

**DYSYPACJA ENERGII W OŚRODKU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM
WYWOŁANA WYSTĘPOWANIEM SZCELINY OSIOWO-SYMETRYCZNEJ**

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA) i MIŁOSZ WNUK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Jest doświadczalnie stwierdzonym faktem, że rozprzestrzenianiu się szczeliny w materiałach ciągliwych towarzyszy pochłanianie energii o wiele większe, niżby to wynikało z oszacowania pracy wykonanej dla pokonania sił kohezji $\sigma_{koh}(x)$ i zużytej na zerwanie wiązań międzyatomowych. Jak wiadomo

$$(1.1) \quad 2\gamma = \int_b^{\infty} \sigma_{koh}(x) dx,$$

jeśli γ oznacza napięcie powierzchniowe, b stałą sieci, a x jest odległością między sąsiednimi płaszczyznami atomów. Poza tym duża część energii zostaje zużytkowana na wywołanie nieodwracalnych odkształceń plastycznych, przy czym ilość tej energii jest uzależniona od stałych materiałowych charakteryzujących zdolność materiału do plastycznego płynięcia, od parametrów geometrycznych szczeliny i od schematu obciążenia.

Im bardziej ciągliwy jest materiał, tym dysypacja energii jest większa; wpływ «relaksacji plastycznej», pojawiający się w obszarach wyprzedzających końce szczeliny na charakter złomu jest bardziej oczywisty. Zdolność do dużych odkształceń poprzedzających zniszczenie stwarza pewnego rodzaju «barierę plastyczną», która uniemożliwia lub opóźnia niszczące, kruche pęknięcie. Warunek Griffitha, sprawdzający się dla ciał kruchych, nie może więc dać poprawnych rezultatów dla materiałów ciągliwych. Znajomość dysypacji energii umożliwi napisanie warunku zniszczenia a także oszacowanie, jaki procent nośności granicznej (tj. pełnego uplastycznienia przekroju poprzecznego elementu) przy danej długości szczeliny może być wykorzystany, zanim nastąpi całkowite pęknięcie.

O ile zagadnienie szczelin w teorii sprężystości obecnie jest tematem wielkiej liczby opracowań (por. np. monografię SNEDDONA [24]), o tyle niewiele istnieje rozwiązań problemu sprężysto-plastycznego i niemal wszystkie są przybliżone. Wymienimy tu prace ALLENA i SOUTHWELLA [1], dotyczące zagadnienia płaskiego, rozwiązywanego metodą relaksacji, JACOBSA [14] oraz STIMPSONA i EATONA [27]. Ponadto dla szczególnego przypadku czystego ścinania powiodło się znalezienie ścisłego rozwiązania, HULT i McCLINTOCK [12]. Należy również wspomnieć o modyfikacji warunku Griffitha dokonanej przez OROWANA [19 i 20] oraz IRWINA [13], opartej na rozwa-

zaniach energetycznych (bardziej intuicyjnych niż analitycznych). Spośród dużej liczby prac doświadczalnych wymienimy tu jedynie prace HEADA [11] oraz FROSTA i DUGDALE'A [7], które posłużyły potem do sformułowania hipotezy DUGDALE'A [6], a także analogiczne prace wykonane w ZSRR przez RUSINKO [21], JAREMĘ [15] oraz KORNIOŁOWA i JAREMĘ [16]. Do bardzo interesujących należą również eksperymenty wykonane w Caltech (USA) przez GERBERICHA [8] oraz SWEDŁOWA i GERBERICHA [28].

Wiele spośród wykonanych niedawno prac, łącznie z niniejszą, dotyczy pękania tzw. materiałów quasi-kruchych ⁽¹⁾ (quasi-brittle), tj. materiałów odznaczających się wysoce zlokalizowaną strefą odkształceń plastycznych; strefa ta leży na przedłużeniu osi symetrii szczeliny i kształtem przypomina ostrze strzały. Dla tych właśnie ciał odnosi się hipoteza Dugdale'a lub dyslokacyjny model szczeliny i towarzyszących jej obszarów plastycznych. Zastosowanie hipotezy Dugdale'a umożliwia sprowadzenie zagadnienia sprężysto-plastycznego do zagadnienia sprężystego z odpowiednio zmodyfikowanymi warunkami brzegowymi (jak to np. postąpiono w obecnej pracy), użycie natomiast modelu dyslokacyjnego pozwala również zredukować zagadnienie sprężysto-plastyczne do problemu sprężystego z danym skokiem przemieszczeń: WITWICKI i LEONOW [29], BILBY, COTTRELL i SWINDEN [4], BILBY, COTTRELL, SMITH i SWINDEN [5], SMITH [25 i 26]. Wszystkie spośród wymienionych tu prac dotyczą zagadnienia płaskiego. Można również wykazać, że obydwie metody, tj. dyslokacyjna i związana z modelem Dugdale'a, są równoważne. Istnieje też duża analogia między pracami dotyczącymi quasi-kruchych ciał a pracami szkoły rosyjskiej, w których rozważa się pękanie ciał kruchych (ŻELTOW i CHRISTIANOWICZ [31], LEONOW [17] oraz BARENBLATT [3]).

Większość autorów zadawała się podaniem zależności pomiędzy długością strefy plastycznej a przyłożonym obciążeniem nie przeprowadzając szczegółowszej analizy przemieszczeń, dysypacji energii, kryterium zniszczenia oraz pomijając często omówienie warunku plastyczności (np. warunku Hubera-Misesa-Hencky'ego), co nie zawsze jest usprawiedliwione. Wyróżnia się tu praca GOODIERA i FIELDA [9], w której autorzy obliczają dysypację energii oraz formułują kryterium zniszczenia dla przypadku wolno rosnącej oraz poruszającej się szczeliny w płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia.

Niniejszy artykuł jest kontynuacją pracy [18], w której podaliśmy zasięg strefy plastycznej, towarzyszącej szczelinie osiowo-symetrycznej, jako funkcję obciążenia. Tutaj obliczamy przemieszczenia brzegów szczeliny, dysypację energii oraz podajemy kryterium zniszczenia i dyskusję warunku Hubera-Misesa-Hencky'ego. Wszystkie

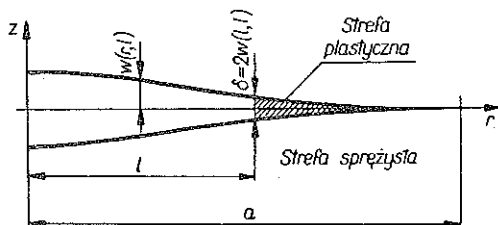
⁽¹⁾ Termin ten, wydaje się, jest nieco mylący. Sugeruje on mianowicie, że materiał quasi-kruchy zachowuje się prawie tak jak materiał kruchy, tymczasem jest zupełnie inaczej. W pracach GERBERICHA [8] oraz SWEDŁOWA i GERBERICHA [28] pokazano, że jedynie bardzo ciągliwe materiały (jak niskowęglowe stale lub pewne stopy A1) odznaczają się występowaniem wysoce zlokalizowanego obszaru odkształceń plastycznych, a więc są typu materiału quasi-kruchego, podczas gdy stale twardsze, o większej zawartości węgla, oraz stopy A1, posiadające zdolność wzmocnienia, wykazują rozmyty obszar plastyczny, a zatem nie są quasi-kruche według przyjętej terminologii, choć ich charakterystyka $\sigma = \sigma(\epsilon)$ bardziej przypomina idealne ciało kruche.

rozważania przeprowadzimy równoległe dla dwóch schematów obciążenia: (1) ciśnienie p_0 działające na powierzchni szczeliny, (2) ciśnienie w nieskończoności, prostopadłe do płaszczyzny symetrii szczeliny.

2. Przesunięcia normalne do powierzchni szczeliny

Opieramy się na następujących założeniach:

1. Przyjmujemy model ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Żądamy, aby różne od zera składowe tensora naprężenia σ_r , σ_θ , σ_z i τ_{rz} spełniały warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego w obszarze uplastycznienia. Warunek ten będzie spełniony w przybliżeniu, gdy założymy, że σ_z równa się pewnej stałej Y . Stałą tę, zwaną efektywną granicą plastyczności, można otrzymać z bezpośrednich pomiarów doświadczalnych lub można ją obliczyć w sposób wskazany poniżej, gdy znane są: granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu Y_0 oraz obciążenie p_0 .



