

DWUWYMIAROWE ZAGADNIENIE TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

JAN FILIPKOWSKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

Jak wiadomo w płaskiej, klasycznej teorii sprężystości przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień duże korzyści przynosi zastosowanie funkcji zmiennej zespolonej. Jest to możliwe dzięki temu, że każdą funkcję harmoniczną i biharmoniczną w obszarze płaskim można wyrazić za pomocą funkcji analitycznych jednego zespolonego argumentu.

W ostatnich latach metoda rozwiązywania zagadnień w oparciu o teorię funkcji zmiennej zespolonej zaczęła przenikać do innych działów mechaniki stosowanej, w szczególności tam, gdzie mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi eliptycznego typu, które dość często dają się rozwiązać i napisać w postaci ogólnej (zespolonej) przy przejściu z rozważaniami na płaszczyznę zmiennej zespolonej. Postać zespolona rozwiązania równania (lub układu równań) z pochodnymi cząstkowymi zawiera w sobie wszystkie rozwiązania wewnątrz pewnego danego obszaru, przy czym dane wyrażenie składa się z dowolnych funkcji zespolonego argumentu.

Wyrażenie takie w wielu przypadkach w oparciu o metody teorii funkcji analitycznych pozwala łatwo wykazać ważne własności rozwiązania i jest szczególnie korzystne przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych. Pozwala ono konkretne zagadnienie sprowadzić do równoważnego zagadnienia brzegowego funkcji analitycznych. Ta droga rozwiązywania w wielu przypadkach okazuje się bardzo efektywna i w wyniku dość często prowadzi do zamkniętego rozwiązania postawionego problemu.

W literaturze technicznej znane jest ogólne (zespolone) rozwiązanie układu równań dwuwymiarowej teorii naprężeń cieplnych [2 i 6]. Nie spotyka się natomiast zastosowania go do rozwiązywania konkretnych zagadnień brzegowych.

W celu wyjaśnienia pewnych subtelności ogólnego rozwiązania dwuwymiarowej teorii naprężeń cieplnych w pracy niniejszej podano na innej drodze szczegółowe wyprowadzenie poszczególnych zależności wzbogacając je w dodatkowy związek (4.41), bardzo przydatny przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień brzegowych. Poza tym w oparciu o rozwiązanie dla obszaru nieskończonego występujące w ogólnym rozwiązaniu potencjały $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ odpowiednio zinterpretowano, co pozwoliło korzystać z teorii funkcji analitycznych i w wyniku dany problem brzegowy udaje się sprowadzić do zagadnień brzegowych funkcji analitycznych.

2. Założenia, oznaczenia

A. W odniesieniu do pola temperatur przyjęto następujące założenia:

a) typowe założenie przewodnictwa cieplnego, że ilość ciepła ΔQ przechodząca przez element ds w jednostce czasu jest proporcjonalna do ds i pochodnej normalnej temperatury;

b) temperatura zależy jedynie od dwóch zmiennych x, y oraz że temperatura jest funkcją analityczną tych zmiennych.

B. W odniesieniu do ciała przyjęto:

a) rozważa się ciało jednorodne ze względu na współrzędne punktów przestrzeni jak również na zmienną czasową;

b) rozważa się odkształcenia w zakresie odkształceń liniowych małych i w związku z tym zakłada się stosowalność klasycznych podstawowych założeń geometrycznych liniowej teorii sprężystości;

c) zakłada się, że zmiany temperatur zachodzą w takich granicach, że nie wpływają w sposób istotny na wielkość stałych sprężystych i gęstość ciała.

Oznaczenia

u_i składowe wektora przemieszczeń,

σ_{ij} współrzędne tensora naprężeń,

ε_i współrzędne tensora odkształceń,

X, Y składowe wektora sił powierzchniowych,

M wypadkowy moment sił powierzchniowych,

F_i składowe wektora sił powierzchniowych,

α_T współczynnik rozszerzalności cieplnej,

λ współczynnik wewnętrznego przewodnictwa cieplnego,

W ilość ciepła wytwarzana w jednostce czasu i w jednostce objętości,

E moduł sprężystości,

G moduł odkształcenia postaciowego,

ν współczynnik Poissona,

λ, μ stałe Lamégo,

$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T$.

Dla płaskiego stanu odkształcenia wprowadzamy oznaczenia:

$$\kappa = \frac{\gamma + 3\nu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \quad k = \frac{\gamma\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\alpha_T E}{2(1 - \nu)},$$

a dla uogólnionego płaskiego stanu naprężenia:

$$\kappa^* = \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + \mu} = \frac{3\nu}{1 + \nu}, \quad k^* = \frac{\gamma^* \mu}{\lambda^* + 2\mu} = \frac{1}{2} \alpha_T E,$$

$$\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma^* = \frac{2\mu\gamma}{\lambda + 2\mu}.$$

3. Podstawowe związki dwuwymiarowej teorii naprężeń cieplnych

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia mamy do czynienia między innymi z następującymi zależnościami:

równania równowagi

$$(3.1) \quad \sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

związki między naprężeniami a przemieszczeniami

$$(3.2) \quad \sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + (\lambda u_{k,k} - \gamma T) \delta_{ij}, \quad \sigma_{33} = \lambda u_{k,k} - \gamma T;$$

równania przemieszczeniowe

$$(3.3) \quad u_{i,kk} + (\mu + \lambda) u_{k,ki} + F_i - \gamma T_{,i} = 0.$$

Podobnie dla uogólnionego płaskiego stanu naprężenia można otrzymać: równania równowagi

$$(3.4) \quad \sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

związki między naprężeniami a przemieszczeniami

$$(3.5) \quad \sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + (\lambda^* u_{k,k} - \gamma^* T) \delta_{ij}$$

oraz równania przemieszczeniowe

$$(3.6) \quad u_{i,kk} + (\mu + \lambda^*) u_{k,ki} + F_i - \gamma^* T_{,i} = 0.$$

Jak widać, w obu przypadkach postać zasadniczych związków jest taka sama (różnica w stałych) i dlatego też w dalszych rozważaniach nie ma potrzeby zajmować się tymi stanami oddzielnie. Wystarczy przy rozwiązywaniu konkretnego zagadnienia uwzględnić właściwe stałe. Rozważanie ogólne zostało przeprowadzone dla płaskiego stanu odkształcenia.

4. Wyrażenie naprężeń i przemieszczeń przez temperaturę i dwie dowolne funkcje zmiennej zespolonej

Wiadomo jest, że dla wyznaczenia naprężeń i przemieszczeń, na skutek działania pola temperatur w ogólnym przypadku, można wykorzystać rozwiązanie uzyskane dla ciała obciążonego siłami masowymi zmieniając przy tym odpowiednie wyrazy. Słuszne jest to również w przypadku płaskiego zagadnienia.

Biorąc pod uwagę równania przemieszczeniowe bez uwzględnienia sił masowych

$$(4.1) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} - \gamma T_{,i} = 0$$

i warunki brzegowe $\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$, gdzie

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma T) \delta_{ij},$$

widzimy, że zamiast tych związków można rozpatrzyć równoważne równanie

$$(4.2) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + F_i^0 = 0$$

ze zmodyfikowanymi warunkami brzegowymi

$$(4.3) \quad \sigma_{ni}^0 = \sigma_{ij}^0 n_j,$$

gdzie

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} + \gamma T \delta_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

Należy tutaj zauważyć, że siły masowe F_i^0 mają ściśle określony charakter; wyrażają się potencjalną funkcją temperatury, taką że

$$(4.4) \quad F_x^0 = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F_y^0 = -\gamma \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Dla rozpatrywanego wyżej zastępczego zagadnienia opisanego równaniami (4.2) równania równowagi są następujące:

$$(4.5) \quad \sigma_{ij}^0 + F_i^0 = 0$$

lub

$$(4.6) \quad \sigma_{ij}^0 - \gamma T_{,i} = 0.$$

Po przedstawieniu tych równań w postaci rozwiniętej i odpowiednim zgrupowaniu przyjmują one postać

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}^0 - \gamma T) + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}^0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}^0 - \gamma T) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy}^0 = 0.$$

Zamiast niezależnych zmiennych x, y wprowadzimy inne zmienne z, \bar{z} określone zależnościami

$$(4.8) \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Operacje różniczkowe związane z tym przekształceniem będą miały postać

$$(4.9) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Jeżeli teraz pomnożymy drugie równanie (4.7) przez i oraz dodamy do pierwszego wykonując elementarne przekształcenie z jednoczesnym przejściem do nowych zmiennych z, \bar{z} , to będziemy mieli

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0 + 2i\sigma_{xy}^0) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 - 2\gamma T) = 0.$$

