunek plastyczności i naprężeniowe warunki brzegowe oraz prędkości odkształceń spełniających równania zgodności i przemieszczeniowe warunki brzegowe, czyli tzw. mechanizm płynięcia (z dokładnością do nieokreślonego mnożnika). Ten ostatni, niestety, nie zawsze może być znaleziony jednoznacznie. Rozwiązując konkretne zadania posługujemy się zwykle jednym z warunków plastyczności (3) i (4) posiadających oprócz doświadczalnego również uzasadnienie teoretyczne. W przypadku stanów jednoosiowych i stanu płaskiej deformacji wyniki dla obu warunków jakościowo i ilościowo są niemal identyczne tak w polu sił wewnętrznych jak i odkształceń. Natomiast dla płyt i powłok (w przybliżeniu płaski stan naprężenia) ilościowe jak i jakościowe różnice w polu odkształceń są znaczne.

Wytłumaczenia tego faktu szukać należy w tym, że warunek Treski dla płaskiego stanu naprężenia również w przestrzeni sił uogólnionych ma osobliwości; osobliwości tych nie ma w przypadku warunku Misesa.

Stowarzyszone prawo płynięcia stwierdza, że wektor płynięcia $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ jest prostopadły do powierzchni granicznej. Stąd wynika, zwłaszcza dla punktów w pobliżu naroży występujących przy warunku Treski, że chociaż naprężenia (tj. punkty na płaszczyźnie σ_1, σ_2) na liniach przedstawiających oba warunki nie będą się wiele od siebie różniły, to odpowiednie wektory płynięcia mogą się różnić znacznie. W wyniku tego pola odkształceń dla warunku Treski częstokroć zawierają osobliwości zupełnie нефизyczne i wyraźnie niezgodne z rzeczywistością.

Nie wchodząc tutaj bliżej w kwestię, czy sam warunek plastyczności jest niefortunnie sformułowany, czy też winę ponosi stowarzyszone prawo płynięcia (na ogół nieudokumentowane jeszcze należycie danymi doświadczalnymi), przyjmujemy dalej, że najbliższe doświadczeniu wyniki daje warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego i «stowarzyszone» z nim prawo płynięcia. Tak postawiony problem jest niestety zwykle bardzo skomplikowany matematycznie i na ogół nie tylko nie pozwala na otrzymanie wyników w postaci zamkniętej, ale również jest niedogodny do rachunków numerycznych (nieliniowość równań i problemów brzegowych).

Dlatego dla otrzymania wyników przybliżonych wydaje się mieć sens następujący tryb postępowania. Dla określenia stanu naprężenia za warunek plastyczności przyjmujemy pewną linearyzację warunku Hubera-Misesa (np. właśnie warunek Treski); jednakże przy wyznaczaniu deformacji każdemu jego punktowi przypisujemy wektor płynięcia, który odpowiada możliwie bliskiemu punktowi na ściślej powierzchni płynięcia.

Wobec tego, co powiedziano wyżej, otrzymamy pole odkształceń bliższe ściśtemu niż rozwiązanie z przyjęciem prawa płynięcia stowarzyszonego z przybliżonym warunkiem plastyczności. Formalnie rzecz biorąc mamy w ten sposób do czynienia z niestowarzyszonym prawem płynięcia, jednakże ponieważ opisane postępowanie jest przybliżone, nie będziemy do tego przywiązawali większej wagi.

Zastąpienie elipsy Hubera-Misesa sześciobokiem Treski dla wyznaczenia naprężeń było stosowane do przybliżonego rozwiązywania niektórych zadań technologicz-

nych w płaskim stanie naprężenia (por. [1 i 17]). Również W. W. SOKOŁOWSKI [2 i 3] rozwiązał opisaną metodą kilka zadań z różnych dziedzin nie podkreślając jednakże, że można ją stosować ogólniej.

Pozostaje jeszcze kwestią otwartą wzajemne przyporządkowanie punktów na przybliżonej i ścisłej powierzchni granicznej (czy to w przestrzeni naprężeń, czy też sił uogólnionych). Ponieważ od metody przybliżonej należy żądać również, aby była prosta, wydaje się najlepiej przyjąć za wzajemnie odpowiadające sobie dwa punkty leżące na jednej prostej wychodzącej z początku układu. Wtedy nawet formalna postać prawa płynięcia pozostaje taka, jak dla warunku Misesa. Należy jednak pamiętać, że nie jest to jedyna możliwość, jaką mamy do wyboru.