Rys. 1

2. Strefa odkształceń plastycznych ma kształt pierścienia, otaczającego szczelinę, przy czym grubość pierścienia jest niewielka; przemieszczenie normalne $w(r, l)$ w obszarze plastycznym nie przekracza pewnej krytycznej wielkości $\delta/2$ (rys. 1; podobne wykresy podał BARENBLATT [2]). Materiał wszędzie poza pierścieniem jest sprężysty.

3. Długość strefy plastycznej (szerokość pierścienia) jest tak dobrana, że naprężenia na granicy obszaru sprężystego i plastycznego nie posiadają osobliwości.

Wykorzystując powyższe założenia możemy sprowadzić zagadnienie sprężysto-plastyczne do zagadnienia teorii sprężystości, które w rozpatrywanym przypadku można sprowadzić z kolei do zagadnienia półprzestrzeni sprężystej z następującymi warunkami brzegowymi ($z = 0$):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tau_{rz} &= 0, & \varrho &\geq 0, \\ \sigma_z &= -q(\varrho), & \varrho &< 1, \\ w &= 0, & \varrho &> 1, \end{aligned}$$

gdzie $\varrho = r/a$ jest współrzędną bezwymiarową. Rozpatrzmy dwa przypadki: (1) gdy ciśnienie p_0 jest przyłożone na powierzchni szczeliny,

$$(2.2) \quad q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \varrho < m; \\ -Y, & m < \varrho < 1, \end{cases}$$

(2) gdy ciśnienie p_0 przyłożone jest w nieskończoności,

$$(2.3) \quad q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \varrho < m; \\ -(Y - p_0), & m < \varrho < 1. \end{cases}$$

W tym przypadku do rozwiązania uzyskanego dla problemu brzegowego określonego przez (2.1) i (2.3) należy dodać jednorodny stan naprężenia

$$\sigma_z = p_0, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia dla półprzestrzeni sprężystej z warunkami brzegowymi (2.1) daje się sprowadzić do układu następujących dualnych równań całkowych:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \eta \psi(\eta) J_0(\varrho \eta) d\eta &= \frac{1-\nu}{\mu l} q(\varrho), & 0 \leq \varrho < 1; \\ \int_0^\infty \psi(\eta) J_0(\varrho \eta) d\eta &= 0, & \varrho > 1, \end{aligned}$$

gdzie $\mu = E/2(1+\nu)$ jest modułem odkształcenia postaciowego, a $\psi(\eta)$ jest poszukiwaną funkcją. Rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (2.4) ma postać następującą [22]:

$$(2.5) \quad \psi(\eta) = \frac{2(1-\nu)l}{\pi\mu} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 s \sin(\eta s) q(xs) ds.$$

Po wyznaczeniu $\psi(\eta)$ możemy przez odwrócenie transformacji całkowej Henkela obliczyć wielkości statyczne jak i geometryczne. Rozkład naprężeń $[\sigma_z]_{z=0}$ zbadaliśmy w pracy [18]. Obecnie zajmujemy się wyznaczeniem przemieszczeń w kierunku osi z przedstawionych za pomocą wzoru

$$(2.6) \quad w = \int_0^\infty \psi(\eta) \left[1 + \frac{\eta \zeta}{2(1-\nu)} \right] J_0(\varrho \eta) e^{-\zeta \eta} d\eta, \quad \zeta = \frac{z}{a}.$$

Ponieważ w rozpatrywanym zagadnieniu interesują nas przemieszczenia w dla $\zeta = 0$, musimy obliczyć całkę

$$(2.7) \quad \int_0^\infty \psi(\eta) J_0(\varrho \eta) d\eta.$$

Pomijając tutaj szczegółowe rachunki (por. przypis A) otrzymujemy dla

$$(2.8) \quad q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \varrho < m; \\ 0, & m < \varrho \leq 1 \end{cases}$$

następujące wyrażenia:

$$(2.9) \quad w_I = \frac{4(1-\nu^2)ap_0}{\pi E} \begin{cases} \sqrt{1-\varrho^2} - \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}} + mE\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right), & 0 \leq \varrho < m, \\ \sqrt{1-\varrho^2} - \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}} - \frac{\varrho^2-m^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) + \\ + \varrho E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right), & m < \varrho \leq 1, \end{cases}$$

gdzie użyliśmy następujących oznaczeń:

$$\mu_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}}$$

$$\mu_2 = \arcsin \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}}, \quad m = l/a.$$

Dodając odpowiednio wyżej otrzymane wyrażenia na przemieszczenie w do wyrażeń otrzymanych dla obciążenia

$$q_{II}(\varrho) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varrho < m, \\ -Y, & m < \varrho \leq 1, \end{cases}$$

mianowicie do wyrażeń

$$(2.10) \quad w_{II} = \frac{4(1-\nu^2)aY}{\pi E} \begin{cases} mE\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right) - \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}}, & 0 \leq \varrho < m, \\ \varrho E\left(\mu_2, \frac{\varrho}{m}\right) - \frac{\varrho^2-m^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) - \\ - \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}}, & m < \varrho \leq 1 \end{cases}$$

otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia (1) w postaci następującej:

$$(2.11) \quad w_I = \frac{4(1-\nu^2)aY}{\pi E} \begin{cases} \lambda \sqrt{1-\varrho^2} + (1+\lambda) \left[mE\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right) - \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}} \right], & 0 \leq \varrho < m; \\ \sqrt{1-\varrho^2} \left[\lambda - \frac{1+\lambda}{\sqrt{1-m^2}} \right] + \\ + (1+\lambda) \left[\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) + \varrho E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \right], & m < \varrho \leq 1. \end{cases}$$

Oczywiście dla $\varrho > 1$ $w_I = 0$ (przypadek (1)). Bezwymiarowy parametr obciążenia jest określony następująco:

$$(2.12) \quad \lambda = p_0/Y.$$

Postępując analogicznie otrzymujemy dla zagadnienia (2)

$$(2.13) w_2 = \frac{4(1-\nu^2)aY}{\pi E} \begin{cases} \lambda \sqrt{1-\varrho^2} - \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}} + mE \left(\mu_1, \frac{\varrho}{m} \right), & 0 \leq \varrho < m; \\ \sqrt{1-\varrho^2} \left[\lambda - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \right] + \frac{m^2-\varrho^2}{\varrho} F \left(\mu_2, \frac{m}{\varrho} \right) + \\ + \varrho E \left(\mu_2, \frac{m}{\varrho} \right), & m < \varrho < 1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzimy, że styczna do krzywej $w = w(r, l)$ pokrywa się z osią symetrii szczeliny wzdłuż obwodu pierścienia poślizgów plastycznych, czyli że brzegi szczeliny zwierają się «płynnie», podobnie jak ma to miejsce w teorii Christianowicza i Barenblatta [3]. Korzystając z podanych powyżej wzorów i obliczając $\partial w / \partial \varrho$ dla $\varrho = 1$ łatwo wykażemy, że wyrażenie to równa się zeru, o ile tylko zażądamy znikania wyrazów osobliwych, mianowicie

$$(2.14) \quad \left[\frac{\partial w_1}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=1} = \left[m - \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda} \right] (1-\varrho)^{-1/2} + Q,$$

oraz

$$(2.15) \quad \left[\frac{\partial w_2}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=1} = [m - \sqrt{1-\lambda^2}] (1-\varrho)^{-1/2} + Q,$$

gdzie w_1 w przypadku (1) oznacza wyrażenie (2.11), zamiast w_2 wstawiono (2.13), natomiast Q dąży do zera dla $\varrho \rightarrow 1$. Ponadto jeżeli skorzystamy z wyników pracy [18], w której podano zasięg strefy plastycznej w funkcji obciążenia, mianowicie

$$(2.16) \quad m = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda} \quad \text{dla (1),}$$

$$m = \sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{dla (2)}$$

znikają również wyrażenia w klamrach. Widać stąd, że żądanie skończoności naprężeń na granicy strefy sprężystej i plastycznej [18] oraz żądanie «płynnego» zwierania brzegów szczeliny są sobie równoważne i pozwalają określić długość odcinka, na którym naprężenie σ_z ma stałą wartość.

Wzory (2.16) lub też wynikające z nich związki odwrotne

$$(2.17) \quad \lambda = \frac{1-m^2+\sqrt{1-m^2}}{m^2} \quad \text{dla (1),}$$

$$\lambda = \sqrt{1-m^2} \quad \text{dla (2)}$$

umożliwiają takie przekształcenie wyrażen na przemieszczenia w ten sposób, aby uwidocznic ich zależność od obciążenia (λ) lub też od zasięgu strefy plastycznej (m).

