

## O PEWNYM WŁÓKNISTYM MODELU GĘSTEGO RUSZTU

KRZYSZTOF WILMAŃSKI (ŁÓDŹ)

### 1. Wstęp

W pracy zajmiemy się przypadkiem szczególnym ośrodka włóknistego o sztywnych mikrostrukturach. Wykażemy, że płaski ośrodek włóknisty przy pewnych założeniach geometrycznych w ramach teorii liniowej jest opisywany w sposób analogiczny do ciała anizotropowego. Prócz tego podane zostaną wzory, które pozwalają wykorzystać rozwiązanie teorii płyt anizotropowych w zagadnieniu statycznym gęstej siatki prętowej o dowolnej strukturze. Należy nadmienić, że znane w literaturze przypadki anizotropii konstrukcyjnej pozwalają na obliczanie tylko siatek o najprostszej budowie [6 i 7].

W opracowaniu omówiono zagadnienie płytowe. Jest to przypadek obciążeń działających prostopadle do płaszczyzny środkowej ustroju, przy czym obroty mikrostruktur ustroju są funkcją przemieszczeń. Funkcja ta została tak dobrana, by układ równań przemieszczeniowych dwuwymiarowego zagadnienia sprowadzić do jednego równania różniczkowego (por. związki (8.13) w pracy [1]). Jest ona analogiczna do znanego w klasycznej teorii płyt założenia Kirchhoffa. Drugi przypadek podstawowy, zagadnienie tarczowe, został omówiony w pracy [2].

Rodzaj ośrodka włóknistego, który tu omówiony, nie jest jedynym, w którym zachodzi analogia do ciała anizotropowego. Jest to jednak, obok zagadnienia tarczowego [2], jedyny przypadek, w którym ośrodek ze sztywną mikrostrukturą wykazuje formalnie zarówno podobieństwo fizyczne, jak i geometryczne do ciała anizotropowego.

### Oznaczenia

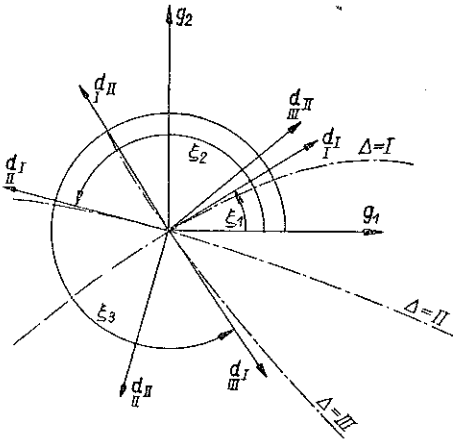
Wskaźniki kontra- i kowariantne oznaczone małymi literami alfabetu greckiego przebiegają liczby 1 i 2, a oznaczone małymi literami alfabetu łacińskiego liczby 1, 2 i 3. Wskaźniki oznaczone małymi literami alfabetu gotyckiego przebiegają natomiast liczby rzymskie I, II i III. W stosunku do wszystkich tych wskaźników stosujemy konwencję sumacyjną. Wskaźnik martwy  $\Delta$  przyporządkowany literze rdzeniowej oznacza przynależność wielkości oznaczonej tą literą do kongruencji włókien  $\Delta$ .

W pracy korzystano z pięciu następujących układów odniesienia:

1) krzywoliniowego układu współrzędnych  $x^\alpha$  utworzonego przez ortogonalną bazę wektorową  $g^\alpha$ ;

2) krzywoliniowego układu współrzędnych o bazie wektorowej  $g^\alpha$ ,  $g^3$ , gdzie

$$g^3 = \frac{g_1 \times g_2}{|g_1 \times g_2|},$$



Rys. 1

3) trzech lokalnych baz odniesienia  $d_a$  ( $\Delta = I, II, III$ ), z których każda jest związana z włóknem, na które wskazuje litera rdzeniowa (rys. 1). Przyjmujemy, że bazy te są ortonormalne, a wektory  $d_{III}$  są prostopadłe do płaszczyzny środkowej ustroju. Każde dwa z pozostałych wektorów bazy mają kierunki zgodne z kierunkami głównymi przekrojów poprzecznych belek, o ile ośrodek włóknisty jest modelem ciągłym siatki prętowej.

Wszystkie powyższe układy są prawoskrętne.

Poniżej zestawiono inne ważniejsze oznaczenia stosowane w pracy:

$g_{\alpha\beta} \equiv g_\alpha \cdot g_\beta$  składowe kowariantne tensora metrycznego układu współrzędnych  $\{x^\alpha\}$ ,

$$\lambda \equiv g_{22} (g_{11})^{-1},$$

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

$\nabla_\alpha$  pochodna kowariantna w układzie  $\{x^\alpha\}$ ,

$$A_{i'}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

$D_{\Delta}^i$  składowe wektorów  $d_a$  w układzie współrzędnych  $\{x^i\}$ ,

$\epsilon_{ij}^k$  trójwektor Ricciego,

$\epsilon_\alpha^\beta$  dwuwektor Ricciego,

$\delta_\alpha^i$  delta Kroneckera,

$p^{\alpha i}, m^{\alpha i}$  składowe afinorów naprężenia siłowego i momentowego,

$f_i, h_i$  składowe wektorów gęstości zewnętrznego obciążenia siłowego i momentowego,

$m_{\Delta}^{I I}, \bar{m}_{\Delta}^{I I}$  gęstość momentu odpowiednio skręcającego i gnącego w belce  $\Delta$  rusztu,

$p_{\Delta}^{I 3}$  gęstość sił tnących w belce  $\Delta$  rusztu,

$w$  wektor przemieszczenia baz  $d_a$ ,

$v$  wektor obrotu baz  $d_a$ ,

$\gamma_{\alpha i}, \kappa_{\alpha i}$  składowe afinorów odkształcenia siłowego i momentowego,

$C^{\alpha\beta ik}$  afinor sprężystości,

$\bar{C}^{\alpha\beta iuv}$  afinor sztywności określony wzorem (3.2),

$S_{\Delta}^{I I}, S_{\Delta}^{I I I}$  sztywności odpowiednio na skręcanie i zginanie włókien kongruencji  $\Delta$ ,

$n$  wektor jednostkowy, zewnętrznie normalny do brzegu obszaru.