Równanie (4.10) jest spełnione przez funkcję $G(z, \bar{z})$ wtedy, gdy

$$(4.11) \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 - 2\gamma T, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = -\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 - 2i\sigma_{xy}^0.$$

Niech teraz funkcja $D(z, \bar{z})$ przedstawia zespolone przemieszczenia, tzn.

$$(4.12) \quad D(z, \bar{z}) = u_x + iu_y.$$

Obliczając pochodną tej funkcji względem zmiennej \bar{z} i wykorzystując związki (4.9) możemy napisać

$$(4.13) \quad 2 \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

Z zależności między naprężeniami a przemieszczeniami

$$\sigma_{ij}^0 = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}$$

dochodzi się do wzorów

$$(4.14) \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\sigma_{xy}^0}{\mu},$$

$$(4.15) \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{2\mu},$$

$$(4.16) \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\sigma_x^0 + \sigma_y^0}{2(\mu + \lambda)}.$$

Po uwzględnieniu związków (4.14) i (4.15) równanie (4.13) przyjmie postać

$$(4.17) \quad 4\mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0 + 2i\sigma_{xy}^0.$$

Z kolei biorąc pod uwagę drugie równanie z (4.11) otrzymamy

$$(4.18) \quad 4\mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = - \frac{\partial G}{\partial \bar{z}},$$

co prowadzi do zależności

$$(4.19) \quad 4\mu D(z, \bar{z}) = f(z) - G(z, \bar{z}),$$

gdzie $f(z)$ jest dowolną funkcją analityczną zmiennej z .

Różniczkując funkcję (4.12) względem z i następnie wykorzystując związki (4.9) oraz zależności (4.16) otrzymujemy

$$(4.20) \quad 4(\lambda + \mu) \frac{\partial D}{\partial z} = \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 + 2i(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Podobnie różniczkując obie strony równania (4.19) względem z i podstawiając zamiast $\partial G/\partial z$ wyrażenie ze związków (4.11) dojdziemy do zależności

$$(4.21) \quad 4\mu \frac{\partial D}{\partial z} = f'(z) - \sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0 + 2\gamma T.$$

Eliminując teraz z równań (4.20) i (4.21) pochodną $\partial D/\partial z$ otrzymamy równanie

$$(4.22) \quad \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \gamma T - 2 \frac{\lambda - \mu}{\lambda + 2\mu} \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) i = 4\varphi'(z),$$

gdzie

$$(4.23) \quad \varphi(z) = \frac{1}{4} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} f(z).$$

Część rzeczywista równania (4.22) ma postać

$$(4.24) \quad \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \gamma T = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}].$$

Jeżeli teraz zamiast sumy naprężeń w pierwszym równaniu (4.11) wstawić odpowiednie wyrażenie ze związku (4.24), to wyżej wymienione równanie przyjmie postać

$$(4.25) \quad \frac{\partial G}{\partial z} = [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - 2 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \gamma T,$$

a po scałkowaniu

$$(4.26) \quad G(z, \bar{z}) = 2 [\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)}] + 2\overline{\psi(z)} - 2 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \gamma \int T(z, \bar{z}) dz.$$

Mając funkcję $G(z, \bar{z})$ nie trudno znaleźć pozostałe wielkości. Przemieszczenie wyrazimy za pomocą funkcji $\varphi(z)$, $\psi(z)$ i funkcję temperatury $T(z, \bar{z})$, jeżeli weźmiemy pod uwagę zależności (4.19), (4.23) i (4.26), mianowicie

$$(4.27) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{\gamma\mu}{\lambda + 2\mu} \int T(z, \bar{z}) dz.$$

Celowe wydaje się przyjęcie następujących oznaczeń:

$$(4.28) \quad \kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad k = \frac{\gamma\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Po wprowadzeniu stałych κ i k funkcja $G(z, \bar{z})$ i związek na wartość zespoloną przemieszczeń przyjmują postać następującą:

$$(4.29) \quad \frac{1}{2} G(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - k \int T(z, \bar{z}) dz,$$

$$(4.30) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + k \int T(z, \bar{z}) dz.$$

W celu określenia naprężeń w zależności od $\varphi(z)$, $\psi(z)$ i $T(z, \bar{z})$ wróćmy jeszcze raz do równań (4.11). Pomnóżmy obustronnie pierwsze z nich przez $dz = dx + idy$, a drugie przez $d\bar{z} = dx - idy$ i następnie dodajmy stronami. Otrzymamy wówczas

$$(4.31) \quad \frac{\partial G}{\partial z} dz + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 2(\sigma_{yy}^0 - \gamma T) dx + 2i(\sigma_{xx}^0 - \gamma T) - 2\sigma_{xy}^0(dy + idx).$$

Lewa strona równania (4.31) jest różniczką zupełną funkcji $G(z, \bar{z})$. Przechodząc po prawej stronie do naprężeń rzeczywistych, tzn. powstałych na skutek przyłożenia pola temperatur, będziemy mieli

$$(4.32) \quad \frac{1}{2} dG(z, \bar{z}) = \sigma_{yy} dx + i\sigma_{xx} dy - \sigma_{xy} (dy + idx).$$

Siły brzegowe σ_{ni} wyrażają się następująco:

$$(4.33) \quad \sigma_{nx} = \sigma_{xx} \cos(n, x) + \sigma_{xy} \cos(n, y), \quad \sigma_{ny} = \sigma_{xy} \cos(n, x) + \sigma_{yy} \cos(n, y).$$

Wiedząc, że $\cos(n, x) = dy/ds$, $\cos(n, y) = -dx/ds$, można związkom (4.33) nadać postać

$$(4.34) \quad \sigma_{nx} = \sigma_{xx} \frac{dy}{ds} - \sigma_{xy} \frac{dx}{ds}, \quad \sigma_{ny} = \sigma_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_{yy} \frac{dx}{ds}.$$

Mnożąc teraz oba równania (4.34) przez ds oraz pierwsze równanie przez $-i$ i dodając stronami otrzymamy

$$(4.35) \quad (-i\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) ds = -\sigma_{yy} dx - i\sigma_{xx} dy + \sigma_{xy} (dy + idx).$$

Nie trudno zauważyć, że prawe strony wzorów (4.32) i (4.35) są pod względem wielkości identyczne; występuje tylko różnica w znaku. Wobec czego dochodzimy do zależności

$$i(\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds = \frac{1}{2} dG(z, \bar{z}),$$

która na mocy warunku (4.29) przyjmuje postać

$$(4.36) \quad (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds = -id[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - k \int T(z, \bar{z}) dz].$$

Zależność ta ma zasadnicze znaczenie w dalszych rozważaniach i jak widać w przypadku izotermicznego stanu przechodzi w odpowiedni związek podany przez N. I. MUSCHELISZWILIEGO ([3], str. 114).

Analogicznie jak w pracy [3] dochodzi się do następujących zależności:

$$(4.37) \quad \sigma_{xx} + i\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} - kT(z, \bar{z}) + \int \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} dz,$$

$$(4.38) \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xx} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} - kT(z, \bar{z}) - \int \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

Ze związków (4.37) i (4.38) przez proste przekształcenie otrzymuje się zależności, które w praktyce są bardziej przydatne, mianowicie

$$(4.39) \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - 2kT,$$

$$(4.40) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] - 2k \int \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

Dla wypisywania w postaci rozwiniętej warunków brzegowych szczególnie znaczenie ma związek, jaki otrzymamy całkując obustronnie względem s równanie (4.36):

$$(4.41) \quad i \int_{\delta} (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds + \text{const} = \varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - k \int T(z, \bar{z}) dz.$$

Tak więc otrzymano wyrażenia na podstawowe wielkości, jak przemieszczenia i naprężenia w zależności od dwóch dowolnych funkcji $\varphi(z)$, $\psi(z)$ i funkcji temperatury. W przypadku stanu izotermicznego związki te przechodzą w odpowiednie postaci podane w pracy [3].

5. Naprężenia i przemieszczenia w ciele nieograniczonym

Każda całka szczególna układu równań

$$(5.1) \quad \mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} - \gamma T_{,i} = 0, \quad i, j = 1, 2$$

może być zinterpretowana jako ogólne rozwiązanie dla ciała nieograniczonego.

Rozwiązanie szczególne układu (5.1) uzyskać można w prosty sposób, postępując drogą podaną przez J. N. GOODIERA, wprowadzając tzw. potencjał termosprężystego przemieszczenia Φ zgodnie ze związkiem

$$(5.2) \quad u_i = \Phi_{,i}.$$

Po uwzględnieniu zależności (5.2) równanie (5.1) przyjmie postać

$$\mu \Phi_{,ikk} + (\lambda + \mu) \Phi_{,kki} - \gamma T_{,i} = 0,$$

a następnie po wykonaniu całkowania względem x_i i prostym przekształceniu otrzymamy równanie Poissona

$$(5.3) \quad \Phi_{,kk} = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} T.$$

Zwykle rozwiązanie równania (5.3) przyjmuje się w postaci całki Poissona, która dla przypadku płaskiego zagadnienia ma postać

$$(5.4) \quad \Phi(x_r) = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \int_{\Gamma} T(\xi_r) \ln r(x_r, \xi_r) d\Gamma(\xi_r).$$

Tutaj $r(x_r, \xi_r)$ jest odległością punktu x_r od punktu ξ_r .