3. Dysypacja energii

Powtarzając rozumowanie GOODIERA i FIELDA [9] wyprowadzimy obecnie wzór na dysypację energii, spowodowaną nieodwracalnymi odkształceniami plastycznymi wokół osiowo-symetrycznej szczeliny. Wyobraźmy sobie, że szczelina wzrasta powoli przy niezmiennym obciążeniu zewnętrznym ($\lambda = \text{const}$), tak że jej promień zmienia się od l'' do $l + dl''$ oraz że pierścien poślizgów plastycznych zwiększa odpowiednio swój promień zewnętrzny od wartości a do $a + da$. Stałość obciążenia λ pociąga stałość stosunku a/l , a zatem mamy również

$$(3.1) \quad \frac{da}{dl} = \frac{a}{l}.$$

Przemieszczenie $w(r, l)$ przyjmuje wartość $w(r, l + dl)$ oraz

$$(3.2) \quad dw = \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} dl.$$

Praca ciśnienia Y na przemieszczeniu dw zsumowana po wszystkich pierścieniach elementarnych o poiu powierzchni $2\pi r dr$, gdy r zmienia się od l do $a + da$, jest równa połowie energii dysypowanej plastycznie (2)

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} dW_p = Y \int_l^{a+da} \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} dl 2\pi r dr.$$

Wykładniki pochodzące z infinitezymalnych odcinków dl oraz da są drugiego rzędu względem dl i można je pominąć; wyrażenie (3.3) przepisujemy z dokładnością do małych pierwszego rzędu:

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} dW_p = Y \left(2\pi dl \int_l^a \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} dr \right)$$

lub też krócej

$$(3.5) \quad \frac{dW_p}{dA} = \frac{Y}{l} \int_l^a \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} dr,$$

gdzie dA oznacza elementarne pole powierzchni utworzonej przy wirtualnym wzroście szczeliny, mianowicie

$$(3.6) \quad dA = 2(\pi l dl).$$

Wzór (3.5) przedstawia więc energię dysypowaną na skutek odkształceń plastycznych i przypadającą na jednostkę pola powstającej powierzchni. Wielkość ta, jak podaje

(2) Praca dla pokonania sił kohezji (energia powierzchniowa) jest tu równa zeru, ponieważ w niniejszych rozważaniach siły kohezji są pominięte. Uzasadnienie takiego przyjęcia zob. u GOODIERA i FIELDA [9].

teoria Irwina-Orowana i jak wyniknie również z niniejszych rozważań, gra rolę napięcia powierzchniowego i posiada zasadnicze znaczenie dla wyjaśnienia mechanizmu zniszczenia materiałów ciągliwych.

Całkę we wzorze (3.5) przekształcamy w następujący sposób:

$$(3.7) \quad \int_l^a \frac{\partial}{\partial l} w(r, l) r dr = \frac{\partial}{\partial l} \int_l^a w(r, l) r dr - w(a, l) a \frac{\partial a}{\partial l} + w(l, l) l.$$

Drugi składnik po prawej stronie tej równości zeruje się, ponieważ przemieszczenia na brzegu strefy plastycznej $w(a, l)$ znikają. Tak więc należy jedynie obliczyć wartość wyrażenia

$$(3.8) \quad \alpha = \frac{\partial}{\partial l} \int_l^a w(r, l) r dr + w(l, l) l,$$

aby otrzymać dysypację energii:

$$\frac{dW_p}{dA} = \frac{Y}{l} \alpha.$$

Obliczenia wykonamy równoległe dla obu rozważanych schematów obciążenia (1) i (2). Aby otrzymać całkę

$$(3.9) \quad \int_l^a w(r, l) r dr = a^2 \int_m^1 w(\varrho, m) \varrho d\varrho,$$

korzystamy ze wzorów na przemieszczenia odnoszących się dla $m < \varrho < 1$, tj. ze wzoru (2.1) dla przypadku (1) oraz ze wzoru (2.3) dla przypadku (2). Jak łatwo widać w obydwu przypadkach dostajemy cztery całki, przy czym pierwsza z nich zawierająca $\sqrt{1 - \varrho^2}$ jest elementarna, natomiast trzy pozostałe posiadają postać:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} I_I &= \int_m^1 F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \varrho^2 d\varrho = \int_m^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sin^2 \psi}}, \\ I_{II} &= \int_m^1 F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) d\varrho = \int_m^1 d\varrho \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sin^2 \psi}}, \\ I_{III} &= \int_m^1 E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \varrho^2 d\varrho = \int_m^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}}} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sin^2 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Całki te dają się sprowadzić do całek elementarnych przez zmianę kolejności całkowania oraz podstawienie $m^2 \sin^2 \psi = \varrho^2 - x^2$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 I_I &= \frac{2}{9}(1 - m^3) + \frac{1}{3} m^2 (1 - m), \\
 I_{II} &= 1 - m, \\
 I_{III} &= \frac{2}{9}(1 - m^3).
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \int_i^a w_1 r dr &= \frac{4(1 - \nu^2) a^3 Y}{\pi E} \left\{ \frac{1}{3} (1 - m^2)^{3/2} \left[\lambda - \frac{1 + \lambda}{\sqrt{1 - m^2}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \lambda) [m^2 I_I - I_{II} + I_{III}] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \int_i^a w_2 r dr &= \frac{4(1 - \nu^2) a^3 Y}{\pi E} \left\{ \frac{1}{3} (1 - m^2)^{3/2} \left[\lambda - \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + m^2 I_I - I_{II} + I_{III} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Uwzględniając ponadto wzory (2.16) oraz (2.17), łączące ze sobą parametry λ i m dla obu przypadków, dostaniemy

$$\int_i^a w(r, l) r dr = \frac{4(1 - \nu^2) a^3 Y}{\pi E} \begin{cases} \frac{(1 - m)^2}{3} (1 + \sqrt{1 - m^2}), & (1), \\ \frac{m^2}{3} (1 - m)^2, & (2). \end{cases}
 \tag{3.14}$$

Wyrażenia te należy następnie zróżniczkować względem l biorąc pod uwagę, że stosunek $m = l/a$ jest stały; skąd otrzymamy, że $da/dl = a/l = 1/m$ zgodnie z (3.1). Zatem

$$\frac{\partial}{\partial l} \int_i^a w(r, l) r dr = \frac{4(1 - \nu^2) l^2 Y}{\pi E} \begin{cases} \frac{(1 - m)^2}{m^3} (1 + \sqrt{1 - m^2}), & (1), \\ \frac{(1 - m)^2}{m}. & (2). \end{cases}
 \tag{3.15}$$

Przemieszczenia końca szczeliny otrzymamy łatwo, jeżeli do wzorów (2.11) oraz (2.13) podstawić $\varrho = m$ ($r = l$), mianowicie:

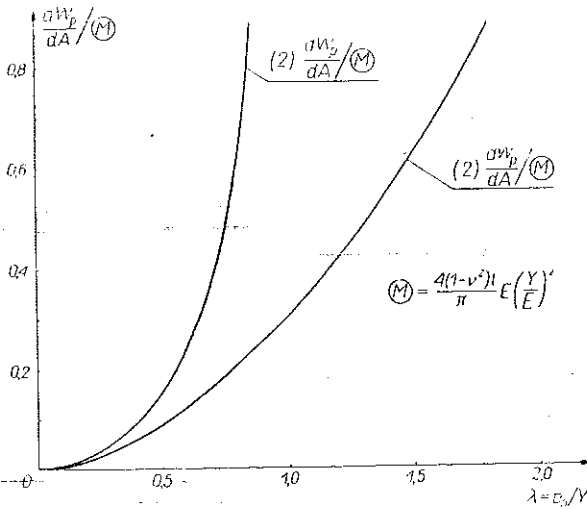
$$\begin{aligned}
 w(l, l) = w(m, m) &= \begin{cases} \frac{4(1 - \nu^2) l Y}{\pi E} \frac{1 - m}{m^2} (1 + \sqrt{1 - m^2}), & (1), \\ \frac{4(1 - \nu^2) l Y}{\pi E} (1 - m), & (2). \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Tworząc następnie iloczyny w (l, l) i dodając je odpowiednio do wyrażen (3.15), a następnie mnożąc otrzymane w ten sposób sumy przez Y/l zgodnie z (3.8) otrzymujemy

$$(3.17) \quad \frac{dW_p}{dA} = \begin{cases} \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \frac{(1-m)(1+\sqrt{1-m^2})}{m^3}, & (1), \\ \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \frac{1-m}{m}, & (2). \end{cases}$$

W końcu parametr m można zastąpić parametrem λ określając w ten sposób zależność dysypacji energii od przyłożonego obciążenia:

$$(3.18) \quad \frac{dW_p}{dA} = \begin{cases} \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \frac{(1+\lambda)(1+\lambda-\sqrt{1+2\lambda})}{\sqrt{1+2\lambda}}, & (1), \\ \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-\lambda^2}}, & (2). \end{cases}$$



Rys. 2

Wykresy odpowiadające obydwu wzorom podano na rys. 2. Łatwo też sprawdzić, że obydwa wzory dają identyczny wynik, gdy $\lambda \ll 1$, tzn. dla obciążeń $p_0 \ll Y$. Wówczas bowiem mamy

$$(3.19) \quad F(\lambda) = \frac{(1+\lambda)(1+\lambda-\sqrt{1+2\lambda})}{\sqrt{1+2\lambda}} = \frac{1}{2} \lambda^2 + \dots,$$

$$G(\lambda) = \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{2} \lambda^2 + \dots$$

Przykład liczbowy dotyczyć będzie stali, dla której

$$E = 2 \cdot 10^{12} \text{ [dyna cm}^{-2}\text{]}, \quad Y/E = 10^{-3}, \quad \nu = 0,3.$$

Ponadto przyjmiemy obciążenie p_0 równe połowie Y , tzn. $\lambda = 1/2$.