## 2. Podstawowy układ równań

Jak już wspomniano, zajmiemy się zagadnieniem płytowym ośrodka włóknistego o sztywnych mikrostrukturach. Zgodnie z definicją tego zagadnienia postulujemy następujące związki geometryczne:

$$(2.1) \quad \nabla_a w_3 + \epsilon_{3a}{}^\mu v_\mu = 0.$$

Powyższy wzór jest równaniem wiążącym pole obrotów  $v_\mu$  z przemieszczeniem  $w_3$ . Będziemy z niego korzystać w postaci

$$(2.2) \quad \nabla_a w_3 = \epsilon^\mu{}_a v_\mu.$$

Jednocześnie zakładamy, że jeden z głównych kierunków odkształcenia pokrywa się z kierunkiem normalnej do płyty. Wtedy poszukiwane związki geometryczne mają postać

$$(2.3) \quad \gamma_{a1} \equiv 0,$$

$$(2.4) \quad \kappa_{a3} \equiv 0,$$

$$(2.5) \quad \kappa_{\alpha\beta} = \nabla_a v_\beta = \epsilon^{\beta\mu} \nabla_\mu \nabla_a w_3.$$

Równania równowagi, które w postaci ogólnej można znaleźć w pracy [1], są następujące:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \nabla_a p^{\alpha 3} + f^3 &= 0, \\ \nabla_a m^{\alpha\beta} + \epsilon^\beta{}_a p^{\alpha 3} + h^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Wreszcie związki fizyczne mają dla omawianego zagadnienia postać

$$(2.7) \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\mu\beta\nu} \kappa_{\mu\nu}.$$

Nie dysponujemy związkami fizycznymi dla naprężeń  $p^{\alpha 3}$ , gdyż ze względu na  $\gamma_{\alpha 3} \equiv 0$  pochodna energii sprężystej względem tej wielkości nie ma sensu [1]. W dalszym ciągu wielkość  $p^{\alpha 3}$  będziemy wyznaczać z równań równowagi (2.6).

Afinor  $C^{\alpha\mu\beta\nu}$  w przypadku, gdy rozpatrywany ośrodek włóknisty jest modelem ciągłym gęstego rusztu, również został przedstawiony w pracy [1] [wzór (9.1)<sub>3</sub>]. Ma on postać

$$(2.8) \quad C^{\alpha\mu\beta\nu} = \sum_{\Delta} D_{\Delta}^{\alpha} D_{\Delta}^{\mu} (S^{\text{I I}} D_{\Delta}^{\beta} D_{\Delta}^{\nu} - S^{\text{II II}} D_{\Delta}^{\beta} D_{\Delta}^{\nu}).$$

W dalszym ciągu pracy przyjmiemy, że linie parametryczne  $x^1$  pokrywają się z krzywymi  $\Delta = \text{II}$ . Wtedy  $\xi = \pi$  (rys. 1) i związek (2.9) można napisać w postaci

$$(2.9) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= (g^{11})^2 [\cos^2 \xi_1 (S^{\text{I I}} \cos^2 \xi_1 - S^{\text{II II}} \sin^2 \xi_1) + S^{\text{I I}} + \\ &\quad + \cos^2 \xi_3 (S^{\text{I I}} \cos^2 \xi_3 - S^{\text{II II}} \sin^2 \xi_3)], \\ C^{1112} = C^{1121} &= (g^{11})^{3/2} (g^{22})^{1/2} [\cos^3 \xi_1 \sin \xi_1 (S^{\text{I I}} + S^{\text{II II}}) + \\ &\quad + \cos^3 \xi_3 \sin \xi_3 (S^{\text{I I}} + S^{\text{II II}})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad C^{1211} = C^{2111} &= (g^{11})^{3/2} (g^{22})^{1/2} [\cos \xi_1 \sin \xi_1 (S^{I I} \cos^2 \xi_1 - S^{II II} \sin^2 \xi_1) + \\
 &\quad + \cos \xi_3 \sin \xi_3 (S^{I I} \cos^2 \xi_3 - S^{II II} \sin^2 \xi_3)], \\
 C^{1122} &= (g^{11}) (g^{22}) [\cos^2 \xi_1 (S^{I I} \sin^2 \xi_1 - S^{II II} \cos^2 \xi_1) - \\
 &\quad - S^{II II} + \cos^2 \xi_3 (S^{II II} \sin^2 \xi_3 - S^{II II} \cos^2 \xi_3)], \\
 C^{2211} &= (g^{11}) (g^{22}) [\sin^2 \xi_1 (S^{I I} \cos^2 \xi_1 - S^{I I II} \sin^2 \xi_1) + \\
 &\quad + \sin^2 \xi_3 (S^{I I} \cos^2 \xi_3 - S^{I I II} \sin^2 \xi_3)], \\
 C^{1212} = C^{1221} = C^{2121} = C^{2112} &= (g^{11}) (g^{22}) [\cos^2 \xi_1 \sin^2 \xi_1 (S^{I I} + S^{II II}) + \\
 &\quad + \cos^2 \xi_3 \sin^2 \xi_3 (S^{I I} + S^{II II})], \\
 C^{2221} = C^{2212} &= (g^{11})^{1/2} (g^{22})^{3/2} [\sin^3 \xi_1 \cos \xi_1 (S^{I I} + S^{II II}) + \\
 &\quad + \sin^3 \xi_3 \cos \xi_3 (S^{I I} + S^{II II})], \\
 C^{2122} = C^{1222} &= (g^{11})^{1/2} (g^{22})^{3/2} [\cos \xi_1 \sin \xi_1 (S^{I I} \sin^2 \xi_1 - S^{II II} \cos^2 \xi_1) + \\
 &\quad + \cos \xi_3 \sin \xi_3 (S^{I I} \sin^2 \xi_3 - S^{II II} \cos^2 \xi_3)], \\
 C^{2222} &= (g^{22})^2 [\sin^2 \xi_1 (S^{I I} \sin^2 \xi_1 - S^{II II} \cos^2 \xi_1) + \\
 &\quad + \sin^2 \xi_3 (S^{I I} \sin^2 \xi_3 - S^{II II} \cos^2 \xi_3)].
 \end{aligned}$$

