

**SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE UGIĘCIA PRĘTÓW SŁABO ZAKRZYWIONYCH
O DOWOLNYM PRZĘKROJU**

JANUSZ O R K I S Z (KRAKÓW)

1. Przedmiotem pracy jest zastosowanie metody wielopunktowych przekrojów zastępczych do obliczania sprężysto-plastycznych ugięć słabo zakrzywionych prętów o dowolnym przekroju. Metoda ta polega na zastąpieniu rzeczywistego przekroju pręta pewnym fikcyjnym przekrojem składającym się z pewnej liczby póltek o powierzchniach skupionych (tzw. przekrojów wielopunktowych) i obliczaniu ugięć takiego zastępczego pręta w sposób ścisły. Wielkość i rozstaw tych póltek dobiera się (por. [5]) z warunku równości odpowiedniej liczby momentów geometrycznych przekroju rzeczywistego i zastępczego oraz równej wysokości obu przekrojów, co przy dostatecznej liczbie póltek zapewnia dobre przybliżenie przekroju rzeczywistego. Dla przekrojów wielopunktowych (przy przyjęciu modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego lub modelu ciała z wielokrotnym wzmocnieniem odcinkowo-liniowym) krzywizna pręta jest zawsze liniową funkcją momentu gnącego M i siły podłużnej N . Dzięki temu zawsze otrzymuje się jednakową postać różniczkowych równań linii ugięcia (por. [8 i 9]), w których jedynie wartości stałych współczynników zależą od formy przekroju danego, liczby póltek w przekroju zastępczym i sposobu jego uplastycznienia.

Ogólne równania różniczkowe, słuszne zarówno w przypadku małych jak i dużych ugięć sprężysto-plastycznych prętów prostych o przekrojach wielopunktowych, wyprowadzone zostały w pracy [8]. Zakres stosowalności tych równań określają odpowiednie krzywe graniczne w układzie M, N (por. [6]).

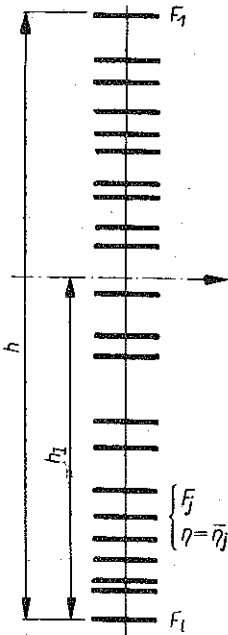
W pracy [8] wymieniono również szereg trudności, na jakie napotyka się przy obliczaniu ugięć sprężysto-plastycznych prętów prostych. Gdy pręty są zakrzywione, to powstają dodatkowe komplikacje. Pierwsze z nich wiążą się z wielkością krzywizny pierwotnej, gdyż jedynie przy dużej wartości stosunku promienia krzywizny do wymiarów przekroju równanie sprężysto-plastycznych ugięć można przyjąć w postaci podobnej do postaci równania dla prętów prostych. Jeśli ograniczymy się do prętów słabo zakrzywionych, to dodatkowy wyraz w równaniu różniczkowym ugięcia związany z krzywą pierwotną, zależnie od jej postaci, może zmienić charakter tego równania i w znacznym stopniu utrudnić jego rozwiązanie. Ponadto wyrażenia dla momentów zginających i sił podłużnych działających na pręt zakrzywiony będą na ogół bardziej skomplikowane niż przy prętach prostych. Stąd też z zasady zajmowano się nie ugięciami, a analizą stanów granicznych prętów zakrzywionych, najczęściej łuków. Zagadnieniu temu poświęcona jest np. praca [3] oraz [1], gdzie poszukuje się dolnego

i górnego kresu wartości sił niszcących w łuku. W pracy [4] analizowano wpływ sił podłużnych na zniszczenie łuku, a w [2] rozważony został przypadek nośności granicznej dwuprzegubowego łuku kołowego obciążonego siłą skupioną, a otrzymane wyniki porównano z wynikami eksperymentalnymi.