Przyjmując $Y \approx Y_0 = 2 \cdot 10^9$ [dyna cm⁻²] i korzystając z wyprowadzonych wyżej wzorów, otrzymujemy

$$\frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E} \right)^2 = 2,32 \cdot 10^6 l \text{ [erg cm}^{-2}\text{]},$$

$$[F/\lambda]_{\lambda=1/2} = 0,091, \quad [G/\lambda]_{\lambda=1/2} = 0,155$$

oraz plastyczną dysypację energii

$$(3.20) \quad dW_p/dA = \begin{cases} 0,211 \cdot 10^6 l & \text{[erg cm}^{-2}\text{]}, & (1), \\ 0,360 \cdot 10^6 l & \text{[erg cm}^{-2}\text{]}, & (2). \end{cases}$$

Dane d'a przypadku (2) możemy porównać z wynikiem uzyskanym przez Goodiera i Fielda [9] przy identycznych danych dla szczeliny w płaskim stanie odkształcenia:

$$\left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{G\&F} = 1,02 \cdot 10^6 l \text{ [erg cm}^{-2}\text{]}.$$

Dane te przedstawiają pracę zużytą na odkształcenia plastyczne i przypadające na jednostkę pola powstającej powierzchni i mogą być porównane z oszacowaniem doświadczalnym $2 \cdot 10^6$ [erg cm⁻²] (OROWAN [19 i 20]) YOKOBORI [30]. Zgodność z tym oszacowaniem można poprawić przyjmując promień szczeliny większy od 1 cm lub zwiększając obciążenie λ . Ponadto należałoby w oparciu o szczegółową analizę warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego sprecyzować związek między stałą Y a granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu Y_0 . Jak pokażemy w dalszych rozdziałach niniejszej pracy, dla obciążenia p_0 równego połowie granicy plastyczności Y_0 , tj. dla $\lambda_0 = p_0/Y_0 = 1/2$, oraz dla materiału o współczynniku Poissona $\nu = 0,3$, otrzymujemy

$$(3.21) \quad Y = \begin{cases} 2,21 Y_0 & \text{dla (1),} \\ 1,75 Y_0 & \text{dla (2).} \end{cases}$$

Dla porównania zwróćmy uwagę, że wg GOODIERA i FIELDA dla tych samych danych (w płaskim stanie odkształcenia) spełniona jest równość $Y = 2,1 Y_0$. Tak więc wzory (3.18) powinny ulec korekcji przez podstawienie na miejsce Y wyrażeń (3.21) oraz przez odpowiednie obliczenie (3) parametru λ . Mamy mianowicie

$$(3.22) \quad \lambda = \lambda_0/\gamma, \quad \lambda_0 = p_0/Y_0, \quad \gamma = Y/Y_0.$$

(3) GOODIER i FIELD [9] podają, że korekcja wzoru na dysypację energii polega jedynie na pomnożeniu uzyskanej poprzednio wartości przez współczynnik $(Y/Y_0)^2$, co wydaje się niewystarczające. Ulega tu zmianie również parametr λ [por. (2.34)], o ile założymy przedtem $\lambda_0 = \text{const}$. W wyniku tych zmian różnice między wartościami przed i po korekcji są znacznie mniejsze, niż można by sądzić na pierwszy rzut oka.

Zatem dla $\lambda_0 = 0,5$ oraz uwzględniając dane (3.23) otrzymujemy

$$\lambda = \begin{cases} 0,5/2,21 = 0,180, & (1), \\ 0,5/1,75 = 0,286, & (2). \end{cases}$$

Obecnie mamy

$$F(\lambda) = 2,36 \cdot 10^{-2}, \quad G(\lambda) = 4,60 \cdot 10^{-2}$$

oraz dla dysypacji energii

$$(3.23) \frac{dW_p}{dA} = \begin{cases} 2,32 \cdot 10^6 l \cdot 2,36 \cdot 10^{-2} \cdot (2,21)^2 = 0,268 \cdot 10^6 l \text{ [erg cm}^{-2}] & (1); \\ 2,32 \cdot 10^6 l \cdot 4,60 \cdot 10^{-2} \cdot (1,75)^2 = 0,328 \cdot 10^6 l \text{ [erg cm}^{-2}] & (2). \end{cases}$$

Widać stąd, że wykonana korekcja zmienia nieznacznie uzyskane wcześniej wyniki (3.20).

W oszacowaniach napięcia powierzchniowego (energii powierzchniowej) dla stali podaje się liczbę rzędu 10^3 [erg cm⁻²], a zatem wartość blisko 1000-krotnie mniejszą od wyliczonej wyżej plastycznej dysypacji energii, gdy promień szczeliny $l = 1$ cm. Obie wielkości mogą być porównywalne jedynie dla bardzo małych szczelin (gdyż dW_p/dA jest proporcjonalne do promienia szczeliny), kiedy l jest rzędu 10^{-2} cm. Dla mikro-szczelin wartość plastycznej dysypacji energii będzie niewielka wobec wartości energii powierzchniowej, tym niemniej wniosek Goodiera i Fielda [9], że «obecna analiza zmierza do zgodności z pierwotną teorią Griffitha dla szczelin o mikro-długościach» nie wydaje się słuszny. Gdy $l \rightarrow 0$, kryterium zniszczenia redukuje się, jak to pokażemy poniżej, do prostego równania $p_{kryt} = Y$, a zatem materiał nie pęka krucho, jak należałoby oczekiwać stosując teorię Griffitha, lecz płynie plastycznie wzdłuż całego przekroju poprzecznego. Mechanizm tego płynięcia oraz mechanizm pęknięcia według obrazu Griffitha jest zupełnie inny. Obecny model jednakże, jak się wydaje, nie jest pozbawiony pewnych wad (pominięcie sił kohezji!), a zatem opisany tu schemat zniszczenia przy $l \rightarrow 0$ nie jest zupełny. Uzupełnienie modelu Dugdale'a przez włączenie do niego także sił kohezji zasługuje na dalsze studia.

4. Kryterium zniszczenia

Przystąpimy do obliczenia ciśnienia krytycznego, powodującego nieograniczone rozprzestrzenianie się szczeliny, a zatem i zniszczenie elementu. Podobnie jak Goodier i Field [9] nie będziemy tu korzystać z kryterium energetycznego (które stanowi jedynie warunek konieczny pęknięcia), lecz posłużymy się kryterium maksymalnego odkształcenia. Z kryterium tego otrzymujemy warunek konieczny i dostateczny dla zjawiska zniszczenia. Rozważmy mianowicie infinitezymalny element leżący przy końcu szczeliny o początkowej długości $2d$ w kierunku osi z . W czasie wzrostu obciążenia granica strefy sprężystej w punktach krańcowych szczeliny ulega przemieszczeniu $w(l, l)$, a rozważany przez nas element, umieszczony między dwoma granicami (dolnej i górnej półpłaszczyzny), ulega rozciągnięciu; jego nowa długość wynosi $2w(l, l)$. Odkształcenie plastyczne ε definiujemy jako stosunek $w(l, l)/d$, jak to

uczynili autorzy pracy [9]. Korzystając ze wzorów na przemieszczenie w kierunku osi z (3.16) oraz zastępując w nich parametr m przez bezwymiarowe obciążenie λ wg (2.16), otrzymujemy

$$(4.1) \quad \varepsilon = \frac{w(l, l)}{d} = \begin{cases} \frac{4(1-\nu^2)IY}{\pi Ed} [1 + \lambda - \sqrt{1+2\lambda}], & (1), \\ \frac{4(1-\nu^2)IY}{\pi Ed} [1 - \sqrt{1-\lambda^2}], & (2). \end{cases}$$