### 3. Równanie ogólne

Przejdźmy obecnie do wyprowadzenia równania ogólnego dla przemieszczeń dla omawianego zagadnienia. Nasuśmy na równania równowagi (2.6)<sub>2</sub> operator  $\epsilon_{\beta}^{\nu} \nabla_{\nu}$ :

$$\epsilon_{\beta}^{\nu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} m^{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta}^{\nu} \epsilon_{\alpha}^{\beta} \nabla_{\nu} p^{\alpha 3} + \epsilon_{\beta}^{\nu} \nabla_{\nu} h^{\beta} = 0.$$

Jeśli ponadto wykorzystamy równania równowagi (2.7)<sub>1</sub> oraz podstawimy związki fizyczne (2.8), to otrzymujemy

$$\epsilon_{\beta}^{\nu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} (C^{\alpha\beta\mu} \kappa_{\mu\alpha}) - f^3 + \epsilon_{\beta}^{\nu} \nabla_{\nu} h^{\beta} = 0.$$

Ze względu na (2.5) mamy ostatecznie

$$(3.1) \quad \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} (\overset{\circ}{C}^{\alpha\nu\eta} \nabla_{\pi} \nabla_{\eta} w_3) = f^3 + \epsilon_{\beta}^{\nu} \nabla_{\nu} h^{\beta},$$

przy czym afinor sztywności  $\overset{\circ}{C}^{\alpha\nu\eta}$  jest określony przez

$$(3.2) \quad \overset{\circ}{C}^{\alpha\nu\eta} \stackrel{df}{=} \epsilon_{\beta}^{\nu} \epsilon_{\mu}^{\eta} C^{\alpha\beta\mu}.$$

Zagadnienie brzegowe dla równania (3.1) przedstawia się tak samo, jak w klasycznym zagadnieniu płytowym. Można wykazać, czym tutaj nie będziemy się zajmować, że równanie (3.1) jest typu eliptycznego i dlatego podanie dwu wielkości na brzegu

proceedzi do jednoznacznego rozwiazania. Na brzegu doskonale utwierdzonym o normalnej zewnetrznej okreslonej wektorem  $n(n^\alpha)$  otrzymujemy

$$(3.3) \quad w_3(n^\alpha) = 0, \quad n^\alpha \nabla_\alpha w_3 = 0.$$

Natomiast dla brzegu swobodnie podpartego mamy

$$(3.4) \quad w_3(n^\alpha) = 0, \quad n^\alpha m_\alpha^\beta g_\beta = n_\alpha C^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_\mu^\pi \nabla_\pi \nabla_\nu w_3 g_\beta = 0.$$

Wreszcie dla brzegu swobodnego znajdziemy

$$(3.5) \quad \begin{aligned} n^\alpha m_\alpha^\beta g_\beta &= n_\alpha C^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_\mu^\pi \nabla_\pi \nabla_\nu w_3 g_\beta = 0, \\ n_\alpha p^{\alpha\beta} &= n_\alpha (\epsilon_{\beta}^\alpha \nabla_\mu m^{\mu\beta} + \epsilon_{\beta}^\alpha h^\beta) = n_\alpha \epsilon_{\beta}^\alpha [\nabla_\mu (C^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_\nu^\pi \nabla_\pi \nabla_\nu w_3) + h^\beta] = 0. \end{aligned}$$

Równanie (3.1) ulega istotnym uproszczeniom, jezeli osrodek włóknisty jest jednorodny, tzn. jezeli afinor  $\overset{\circ}{C}^{\alpha\pi\nu\varrho}$  nie zalezy od zmiennych  $x^\alpha$ . Warunki jednorodności [2] przyjmaja tu postac

$$(3.6) \quad \begin{aligned} S^{\text{II}}_A &= S^{\text{II}}_A(C_1, \dots, C_9), \\ S^{\text{III}}_A &= S^{\text{III}}_A(C_1, \dots, C_9), \\ \xi_1 &= \xi_1(C_1, \dots, C_9), \\ \xi_2 &= \xi_2(C_1, \dots, C_9), \\ \xi_3 &= \xi_3(C_1, \dots, C_9), \end{aligned}$$

gdzie  $C_r$  ( $r = 1, \dots, 9$ ) stanowi 9 statych fizycznych niezaleznych od siebie.