W tym świetle wobec braku jakichkolwiek rozwiązań ścisłych możliwość choćby przybliżonej analizy ugięć sprężysto-plastycznych prętów zakrzywionych, jaką daje zastosowanie metody wielopunktowych przekrojów zastępczych, wydaje się szczególnie cenna. Przedstawiona w pracach [8 i 9] teoria małych i dużych ugięć sprężysto-plastycznych belek o wielopunktowych przekrojach zastępczych w pewnych przypadkach daje się łatwo rozszerzyć na pręty zakrzywione. W niniejszej pracy ograniczamy się do tych przypadków, kiedy można będzie zagadnienie zginania prętów zakrzywionych sprowadzić do równań o postaci znanej z rozważania ugięć prętów prostych. Wówczas wszystkie dalsze obliczenia można przeprowadzić analogicznie jak poprzednio.

2. W pracy przyjęto następujące założenia:

- a) obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego,
- b) materiał w pręcie jest idealnie sprężysto-plastyczny lub ma wzmocnienie liniowe pojedyncze albo wielokrotne,
- c) pręt jest pryzmatyczny o przekroju poprzecznym posiadającym przynajmniej jedną oś symetrii; oś ta leży w płaszczyźnie działania obciążenia zewnętrznego,
- d) stan naprężenia w pręcie jest jednoosiowy; pomija się wpływ naprężeń stycznych oraz naprężeń stykowych w otoczeniu punktów przyłożenia sił i momentów skupionych,
- e) pomija się wpływ rozciągłości osi belki,
- f) oś pręta jest słabo zakrzywiona w płaszczyźnie działania momentu zginającego,
- g) w zakresie sprężysto-plastycznym nie zachodzi odciążenie,
- h) przyjmuje się zastępczy przekrój wielopunktowy (rys. 1) w postaci l skupionych przekrojów rozmieszczonych wzdłuż osi symetrii przekroju poprzecznego leżącej w płaszczyźnie zginania belki.



Rys. 1

Przy powyższych założeniach w pracy [8] wyprowadzone zostało ogólne równanie sprężysto-plastycznych ugięć pręta prostego o przekroju wielopunktowym w postaci

$$(2.1) \quad -\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi' = \alpha m + \beta n + \gamma,$$

gdzie $s = ht$ jest długością łuku, a h wysokością przekroju belki; φ i φ' oznaczają odpowiednio jej kąt ugięcia i bezwymiarową krzywiznę; α , β , γ są to stałe zależne od materiału belki, liczby l mas skupionych w całym przekroju i sposobu rozkładu

sprężysto-plastycznych naprężeń normalnych. Wartości tych stałych dla różnych przypadków podano w pracach [5 i 8]. W równaniu (2.1)

$$(2.2) \quad m = \frac{M}{WQ_r}, \quad n = \frac{N}{(F_I + F_{II}) Q_r}$$

oznaczają bezwymiarowy moment i bezwymiarową siłę podłużną, W sprężysty wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu, F_I i F_{II} pola powierzchni przekroju poprzecznego po obu stronach osi ciężkości oraz Q_r granicę plastyczności przy rozciąganiu.

W szczególnym przypadku przy czystym zginaniu przekrojów o dwóch osiach symetrii równanie (2.1) ma jeszcze prostszą postać ($\delta = \text{const}$)

$$(2.3) \quad -\varphi' = am - \delta.$$

Zamiana równań odnoszących się do prętów prostych na odpowiednie równania dla prętów słabo zakrzywionych polega na zastąpieniu wyrażenia na krzywiznę przez różnicę pomiędzy krzywiznami pręta odkształconego φ' i nieodkształconego $\bar{\varphi}'$. I tak dla równań (2.1) i (2.3) otrzymujemy odpowiednio

$$(2.4) \quad \bar{\varphi}' - \varphi' = am + \beta n + \gamma, \quad \bar{\varphi}' - \varphi' = am - \delta.$$

W dalszym ciągu dla celów praktycznych nie zmieniając ogólności zagadnienia jak pokazano w pracy [8], dalsze rozwiązania przeprowadzimy dla czteropunktowego przekroju zastępczego o dwóch osiach symetrii ($F_I = F_{II} = F$). Wówczas (por. [8]) dla zakresu sprężystego i przy jednostronnym i dwustronnym uplastycznieniu można napisać

$$(2.5) \quad \bar{\varphi}' - \varphi' = am, \quad \bar{\varphi}' - \varphi' = am + \beta n - \beta, \quad \bar{\varphi}' - \varphi' = am - \beta.$$

Wartości współczynników a i β oraz odpowiednie krzywe graniczne podane zostały w pracy [8].