W niniejszej pracy dokonano porównania pól odkształceń dla kołowo-symetrycznych powłok cylindrycznych i płyt kołowych, otrzymanych dla warunku Treski i Hubera-Misesa z rozwiązaniami otrzymanymi za pomocą wyżej opisaney metody przybliżonej.

Wydaje się, że porównanie to potwierdza jej wartość, gdyż otrzymane rezultaty niewiele na ogół odbiegają od wyników otrzymanych z warunku Misesa. Jedynie wtedy, gdy stan graniczny konstrukcji osiąga się bez pełnego uplastycznienia, strefy plastyczne różnią się znacznie. Ale spowodowane jest to faktem, że dla zadań statycznie wyznaczalnych prawo płynięcia nie ma wpływu na rozkład sił wewnętrznych¹.

W oparciu o taką weryfikację zastosowano przedstawioną metodę do rozwiązania kilku przykładów z teorii płyt i powłok plastycznych, dla których rozwiązania ścisłe nie są znane: zbiornika cylindrycznego na ciecz oraz płyty kołowej obciążonej nierównomiernie.

Interesujące jest to, że np. w tym ostatnim przypadku warunek Treski wraz ze stowarzyszonym prawem płynięcia, bez względu na rozkład obciążenia wzdłuż promienia, daje stożkowe pole przemieszczeń. Metodą przybliżoną otrzymuje się intuicyjnie oczywiste różnice w kształcie powierzchni odkształconej w zależności od rozkładu obciążenia.

2. Płyty kołowo-symetryczne

Warunek plastyczności Hubera-Misesa (rys. 1) napisany dla płyty kołowej w bezwymiarowych momentach ma postać

$$(5) \quad m_r^2 - m_r m_\varphi + m_\varphi^2 = 1, \quad \text{gdzie} \quad m_i = \frac{M_i}{\sigma_0 H^2}, \quad i = r, \varphi.$$

We wzorach tych M_i oznacza moment zginający, σ_0 granicę plastyczności, $2H$ grubość płyty. Powierzchnia (5) jest zarazem potencjałem dla prędkości uogólnionych odkształceń, tj. krzywizn (por. ogólny dowód dotyczący powłok [14]):

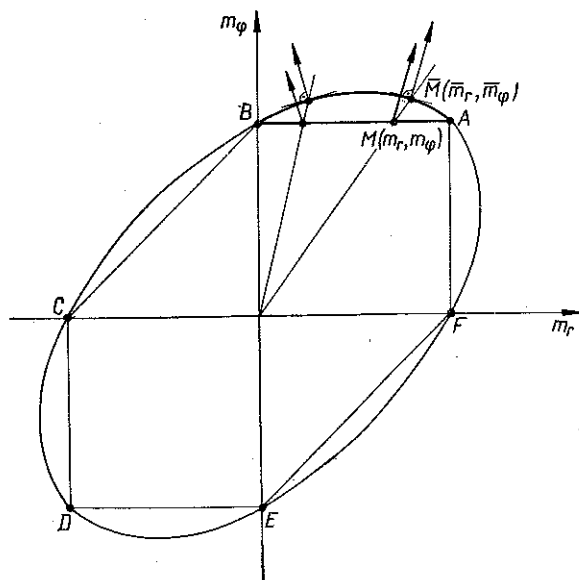
$$(6) \quad \dot{\kappa}_r = 2H\dot{K}_r = \lambda(2m_r - m_\varphi), \quad \dot{\kappa}_\varphi = 2H\dot{K}_\varphi = \lambda(2m_\varphi - m_r), \quad \lambda \geq 0.$$

¹ Przez zadanie statycznie wyznaczalne należy tu rozumieć problem, w którym równania równowagi, warunek plastyczności i warunki brzegowe wystarczają do jednoznacznego określenia sił wewnętrznych.

Bezwymiarowe krzywizny $\dot{\kappa}_r$ i $\dot{\kappa}_\varphi$ wyrażają się dla małych ugięć wzorami

$$(7) \quad \dot{\kappa}_r = \frac{d^2 \dot{w}}{d\varrho^2}, \quad \dot{\kappa}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \frac{d\dot{w}}{d\varrho},$$

gdzie $w = W/R$ oznacza bezwymiarowe ugięcie, $\varrho = r/R$, R promień płyty [5].