Warunki (3.6) spełnia osrodek włóknisty, który jest modelem ciaglym bardzo popularnej w zastosowaniach siatki prętowej. Mianowicie, o ile składowe afinora  $C^{\alpha\mu\beta\nu}$  wyrazimy we współrzędnych kartezjańskich ( $\{x^a\} = 0(x, y)$ ), to równania (3.6) odnosza się do przypadku, gdy belki poszczególnych rodzin są prostoliniowe i do siebie równoległe, a ich sztywności — stałe.

W przypadku osrodka jednorodnego równanie ogólne ma postac

$$\overset{\circ}{C}^{\alpha\pi\nu\varrho} \nabla_\alpha \nabla_\pi \nabla_\nu \nabla_\varrho w_3 = f^3 + \epsilon_{\beta}^\nu \nabla_\nu h^\beta,$$

lub we współrzędnych kartezjańskich

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{C}^{1111} \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + 2(\overset{\circ}{C}^{1112} + \overset{\circ}{C}^{2111}) \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^3 \partial y} + (\overset{\circ}{C}^{1122} + 4\overset{\circ}{C}^{1212} + \overset{\circ}{C}^{2211}) \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + 2(\overset{\circ}{C}^{1222} + \overset{\circ}{C}^{2221}) \frac{\partial^4 w_3}{\partial x \partial y^3} + \overset{\circ}{C}^{2222} \frac{\partial^4 w_3}{\partial y^4} = f^3 + \left( \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenie  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ .

Łatwo dostrzec, że równanie (3.7) ma budowę taką samą, jak równanie powierzchni ugięcia płyty anizotropowej. W tym celu wystarczy dokonać zmiany stałych współczynników wg schematu

$$(3.8) \quad \begin{aligned} D_{11} &\leftrightarrow \mathring{C}^{1111}, & 2D_{16} &\leftrightarrow \mathring{C}^{1112} + \mathring{C}^{2111}, \\ 2(D_{12} + 2D_{66}) &\leftrightarrow (\mathring{C}^{1122} + 4\mathring{C}^{1212} + \mathring{C}^{2211}), \\ 2D_{26} &\leftrightarrow \mathring{C}^{1222} + \mathring{C}^{2221}, & D_{22} &\leftrightarrow \mathring{C}^{2222}. \end{aligned}$$

We wzorach (3.8) stałe  $D_{11}, \dots, D_{22}$  są parametrami sztywności płyty anizotropowej [5]. A więc zagadnienie statyczne jednorodnego gęstego rusztu, którego modelem ciągłym jest rozpatrywany tu ośrodek włóknisty, sprowadza się do zagadnienia anizotropii konstrukcyjnej. Pewne przypadki szczególne tego problemu poruszył WOJNOWSKY-KRIEGER w pracy [6]. Należy zaznaczyć, że podobieństwo tego typu ośrodka włóknistego do ciała anizotropowego jest formalne, bo ośrodki różnią się liczbą parametrów fizycznych.

#### 4. Własności lokalne afinora sprężystości $C^{\alpha\mu\beta\nu}$

Aby zbadać możliwości wystąpienia płaszczyzn symetrii sprężystej mikrostruktur omawianego ośrodka włóknistego określimy składowe afinora  $C$  przy transformacji układu współrzędnych. Przeprowadźmy transformację  $\{x^a\} \rightarrow \{x^{a'}\}$ , gdzie

$$(4.1) \quad \det A_a^{B'} \neq 0.$$

Wtedy

$$m^{\alpha\beta'} = A_a^{\alpha'} A_b^{\beta'} m^{ab}$$

co, wykorzystując związki fizyczne

$$m^{\alpha\beta'} = C^{\alpha'\mu'\beta'\nu'} \varkappa_{\mu'\nu'} = C^{\alpha'\mu'\beta'\nu'} A_{\mu'}^{\mu} A_{\nu'}^{\nu} \varkappa_{\mu\nu},$$

napiżemy w poniższej postaci:

$$\varkappa_{\mu\nu} A_a^{\alpha'} A_b^{\beta'} C^{\alpha\mu\beta\nu} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\nu'}^{\nu} C^{\alpha'\mu'\beta'\nu'} \varkappa_{\mu'\nu'}.$$

Zależność ta zachodzi, gdy

$$(4.2) \quad A_a^{\alpha'} A_b^{\beta'} C^{\alpha\mu\beta\nu} - A_{\mu'}^{\mu} A_{\nu'}^{\nu} C^{\alpha'\mu'\beta'\nu'} = 0.$$

Przy wykonywaniu transformacji wykorzystano ortogonalność układu.

Załóżmy obecnie, że mikrostruktury ośrodka charakteryzują się symetrią sprężystą względem płaszczyzny  $x^1 x^3$ . Wykonajmy transformację

$$(4.3) \quad x^1 = x^{1'}, \quad x^2 = -x^{2'}.$$

Wtedy

$$(4.4) \quad \|A_a^{\alpha'}\| = \|A_a^{\alpha'}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ze wzoru (4.2) otrzymujemy

$$(4.5) \quad C^{1112} = C^{1121} = C^{1211} = C^{2111} = C^{2221} = C^{2212} = C^{2122} = C^{1222} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku występuje również symetria względem płaszczyzny  $x^2 x^3$ .