Mając określoną funkcję $\Phi(x_r)$ można przy uwzględnieniu zależności (5.2) wyznaczyć przemieszczenia i następnie naprężenia. W ten sposób zbudowane rozwiązanie ze względu na całkową postać wzoru (5.4) nie jest zbyt proste. Analizując to rozwiązanie można dojść do wniosku, że dla otrzymania ostatecznych wyników wcale nie musimy znać postaci funkcji Φ , wystarczy, gdy będziemy znali jej pochodne.

Wobec tego zamiast równania (5.3) możemy rozwiązać równanie

$$(5.5) \quad u_{k,k} = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} T,$$

które otrzymamy, jeżeli uwzględnimy od razu zależność (5.2).

Równanie (5.5) po wprowadzeniu nowych zmiennych zgodnie ze wzorem (4.8) i uwzględnieniu zależności (4.9) przyjmie postać

$$(5.6) \quad \frac{\partial}{\partial z}(u_x + iu_y) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u_x - iu_y) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} T.$$

Otrzymane równanie napiszemy w nieco prostszej postaci mnożąc obustronnie przez 2μ i wykorzystując drugi związek (4.28):

$$(5.7) \quad 2\mu \frac{\partial}{\partial z}(u_x + iu_y) + 2\mu \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u_x - iu_y) = 2kT.$$

Równanie (5.7), a tym samym i równanie (5.5), będzie spełnione, jeśli przyjmie się

$$(5.8) \quad 2\mu (u_x + iu_y) = k \int T(z, \bar{z}) dz.$$

Mamy więc wzór określający bezpośrednio przemieszczenia termiczne w ciele nieograniczonym.

Z tak określonych przemieszczeń można przez związki (3.2) wyznaczyć naprężenia. W tym przypadku ze wzoru (5.8) należałoby wydzielić część rzeczywistą i urojona. Aby tego uniknąć, można najpierw określić kombinację współrzędnych tensora naprężeń, a następnie przejść do samych składowych.

Sumę naprężeń σ_{kk} wyznaczamy posługując się wzorem (3.2) dla przypadku $i = j = k$ i równaniem (5.5) przechodząc w ostatecznym wyniku do stałej k :

$$(5.9) \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -2kT.$$

Wyrażenie $\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{yx}$ na mocy związku (3.2) można napisać w postaci

$$(5.10) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{yx} = -2\mu \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} (u_x - iu_y) \right),$$

a po przejściu do zmiennych z, \bar{z} i uwzględnieniu zależności (4.9) do postaci

$$(5.11) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = -4\mu \frac{\partial}{\partial z}(u_x - iu_y).$$

Podstawiając do prawej strony związku (5.11) sprzężoną wartość wyrażenia (5.8) otrzymamy ostatecznie

$$(5.12) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = -2k \int \frac{\partial T(z, \bar{z})}{\partial z} d\bar{z}.$$

Mamy zatem bardzo proste wzory odnoszące się do ciała nieograniczonego, z których równie prosto wyznacza się same naprężenia. Od funkcji temperatury żądamy, aby była funkcją analityczną względem zmiennych x i y .

6. Sprowadzenie dwuwymiarowego zagadnienia teorii naprężeń cieplnych do zagadnienia brzegowego funkcji analitycznych

Niech ciało o dowolnym brzegu zajmuje jednospójny lub wielospójny obszar S i niech na niego działa jedynie dane pole temperatur (przypadek obciążenia zewnętrznego można rozpatrzyć oddzielnie [3]).

Porównując wzory (5.8), (5.9) i (5.12) ze wzorami (4.30), (4.39) i (4.40) widzimy, że pierwsze można otrzymać z drugich przez opuszczenie pewnych składników. Nasuwa się zatem bardzo istotny dla dalszych rozważań wniosek: funkcjom $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ odpowiada stan naprężeń i przemieszczeń powstały na skutek pojawienia na brzegach ciała naprężeń lub przemieszczeń ze znakiem przeciwnym, względnie jednocześnie jednych i drugich (mieszane warunki brzegowe), określonych przy tej samej temperaturze w ciele nieograniczonym.

W związku z tym mówiąc o potencjałach $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ trzeba mieć na uwadze, że odnoszą się one do stanu izotermicznego. Dlatego też wszystko to, co odnośnie funkcji $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ powiedziane jest w pracy [3] również słuszne jest w całej ciągłości i tutaj. Poza tym rozpatrując działanie na ciało tylko zmian temperatury będziemy mieli szereg uproszczeń, wynikających z faktu ciągłości naprężeń i przemieszczeń wzdłuż dowolnej linii nie przechodzącej przez źródło ciepła (będzie o nich mowa w dalszym ciągu pracy).

Dla jednoznacznego określenia naprężeń i przemieszczeń musimy znać postacie funkcji $\varphi(z)$ i $\psi(z)$. Funkcję tę wyznaczamy z warunków, jakie muszą spełniać naprężenia i przemieszczenia na brzegu rozpatrywanego ciała S . Sformułowanie tych warunków brzegowych prowadzi do zagadnień brzegowych funkcji analitycznych.

Rozróżniamy trzy rodzaje warunków brzegowych:

I. Dane są wartości naprężeń w każdym punkcie brzegowym ciała. W tym przypadku związek brzegowy na funkcje $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ można napisać korzystając z zależności (4.41), mianowicie

$$(6.1) \quad i \int_s (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds + \text{const} = \varphi(t) + i\overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - kJ(t, \bar{t}).$$

Prawą stronę związku (6.1) należy traktować jako graniczną wartość wyrażenia:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - k \int T(z, \bar{z}) dz,$$

gdy z zmierza do punktu brzegowego t . Przyjęto tutaj, że

$$J(z, \bar{z}) = \int T(z, \bar{z}) dz.$$

Lewa strona wzoru (6.1) jest funkcją zespoloną rzeczywistego argumentu s , a ponieważ wartości s odpowiada ściśle określona liczba zespolona t , to tym samym wyrażenie to jest funkcją zmiennej zespolonej t .

II. Dane są wartości przemieszczeń w każdym punkcie brzegowym ciała. Do związku brzegowego dochodzi się tutaj w oparciu o wzór (4.30)

$$(6.2) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(t) - \overline{t\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + kJ(t, \bar{t}).$$

Podobnie jak poprzednio tak i teraz prawa strona równania (6.2) jest wartością graniczną funkcji

$$\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + k \int T(z, \bar{z}) dz,$$

gdy z zmierza do punktu brzegowego t .

III. Na części brzegu L' ciała S dane są wartości naprężeń, a na pozostałej części brzegu L'' wartości przemieszczeń.

Związki brzegowe wyrażają się następująco:

na konturze L'

$$(6.3) \quad i \int_s (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds + \text{const} = \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - kJ(t, \bar{t}),$$

na konturze L''

$$(6.4) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + kJ(t, \bar{t}).$$

W przypadku gdy na brzegu ciała jednorodnego naprężenia względnie przemieszczenia są równe zeru, to związki brzegowe przyjmują znacznie prostszą postać:

I'. Brzeg ciała swobodny ⁽¹⁾

$$(6.5) \quad \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = kJ(t, \bar{t}).$$

II'. Brzeg ciała zamocowany

$$(6.6) \quad -\kappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = kJ(t, \bar{t}).$$

III'. Brzeg ciała na części L' swobodny, a na pozostałej części L'' utwierdzony:

na konturze L'

$$(6.7) \quad \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = kJ(t, \bar{t}),$$

na konturze L''

$$(6.8) \quad -\kappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = kJ(t, \bar{t}).$$

Otrzymane związki brzegowe, jak widać z ich postaci, są bardzo do siebie podobne, szczególnie w przypadku I' i II' warunku brzegowego. Istnieje tylko różnica we współczynniku przy pierwszej funkcji wyrażenia po lewej stronie wzorów (6.5) i (6.6). Dlatego też nie ma potrzeby zajmować się tymi zagadnieniami oddzielnie; wystarczy rozpatrzyć warunek (6.6), a w przypadku gdy będzie nas interesować zagadnienie opisane związkiem (6.5), przyjąć w rozwiązaniu (6.6) współczynnik $\kappa = -1$. Innymi słowy, zagadnienie teorii naprężeń cieplnych dla ciała jednorodnego o swobodnym brzegu jest szczególnym przypadkiem tego samego zagadnienia dla ciała o brzegu utwierdzonym.