Przyjmiemy (4) obecnie, że zniszczenie nastąpi, gdy odkształcenie osiągnie pewną krytyczną wartość ε_L . Ze wzorów (4.1) otrzymamy wówczas

$$(4.2) \quad \frac{\pi}{4(1-\nu^2)} \frac{d}{L} \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_Y} = \begin{cases} 1 + \lambda - \sqrt{1+2\lambda}, & (1), \\ 1 - \sqrt{1-\lambda^2}, & (2), \end{cases}$$

$$\varepsilon_Y = Y/E,$$

gdzie zarówno stosunek $\varepsilon_L/\varepsilon_Y$, tj. stosunek odkształcenia krytycznego do odkształcenia w momencie osiągnięcia granicy plastyczności, jak i stosunek d/l są stałymi zależnymi jedynie od rodzaju materiału i parametrów geometrycznych szczeliny. Tak więc wyrażenie stojące po lewej stronie równań (4.2) jest pewną nową stałą,

$$(4.2') \quad \Phi = \frac{\pi}{4(1-\nu^2)} \frac{d}{l} \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_Y}.$$

Jeżeli stosunek Y/E , który jest miarą plastyczności materiału, jest dany, a także znane są oszacowania ε_L oraz d/l , wielkość obciążenia krytycznego λ_{kryt} możemy znaleźć z równań (4.2). Równania te dają się łatwo odwrócić ze względu na λ i otrzymujemy

$$(4.3) \quad p_{\text{kryt}} = \begin{cases} Y[\Phi + \sqrt{2\Phi}], & (1), \\ Y\sqrt{\Phi(2-\Phi)}, & (2). \end{cases}$$

Wzory te, zastępujące wzór Griffitha, odnoszą się do materiałów ciągliwych o charakterystyce $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ zbliżonej do charakterystyki materiału idealnie sprężysto-plastycznego, przy czym żąda się tu także, aby strefa plastyczna, poprzedzająca koncentrator naprężeń, była wyraźnie zlokalizowana wzdłuż osi symetrii koncentratora.

Łatwo zauważyć, że dla małych Φ obydwa wzory (4.3) posiadają wspólną postać:

$$(4.4) \quad p_{\text{kryt}} \approx Y\sqrt{2\Phi}.$$

(4) Za miarę wyciężenia można by również przyjąć największą intensywność odkształceń.

Tutaj pomijamy odkształcenia w kierunku r , jako małe względem odkształcenia w kierunku osi z , i uważamy, że to ostatnie decyduje o zniszczeniu.

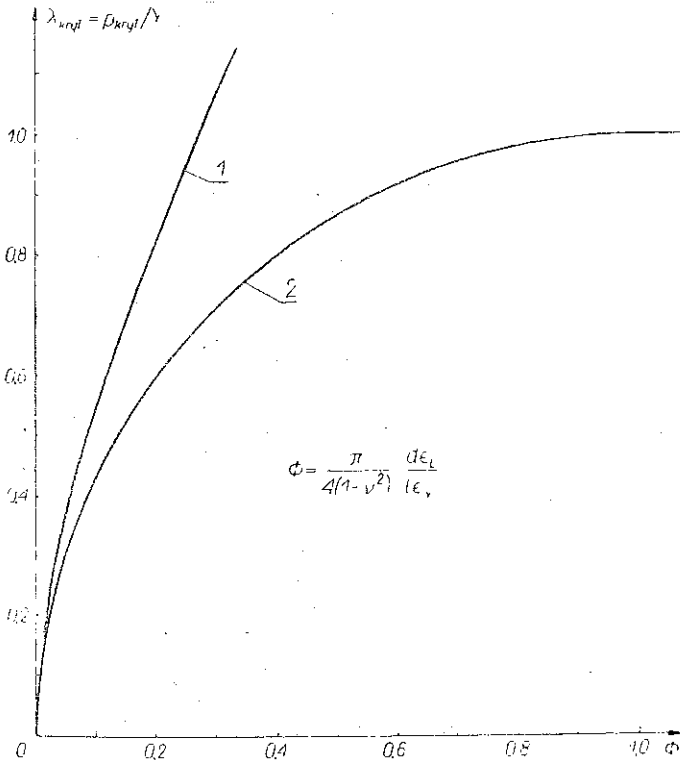
Można też pokazać, że rozwinięcie na szereg Φ odpowiednich funkcji, jakie wynikają z odwrócenia równań podanych przez Goodiera i Fielda [9], daje dla płaskiego stanu naprężenia

$$(4.5) \quad p_{\text{kryt}} = \frac{\pi}{2} (1 - \nu^2)^{1/2} Y \sqrt{2\Phi} + O(\Phi),$$

oraz dla płaskiego stanu odkształcenia

$$(4.6) \quad p_{\text{kryt}} = \frac{\pi}{2} Y \sqrt{2\Phi} + O(\Phi).$$

Ten ostatni wynik różni się od wzoru (4.4) dla szczeliny osiowo-symetrycznej jedynie o czynnik $\pi/2$. Wyraz $O(\Phi)$ zawiera pominięte wyrazy rzędu wyższego od $\Phi^{1/2}$. Wykresy odpowiadające równaniom (4.3) umieszczono na rys. 3.



Rys. 3

Należy zaznaczyć, że drugie spośród równań (4.3) jest prawdziwe jedynie w przedziale $0 \leq \Phi \leq 1$, natomiast, jak łatwo wykazać, dla $\Phi \geq 1$ mamy $p_{\text{kryt}} \equiv Y$, a więc zniszczenie materiału jest możliwe jedynie na drodze zupełnego wyczerpania nośności granicznej (tzw. dalekozasięgowe płynięcie). Dla większości materiałów konstrukcyjnych Φ jest wielkością małą, o ile tylko promień szczeliny nie jest zbyt mały (Φ jest proporcjonalne do l^{-1}). Korzystając z drugiego spośród równań (4.3)

oraz z warunku $p_{kryt} = Y$ dla $\Phi \geq 1$, możemy obliczyć promień szczeliny l^* taki, że dla wszystkich szczelin o promieniu mniejszym niż l^* zachodzić będzie płynięcie plastyczne na całym przekroju poprzecznym. Mamy więc

$$(4.7) \quad \Phi(l^*) = \frac{\pi}{4(1-\nu^2)} \frac{d}{l^*} \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_Y} = 1,$$

skąd

$$(4.8) \quad l^* = \frac{\pi}{4(1-\nu^2)} \frac{d\varepsilon_L}{\varepsilon_Y} = \frac{\pi E \delta}{8(1-\nu^2) Y}, \quad \delta = 2d\varepsilon_L.$$

Taki sam wynik otrzymał LEONOW [17] rozpatrując pękanie ciał kruchych i quasi-kruchych. Szacując stałe $E/Y = 10^3$, $\delta = 10^{-4}$ cm dla żeliwa oraz $\delta = 10^{-3}$ cm dla stali nisko-węglowej, ze wzoru (4.8) otrzymamy odpowiednio: $2l^* \approx 0,1$ cm dla żeliwa oraz $2l^* \approx 1$ cm dla stali nisko-węglowej, co dobrze pokrywa się z danymi doświadczalnymi: materiał plastyczny «nie odczuwa» istnienia koncentраторów naprężeń o wymiarach mniejszych niż pewien wymiar l^* , obliczony powyżej. Przy istnieniu więc szczelin o średnicy nie większej niż $2l^*$ możliwe jest osiągnięcie pełnej nośności granicznej elementu. Teoria Griffitha oczywiście nie przewiduje takiego zjawiska.

Obliczymy obecnie krytyczny zasięg strefy plastycznej oraz krytyczną wartość plastycznej dysypacji energii. Przez określenie «krytyczny» rozumiemy wartości odpowiednich funkcji dla obciążenia równego obciążeniu krytycznemu p_{kryt} . Tak więc wstawiając do równań (2.16) $\lambda = \lambda_{kryt}$ według wzorów (4.3) otrzymamy

$$(4.9) \quad \left(\frac{a}{l}\right)_{kryt} = \begin{cases} 1 + \frac{\Phi}{1 + \sqrt{2\Phi}} & (1), \\ \frac{1}{1 - \Phi} & (2). \end{cases}$$

Analogicznie krytyczna dysypacja energii wyniesie

$$(4.10) \quad \left(\frac{dW_p}{dA}\right)_{kryt} = \begin{cases} \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \Phi \left[1 + \frac{\Phi}{1 + \sqrt{2\Phi}}\right], & (1), \\ \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \frac{\Phi}{1 - \Phi}, & (2). \end{cases}$$

Wykresy odpowiadające równaniom (4.9) oraz (4.10) umieszczono na rys. 4a i 4b.