Ze związków (2.10) uzyskujemy na podstawie (4.5) następujące warunki omawianej symetrii mikrostruktury:

(4.6)

$$\frac{S_{\text{I}}^{\text{II I}} + S_{\text{I}}^{\text{II II}}}{S_{\text{III}}^{\text{II I}} + S_{\text{III}}^{\text{II II}}} = - \frac{\cos^3 \xi_3 \sin \xi_3}{\cos^3 \xi_1 \sin \xi_1}, \quad \frac{\cos^2 \xi_1 S_{\text{I}}^{\text{II I}} - \sin^2 \xi_1 S_{\text{I}}^{\text{II II}}}{\cos^2 \xi_3 S_{\text{II I}}^{\text{II I}} - \sin^2 \xi_3 S_{\text{III}}^{\text{II II}}} = - \frac{\cos \xi_3 \sin \xi_3}{\cos \xi_1 \sin \xi_1},$$

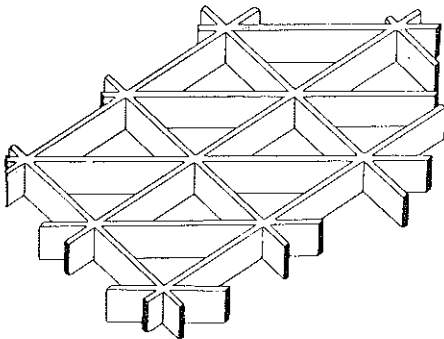
$$\frac{S_{\text{I}}^{\text{II I}} + S_{\text{I}}^{\text{II II}}}{S_{\text{III}}^{\text{II I}} + S_{\text{III}}^{\text{II II}}} = - \frac{\sin^3 \xi_3 \cos \xi_3}{\sin^3 \xi_1 \cos \xi_1}, \quad \frac{\sin^2 \xi_1 S_{\text{I}}^{\text{II I}} - \cos^2 \xi_1 S_{\text{I}}^{\text{II II}}}{\sin^2 \xi_3 S_{\text{III}}^{\text{II I}} - \cos^2 \xi_3 S_{\text{III}}^{\text{II II}}} = - \frac{\cos \xi_3 \sin \xi_3}{\cos \xi_1 \sin \xi_1}.$$

Jeśli belki rusztu mają te same sztywności

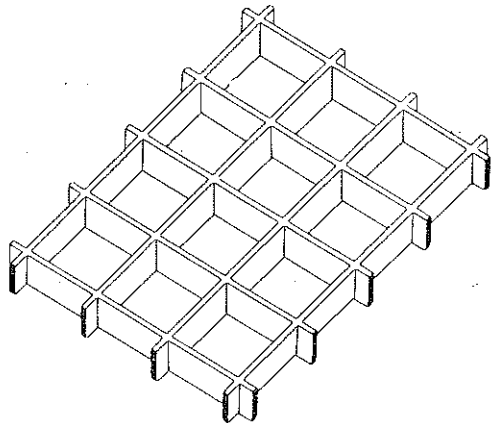
$$S_{\text{I}}^{\text{II I}} = S_{\text{II}}^{\text{II I}} = S_{\text{III}}^{\text{II I}}, \quad S_{\text{I}}^{\text{II II}} = S_{\text{II}}^{\text{II II}} = S_{\text{III}}^{\text{II II}},$$

to układ (4.6) jest spełniony, gdyż

$$(4.7) \quad \xi_1 + \xi_3 = 2\pi.$$



Rys. 2



Rys. 3

Siatka rusztu jednorodnego jest wtedy równoramienna (rys. 2). Ten sam przypadek zachodzi dla siatki jednorodnej zbudowanej z dwóch rodzin belek, a więc jeśli

$$S_{\text{I}}^{\text{II I}} = S_{\text{I}}^{\text{II II}} = 0,$$

gdy  $\xi_3 = \frac{3}{2}\pi$ , tzn. gdy siatka jest prostokątna.

W przypadku istnienia tych trzech płaszczyzn symetrii sprężystej istotnym uproszczeniem ulega również równanie ugięcia jednorodnej płyty włóknistej. We współrzędnych kartezjańskich otrzymujemy je w postaci

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \dot{C}^{1111} \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + (\dot{C}^{1122} + 4\dot{C}^{1212} + \dot{C}^{2211}) \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + \dot{C}^{2222} \frac{\partial^4 w_3}{\partial y^4} = f_3 + \left( \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, jest to przypadek analogiczny do płyty ortotropowej. Dlatego też ośrodek włóknisty opisany związkami fizycznymi o postaci

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m^{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{1111} & 0 & 0 & C^{1212} \\ 0 & C^{1122} & C^{1212} & 0 \\ 0 & C^{1212} & C^{2211} & 0 \\ C^{1212} & 0 & 0 & C^{2222} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nazywać będziemy *ortotropowym*. W przypadku gdy jest on modelem ciągłym rusztu zachodzi przypadek *ortotropii konstrukcyjnej*.

Rozważmy teraz przypadek symetrii heksagonalnej. Niech mikrostruktury ośrodka posiadają te same własności sprężyste przy obrocie układu o pewien kąt  $\vartheta$ . Wtedy składowe afinora  $C$  nie ulegną zmianie, jeśli transformację układu współrzędnych zdefiniujemy następującymi afinorami:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \|A_\alpha^\alpha\| &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & +\sqrt{\lambda} \sin \vartheta \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \\ \|A_\alpha^{\alpha'}\| &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sqrt{\lambda} \sin \vartheta \\ +\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda = g_{22} \cdot (g_{11})^{-1} = g^{11} \cdot (g^{22})^{-1}$ .