⁽¹⁾ Opuszczono wartość i stałą; jest to dopuszczalne, ponieważ funkcja $\varphi(z)$ określona jest z dokładnością do stałej.

7. Zależność siły wypadkowej i momentu od potencjałów i temperatury

Siłę wypadkową (X, Y) powierzchniowych sił działających na dodatniej stronie łuku AB znajdującego się w obszarze zajęтым przez ciało można określić w zależności od potencjałów i temperatury, opierając się na równaniu (4.36). W rezultacie otrzymamy

$$(7.1) \quad X+iY = \int_{AB} (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds = -i [\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B + ik [J(z, \bar{z})]_A^B,$$

gdzie symbol $[f]_A^B$ oznacza przyrost wyrażenia f wzdłuż łuku AB .

Moment wspomnianych sił powierzchniowych względem początku układu napiszemy w postaci

$$(7.2) \quad M = \int_{AB} (x\sigma_{ny} - y\sigma_{nx}) ds = \operatorname{Re} \left[-i \int_{AB} \bar{z} (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds \right].$$

Wykorzystując zależności łączące naprężenia w różnych układach odniesienia i związku (4.39), (4.40) wzór (7.2) można napisać następująco:

$$(7.3) \quad M = \operatorname{Re} [\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\overline{\varphi'(z)}]_A^B + k \operatorname{Re} [J(z, \bar{z})]_A^B.$$

Tutaj $\chi'(z) = \psi(z)$.

W przypadku gdy krzywa AB jest krzywą zamkniętą, to z uwagi na jednoznaczność pola temperatury, naprężeń i przemieszczeń będziemy mieli:

$$(7.4) \quad X+iY = i [\varphi(z) + \psi(z)]_A^A, \quad M = \operatorname{Re} [\chi(z) - z\psi(z)]_A^A.$$

Ze wzorów (7.4) wynika, że w jednospójnym obszarze, gdzie $\varphi(z)$, $\psi(z)$ i $\chi(z)$ są funkcjami analitycznymi, mamy $X = Y = M = 0$.

8. Naprężenia i przemieszczenia w ortogonalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych związanych z konforemny odzworowaniem danego obszaru na koło jednostkowe

Niech funkcja $z = \omega(\zeta)$ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie obszar Σ płaszczyzny ζ (najczęściej okrąg jednostkowy) na dany obszar jednospójny S płaszczyzny z . Niech poza tym odzworowanie przebiega w ten sposób, że punktowi $\zeta = 0$ odpowiada punkt $z = \omega(0) = 0$, o ile obszar jest skończony i wartości $\zeta = 0$ odpowiada wartość $z = \omega(0) = \infty$ w przypadku, gdy obszar jest nieograniczony.

Związki na naprężenia i przemieszczenia w krzywoliniowym układzie współrzędnych związanym z tym odzworowaniem będą miały postać

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= 2 [\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}] - 2kT_1(\zeta, \bar{\zeta}), \\ \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta) - k\omega(\zeta) K_1(\zeta, \bar{\zeta})], \\ 2\mu(u_\xi + iu_\eta) &= \frac{\zeta \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho^2 |\omega'(\zeta)|} \left[\kappa \varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} + kJ_1(\zeta, \bar{\zeta}) \right]. \end{aligned}$$

Przyjęto tutaj

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= \varphi[\omega(\zeta)], & \psi_1(\zeta) &= \psi[\omega(\zeta)], \\ \Phi_1(\zeta) &= \frac{\varphi'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \Psi_1(\zeta) &= \frac{\psi'_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \\ T_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= T[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}], & K_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= K[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}], \\ J_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= J[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}], \end{aligned}$$

gdzie

$$J(z, \bar{z}) = \int T(z, \bar{z}) dz \quad \text{i} \quad K(z, \bar{z}) = \int \frac{\partial T(z, \bar{z})}{\partial z} d\bar{z}.$$

9. Naprężenia i przemieszczenia w ortogonalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych, związanym z konforemnym odwzorowaniem danego obszaru na półpłaszczyznę

Niech funkcja $z = \omega(\zeta)$, gdzie $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie półpłaszczyznę $\eta \leq 0$ na obszar S płaszczyzny z w ten sposób, aby punkty w skończoności płaszczyzny ζ przechodziły w punkty w skończoności płaszczyzny z i odwrotnie.

Przy takim odwzorowaniu naprężenia i przemieszczenia w krzywoliniowym układzie współrzędnych można napisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= 2[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}] - 2T_1(\zeta, \bar{\zeta}), \\ (9.1) \quad \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\xi\eta} &= \frac{2}{\omega'(\zeta)} [\omega(\zeta) \overline{\Phi_1(\zeta)} + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta) - k\omega'(\zeta) K_1(\zeta, \bar{\zeta})], \\ 2\mu(u_\xi + iu_\eta) &= \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \left[\kappa\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} + kJ_1(\zeta, \bar{\zeta}) \right]. \end{aligned}$$

Symbole φ_1 , ψ_1 , Φ_1 , Ψ_1 , J_1 , i K_1 mają to samo znaczenie, co w poprzednim punkcie.

10. Naprężenia i przemieszczenia wyrażone przez temperaturę i jedną funkcję zmiennej zespolonej odpowiednio przedłużoną na zewnątrz rozpatrywanego obszaru

Związki dla obszaru ograniczonego okręgiem. Niech ciało zajmuje obszar S_1^+ ograniczony okręgiem L i niech promień okręgu równa się 1 (łatwo przejść w końcowych związkach do okręgu o dowolnym promieniu R). Wprowadzając układ biegunowy ϱ, ν mamy

$$z = \varrho e^{i\nu},$$

a związki na naprężenia i przemieszczenia przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varrho\varrho} + \sigma_{\nu\nu} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\ (10.1) \quad \sigma_{\varrho\varrho} + i\sigma_{\varrho\nu} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \bar{z} \overline{\varphi''(z)} - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\psi'(z)} - kT(z, \bar{z}) + k \frac{\bar{z}}{z} \int \frac{\partial T}{\partial z} dz, \\ 2(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + k \int T(z, \bar{z}) dz. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz wykonamy różniczkowanie względem v w równaniu (10.1)₃, następnie przyjmiemy $\varphi'(z) = \Phi(z)$ oraz $\psi'(z) = \Psi(z)$, to związki powyższe przyjmą postać:

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{ee} + \sigma_{vv} &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\ \sigma_{ee} + i\sigma_{ev} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)} - kT(z, \bar{z}) + \frac{\bar{z}}{z} \int \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} dz, \\ 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial v} + i \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) &= iz \left[\kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + \bar{z}\overline{\Phi'(z)} + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)} + k \frac{\partial}{\partial v} \int T(z, \bar{z}) dz \right]. \end{aligned}$$

Występujące w powyższych wzorach funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ są funkcjami analitycznymi w obszarze S^+ zajmowanym przez ciało i jako takie mogą być przedłużone analitycznie na obszar dopełniający S^- . W punkcie 6 wykazano, że potencjały $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ odnoszą się do stanu izotermicznego i dlatego w tym zagadnieniu przy konstruowaniu przedłużenia analitycznego funkcji $\Phi(z)$, można skorzystać ze wszystkich wywodów podanych w pracy [3], str. 121. W rezultacie będziemy mieli następujące związki:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \overline{\Phi^-} \left(\frac{1}{z} \right) &= -\Phi^+(z) + z\Phi^{+'}(z) + z^2\Psi^+(z), \\ \Psi^+(z) &= \frac{1}{z^2}\Phi^+(z) + \frac{1}{z^2}\overline{\Phi^-} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z}\Phi^{+'}(z), \\ \overline{\Phi^+}(z) - \bar{z}\overline{\Phi^{+'}(z)} &= \bar{z}^2\overline{\Psi^+(z)} - \overline{\Phi^-} \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Tutaj w celu uniknięcia nieporozumień w prowadzono oznaczenie: Φ^+ równa się funkcji Φ , jeśli jej zmienna niezależna z należy do S^+ , Φ^- równa się funkcji Φ , jeśli jej zmienna niezależna z należy do S^- .