3. Równania (2.4) i (2.5) mają liniowy charakter jedynie w układzie m, n, φ' . Ponieważ jednak bezwymiarowy moment gnący m i bezwymiarowa siła podłużna n mogą w rozmaity sposób zależeć od rodzaju i charakteru działania obciążeń zewnętrznych (por. [8]), to otrzymamy na ogół różne różniczkowo-całkowe równania ugięcia, które dzięki uproszczeniom wynikającym z założenia, że ugięcia są małe dają się sprowadzić do równań różniczkowych, a następnie efektywnie rozwiązać. Aby sformułować odpowiednie wyrażenia dla m i n (por. [8]) rozważmy pręt przedstawiony na rys. 2.

Niech ξ, η oznaczają wspólne punkty osi pręta przed, a x i y po odkształceniu. Wówczas przemieszczenia tego punktu w kierunku osi x i w kierunku osi y wynoszą

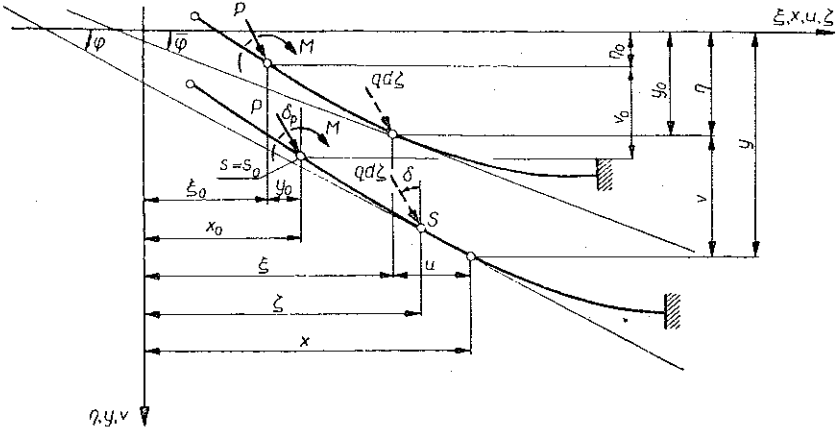
$$(3.1) \quad u = x - \xi, \quad v = y - \eta.$$

Oznaczmy przez s współrzędną mierzoną wzdłuż osi pręta, a przez φ kąt, jaki tworzy z osią ξ styczna do pręta przed odkształceniem. Wówczas pomiędzy wprowadzonymi przez nas układami współrzędnych zachodzą związki

$$(3.2) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{d\xi}{ds} = \cos \bar{\varphi}, \quad \frac{d\eta}{ds} = \sin \bar{\varphi},$$

skąd

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos \varphi \, ds, & y &= y_0 + \int_{s_0}^s \sin \varphi \, ds, \\ \xi &= \xi_0 + \int_{s_0}^s \cos \bar{\varphi} \, ds, & \eta &= \eta_0 + \int_{s_0}^s \sin \bar{\varphi} \, ds. \end{aligned}$$



Rys. 2

Jeśli ugięcia są małe, to można napisać

$$(3.4) \quad \sin(\varphi - \bar{\varphi}) \approx \varphi - \bar{\varphi}, \quad \cos(\varphi - \bar{\varphi}) \approx 1.$$

Na tej podstawie ze związków (3.1) i (3.3) mamy

$$(3.5) \quad u = u_0 + \sin \bar{\varphi} \int_{s_0}^s (\varphi - \bar{\varphi}) \, ds, \quad v = v_0 + \cos \bar{\varphi} \int_{s_0}^s (\varphi - \bar{\varphi}) \, ds,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(3.6) \quad u_0 = x_0 - \xi_0, \quad v_0 = y_0 - \eta_0.$$