Po wykorzystaniu wzoru (4.2) otrzymujemy związki

$$(4.11) \quad \begin{aligned} C^{1112} = C^{1121} = C^{1211} = C^{2111} = C^{1222} = C^{2122} = C^{2212} = C^{2221} = 0, \\ C^{1111} = \lambda^2 C^{2222}, \\ C^{1122} = C^{2211}, \\ C^{1212} = \frac{\frac{1}{\lambda} C^{1111} - C^{1122}}{2}. \end{aligned}$$

Wreszcie w oparciu o zależności (2.10) możemy napisać następujące warunki dla rusztu, przy których jego modelem ciągłym jest płyta włóknista o heksagonalnej symetrii sprężystej:



$$\begin{aligned}
 & S^{\text{II I}} \cos 2\xi_1 + S^{\text{I I}} + S^{\text{I I}} \cos 2\xi_3 = 0, \\
 (4.12) \quad & S^{\text{II II}} \cos 2\xi_1 + S^{\text{II II}} + S^{\text{II II}} \cos 2\xi_3 = 0, \\
 & (S^{\text{I I}} + S^{\text{II II}}) \cos^2 \xi_1 (1 - 4 \sin^2 \xi_1) + (S^{\text{I I}} + S^{\text{II II}}) \cos^2 \xi_3 (1 - 4 \sin^2 \xi_3) = 0.
 \end{aligned}$$

Do powyższych warunków dochodzą warunki (4.6). Są one spełnione w przypadku rusztu, którego belki są proste i tworzą trójkąty równoboczne. Afinor  $C$  ma wtedy postać

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad & C^{1111} = C^{2222} = \frac{9}{8} S^{\text{I I}} - \frac{3}{8} S^{\text{II II}}, \\
 & C^{1122} = C^{2211} = \frac{3}{8} S^{\text{I I}} - \frac{9}{8} S^{\text{II II}}, \\
 & C^{1212} = \frac{3}{8} (S^{\text{I I}} + S^{\text{II II}}),
 \end{aligned}$$

gdzie  $S^{\text{I I}} = S^{\text{I I}} = S^{\text{I I}} = S^{\text{I I}}$  jest sztywnością skrętną belek dzieloną przez rozstaw belek tej samej rodziny,  $S^{\text{II II}} = S^{\text{II II}} = S^{\text{II II}} = S^{\text{II II}}$  jest analogiczną do powyższej gęstości sztywności giętej belek. Równanie powierzchni ugięcia w tym przypadku przechodzi w równanie biharmoniczne niejednorodne

$$(4.14) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_3 = \left( \frac{3}{8} S^{\text{I I}} - \frac{9}{8} S^{\text{II II}} \right)^{-1} \left[ f_3 + \left( \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right],$$

gdzie  $Ox, Oy$  jest prawoskrętnym kartezjańskim układem współrzędnych.

Równanie (4.14) jest analogiczne do równania płyty z materiału o *izotropii poprzecznej*. W związku z tym ośrodek włóknisty, który charakteryzuje następujące związki fizyczne:

$$(4.15) \quad \begin{vmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C^{1111} & 0 & 0 & \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} \\ 0 & C^{1122} & \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} & C^{1122} & 0 \\ \frac{C^{1111} - C^{1122}}{2} & 0 & 0 & C^{1111} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{22} \end{vmatrix}$$

nazywać będziemy *izotropowym*. Podobnie, gdy izotropowa płyta włóknista jest modelem ciągłym gęstego rusztu, mamy do czynienia z *izotropią konstrukcyjną*. Jednorodny przypadek izotropii konstrukcyjnej rusztu badał S. WOJNOWSKY-KRIEGER [6].

## 5. Stan naprężenia w belkach rusztu

Po określeniu funkcji ugięcia  $w_3$  oraz po wyznaczeniu stanu naprężenia w ośrodku włóknistym pozostaje do rozwiązania zagadnienie obliczania sił w belkach rusztu, którego modelem ciągłym jest włóknista płyta. W tym punkcie zajmiemy się poszukiwaniem wektora momentu  $M$  i siły  $P$  w belkach przyjmując jako znaną funkcję ugięcia  $w_3(x^\alpha)$ . Zgodnie z definicją podaną w pracy [1] możemy dla naszego przypadku napisać następujące wzory:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} M &= M^a d_a = M^I d_I + M^{II} d_{II} = m^{II} \varrho d_I + m^{II} \varrho d_{II}, \\ P &= P^a d_a = P^3 d_3 = P^{I3} \varrho d_3, \end{aligned}$$

gdzie  $M$  jest wektorem momentu w belce  $\Delta$  oraz  $P$  jest wektorem siły w belce  $\Delta$ . Gęstość momentu skręcającego  $m^{II}$  określimy następująco. Niech  $v_I''$  i  $v_I'$  oznaczają kąty skręcenia dwóch sąsiednich węzłów belki  $\Delta$ . Wtedy

$$(5.2) \quad m^{II} = S^{II} \frac{v_I'' - v_I'}{l} \approx S^{II} \partial_I v_I = S^{II} D_I^\mu D_I^\nu \nabla_\mu v_\nu = S^{II} D_I^\mu D_I^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu w_3.$$

Analogicznie, jeśli  $v_{II}''$  i  $v_{II}'$  są kątami obrotu dwóch sąsiednich węzłów belki  $\Delta$ , to gęstość momentu gnącego  $m^{II}$  wtej belce wyniesie

$$(5.3) \quad \begin{aligned} m^{II} &= -S^{II} \frac{v_{II}'' - v_{II}'}{l} \approx -S^{II} \partial_I v_{II} = \\ &= -S^{II} D_I^\mu D_{II}^\nu \nabla_\mu v_\nu = -S^{II} D_I^\mu D_{II}^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu w_3. \end{aligned}$$