Przez tak zdefiniowaną funkcję naprężenia i pochodne przemieszczeń wyrażają się następująco:

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{ee} + \sigma_{vv} &= 2 [\Phi^+(z) + \overline{\Phi^+(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\ \sigma_{ee} + i\sigma_{ev} &= \Phi^+(z) - \overline{\Phi^-} \left(\frac{1}{z} \right) + \bar{z} \left(\bar{z} - \frac{1}{z} \right) \overline{\Psi^+(z)} - kT(z, \bar{z}) + k \frac{\bar{z}}{z} \int \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} dz, \\ 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial v} + i \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) &= iz \left[\kappa \Phi^+(z) + \overline{\Phi^-} \left(\frac{1}{z} \right) - \bar{z} \left(\bar{z} - \frac{1}{z} \right) \overline{\Psi^+(z)} + \right. \\ &\quad \left. + k \frac{\partial}{\partial v} \int T(z, \bar{z}) dz \right]. \end{aligned}$$

Związki dla płaszczyzny. Niech teraz ciało sprężyste zajmuje dolną płaszczyznę $y \leq 0$, którą oznaczać się będzie przez S^- . Należy zwrócić uwagę, że przyjęty zwrot linii L (osi x) ograniczającej ciało jest przeciwny do tego, jaki zwykliśmy uważać za dodatni (dodatni, gdy obszar S znajduje się po lewej stronie linii L).

Związki na naprężenia i przemieszczenia można w tym przypadku napisać:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\
 \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] - 2k \int \frac{\partial T}{\partial z} d\bar{z}, \\
 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \psi(z) - k \int T(z, \bar{z}) dz,
 \end{aligned}
 \tag{10.5}$$

gdzie $\Phi = \varphi'(z)$ i $\Psi(z) = \psi'(z)$ są funkcjami regularnymi w S^- . Z powyższych wzorów po elementarnych przekształceniach dochodzimy do następujących formuł:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} - kT(z, \bar{z}) - k \int \frac{\partial T}{\partial z} dz, \\
 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} + k \frac{\partial}{\partial x} \int T(z, \bar{z}) dz.
 \end{aligned}
 \tag{10.6}$$

Występującą we wzorach (10.6) funkcję $\Phi(z)$ można podobnie jak w punkcie pierwszym niniejszego ustępu przedłużyć analitycznie na pozostałą część obszaru S^+ (półpłaszczyznę górną):

$$\begin{aligned}
 \overline{\Phi^+}(z) &= -\Phi^-(z) - z\overline{\Phi'^-(z)} - \Psi^-(z), \\
 \Psi^-(z) &= -\Phi^-(z) - \overline{\Phi^+}(z) - z\overline{\Phi'^-(z)}.
 \end{aligned}
 \tag{10.7}$$

Podstawiając teraz za $\Psi^-(z)$ funkcję (10.7)₂ do wzorów (10.5)₁ i (10.5)₂ będziemy mieli

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\Phi^-(z) + \overline{\Phi^-(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\
 \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 [(\bar{z} - z)\overline{\Phi'^-(z)} - \Phi^-(z) - \overline{\Phi^+}(z)] - 2k \int \frac{\partial T}{\partial z} d\bar{z}.
 \end{aligned}
 \tag{10.8}$$

Podobnie, jeśli podstawimy (10.7)₂ do wzoru (10.6), to otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi^-(z) - \Phi^+(z) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'^-(z)} - kT(z, \bar{z}) - k \int \frac{\partial T}{\partial z} dz, \\
 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= \kappa\Phi^-(z) + \Phi^+(z) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'^-(z)} + k \frac{\partial}{\partial x} \int T(z, \bar{z}) dz.
 \end{aligned}
 \tag{10.9}$$

11. Uwagi o rozwiązaniu zagadnień w przypadku działania skupionego źródła ciepła

W zasadzie wszystkie rozważania, jakie zostały przeprowadzone w poprzednich punktach, odnoszą się do przypadku, gdy funkcja temperatury jest funkcją analityczną zmiennych niezależnych w danym obszarze S .

Rozpatrując działanie skupionego źródła ciepła przyłożonego w punkcie z_0 obszaru S należy wziąć pod uwagę fakt, że potencjał zespolony przepływu cieplnego w punkcie z_0 posiada osobliwości typu logarytmicznego i funkcja temperatury, jako część rzeczywista tego potencjału, nie jest funkcją analityczną w tym punkcie. Wobec tego przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień z tej dziedziny nie możemy korzystać (w sposób bezpośredni) z podanych powyżej zależności.

Wracając do rozwiązania dla obszaru nieskończonego, podanego w p. 5, można zauważyć, że całka szczególna

$$(11.1) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = k \int T(z, \bar{z}) dz$$

równania różniczkowego

$$(11.2) \quad \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = kT$$

przedstawia poprawne rozwiązanie także w przypadku działania skupionego źródła ciepła przyłożonego w punkcie $(0, 0)$.

Przez termin poprawne rozwiązanie rozumie się rozwiązanie spełniające równanie różniczkowe (11.2) i posiadające własności funkcji klasy C^1 . Z prostych zależności podanych poniżej wynika, że tak jest rzeczywiście.

Temperaturę w ciele nieograniczonym określa funkcja

$$(11.3) \quad T(z, \bar{z}) = -\frac{W}{4\lambda\pi} \ln z\bar{z} + C$$

i wobec tego całka szczególna przyjmie postać

$$(11.4) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} z(\ln z\bar{z} - 1) + kCz.$$

Wydzielając część rzeczywistą i urojoną w (11.4) i różniczkując odpowiednio względem x i y będziemy mieli

$$(11.5) \quad \begin{aligned} \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{Wk}{8\lambda\pi} \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 \right] + \frac{Ck}{2}, \\ \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{Wk}{8\lambda\pi} \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} - 1 \right] + \frac{Ck}{2}. \end{aligned}$$

Z dodania związków (11.5) otrzymujemy równanie różniczkowe (11.2). Innymi słowy, postać zespolona (11.4) jest rozwiązaniem równania (11.2). Łatwo także wykazać, że spełniona jest zależność

$$\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Analizując powyżej wykonane operacje matematyczne nie trudno dojść do wniosku, że otrzymane rozwiązanie szczególne na podstawie wzoru (11.1) w przypadku działania źródła ciepła poza początkiem układu nie jest poprawne, tj. nie spełnia równania różniczkowego (11.2) i w oparciu o tak otrzymane wyrażenie nie można budować rozwiązania dla konkretnego zagadnienia.

Mając źródło ciepła dane poza początkiem układu współrzędnych, np. w punkcie z_0 , poprawne rozwiązanie otrzymamy, gdy całkę we wzorze (11.1) obliczymy w lokalnym układzie współrzędnych, którego początkiem będzie punkt z_0 , i następnie przez zwykłe przesunięcie układu lokalnego wrócimy do układu wyjściowego.

12. Naprężenie cieplne w tarczy kołowej o mieszanych warunkach brzegowych, wywołane działaniem skupionego źródła ciepła

W oparciu o podane wyżej zależności i pracę [3] rozważmy zagadnienie wyznaczenia naprężeń termicznych w tarczy kołowej o promieniu R , której część brzegu L' jest wolna od naprężeń, a pozostała część brzegu L'' jest zupełnie utwierdzona i w środku której działa skupione źródło ciepła. Założymy ponadto, że na powierzchniach zewnętrznych (górnej i dolnej) tarcza posiada doskonałą izolację termiczną, a na brzegu L tarczy panuje stała temperatura T_0 .

Temperaturę wewnątrz ciała wyznaczymy posługując się potencjałem zespolonym przepływu cieplnego dla obszaru nieskończonego. Dla podanych wyżej danych w układzie prostokątnym przechodzącym przez środek tarczy będzie ona wynosić

$$(12.1) \quad T(x, y) = \frac{W}{2\lambda\pi} \ln R(x^2 + y^2)^{-1/2} + T_0.$$

Tutaj W oznacza intensywność źródła ciepła, a λ współczynnik wewnętrzznego przewodnictwa cieplnego. Po przejściu do zmiennych $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ otrzymamy

$$(12.2) \quad T(z, \bar{z}) = \frac{W}{4\lambda\pi} \ln \frac{R^2}{z\bar{z}} + T_0.$$

W dalszych rozważaniach potrzebne będą całki $\int T(z, \bar{z}) dz$, $\int \frac{\partial T}{\partial z} d\bar{z}$, które odpowiednio wynoszą

$$(12.3) \quad J(z, \bar{z}) = \int T(z, \bar{z}) dz = \frac{Wz}{4\lambda\pi} \left(\ln \frac{R^2}{z\bar{z}} + 1 \right) + T_0 z,$$

$$K(z, \bar{z}) = \int \frac{\partial T}{\partial z} d\bar{z} = -\frac{W}{4\lambda\pi} \frac{\bar{z}}{z}.$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy, że promień tarczy $R = 1$ i wprowadzamy oznaczenia jak na rys. 1.