Dla niewielkich wartości Φ wzory powyższe upraszczają się do postaci

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \left(\frac{a}{l}\right)_{kryt} &= 1 + \Phi + \dots, & (1) \text{ i } (2); \\ \left(\frac{dW_p}{dA}\right)_{kryt} &= \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E}\right)^2 \Phi (1 + \Phi + \dots), & (1) \text{ i } (2). \end{aligned}$$

Tak więc dla $\Phi \ll 1$ mechanizm pękania nie zależy od schematu obciążenia. Oczywiście dla większych wartości Φ mechanizm ten jest na ogół różny w obydwu przypadkach, co zostało uwidocznione w przytoczonym poniżej przykładzie liczbowym.

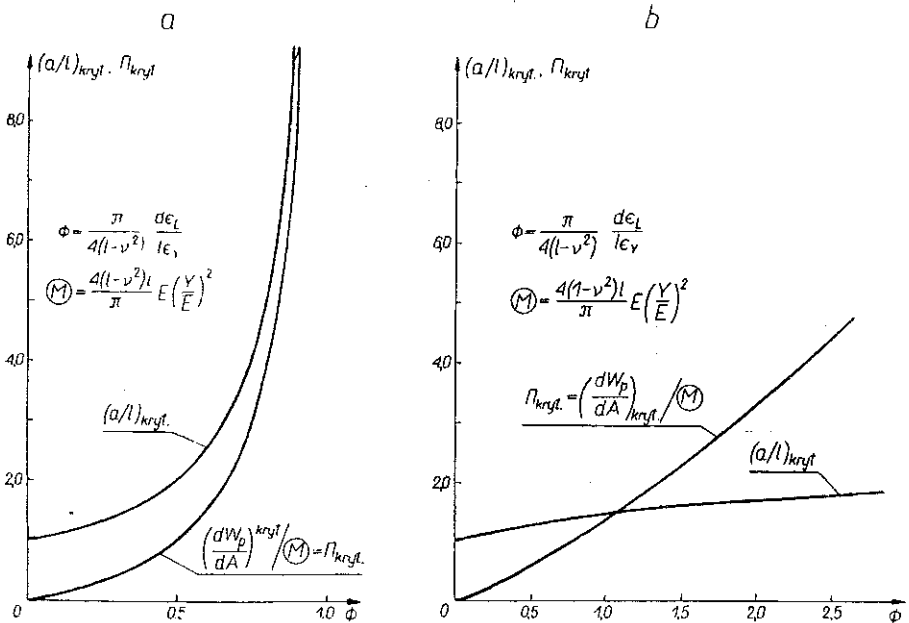
Jeżeli zbadamy wyrażenie

$$(4.12) \quad \left[\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)l} \left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{\text{kryt}} \right]^{1/2}$$

wstawiając do niego dysypację energii według (4.11) i poprzestając jedynie na pierwszym wyrazie rozwinięcia na szereg potęgowy względem Φ , to okaże się, że jest ono równe $Y\sqrt{2\Phi}$, a zatem w zgodzie z (4.4) jest równe ciśnieniu krytycznemu. Tak więc dla przypadku, gdy stała $\Phi \ll 1$, otrzymujemy równanie Orowana-Irwina:

$$(4.13) \quad p_{\text{kryt}} = \sqrt{\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)l} \left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{\text{kryt}}}, \quad (1) \text{ i } (2),$$

które tym tylko różni się od wzoru Griffitha-Sacka-Sneddona dla szczeliny osiowo-symetrycznej, że zamiast napięcia powierzchniowego γ wchodzi energia dysypowana plastycznie (w przybliżeniu większa od $\gamma \cdot 10^3$ razy przy promieniu szczeliny l rzędu 1 cm). Przedstawione tu rozważania są więc w zgodzie z modyfikacją teorii Griffitha, opracowaną dla materiałów ciągliwych przez OROWANA i IRWINA, jedynie jednak w szczególnym przypadku $\Phi \ll 1$. Jeśli stała Φ nie spełnia tego warunku, to należy używać wzorów (4.3), które są ogólnie prawdziwe.



Rys. 4

Można wykazać, rozwijając na szereg względem Φ odpowiednio przekształcone wyrażenia z pracy Goodiera i Fielda [9], że bardzo podobne związki zachodzą także w przypadku zagadnienia płaskiego. Otrzymujemy (dla $\Phi \ll 1$):

$$(4.14) \quad \left(\frac{a}{l} \right)_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1 + \Phi + \dots & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,} \\ 1 + (1 - \nu^2) \Phi + \dots & \text{dla płaskiego stanu naprężenia,} \end{cases}$$

dla obu stanów

$$(4.15) \quad \left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{\text{kryt}} = \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y}{E} \right)^2 \Phi + \dots$$

oraz

$$(4.16) \quad p_{\text{kryt}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{\pi l} \left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{\text{kryt}}} & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,} \\ \sqrt{\frac{2E}{\pi(1-\nu^2)l} \left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{\text{kryt}}} & \text{dla płaskiego stanu naprężenia.} \end{cases}$$

Przykład liczbowy. Przykład niniejszy dotyczy stali, dla której $\Phi = 0,25$, $\nu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^{12}$ [dyna cm^{-2}], $Y/E = 10^{-3}$, $Y \approx Y_0 = 2 \cdot 10^9$ [dyna cm^{-2}].

Przyjmijmy ponadto promień szczeliny $l = 1$ cm. Należy obliczyć ciśnienie krytyczne, krytyczny zasięg strefy plastycznej oraz plastyczną dysypację energii poprzedzającej zniszczenie. Wyniki obliczeń będziemy zapisywać równoległe dla obydwu schematów obciążenia: (1) ciśnienie przyłożone na powierzchni szczeliny, (2) ciśnienie przyłożone w nieskończoności. Korzystając ze wzorów niniejszego rozdziału otrzymujemy

$$(4.17) \quad \lambda_{\text{kryt}} = \begin{cases} 0,25 + \sqrt{2 \cdot 0,25} = 0,957, & (1), \\ \sqrt{0,25(2 - 0,25)} = 0,660, & (2). \end{cases}$$

Stąd ciśnienie krytyczne

$$(4.18) \quad p_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1,91 \cdot 10^9 \text{ [dyna } \text{cm}^{-2}\text{]}, & (1), \\ 1,32 \cdot 10^9 \text{ [dyna } \text{cm}^{-2}\text{]}, & (2). \end{cases}$$

Krytyczny zasięg strefy plastycznej

$$(4.19) \quad \left[\frac{a}{l} \right]_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1 + \frac{0,25}{1 + \sqrt{2 \cdot 0,25}} = 1,15, & (1), \\ \frac{1}{1 - 0,25} = 1,33, & (2) \end{cases}$$

oraz krytyczna dysypacja energii:

$$(4.20) \quad \left(\frac{dW_p}{dA} \right)_{\text{kryt}} = \begin{cases} 2,32 \cdot 10^6 \cdot 0,25 \left(1 + \frac{0,25}{1 + \sqrt{2 \cdot 0,25}} \right) = 0,665 \cdot 10^6 \text{ [erg } \text{cm}^{-2}\text{]}, & (1); \\ 2,32 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25}{1 - 0,25} = 0,774 \cdot 10^6 \text{ [erg } \text{cm}^2\text{]}, & (2). \end{cases}$$

Liczba $2,32 \cdot 10^6$ występująca w ostatnich równaniach pochodzi z przykładu przytoczonego w poprzednim rozdziale; jest to wartość liczbową wyrażenia $4(1-\nu^2)lY^2/\pi E$. Z powyższych danych widać, że zniszczenie dla obu schematów obciążenia przebiega nieco inaczej: wartość ciśnienia krytycznego w przypadku (1), gdy ciśnienie to działa na powierzchni szczeliny, jest około 1,5 raza większe od odpowiedniej wartości ciśnienia dla przypadku (2), tzn. gdy ciśnienie jest przyłożone w nieskończoności. Interesujące zjawisko zaobserwujemy, jeśli zbadamy zasięg strefy plastycznej w obydwu

przypadkach. Zasięg ów ($s = a - l$) jest przeszło dwukrotnie większy w przypadku (2), gdzie wynosi 33% promienia szczeliny, niż w przypadku (1), gdzie wynosi tylko 15%. Zauważamy więc tendencję przeciwną w stosunku do wartości ciśnień krytycznych. Dane te rzucają również pewne światło na kwestię nośności granicznej: obszary, podlegające uplastycznieniu w materiale ciągliwym lecz zawierającym koncentrator naprężeń w postaci szczeliny, są małe w porównaniu z przekrojem poprzecznym całego elementu. Na pozostałej części powierzchni pękanie ma charakter kruchy. Interesujące jest również porównanie wartości energii dysypowanej aż do momentu zniszczenia: dla obydwu schematów obciążenia mimo różnego mechanizmu pęknięcia wartości $(dW_p/dA)_{\text{kryt}}$ są zbliżone.