Podstawiając związki (5.2) i (5.3) do (5.1)<sub>I</sub> mamy ostatecznie

$$(5.4) \quad M = \varrho S^{\mu\nu\rho} \nabla_\mu \nabla_\nu w_3 g_{II},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(5.5) \quad S^{\mu\nu\rho} \stackrel{\text{df}}{=} D_I^\mu (S^I D_I^\alpha D_{II}^\nu - S^{II} D_{II}^\alpha D_I^\nu).$$

Określimy obecnie gęstość sił tnących  $p^{I3}$ . Z definicji naprężeń w ośrodku włóknistym [1] mamy

$$(5.6) \quad p^{a3} = \sum_{\Delta} D_I^a p^{I3}.$$

A więc dysponujemy dwoma równaniami ( $a = 1, 2$ ) z trzema niewiadomymi ( $\Delta = I, II, III$ ) w przypadku rusztów zbudowanych z trzech rodzin belek lub z dwoma

niewiadomymi ( $\Delta = \text{I, II}$ ), jeśli ruszt składa się z dwóch rodzin belek. W pierwszym przypadku zagadnienia nie można rozwiązać jednoznacznie. Poniżej zaproponowano związki, które spełniają (5.6) i jednocześnie w przypadku granicznym dają klasyczną zależność siły tnącej od momentu gnącego (równanie równowagi belki zginanej).

Z równań równowagi (2.7)<sub>2</sub> i z (5.6) otrzymujemy

$$\sum_{\Delta} D_{\Delta}^{\alpha} p^{\text{I}\Delta} = \epsilon_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\mu} m^{\mu\beta},$$

przy czym dla uproszczenia przyjęto  $h^{\beta} \equiv 0$ . Wykorzystajmy obecnie związek

$$m^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} D_{\Delta}^{\alpha} (D_{\Delta}^{\nu} m^{\text{I}\Delta} + D_{\Delta}^{\nu} m^{\text{II}\Delta}).$$

Stąd po podstawieniu

$$\sum_{\Delta} D_{\Delta}^{\alpha} p^{\text{I}\Delta} = \epsilon_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\mu} \sum_{\Delta} D_{\Delta}^{\mu} (D_{\Delta}^{\nu} m^{\text{I}\Delta} + D_{\Delta}^{\nu} m^{\text{II}\Delta}).$$

Zgodnie z poprzednimi uwagami postulujemy następujące możliwe rozwiązanie powyższego układu dwu równań z trzema niewiadomymi:

$$(5.7) \quad p^{\text{I}\Delta} = \epsilon_{\alpha\nu} D_{\Delta}^{\alpha} \nabla_{\mu} [D_{\Delta}^{\mu} S^{\alpha\nu\varrho} \nabla_{\pi} \nabla_{\varrho} w_3].$$

Natomiast wektor sił w belce  $\Delta$  ma następującą postać:

$$(5.8) \quad P = \varrho \epsilon_{\alpha\nu} D_{\Delta}^{\alpha} \nabla_{\mu} [D_{\Delta}^{\mu} S^{\alpha\nu\varrho} \nabla_{\pi} \nabla_{\varrho} w_3] g_3.$$

W przypadku rusztu jednorodnego związki (5.7) i (5.8) upraszczają się i można je zapisać następująco:

$$(5.9) \quad p^{\text{I}\Delta} = D_{\Delta}^{\alpha} \nabla_{\alpha} m^{\text{I}\Delta} = \partial_{\nu}^{\nu} m^{\text{I}\Delta}, \quad P = \varrho \partial_{\nu}^{\nu} m^{\text{II}\Delta} g_3 = \partial_{\nu}^{\nu} M^{\text{II}\Delta} g_3,$$

a więc w znanej postaci.

Na zakończenie rozważymy przykład rozwiązania rusztu, którego modelem ciągłym jest płyta włóknista. Przyjmijmy ruszt eliptyczny o dowolnej, jednorodnej siatce sześciokątnej (rys. 4). Rozwiązanie płyty anizotropowej, która odpowiada temu rusztowi ([5], str. 320), ma postać

$$(5.10) \quad w_3 = \frac{qa^4}{8D'} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2,$$

gdzie

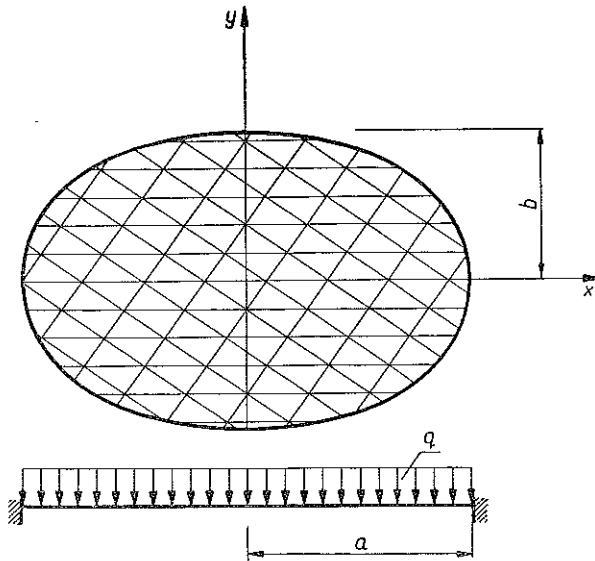
$$D' = 3D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})c^2 + 3D_{22}c^4, \quad c = \frac{a}{b}.$$