Rys. 1

Założmy teraz, że punkt $\bar{M}(\bar{m}_r, \bar{m}_\varphi)$ leżący na elipsie (5) odpowiada (w przyjęty w opisaną metodzie sposób) punktowi $M(m_r, m_\varphi)$ spełniającemu przybliżony warunek plastyczności. Stowarzyszony z punktem \bar{M} wektor płynięcia

$$(8) \quad \lambda [2\bar{m}_r - \bar{m}_\varphi, 2\bar{m}_\varphi - \bar{m}_r]$$

przyrządkujemy teraz punktowi M . Ale wobec przyjętych założeń $\bar{m}_r/\bar{m}_\varphi = m_r/m_\varphi$ i wektor (8) równy jest $\lambda_1 [2m_r - m_\varphi, 2m_\varphi - m_r]$, gdzie

$$(9) \quad \lambda_1 = \lambda \bar{m}_r/m_r.$$

Rugując λ_1 ze wzorów (7) i (9) i całkując otrzymamy znany wzór [6]

$$(10) \quad \ln \dot{w}' = \int \frac{(2m_r - m_\varphi) d\varrho}{(2m_\varphi - m_r) \varrho} + C.$$

Zadanie jest statycznie wyznaczalne, gdy układ utworzony z równania równowagi

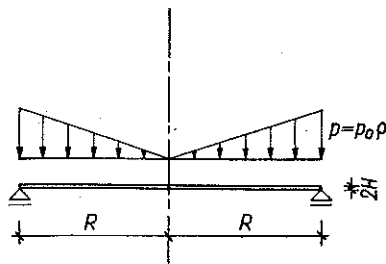
$$(11) \quad \frac{d}{d\varrho} (\varrho m_r) - m_\varphi + \int_0^{\varrho} \varrho P(\varrho) d\varrho = 0$$

i warunku plastyczności

$$(12) \quad f(m_r, m_\varphi) = 0$$

można rozwiązać bez odwoływania się do odkształceń, tj. gdy statyczne warunki brzegowe wystarczą do jednoznacznego wyznaczenia stałych całkowania. Wtedy mając już wyznaczone m_r i m_φ , możemy na podstawie wzoru (10) otrzymać ugięcie płyty przez dwukrotne całkowanie. Naturalnie, stosując metodę przybliżoną należy tak przyjąć warunek (12), aby z jednej strony mało odbiegał od ścisłego, a z drugiej, aby całkowanie (10) było możliwe proste. Inną możliwością będzie przybliżenie obciążenia $P(\varrho)$ przez prostsze funkcje (np. odcinkami stałe).

Przykład. Płyta kołowa swobodnie podparta, obciążona nierównomiernie (rys. 2). Zagadnienie dla płyty obciążonej równomiernie rozwiązał G. EASON [9] dla warunku Misesa również dla utwierdzonego brzegu oraz dla obciążenia na części środkowej płyty. Zagadnienie to powtórnie rozwiązał W. W. SOKOŁOWSKI [3], lecz tylko dla płyty swobodnie podpartej, podając równocześnie rozwiązanie przybliżone w oparciu o niestowarzyszone prawo płynięcia.



Rys. 2

Naturalnie, również dla płyty z rys. 2 profil sił wewnętrznych przebiegnie tak samo jak dla płyty obciążonej równomiernie, tj. wzdłuż AB na rys. 1. Dla warunku Treski i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia otrzymuje się pole prędkości takie samo jak dla obciążenia równomiernego (stożek), co budzi uzasadnione wątpliwości. Dla warunku Misesa obliczenia można prowadzić tylko numerycznie. Natomiast podaną metodą otrzymamy rozwiązanie zamknięte.