Powyższe dane liczbowe są prawdziwe jedynie w przybliżeniu, tak jak jedynie w przybliżeniu jest słuszne przyjęcie $Y \approx Y_0$. W rzeczywistości stała Y jest większa od granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu i, jak to zostanie poniżej wykazane, wynosi

$$(4.21) \quad Y = \begin{cases} 1,58 Y_0, & (1); \\ 1,26 Y_0, & (2) \end{cases}$$

dla danych jak w wyżej przytoczonym przykładzie. Tak więc ciśnienie krytyczne obliczone poprzednio po uwzględnieniu korekcji Y wg (4.21) wzrośnie (w przybliżeniu) 1,58-krotnie dla schematu (1) oraz 1,26-krotnie dla schematu (2). Energie wzrosną odpowiednio $(1,58)^2$ -krotnie i $(1,26)^2$ -krotnie, natomiast wartości krytycznych zasięgów strefy plastycznej nie ulegną zmianie. Szczegółowej dyskusji wspomnianej korekcji wzorów poświęcony jest rozdział ostatni.

5. Dyskusja warunku Hubera-Misesa-Hencky'ego

Rozwiązując układ dualnych równań całkowych (2.4) oraz odwracając transformację Hankela możemy określić stan naprężenia w ciele zawierającym szczelinę osiowo-symetryczną przy zmodyfikowanych warunkach brzegowych (jak to podano w p. 2) tak, aby odpowiadały one zagadnieniu sprężysto-plastycznemu. Interesować nas będzie rozkład naprężeń w płaszczyźnie symetrii szczeliny, tzn. dla $z = 0$ i na powierzchni $l < r < a$ lub $m < \rho < 1$, tj. w obszarze odpowiadającym strefie plastycznej, tam bowiem będziemy żądać spełnienia warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego przez różne od zera składowe tensora naprężenia $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$. Dla $z = 0$ wzory upraszczają się (przypis B), a naprężenia spełniają związki

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{(1 - 2\nu)\mu}{1 - \nu} \left(\frac{2}{r} I_1 - I_0 \right), \\ \sigma_r - \sigma_z &= \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\mu}{r} I_1, \\ \sigma_z - \sigma_\theta &= \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \mu \left(\frac{1}{r} I_1 - I_0 \right), \end{aligned}$$

gdzie całki I_1 i I_0 są zdefiniowane w przypisie B.

Rozważmy obecnie obciążenie następujące:

$$(5.2) \quad q(\varrho) = \begin{cases} A, & 0 \leq \varrho < m; \\ B, & m < \varrho \leq 1. \end{cases}$$

Dla przypadku pierwszego należy przyjąć $A = p_0$, $B = -Y$.

Korzystając ze wzorów (B.10) i (B.12) otrzymamy dla $m < \varrho \leq 1$

$$(5.3) \quad I_1(p_0, Y) = \frac{\varrho a}{2} \left[\frac{m^2}{\varrho^2} (p_0 + Y) - Y \right] \frac{1 - \nu}{\mu} \quad \text{dla} \quad (1).$$

Tak więc wzory na różnice naprężeń (5.1) przyjmą postać następującą (przyjmiemy $I_0 = [(v - 1)/\mu] Y$):

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1 - 2\nu}{2} \left[\frac{m^2}{\varrho^2} 2(p_0 + Y) \right], \\ \sigma_r - \sigma_z &= \frac{1 - 2\nu}{2} \left[\frac{m^2}{\varrho^2} (p_0 + Y) - Y \right], \\ \sigma_z - \sigma_\theta &= \frac{1 - 2\nu}{2} \left[\frac{m^2}{\varrho^2} (p_0 + Y) + Y \right], \end{aligned} \quad (1)$$

co po wstawieniu do warunku Hubera-Misesa-Hencky'ego

$$(5.5) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 = 2Y_0^2$$

daje

$$(5.6) \quad 3(1 - 2\nu)^2 \frac{m^4}{\varrho^4} (p_0 + Y)^2 + (1 - 2\nu)^2 Y^2 = 4Y_0^2 \quad (1).$$

Równanie to określa wartość Y jako funkcję obciążenia p_0 , stałych materiałowych ν i Y_0 oraz położenia ϱ . Jak się dalej okaże, funkcja $Y = Y(p_0, Y_0, \varrho)$ zmienia się nieznacznie na odcinku $m < \varrho < 1$ i będzie można aproksymować ją pewną wartością uśrednioną, niezależną od położenia. W wyniku otrzymamy wyrażenie $Y = Y(p_0, Y_0)$ analogiczne do tego, które otrzymali Goodier i Field [8] dla płaskiego stanu odkształcenia.

Obecnie napiszemy warunek HMH dla drugiego przypadku obciążenia (gdy p_0 działa w nieskończoności). Wówczas do stanu wywołanego ciśnieniami

$$q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \varrho < m, \\ -(Y - p_0), & m < \varrho < 1 \end{cases}$$

należy dodać jednorodny stan naprężenia (h): $\sigma_z = p_0$, $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$. We wzorach (5.1) przyjmujemy zatem

$$I_0 = \frac{1 - \nu}{\mu} (p_0 - Y)$$

(oczywiście dla $m < \varrho < 1$) oraz dodamy różnice ciśnień (5.1) z odpowiednimi różnicami dla stanu jednorodnego

$$(5.7) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)_h = 0, \quad (\sigma_r - \sigma_z)_h = -p_0, \quad (\sigma_z - \sigma_\theta)_h = p_0.$$

Otrzymujemy zatem

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{2(1-2\nu)\mu}{r(1-\nu)} I_1 + (1-2\nu)(Y-p_0), \\ \sigma_r - \sigma_z &= \frac{(1-2\nu)\mu}{r(1-\nu)} I_1 - p_0, \\ \sigma_z - \sigma_\theta &= \frac{(1-2\nu)\mu}{r(1-\nu)} I_1 + (1-2\nu)(Y-p_0) + p_0. \end{aligned}$$

Tutaj $I_1 = I_1(p_0, Y-p_0)$ otrzymujemy ze wzorów wyprowadzonych w przypisie B przez podstawienie $A = p_0$, $B = -(Y-p_0)$. Mamy wtedy

$$(5.9) \quad I_1(p_0, Y-p_0) = (1-\nu) \frac{r}{\mu} \left| \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^2} Y + p_0 \right|, \quad (2).$$

Ostatecznie więc różnice naprężeń mają postać

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1-2\nu}{2} \left(\frac{m^2}{\varrho^2} 2Y \right), \\ \sigma_r - \sigma_z &= \frac{1-2\nu}{2} \left(Y \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^2} - p_0 \frac{1+2\nu}{1-2\nu} \right), \\ \sigma_z - \sigma_\theta &= \frac{1-2\nu}{2} \left(Y \frac{m^2 + \varrho^2}{\varrho^2} + p_0 \frac{1+2\nu}{1-2\nu} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

co po wstawieniu do warunku HMH daje

$$(5.11) \quad (1-2\nu)^2 Y^2 \left[1 + 3 \frac{m^4}{\varrho^4} + 2p_0 \frac{1+2\nu}{1-2\nu} + p_0^2 \left(\frac{1+2\nu}{1-2\nu} \right)^2 \right] = 4Y_0^2, \quad (2).$$

Jest to równanie analogiczne do (5.6), które było ważne dla przypadku (1): pozwala ono sprawdzić, na ile wyznaczona stąd funkcja $Y = Y(p_0, Y_0, \varrho)$ różni się od przyjętej wartości $Y = \text{const}$. Obydwa równania (5.6) oraz (5.11) można napisać w zwartej postaci:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \frac{k^2 y^2}{4} [3\mu^2 (1+\lambda)^2 + 1] &= 1, & (1), \\ \frac{k^2 y^2}{4} \left[3\mu^2 + \left(1 + \lambda \frac{2-k}{k} \right)^2 \right] &= 1, & (2), \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy oznaczeń

$$(5.13) \quad \begin{aligned} k &= 1 - 2\nu, & \lambda &= p_0/Y, \\ \mu &= \left(\frac{m}{\varrho} \right)^2, & y &= Y/Y_0. \end{aligned}$$