Związki brzegowe dla powyżej zdefiniowanego zagadnienia można napisać w dwojakiej postaci:

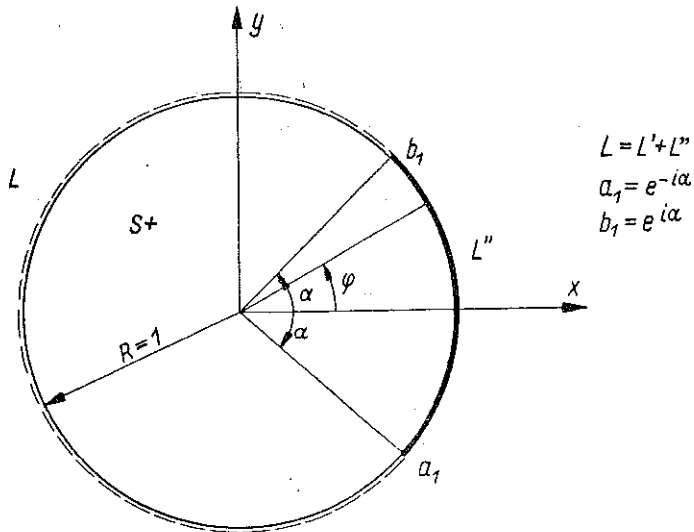
1) w oparciu o zależności (6.7) i (6.8)

$$(12.4) \quad \begin{aligned} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= k \left(\frac{W}{4\lambda\pi} + T_0 \right) t \quad \text{na } L', \\ -\kappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= k \left(\frac{W}{4\lambda\pi} + T_0 \right) t \quad \text{na } L''; \end{aligned}$$

2) biorąc pod uwagę wzory (10.4)₂ i (10.4)₃

$$(12.5) \quad \begin{aligned} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= k \left(\frac{W}{4\lambda\pi} + T_0 \right) \quad \text{na } L', \\ \kappa\Phi^+(t) + \Phi^-(t) &= -k \left(\frac{W}{4\lambda\pi} + T_0 \right) \quad \text{na } L''. \end{aligned}$$

Zarówno jedno (12.4) jak i drugie (12.5) zagadnienie brzegowe sprowadza się do zagadnienia Riemanna dla funkcji analitycznych z tym zastrzeżeniem, że w pierwszym przypadku droga prowadzi przez całkę typu Cauchy'ego i osobliwe równanie całkowe, natomiast w drugim przypadku przejście jest bezpośrednie.



Rys. 1

Dla rozważanego przez nas obszaru (okrąg jednostkowy) łatwiejszym do rozwiązania jest zagadnienie (12.5). Oznaczając występującą po prawej stronie wzoru (12.5) wielkość przez ε_1 , tj.

$$(12.6) \quad \varepsilon_1 = k \left(\frac{W}{4.1\pi} + T_0 \right),$$

zależnościom (12.5) nadamy postać

$$(12.7) \quad \begin{aligned} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= \varepsilon_1 && \text{na } L', \\ \kappa\Phi^+(t) + \Phi^-(t) &= -\varepsilon_1 && \text{na } L''. \end{aligned}$$

Równanie (12.7) można rozwiązać bezpośrednio (bez dodatkowych przekształceń) względnie w dwu etapach: najpierw równanie

$$(12.8) \quad \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = 0 \quad \text{na } L,$$

a następnie układ równań

$$(12.9) \quad \begin{aligned} \Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) &= 0 && \text{na } L', \\ \kappa\Phi_2^+(t) + \Phi_2^-(t) &= -\varepsilon_2 && \text{na } L''. \end{aligned}$$

Tutaj ε_2 jest sumą ε_1 z układu (12.7) i dodatkowego składnika pojawiającego się na skutek rozwiązania równania (12.8). Rozwiązaniem będzie funkcja

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z).$$

Ten drugi sposób rozwiązania, mimo że jest nieco dłuższy, wydaje się być bardziej przejrzysty.

Zwróćmy uwagę, że warunek brzegowy (12.8) odpowiada przypadkowi, gdy na brzegu ciała S (okręgu jednostkowego) dane są naprężenia, a związki (12.9) odnoszą się do przypadku, gdy na części brzegu L' ciała S naprężenia są równe zeru, na pozostałej zaś części brzegu L'' dane są jedynie przemieszczenia.

Na mocy znanych zależności z teorii całki typu Cauchy'ego rozwiązaniem równania (12.8) będzie funkcja

$$(12.10) \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varepsilon_1}{t-z} dt + B_0.$$

Jak pokazano w pracy [3] (§ 121) stała B_0 spełnia związek

$$(12.11) \quad A_0 + \bar{B}_0 = 0,$$

gdzie $A_0 = \Phi_1(0)$. W naszym przypadku A_0 wynosi

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 d\varphi + B_0 = \varepsilon_1 + B_0$$

i wobec tego równanie (12.11) przyjmie postać

$$(12.12) \quad \varepsilon_1 + B_0 + \bar{B}_0 = 0.$$

Korzystając z warunku, że funkcja $\Phi_1(z)$ określona jest z dokładnością do $\text{Im } B_0$, można przyjąć $\text{Im } B_0 = 0$ i wówczas otrzymujemy

$$(12.13) \quad B_0 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1.$$

Po obliczeniu całki we wzorze (12.10) i uwzględnieniu związku (12.13) ostatecznie funkcja $\Phi_1(z)$ przybiera postać

$$(12.14) \quad \begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1, & z \in s^+, \\ \Phi_1^-(z) &= 0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1, & z \in s^-. \end{aligned}$$

Dla podania w tym przypadku całkowitego rozwiązania zagadnienia musimy znać postacie funkcji $\Phi_1^-(1/z)$ i $\Psi_1^+(z)$. Funkcje te obliczone w oparciu o związki (10.3)₁, (10.3)₂ odpowiednio wynoszą

$$(12.15) \quad \begin{aligned} \Phi_1^-\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{2} \varepsilon_1, \\ \Psi_1^+(z) &= \frac{1}{z^2} \left[\Phi_1^+(z) + \Phi_1^-\left(\frac{1}{z}\right) \right] = \frac{1}{z^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{z} - \frac{\varepsilon_1}{z} \right) = 0. \end{aligned}$$

W wyniku powyższych rozważań otrzymaliśmy

$$(12.16) \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{2} k \left(\frac{W}{4\lambda\pi} + T_0 \right), \quad \Psi_1(z) = 0.$$

Nieznaną wartość ε_2 określa wzór

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + [\kappa \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)],$$

który na mocy (12.14) przyjmie postać

$$(12.17) \quad \varepsilon_2 = \frac{1+\kappa}{2} \varepsilon_1.$$

Rozpatrzmy teraz warunki brzegowe (12.9). Jak widać z ich postaci, zagadnienie sprowadza się do określenia funkcji $\Phi_2(z)$ regularnej na płaszczyźnie z rozciętej wzdłuż łuku L'' i ograniczonej w nieskończoności. W teorii funkcji analitycznych dowodzi się, że rozwiązanie w tym przypadku określone jest wzorem

$$(12.18) \quad \Phi_2(z) = -\frac{\varepsilon_2 X_0(z)}{2\pi i \kappa} \int_{L''} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) P_n(z),$$

gdzie

$$X_0(z) = (z - e^{-i\alpha})^{-1/2-i\beta} (z - e^{+i\alpha})^{-1/2+i\beta},$$

a $P_n(z)$ jest wielomianem n -go stopnia. W naszym przypadku $P_n = P_1 = C_1 z + C_2$, a $\beta = \ln \kappa / 2\pi$.

Funkcja $X_0(z)$, jak łatwo zauważyć, jest funkcją dwuznaczną i należy określić przez narzucenie odpowiedniego warunku gałęz jednoznaczną. Najczęściej żąda się, aby zachodziła zależność $\lim_{z \rightarrow \infty} [z^n X_0(z)] = 1$, co jest równoważne, że dana gałąź funkcji $X_0(z)$ dla dużych $|z|$ posiada rozwinięcie w szereg

$$(12.19) \quad X_0(z) = \frac{1}{z^n} - \frac{\alpha_{-n+1}}{z^{n-1}} + \dots$$

Dla rozpatrywanego zagadnienia rozwinięcie funkcji $1/X_0(z)$ w szereg w otoczeniu punktu leżącego w nieskończoności jest następujące:

$$(12.20) \quad \frac{1}{X_0(z)} = z - (\cos \alpha + 2\beta \cos \alpha) + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Występująca w równaniu (12.18) całka daje po rozwiązaniu wyrażenie zamknięte, które przy wykorzystaniu zależności (12.20) ma postać

$$(12.21) \quad \int_{L''} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} = \frac{2\pi i}{1 + \frac{1}{\kappa}} [(z - e^{-i\alpha})^{1/2+i\beta} (z - e^{i\alpha})^{1/2-i\beta} - z \cos \alpha + 2\beta \sin \alpha].$$

Wobec tego wzór (12.18) można napisać w postaci

$$(12.22) \quad \Phi_2(\varepsilon) = \left(C_2 + \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa} \right) z X_0(z) + \left[C_2 - \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \right] \times \\ \times X_0(z) - \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa}.$$

Tak więc otrzymaliśmy funkcję $\Phi_2(z)$ będącą rozwiązaniem układu równań (12.9).