Statycznie dopuszczalne pole sił $m_\varphi = 1$, $m_r = 1 - \varrho^3$, $p_0 = 12$ uwzględnione we wzorze (10) daje:

$$\ln \dot{w}' = \int \frac{1 - 2\varrho^3}{(1 + \varrho^3)\varrho} d\varrho + \ln C,$$

a po całkowaniu otrzymujemy

$$\ln \dot{w}' = \ln \varrho - \ln(1 + \varrho) - \ln(1 - \varrho + \varrho^2) + \ln C$$

oraz

$$\dot{w}' = \frac{C\varrho}{1 + \varrho^3}.$$

Stąd

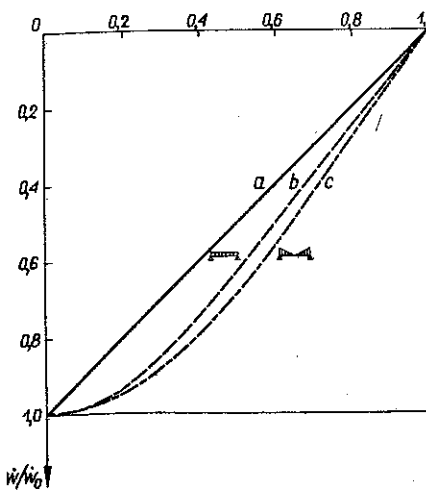
$$\dot{w} = \frac{C}{3} \left[-\ln(1 + \varrho) + \frac{1}{2} \ln(1 - \varrho + \varrho^2) + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\varrho - 1}{\sqrt{3}} \right] + D.$$

Stałe C i D wyznaczamy z warunków $\dot{w}(0) = \dot{w}_0$ i $\dot{w}(1) = 0$. Ostatecznie:

$$\dot{w} = \frac{\dot{w}_0}{\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \ln 2 + \ln \frac{1 + \varrho}{\sqrt{1 - \varrho + \varrho^2}} + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 - 2\varrho}{\sqrt{3}} \right].$$

Łatwo zauważyć, że $\dot{w}'(0) = 0$. Wyniki obliczeń według tego wzoru przedstawia rys. 3. Dla porównania podano tu wykres szybkości dla obciążenia równomiernego

znaleziony przez EASONA i SOKOŁOWSKIEGO [3 i 9].



Rys. 3

3. Osowo-symetryczne powłoki cylindryczne bez sił osiowych

Warunek Hubera-Misesa napisany dla powłok cylindrycznych w siłach przekrojowych ma w przypadku znikania siły osiowej kształt [4 i 12]

$$n = \ln p \ln \operatorname{tg} \frac{p}{2},$$

$$(13) \quad m = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{tg}^2 p \ln \operatorname{tg} \frac{p}{2} + \frac{1}{\cos p} \right],$$

$$0 \leq p \leq \pi,$$

którego bardzo dobrą aproksymacją jest elipsa [4] z rys. 4:

$$(14) \quad n^2 + \frac{3}{4} m^2 = 1.$$

Przyjęto tu oznaczenia: $n = N_\varphi / 2\sigma_0 H$, $m = M_x / \sigma_0 H^2$, σ_0 jest granicą plastyczności, $2H$ grubością powłoki. Zatem wektor płynięcia wynosi

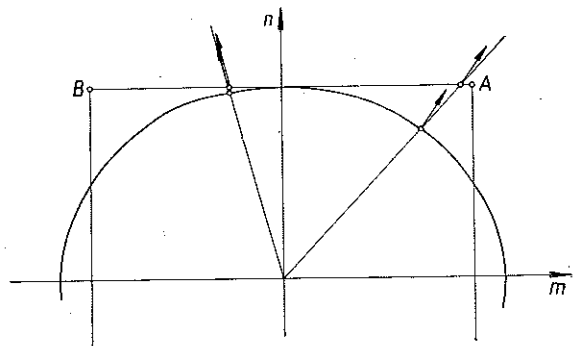
$$\dot{\mathbf{E}} = [\dot{\lambda}_x, \dot{\lambda}_\varphi] = \lambda \left[\frac{3}{4} m, n \right],$$

gdzie $\dot{\lambda}_x$ i $\dot{\lambda}_\varphi$ oznaczają bezwymiarowe szybkości odkształceń uogólnionych, $\dot{\lambda}_x = 2HK_x$ oraz $\dot{\lambda}_\varphi = \dot{A}_\varphi$ i wyrażają się przez bezwymiarowe ugięcie $w = W/R$ wzorami następującymi:

$$\dot{\lambda}_x = \frac{d^2 \dot{w}}{d\xi^2} \frac{1}{c^2}, \quad \dot{\lambda}_\varphi = \dot{w}, \quad \text{gdzie} \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad c^2 = \frac{2L^2}{RH}, \quad P = \frac{pR}{2\sigma_0 H}.$$