Po wykorzystaniu związków (3.8) otrzymamy

$$(5.11) \quad D' = 3\overset{\circ}{C}{}^{1111} + (\overset{\circ}{C}{}^{1122} + 4\overset{\circ}{C}{}^{1212} + \overset{\circ}{C}{}^{2211})c^2 + 3\overset{\circ}{C}{}^{2222}c^4 = \\ = 3C^{1122} + (C^{1111} + 4C^{1212} + C^{2222})c^2 + 3C^{2211}c^4.$$

Gęstości momentów skręcających wyrażają się wtedy zależnościami

$$\begin{aligned}
 m_{\text{I}}^{\text{II}} &= S^{\text{II}} \frac{qa^2}{4D'} \left\{ 4 \frac{x}{a} \frac{y}{b} c \cos 2\xi_1 + \left[ (1 - c^2) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{x^2}{a^2} (c^2 - 3) - \frac{y^2}{b^2} (1 - 3c^2) \right] \sin 2\xi_1 \right\}, \\
 m_{\text{II}}^{\text{II}} &= -S^{\text{II}} \frac{qa^2}{D'} \frac{x}{a} \frac{y}{b} c, \\
 m_{\text{III}}^{\text{II}} &= -S^{\text{II}} \frac{qa^2}{4D'} \left\{ 4 \frac{x}{a} \frac{y}{b} c \cos 2\xi_3 - \left[ (1 - c^2) + \frac{x^2}{a^2} (c^2 - 3) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{y^2}{b^2} (1 - 3c^2) \right] \sin 2\xi_3 \right\},
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$



Rys. 4

natomiast gęstości momentów gnących wyniosą

$$\begin{aligned}
 m_{\text{I}}^{\text{III}} &= S^{\text{III}} \frac{qa^2}{2D'} \left[ \left( 1 - 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cos^2 \xi_1 - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} c \sin 2\xi_1 + \right. \\
 &\quad \left. + c^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - 3 \frac{y^2}{b^2} \right) \sin^2 \xi_1 \right], \\
 m_{\text{II}}^{\text{III}} &= S^{\text{III}} \frac{qa^2}{2D'} \left( 1 - 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \\
 m_{\text{III}}^{\text{III}} &= S^{\text{III}} \frac{qa^2}{2D'} \left[ \left( 1 - 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cos^2 \xi_3 - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} c \sin 2\xi_3 + \right. \\
 &\quad \left. + c^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - 3 \frac{y^2}{b^2} \right) \sin^2 \xi_3 \right].
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Dla gęstości sił tnących otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 p_I^{I3} &= -3S^{\text{II II}} \frac{q}{D'} [x(\cos^2 \xi_1 + c^2 \sin^2 \xi_1) \cos \xi_1 + \\
 &\quad + \gamma c^2 (\cos^2 \xi_1 + c^2 \sin^2 \xi_1) \sin \xi_1], \\
 (5.14) \quad p_{\text{II}}^{I3} &= 3S^{\text{II II}} \frac{qx}{D'}, \\
 p_{\text{III}}^{I3} &= -S^{\text{II II}} \frac{q}{D'} [x(3 \cos^2 \xi_3 + c^2 \sin^2 \xi_3) \cos \xi_3 - \\
 &\quad - \gamma(3c^2 \sin^2 \xi_3 - \cos^2 \xi_3) \sin \xi_3].
 \end{aligned}$$

## 6. Uwagi końcowe

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, zagadnienie płytowe dla ośrodka włóknistego w ramach teorii liniowej i przy założeniu geometrycznym Kirchhoffa daje się sprowadzić do zagadnienia anizotropii. Gdy rozpatrywany ośrodek włóknisty jest modelem ciągłym siatki rusztowej, to zawiera on w sobie wszystkie rozważane dotąd zagadnienia anizotropii konstrukcyjnej rusztów jednocześnie rozszerzając znacznie zakres jej stosowalności (np. na zagadnienia rusztów o siatce niejednorodnej). Jak wiadomo, znane rozwiązania anizotropii konstrukcyjnej znalazły szerokie zastosowania, więc rozszerzenie klasy gęstych rusztów objętych tym modelem ciągłym jest istotne z punktu widzenia praktyki inżynierskiej.

## Literatura cytowana w tekście

1. C. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media*, II, Arch. Mech. Stos., 6, 17 (1965).
2. K. WILMAŃSKI, *O pewnym modelu włóknistym gęstej kratownicy przegubowej*, w druku.
3. S. GOŁĄB, *Rachunek tensorowy*, PWN, Warszawa 1956.
4. C. WOŹNIAK, *Fibrous media as a continuous model of grates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 7, 12 (1964).
5. С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Москва 1957.
6. S. WOJNOWSKY-KRIEGER, Ing. Arch., 25 (1957).

## Резюме

### О НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ ГУСТОГО РОСТВЕРКА

В работе приводится обсуждение негироскопической волокнистой пластинки, которая рассматривается в качестве непрерывной модели густого, плоского ростверка. Для этого случая обсуждается форма аффиноров жесткости, а также особые случаи, когда среда проявляет локально упругую симметрию. Особое внимание обращается на аналогию уравнения прогиба волокнистой плиты с соответствующим уравнением анизотропной пластинки. Указывается способ использования решения для определения сил в дискретных системах.

## Summary

## ON A CERTAIN FIBROUS MODEL OF A DENSE GRATE

This a discussion of a non-gyroscopic fibrous plate treated as a continuous model of a dense plane grate. The form of rigidity affinors is analysed in this case together with some particular cases if the body shows locally symmetric elasticity. Particular emphasis is laid on the analogy between the equation of deflection of the fibrous plate and the corresponding equation for an anisotropic plate. A method is devised enabling the solutions obtained to be used for the computation of forces in discrete systems.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lutego 1966 r.*

---