Dla jednoznacznego wyznaczenia naprężeń i przemieszczeń musimy znać wielkości dowolnych stałych C_1 i C_2 występujących w równaniu (12.22). Pierwsze równanie na stałe C_1 i C_2 otrzymamy z warunku (12.11), który teraz napiszemy w postaci następującej:

$$(12.23) \quad \Phi_2(0) + \Phi_2(\infty) = 0,$$

a po podstawieniu do niego funkcji (12.22) otrzymamy

$$(12.24) \quad \left[C_2 - \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \right] X_0(0) - \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa} - \bar{C}_1 = 0.$$

Przy wyznaczaniu wartości $X_0(0)$ trzeba zwrócić uwagę, że wszystkie działania na funkcji $X_0(z)$ powinny być wykonane przy warunku

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z X_0(z)] = 1$$

(warunek określający daną gałąź funkcji).

Z prostych rozważań wynika, że wieloznaczność funkcji $X_0(z)$ spowodowana jest wieloznacznością funkcji $\arg(z - e^{-i\alpha})$ i funkcji $\arg(z - e^{i\alpha})$. Wskutek uwzględnienia warunku $\lim_{z \rightarrow \infty} [z X_0(z)] = 1$ można jednoznacznie określić $\text{Arg}(z - e^{-i\alpha})$

i $\text{Arg}(z - e^{i\alpha})$ i tym samym wybrać odpowiednią gałąź funkcji $X_0(z)$.

Obliczając odpowiednią granicę, gdy zmienna z dąży do zera, otrzymujemy

$$(12.25) \quad X_0(0) = -e^{-2\alpha\beta} = -e^{-2\alpha \frac{\ln \kappa}{2\pi}} = -\kappa^{-\frac{\alpha}{\pi}}$$

i następnie równanie (12.24) przybiera postać

$$(12.26) \quad \left[C_2 - \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \right] \kappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} + \frac{\varepsilon_2}{1+\kappa} - \bar{C}_1 = 0.$$

Do drugiego równania na stałej C_1 i C_2 dojdziemy na podstawie warunku ciągłości przemieszczeń wzdłuż łuku L' . Warunek ten napiszemy w postaci następującej:

$$(12.27) \quad \int_{b_1, a_1} (\kappa \Phi_2^+(t) + \Phi_2^-(t)) dt = -\varepsilon_2 (a_1 - b_1).$$

Uwzględniając teraz, że na łuku L' spełniona jest zależność $\Phi_2^+(t) = \Phi_2^-(t)$ oraz że $a_1 = e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$, $b_1 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, związek (12.27) przekształcimy do postaci

$$(12.28) \quad (1 + \varkappa) \int_{b_1 a_1} \Phi_2^+(t) dt = 2i\varepsilon_2 \sin \alpha.$$

Przy rozwiązaniu równania (12.28) w oparciu o zależność (12.22) trzeba będzie między innymi wyznaczyć następujące całki:

$$\int_L t X_0^+(t) dt, \quad \int_L X_0'(t) dt.$$

Jak wiadomo, funkcje $zX_0^+(z)$ i $X_0^+(z)$ są funkcjami regularnymi w obszarze S^+ i w związku z tym możemy napisać:

$$\int_L zX_0^+(z) dz = \int_{L'} zX_0^+(z) dz + \int_{L''} zX_0^+(z) dz = 0,$$

$$\int_L X_0^+(z) dz = \int_{L'} X_0^+(z) dz + \int_{L''} X_0^+(z) dz = 0.$$

Ze związków tych otrzymujemy:

$$(12.29) \quad \int_L tX_0^+(t) dt = - \int_{L''} tX_0^+(t) dt, \quad \int_L X_0^+(t) dt = - \int_{L''} X_0^+(t) dt.$$

Funkcje $zX_0^+(z)$ i $X_0^+(z)$ po rozwinięciu w otoczeniu punktu leżącego w nieskończoności przyjmują postać

$$zX_0^+(z) = 1 + (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$X_0^+(z) = \frac{1}{z} + (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Całki po prawej stronie związków (12.29) obliczone w oparciu o te rozwinięcia dają wyrażenie zamknięte

$$(12.30) \quad \int_L tX_0^+(t) dt = - \frac{2\pi i}{1+\varkappa} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha), \quad \int_L X_0^+(t) dt = - \frac{2\pi i}{1+\varkappa}.$$

Wykorzystując teraz zależności (12.30) równanie (12.28) napiszemy w postaci następującej:

$$(12.31) \quad C_1 (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) + C_2 = 0.$$

Z rozwiązania układu równań (12.26) i (12.31) otrzymujemy

$$(12.32) \quad C_1 = - \frac{\varepsilon_2}{1+\varkappa} \frac{-1 + \varkappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \varkappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)},$$

$$C_2 = - \frac{\varepsilon_2}{1+\varkappa} \frac{-1 + \varkappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \varkappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha).$$

Podstawiając (12.32) do wyrażenia (12.22) i uwzględniając zależność (12.17) otrzymamy

$$(12.33) \quad \Phi_2(z) = \frac{\varepsilon_1(z - \cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \kappa \frac{-\alpha}{\pi} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)} X_0(z) - \frac{1}{2} \varepsilon_1.$$

Superpozycja rozwiązań, którym odpowiadają funkcje $\Phi_1(z)$ i $\Phi_2(z)$ daje rozwiązanie rozważanego zagadnienia. Ma ono postać

$$(12.34) \quad \Phi(z) = \frac{\varepsilon_1(z - \cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \kappa \frac{-\alpha}{\pi} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)} X_0(z).$$

Naprężenia i przemieszczenia wyznaczamy ze wzoru (10.4).

Tutaj ograniczymy się do podania naprężeń wzdłuż łuku L'' , tj. części zamocowanej, gdyż te naprężenia wydają się być najbardziej interesujące.

Funkcje naprężeń wzdłuż łuku wyznaczamy w oparciu o wzory (10.4)₁ i (10.4)₂. Związki te dla punktów leżących na obwodzie ciała (koła jednostkowego) wskutek istnienia zależności $1/t = \bar{t}$ przyjmują znacznie prostszą postać

$$(12.35) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 2 [\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)}] - 2kT(t, \bar{t}), \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\varphi} &= \Phi^+(t) - \Phi^-(t) - kT(t, \bar{t}) + k \frac{\bar{t}}{t} \overline{K(t, \bar{t})}. \end{aligned}$$

Następnie uwzględniając dane pole temperatury będziemy mieli

$$(12.36) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 2 [\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)}] - 2kT_0, \quad \sigma_{rr} + i\sigma_{r\varphi} = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) - \varepsilon_1.$$

Występujące w wyrażeniu (12.36) funkcje odpowiednio wynoszą

$$(12.37) \quad \begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{\varepsilon_1(t - \cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \kappa \frac{-\alpha}{\pi} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)} X_0(t), \\ \overline{\Phi^+(t)} &= \frac{\varepsilon_1(\bar{t} - \cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \kappa \frac{-\alpha}{\pi} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)} \overline{X_0(t)}, \end{aligned}$$

$$\Phi^-(t) = -\varepsilon_1 - \kappa \Phi^+(t) \quad (\text{przy założeniu, że } \alpha \neq 0),$$

przy czym różnice funkcji $\Phi^+(t) - [\Phi^-(t) + \varepsilon_1]$ można napisać w postaci następującej:

$$(12.38) \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) - \varepsilon_1 = \frac{(1 + \kappa) \varepsilon_1 (t - \cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)}{1 + \kappa \frac{-\alpha}{\pi} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)} X_0(t).$$

Naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{r\varphi}$ wyznaczmy rozwiązując równania (12.36) z wykorzystaniem zależności (12.37). Po niezbyt trudnych przekształceniach dochodzi się do wzorów

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= H \left| \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \right|^{-\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{1}{2} \left(\varphi - \ln \frac{\kappa}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right| \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\cos \alpha - \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \alpha \right) \cos \frac{1}{2} \left(\varphi + \ln \frac{\kappa}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right| \right) \right], \\
 \sigma_{r\varphi} &= H \left| \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \right|^{-\frac{1}{2}} \left[\sin \frac{1}{2} \left(\varphi - \ln \frac{\kappa}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right| \right) + \right. \\
 (12.39) \quad &\quad \left. + \left(\cos \alpha - \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \alpha \right) \sin \frac{1}{2} \left(\varphi + \ln \frac{\kappa}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right| \right) \right], \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= H_1 \left| \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \right|^{-\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{1}{2} \left(\varphi - \ln \frac{\kappa}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right| \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\cos \alpha - \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \alpha \right) \cos \frac{1}{2} \left(\varphi + \ln \frac{\kappa}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right| \right) \right] - 2kT_0.
 \end{aligned}$$