Obecnie po otrzymaniu wzorów na przemieszczenia możemy przyjąć dalsze uproszczenia wynikające z rozważania małych ugięć:

$$(3.7) \quad x \approx \xi, \quad y \approx \eta, \quad \cos \varphi \approx \cos \bar{\varphi}, \quad \sin \varphi \approx \sin \bar{\varphi}.$$

Wówczas wzory (3.5) można zapisać w postaci

$$(3.8) \quad u = u_0 + \operatorname{tg} \bar{\varphi} \int_{\xi_0}^{\xi} (\varphi - \bar{\varphi}) \, d\xi, \quad v = v_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} (\varphi - \bar{\varphi}) \, d\xi,$$

a wyrażenia na bezwymiarowy moment i bezwymiarową siłę podłużną w formie (por. [8] i rys. 2)

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{WQ_r} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{q}{\cos \varphi} \{ -(\xi - \zeta) \cos \delta + [\eta(\xi) - \eta(\zeta)] \sin \delta \} d\zeta + \right. \\
 &\quad \left. + P \{ -(\xi - \xi_0) \cos \delta_P + [\eta(\xi) - \eta(\xi_0)] \sin \delta_P \} + M_0 \right), \\
 (3.9) \quad n &= -\frac{1}{2FQ_r} \left\{ \left[\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{q}{\cos \varphi} \cos \delta d\zeta + P \cos \delta_P \right] \sin \bar{\varphi} + \left[\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{q}{\cos \varphi} \sin \delta d\zeta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + P \sin \delta_P \right] \cos \bar{\varphi} \right\} = -\frac{1}{2FQ_r} \left[\left(\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{qd\zeta}{\cos \varphi} \right) \sin(\bar{\varphi} + \delta) + P \sin(\bar{\varphi} + \delta_P) \right],
 \end{aligned}$$

gdzie $q = q[\xi, \bar{\varphi}(\xi)]$ jest obciążeniem ciągłym liczonym bądź to na jednostkę długości łuku pręta, bądź to na jego rzut zależnie od konkretnej postaci funkcji obciążenia. Jeśli założymy, że pierwotny kształt osi pręta określony jest przez funkcję $\eta = \eta(\xi)$, to w równaniu (3.9) $m = m(\xi)$ i $n = n(\xi)$ są znanymi funkcjami zmiennej ξ . Z uwagi na postać (3.9) w równaniach (2.5) zastąpimy pochodną $d\varphi/dt$ przez $d\varphi/d\zeta$, gdzie

$$(3.10) \quad \zeta = \frac{x}{h} \approx \frac{\xi}{h}, \quad \zeta_0 = \frac{x_0}{h} \approx \frac{\xi_0}{h}$$

jest bezwymiarową współrzędną. Otrzymamy stąd

$$(3.11) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{d\xi}{ds} = \varphi' \cos \bar{\varphi}.$$

Wówczas na podstawie (2.5), (3.9) i (3.11) otrzymamy równanie

$$(3.12) \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = \bar{\varphi} + f(\zeta),$$

skąd

$$(3.13) \quad \varphi = \bar{\varphi} + \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(\zeta) d\zeta$$

oraz

$$(3.14) \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = f(\zeta),$$

gdzie $f(\zeta)$ jest znaną funkcją ζ , przy czym dla strefy sprężystej

$$(3.15) \quad f(\zeta) = -\frac{am(\zeta)}{\cos \bar{\varphi}(\zeta)},$$

przy jednostronnym uplastycznieniu

$$(3.16) \quad f(\zeta) = -\frac{am(\zeta) + \beta n(\zeta) - \beta}{\cos \bar{\varphi}(\zeta)},$$

a przy dwustronnym

$$(3.17) \quad f(\zeta) = -\frac{am(\zeta) - \beta}{\cos \varphi(\zeta)}.$$

Na podstawie (3.8) i (3.13) przemieszczenia punktu osi pręta obliczamy ze wzorów

$$(3.18) \quad u = u_0 + h \operatorname{tg} \bar{\varphi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(\zeta) d\zeta, \quad v = v_0 + h \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(\zeta) d\zeta.$$

Zatem przy obliczaniu małych ugięć cały problem sprowadza się do wykonania skomplikowanego zazwyczaj całkowania znanych funkcji.