Pełne rozwiązanie dla powłoki bez sił osiowych otrzymujemy z układu następującego: równanie równowagi

$$(15) \quad \frac{1}{c^2} m'' + n = P(\xi);$$



Rys. 4

warunek plastyczności

$$(15') \quad f(m, n) = 0;$$

prawo płynięcia

$$(15'') \quad \dot{w}'' = \frac{3}{4} \frac{m}{n} c^2 \dot{w}.$$

Na ogół warunki brzegowe pozwalają rozwiązać pierwsze dwa równania niezależnie od trzeciego. Linearyzując warunek plastyczności w myśl zaproponowanej metody otrzymamy równanie liniowe o stałych współczynnikach.

Jeśli zlinearyzowany warunek plastyczności ma kształt $n = a - bm$, to równanie równowagi przybiera postać

$$\frac{1}{c^2} m'' - bm + a = P(\xi),$$

a rozwiązanie ogólne wyraża się za pomocą wzoru

$$m = A \operatorname{ch} c \sqrt{b} \xi + B \operatorname{sh} c \sqrt{b} \xi + \frac{a}{b} + \bar{m},$$

gdzie \bar{m} jest dowolną całką równania

$$\frac{1}{c^2} m'' - bm = P(\xi).$$

Po wyznaczeniu sił wewnętrznych znalezienie prędkości przemieszczeń \dot{w} sprowadza się do rozwiązania równania (15''), które ma kształt

$$(16) \quad \dot{w}'' = g(\xi) \dot{w}$$

i którego rozwiązanie dla prostszych obciążeń daje się na ogół wyrazić przez funkcje specjalne lub nawet elementarne. Również prosto można je rozwiązywać w sposób przybliżony przez rozwinięcie na szereg lub metodą różnic skończonych.

Przykłady. A. Powłoka nieskończona, obciążona pierścieniem sił. Pole sił wewnętrznych bierzemy z pracy [11] używając wprowadzonych tam oznaczeń:

$$\xi = \frac{x \sqrt{2}}{\sqrt{RH}}, \quad q = \frac{Q_x \sqrt{R}}{\sigma_0 H \sqrt{2H}}.$$

Wtedy

$$n = 1, \quad m = 2\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - 1, \quad p = q(0) = 2, \quad \eta = 2,$$

gdzie $\dot{w}(\eta) = 0$.

Równanie (15'') wobec wprowadzenia nowej zmiennej niezależnej upraszcza się do postaci

$$\dot{w}'' = \frac{3}{4} \frac{m}{n} \ddot{w},$$

zatem dla znalezienia \dot{w} należy rozwiązać równanie

$$\dot{w}'' - \frac{3}{4} \left(2\xi - \frac{1}{2} \xi^2 - 1 \right) \dot{w} = 0.$$

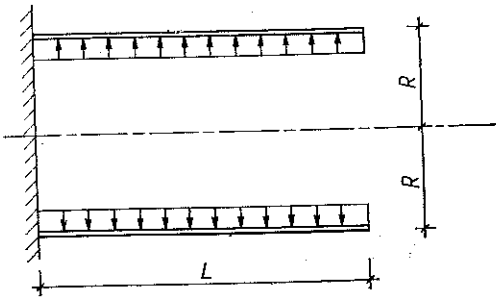
Rozwiązanie ogólne tego równania można przedstawić za pomocą funkcji $M_{\lambda, \mu}(x)$, która jest rozwiązaniem równania Whittakera [15] w postaci

$$\dot{w} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \left[C_1 M_{\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \varrho^2 \right) + C_2 M_{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \varrho^2 \right) \right], \quad \text{gdzie } \varrho = 2 - \xi.$$

Rozwiązanie przybliżone w postaci szeregu, w oparciu o warunki brzegowe $\dot{w}(0) = w_0$, $\dot{w}(\eta) = 0$ ma postać

$$\dot{w} = \dot{w}_0 [1 - 0.581 \xi + 0.375 \xi^2 - 0.3225 \xi^3 + 0.1272 \xi^4 - 0.0729 \xi^5 + \dots].$$

B. Powłoka o długości L , utwierdzona na jednym końcu, swobodna na drugim, pod działaniem stałego ciśnienia wewnętrznego (rys. 5). Korzystamy dla wyznaczenia sił wewnętrznych z warunku «limited interaction». Profil sił leży na boku AB , tzn. $n = 1$. Całkując (15) otrzymamy w oparciu o warunki $m(0) = m'(0) = 0$, że $m = c^2/2(P-1)\xi^2$, co wobec $m(1) = 1$ daje $P = 1 + 2/c^2$; skąd $m = \xi^2$.