Tutaj kąt φ wyznacza położenie dowolnego punktu t na utwierdzonej części łuku, a stałe H i H_1 odpowiednio wynoszą

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{1}{2} (1 + \kappa) \kappa^{-\frac{\alpha + \pi}{2\pi}} \left[1 + \kappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} \left(\cos \alpha + \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \alpha \right)^{-1} k \left(\frac{W}{4\Delta\pi} + T_0 \right) \right], \\
 (12.40) \quad H_1 &= -\frac{1}{2} (3 - \kappa) \kappa^{-\frac{\alpha + \pi}{2\pi}} \left[1 + \kappa^{-\frac{\alpha}{\pi}} \left(\cos \alpha + \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \alpha \right)^{-1} k \left(\frac{W}{4\Delta\pi} + T_0 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Z rozwiązania (12.34) otrzymuje się przez przejścia graniczne, gdy $\alpha \rightarrow 0$ rozwiązanie dla tarczy o brzegu wolnym od naprężeń, a gdy $\alpha \rightarrow \pi$ — rozwiązanie dla tarczy o brzegu utwierdzonym. Rozwiązania te są następujące:

a) brzeg tarczy wolny od naprężeń

$$\varphi'(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi(z) = \frac{1}{2} \varepsilon_1$$

stąd

$$(12.41) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2} \varepsilon_1 z, \quad \psi(z) = 0;$$

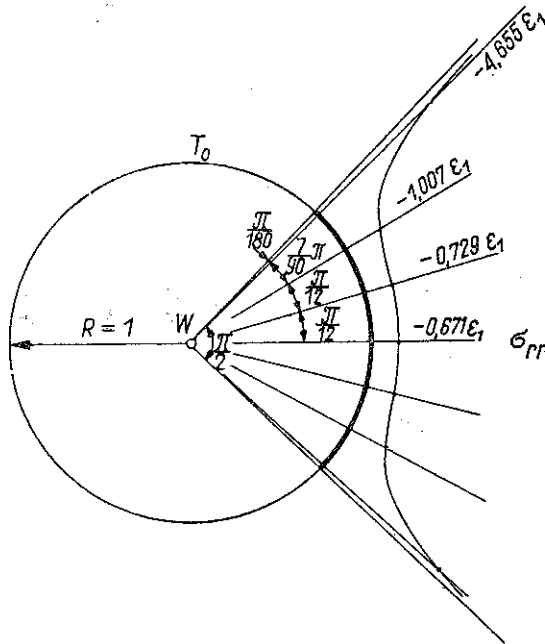
b) brzeg tarczy utwierdzony

$$\varphi'(z) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \Phi(z) = \frac{1}{1-\kappa} \varepsilon_1,$$

stąd

$$(12.42) \quad \varphi(z) = \frac{1}{1-\kappa} \varepsilon_1 z, \quad \psi_1(z) = 0.$$

Ze wzorów (12.39) wynika, że składowe σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ i $\sigma_{\varphi\varphi}$ zmieniają znak nieskończenie wiele razy, gdy kąt φ dąży do α . Ma to miejsce dla kątów bardzo mało różniących się od kąta α i w związku z tym odcinek łuku, wzdłuż którego naprężenia zmieniają znak, jest mały. Dokładne określenie kąta, dla którego wielkości σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ i $\sigma_{\varphi\varphi}$ pierwszy raz równają się zeru, jest trudne ze względu na bardzo skomplikowane równanie trygonometryczne. W rzeczywistości odpowiednie zjawisko nie występuje, ponieważ w miejscu, gdzie kończy się utwierdzenie, materiał uplastycznia się i w tym obszarze traci sens prawo Hooke'a, a tym samym przestają być słuszne związki (12.39).

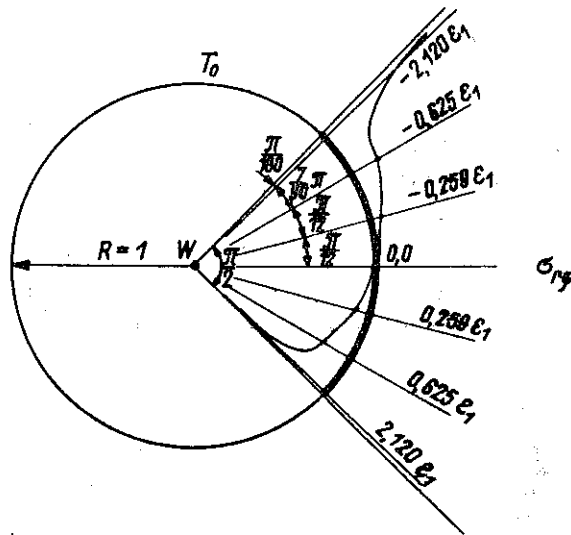


Rys. 2

Rozważmy na koniec następujący przykład: tarcza kołowa o promieniu $R = 1$ utwierdzona jest na części łuku L'' ; $2\alpha = 90^\circ$. Warunki termiczne te same co, w zagadnieniu wyjściowym. Współczynnik Poissona $\nu = 0,3$.

Rozwiązanie dla tego przykładu ograniczymy do wyznaczenia naprężeń na linii utwierdzenia.

Z obliczeń tabelarycznych w oparciu o wzory (12.39) otrzymujemy wykresy naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{r\varphi}$ (rys. 2 i 3). Obliczenia przeprowadzono dla kąta φ zmieniającego się w przedziale $[-44^\circ, 44^\circ]$.



Rys. 3.

Literatura cytowana w tekście

1. B. E. GATEWOOD, *Thermal Stresses*, New York 1957.
2. I. N. GOODIER and P. G. HODGE, *Elasticity and Plasticity*, New York 1958.
3. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1954.
4. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
5. W. NOWACKI, *Termosprężystość*, PWN, Warszawa 1961.
6. I. N. SNEDDON, *Zagadnienie szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, Warszawa 1962.
7. I. N. SNEDDON and D. S. BERRY, *The Classical Theory of Elasticity and Plasticity*, New York 1958.
8. И. Н. Векуа, Н. И. Мусхелишвили, *Методы теории аналитических функций в теории упругости*, Тр. Всес. съезда по теор. и прикл. механ. 1960. М. Л. АН СССР.

Резюме

ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В настоящей работе выводится общее (комплексное) решение уравнений двумерной теории термических напряжений предполагая, что температура является аналитической функцией. На основе решения для бесконечной области, существующие в общем решении потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ соответственно интерпретируются, что позволяет использовать теорию аналитических функций и в результате данную краевую задачу можно свести к краевым задачам аналитических функций. Даются формулы для напряжений и перемещений

в криволинейных системах, связанных конформным отображением круга или полуплоскости на данную область S .

Кроме того для круга и упругой полуплоскости, согласно Мусхелишвили, выражаются напряжения и перемещения с помощью температуры и одной аналитической функции, добавочно определенной вне рассматриваемой области. Дается способ использования зависимости для случая действия сосредоточенного источника тепла.

В последнем разделе работы определяются термические напряжения в круговом диске, подверженном действию сосредоточенного источника тепла с постоянным расходом во времени W . На окружности диска удерживается постоянная температура T_0 . Плоскости, ограничивающие диск изолированы термически. Часть окружности диска свободна, тогда как остальная часть полностью закреплена. Полученное решение имеет замкнутую форму. В результате граничных переходов, по этому решению, получается решение для диска со свободным краем и с полностью закрепленным. Даются диаграммы для части закрепленного края диска σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$.

Summary

THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF THERMAL STRESS

The general (complex) solution of the equations of the plane theory of thermal stress is obtained assuming that the temperature is an analytic function. By considering the solution for the infinite region, the potentials $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ involved in the general solution are given an interpretation, enabling the application of the theory of analytic functions to reduce a given boundary-value problem to boundary-value problems for some analytic functions. The equations for the stress and the displacement are obtained in curvilinear coordinates connected with the conformal mapping of a circle or a semi-plane into the given region S .

In addition, following the argument of Muschelishvili, the stresses and the displacements are expressed for the circle and the elastic semi-plane in terms of the temperature and an additional analytic function defined outside the region considered. A method is proposed for using the above relations in the case of a concentrated source of heat.

The last section of the paper is concerned with the determination of the thermal stress in a circular panel acted on by a connected source of heat of constant intensity W . The temperature T_0 at the edge of the panel is also constant. The planes bounding the panel are thermally insulated. Part of the periphery of the panel is free, the remaining part being fixed. A closed-form solution is obtained. By passing to the limit we obtain from it the solutions for panels with free and fixed edge. Diagrams of σ_{rr} and $\sigma_{r\varphi}$ are given for a portion of the fixed edge.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1956 r.