4. Przy dużych ugięciach, kiedy nie można przyjmować uproszczeń opisanych wzorami (3.4) i (3.7), równania otrzymane dla prętów prostych (por. [9]) łatwo dają się uogólnić na przypadek pręta o stałej krzywiznie pierwotnej. Efektywne rozwiązania można wówczas uzyskać dla obciążenia ciągłego skierowanego wzdłuż osi y i liczonego na rzut pręta na oś x oraz dla dowolnych sił skupionych i momentów skupionych. Wtedy

$$(4.1) \quad m = \frac{1}{WQ_r} \left\{ \int_{x_0}^x q(\theta) (\theta - x) d\theta + P(x_0 - x) \cos \delta_p + P(y - y_0) \sin \delta_p + M_0 \right\},$$

$$n = -\frac{1}{2FQ_r} \left\{ \left[\int_{x_0}^x q(\theta) d\theta + P \cos \delta \right] \sin \varphi + P \sin \delta \cos \varphi \right\}.$$

Przy działaniu jedynie obciążeń skierowanych wzdłuż osi y ($\delta = \delta_p = 0$) i po podstawieniu

$$(4.2) \quad z = \sin \varphi,$$

mamy [por. (3.11)]

$$(4.3) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dz}{d\zeta} \cos \varphi = \frac{dz}{d\zeta}.$$

Wówczas dla jednostronnego (I) i dwustronnego (II) uplastycznienia otrzymamy odpowiednio [por. (2.5)]

$$(4.4) \quad \frac{dz}{d\zeta} - za(\zeta) = b(\zeta) \quad (\text{I}),$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = b(\zeta) \quad (\text{II}),$$

gdzie

$$(4.5) \quad a(\zeta) = \frac{\beta}{2FQ_r} \left[\int_{\zeta_0^h}^{\zeta^h} q(\vartheta) d\vartheta + P \right],$$

$$b(\zeta) = k + \beta - \frac{\alpha}{WQ_r} \left[\int_{\zeta_0^h}^{\zeta^h} q(\vartheta) (\vartheta - \zeta^h) d\vartheta + Ph(\zeta_0 - \zeta) + M_0 \right],$$

przy czym $k = \overline{d\varphi}/dt = \text{const}$ jest bezwymiarową krzywizną osi pręta nieodkształconego. Po rozwiązaniu równań (4.4) (por. [9]) obliczamy kolejno $\varphi = \text{arc sin } z$, $x = \zeta h$, $y = y_0 + h \int_{\zeta_0}^{\zeta} \text{tg } \varphi \, d\vartheta$, a następnie przemieszczenia ze wzorów (3.1).

W przypadku gdy działają ukośne siły skupione i momenty skupione, dla otrzymania różniczkowego równania ugięcia ze względu na postać wyrażeń (4.1) należy (por. [9]) zróżniczkować funkcje (2.5):

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \alpha \frac{dm}{dt} + \beta \frac{dn}{dt}, \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \alpha \frac{dm}{dt}.$$

Wówczas stała krzywizna pierwotna wejdzie jedynie do warunków brzegowych. Stąd dalsze obliczenia przebiegają analogicznie jak dla pręta prostego w pracy [9] i rozwiązanie wyrazi się przez niepełne całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju. W ten sposób przy stałej krzywiznie pręta zakrzywionego zagadnienie dużych ugięć sprowadziliśmy do postaci odpowiadającej prętom prostym. Problem warunków brzegowych dla równań ugięcia oraz dokładności przybliżenia rozwiązania ścisłego omówiono w pracach [5, 8 i 9].