Rys. 5

Równanie (15'') przybiera zatem postać

$$(17) \quad \dot{w}'' = \frac{3}{4} c^2 \xi^2 \dot{w}.$$

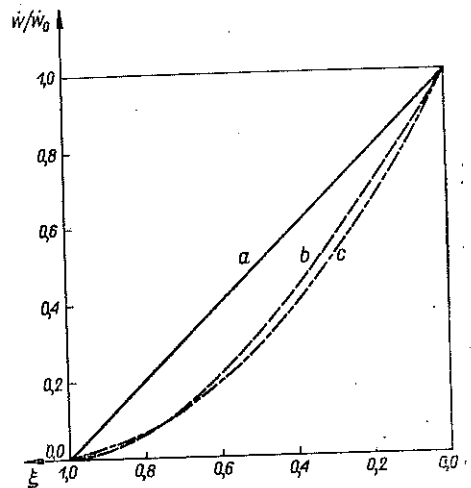
Rozwiązanie wyraża się przez zmodyfikowane funkcje Bessela rzędu 1/4:

$$\dot{w} = \sqrt{a\xi} \left[C_1 I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \xi^2 \right) + C_2 K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \xi^2 \right) \right], \quad \text{gdzie } a = \sqrt{c}.$$

Łatwiej może jest zanalizować rozwiązanie rozwijając je w szereg, co w szczególnym przypadku $c^2 = 46$ daje:

$$(18) \quad \dot{w}(\xi) = \dot{w}_0 (1 - 1.831\xi + 0.786\xi^2 - 0.024\xi^3 + \dots),$$

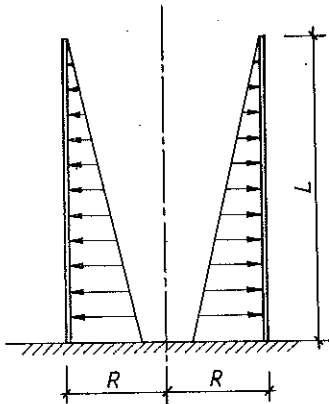
przy czym te cztery wyrazy dają oszacowanie z błędem mniejszym niż 0,1%. Na rysunku 6 pokazano wyniki według wzoru (18) (linia b) i wyniki otrzymane na pod-



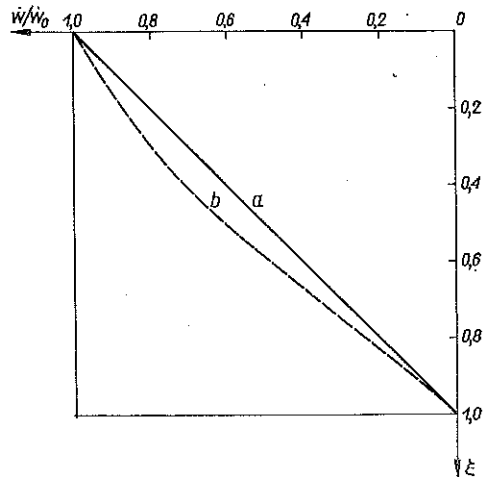
Rys. 6

stawie skomplikowanych rachunków numerycznych przeprowadzonych przez autora przy wykorzystaniu warunku (14), gdy pola sił wewnętrznych nie można podać w postaci zamkniętej (linia c).

C. Zbiornik cylindryczny obciążony parciem cieczy (rys. 7).



Rys. 7



Rys. 8

Warunek plastyczności przyjmujemy jak poprzednio otrzymując następujące pole sił wewnętrznych:

$$(19) \quad n = 1, \quad m = \xi^3 + \frac{c^2}{2}(\xi^3 - \xi^2).$$

Pole to dla $c^2 < 17,1$ jest statycznie dopuszczalne [13].

Równanie (16) daje

$$(20) \quad \dot{w}'' = \frac{3}{8} c^2 [\xi^3 (c^2 + 2) - c^2 \xi^2] \dot{w}.$$

Wprawdzie otrzymanie rozwiązania zamkniętego napotyka tu na duże trudności, ale znalezienie w przedziale $[0, 1]$ rozwiązania przybliżonego, np. przez rozwinięcie w szereg, jest bardzo łatwe. Dla $c^2 = 10$ otrzymujemy

$$(21) \quad \dot{w}(\xi) = \dot{w}_0 [1 - 0.602 \xi - 0.405 \xi^2 - 0.047 \xi^3].$$

Uwzględnienie pierwszych 5 wyrazów daje błąd do 2%. Rysunek 8 przedstawia wyniki obliczeń wg. wzoru (21). Linia ciągłą oznaczono liniowe pole określone na podstawie prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem «limited interaction» [13].

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
2. В. В. Соколовский, *Волочение тонкой трубы через коническую матрицу*, ПММ, 5, 24 (1960).
3. В. В. Соколовский, *Пластический изгиб круговой пластинки*, Инж. Журн. 3, 3 (1963).

4. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва 1948.
5. J. GOODIER and P. G. HODGE, *Elasticity and Plasticity*, Mc Graw Hill, N. York 1958.
6. Z. MARCINIAK, Z. MRÓZ, W. OLSZAK, P. PERZYNA, J. RYCHLEWSKI, A. SAWCZUK, W. URBANOWSKI, *Wprowadzenie w teorię plastyczności*, Warszawa 1962.
7. W. LODÉ, *Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle, Eisen, Kupfer und Nickel*, Z. Physik, 11/12, 36 (1926), 913.
8. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, 1960.
9. G. EASON, *Velocity fields for circular plates with the von Mises yield condition*, J. Mech. Phys. Solids, 6, 1958, 231-235.
10. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surface for plastic shells*, Arch. Mech. Stos., 1, 12 (1960), 29-53.
11. A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Comparison of yield condition for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst., 269 (1960), 362-374.
12. P. G. HODGE, *The Mises yield condition for rotationally symmetric shells*, Quart. Appl. Math., 18, 4 (1961), 305-311.
13. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *A method of limit analysis of reinforced concrete tanks*, Proc. of the Coll. on Simpl. Calcul. Methods, Brussels 1961, 416-437.
14. J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of helicoidal shell*, Symp. IASS, Warszawa 1963.
15. В. П. Манжаловский, *К интегрированию некоторых однородных линейных уравнений*, Изд. Харьковского Гос. Университета, 1959.
16. A. M. WAHL, *Creep in Structures*, Berlin 1962.
17. H. W. SWIFT, *Phil. Mag.*, 40, 1949, 883.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ НЕАССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕЧЕНИЯ

В работе ясно формулируется и обосновывается общий метод неоднократно примененный к решению различных задач, касающихся плоского напряженного состояния в теории пластичности. Этот метод состоит в аппроксимации эллипса Губера-Мизеса отрезком прямой, с соблюдением однако точного условия, как пластического потенциала. В различных работах (ср. [2, 3, 16]), путем сравнения констатируются, практически, значения полученных этим способом решений, которые, в общем, в минимальной степени разнятся от точных решений. Также и решения, полученные автором для некоторых случаев нагрузки круговой пластинки и цилиндрической оболочки, проявляют надлежащее согласие. На основании упомянутых выше подтверждений решается задача закрепленного в дне цилиндрического резервуара под действием давления жидкости.

Summary

APPROXIMATE DETERMINATION OF THE DEFORMATION OF A PLASTIC PLATES AND SHELL ON THE BASIS OF THE NON-ASSOCIATED LAW OF PLASTIC FLOW

The common method of solving various problems of plane stress in the theory of plasticity is stated and justified in a general manner. This method consists in replacing an arc of the Huber-Mises ellipse with a straight line segment, the accurate expression being preserved, however, for the plastic potential.

The advantage of such solution which deviates but very slightly from the accurate ones has already been confirmed in various works (cf. [2, 3, 16]). The solutions obtained by the present author in certain cases of load acting on a circular plate and a cylindrical shell show also good accuracy. On the basis of these statements the problem of a cylindrical vessel clamped at the bottom and loaded by the pressure of a liquid is solved in the present paper.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
 INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1964 r.