Tak więc podobnie jak dla prętów prostych metoda wielopunktowych przekrojów zastępczych — obok ujednoczenia rozwiązania dla słabo zakrzywionych prętów o różnych przekrojach poprzecznych oraz możliwości uchwycenia materiałów o dowolnej charakterystyce (przez aproksymację ich wielokrotnym wzmocnieniem odcinkowo-liniowym) — sprowadza trudności obliczania ugięć sprężysto-plastycznych do poziomu trudności obliczania ugięć sprężystych (por. [7, 8 i 9]) przy zwiększeniu jednak liczby przedziałów i warunków zszycia. W przypadku prętów zakrzywionych zastosowanie metody jest tym cenniejsze, że nie ma rozwiązań ścisłych.

Literatura cytowana w tekście

1. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structures*, Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London, 1959.
2. T. KOZŁOWSKI, *Zagadnienie stanów granicznych stalowych luków*, Czas. Techn., 4, 1960.
3. T. P. MITCHELL, *The nonlinear bending of thin rods*, Paper ASME, A-50, 1958.
4. E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of arches*, Journ. Mech. Phys. of Solids, 1, 1953, 77-89.
5. J. ORKISZ, *Zasady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla belek zginanych w zakresie sprężysto-plastycznym*, Czas. Techn., 3, 67 (1962), 9-13. Streszcz. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci, Techn., 10, 10 (1962), 405-414.
6. J. ORKISZ, *Krzywe graniczne dla zastępczych wielopunktowych przekrojów belek zginanych sprężysto-plastycznie*, Czas. Techn., 6, 67 (1962), 1-11. Streszcz. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11, 10 (1962), 451-460.
7. J. ORKISZ, *Obliczanie belek statycznie niewyznaczalnych w zakresie sprężysto-plastycznym metodą wielopunktowych przekrojów zastępczych*, Arch. Inżyn. Ładow., 1, 10 (1964), 71-85.
8. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Małe ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*. Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963), 677-712. Streszczenie ang. I cz.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci, Techn., 4, 12 (1964), 177-186.
9. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966), 697-714. Streszczenie w języku angielskim — Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 14 (1966).

Резюме

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПРОГИБ СЛАБО-ЗАКРИВЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ
ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Работа касается применения, приведенного в [5, 6, 8], метода многоточечных эквивалентных сечений, к приближенному расчету упруго-пластических прогибов слабо-закривленных стержней. Этот метод состоит в замене данного сечения балки так наз. многоточечным эквивалентным сечением (рис. 1), состоящим из полок, обладающих сосредоточенными поверхностями. Благодаря этому, для модели идеально-пластического тела и тела с многократным кусочно-линейным упрочнением, можно получить возможно простую (линейную) зависимость, между изгибающим моментом и продольной силой и кривизной балки (см. (2.1)), не зависимо от формы поперечного сечения данного стержня.

Расширяются на случай слабо некривленных стержней, приведенные в работе [8] уравнения малых упруго-пластических прогибов прямых стержней при произвольной внешней нагрузке и, приведенные в работе [9], соответствующие уравнения больших упруго-пластических прогибов для стержня постоянной кривизны. В результате, получены простые уравнения, похожие на предыдущие, описывающие формы стержня после деформации.

Summary

ELASTIC-PLASTIC DEFLECTION OF A BAR OF ANY CROSS-SECTION AND WEAK
CURVATURE

The paper concerns the application of the method of substitute "multipoint sections" described in Refs. [5, 6, 8] for approximate computation of the elastic-plastic deflection of a bar of weak curvature. This method consists in replacing the given section of the bar by a "multipoint section" (Fig. 1) composed of "concentrated flanges". This enables, for a perfect elastic-plastic body, and a body with sectional linear strain hardening, the obtainment of a linear, therefore the simplest possible relation between the bending moment or the longitudinal force and the curvature of the bar (cf. (2.1)), independently of the form of its cross-section. The equations of small elastic-plastic deflections of straight bars obtained in Ref. [8] and the corresponding equations for large deflections obtained in Ref. [9] are generalized in the present paper to the case of bars with weak (constant) curvature. As a result are obtained simple equations resembling the former ones and describing the deformed bar.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

KATEDRA STATYKI BUDOWLI I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 maja 1966 r.