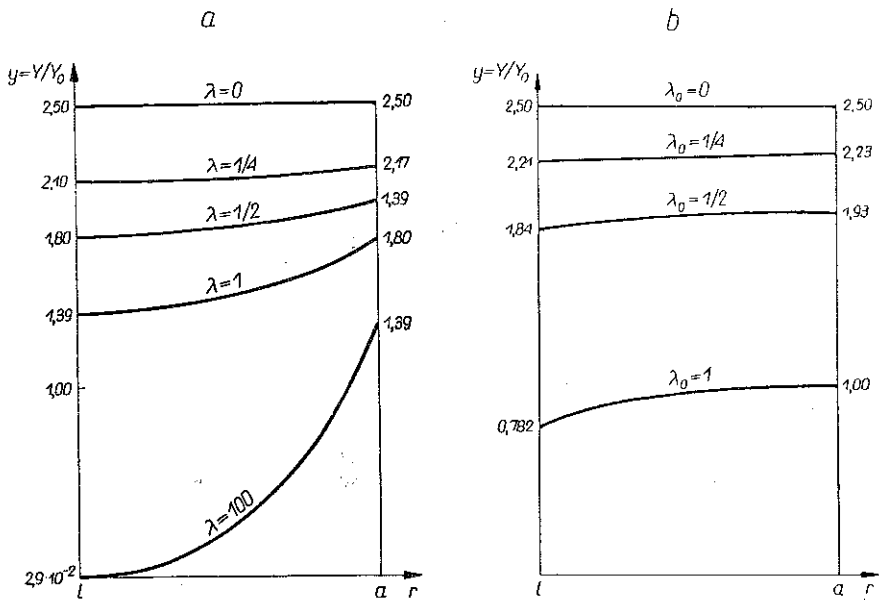
Wprowadzimy ponadto nowy bezwymiarowy parametr obciążenia, zdefiniowany jako stosunek ciśnienia do granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu:

$$(5.14) \quad \lambda_0 = p_0/Y_0.$$

Nierówności $m \leq \rho \leq 1$ lub $l \leq r \leq a$ określają zakres zmienności μ , mianowicie

$$(5.15) \quad m^2 \leq \mu \leq 1,$$

przy czym $\mu = 1$ odpowiada końcowi szczeliny $r = 1$, natomiast $\mu = m^2$ odpowiada brzegowi strefy plastycznej $r = a$. Korzystając z równań (5.12) oraz pamiętając o związkach $m = \sqrt{1+2\lambda/(1+\lambda)}$ dla (1) oraz $m = (1 - \lambda^2)^{-1/2}$ dla (2), wyznaczaliśmy wartości funkcji $y = y(\lambda_0, \rho)$ na brzegach odcinka $1 \leq r \leq a$ dla kilku wy-



Rys. 5

branych wartości parametru obciążenia (λ_0 lub λ); wewnątrz odcinka $l \leq r \leq a$ zbadana została krzywizna funkcji y . Umożliwiło to sporządzenie rysunków 5a i 5b, które przedstawiają wykres funkcji $y = y(\lambda_0, \rho)$ dla obydwu schematów (1) i (2). Długość odcinka $\langle l, a \rangle$ jest również funkcją λ , czego na rysunkach nie uwidocz-niono, przez co rysunki są pozbawione skali wzdłuż osi odciętych i oddają jedynie jakościowy charakter funkcji y . Jest rzeczą widoczną, że $y(r)$ niewiele zmienia się pomiędzy punktami $r = l$ i $r = a$ z wyjątkiem ostatniej spośród krzywych na rys. 5a (krzywa dla $\lambda = 100$), gdzie różnica jest dość znaczna. Wówczas jednak odcinek $\langle l, a \rangle$, reprezentujący strefę plastyczną, jest bardzo rozciągnięty i jego długość rośnie nieograniczenie, gdy $\lambda \rightarrow \infty$. Budując wzory aproksymacyjne ograniczymy się w obydwu przypadkach do przedziału $0 \leq \lambda \leq 1$ [w przypadku (2) zakres ten wyczerpuje wszystkie możliwe wartości λ]. Jak wykażemy poniżej, odpowiada to

następującym przedziałom parametru λ_0 : $0 \leq \lambda_0 \leq 0,6366/k$ dla schematu (1) oraz $0 \leq \lambda_0 \leq (2 + \sqrt{3k^2 + 4})/2\sqrt{3k^2 + 4}$ dla schematu (2).

Szczegółowe badanie funkcji $y = y(\lambda_0)$ dla $r = l$ oraz $r = a$ pozwala zaproponować następującą liniową aproksymację funkcji $y(\lambda_0)$ dla obydwu przypadków:

$$(5.16) \quad y = \begin{cases} \gamma + \delta\lambda_0, & (1), \\ \alpha + \beta\lambda_0, & (2), \end{cases} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

przy czym współczynniki α , β oraz γ , δ są tak dobrane, aby w punktach $\lambda_0 = 0$ ($\lambda = 0$) oraz $\lambda_0 = y(\lambda = 1)$ wzory aproksymacyjne dawały wartości zgodne z wartościami ścisłymi (lub ich średnimi) według równań (5.12). Z równań (5.12) otrzymujemy ściśle wartości $y(l)$ oraz $y(a)$ dla $\lambda = 0$ oraz $\lambda = 1$, mianowicie

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \lambda = 0, \quad y(l) = y(a) = 1/k, & \quad (1) \text{ i } (2); \\ \lambda = 1, \quad y(l) = \begin{cases} 2/\sqrt{13}k, & (1); \\ 2/\sqrt{3k^2+4}, & (2); \end{cases} \\ y(a) = \begin{cases} 2/\sqrt{7,75}k, & (1); \\ 1, & (2). \end{cases} \end{aligned}$$

Dla $\lambda = 1$ wartości $y(l)$ oraz $y(a)$ różnią się nieznacznie.

We wzorach aproksymacyjnych wykorzystujemy wartości średnie

$$(5.18) \quad \lambda = 1, \quad y_* = \frac{y(l) + y(a)}{2} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{7,75}} \right) \frac{1}{k} = 0,6366/k, & (1); \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3k^2+4}}, & (2). \end{cases}$$

Uwzględniając te dane, znajdujemy

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \alpha = \gamma = 1/k, \quad \delta = -0,5709, \\ \beta = 1 - \frac{1}{k} \frac{2\sqrt{3k^2+4}}{2 + \sqrt{3k^2+4}}. \end{aligned}$$

W przypadku (2) wzór interpolacyjny $y = \alpha + \beta\lambda_0$ upraszcza się znacznie, gdy współczynnik Poissona mieści się w przedziale (0,3; 0,5). Wówczas bowiem

$$(5.20) \quad \frac{2\sqrt{3k^2+4}}{2 + \sqrt{3k^2+4}} \approx 1$$

i wzór interpolacyjny redukuje się do postaci

$$(5.21) \quad y = \frac{1}{k}(1 - \lambda_0) + \lambda_0$$

lub też inaczej

$$(5.22) \quad Y = \frac{Y_0 - 2\nu p_0}{1 - 2\nu},$$

co może być porównane z wynikiem otrzymanym przez Goodiera i Fielda [9] dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$(5.23) \quad Y = \frac{Y_0 - \nu p_0}{1 - 2\nu}.$$

Oczywiście, przyjęte przez nas założenia $Y = \text{const}$ wzdłuż odcinka $\langle l, a \rangle$ jest przybliżeniem rzeczywistego rozkładu ciśnień $Y(r)$ i przyjęcie takie spowoduje, że warunek HMH nie będzie ściśle spełniony. Zagadnienie nasze można rozwiązać w sposób ścisły. Należy wtedy przyjąć, że rozkład $Y = Y(r)$ na pierścieniu $l < r < a$ jest wielkością niewiadomą, którą należy wyznaczyć z równania, otrzymanego z warunku (5.5). Nieliniowe równanie całkowe, które w ten sposób dostaniemy, ma w przypadku (1), tzn. dla

$$q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \varrho < m; \\ -Y(\varrho), & m < \varrho < 1 \end{cases}$$

postać następującą:

$$(5.24) \quad Y_0^2 = (1 - 2\nu)^2 \left\{ \frac{12}{\pi^2 \varrho^4} \left[\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\varrho} \frac{s^2 q(xs) ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{6}{\pi \varrho^2} Y(\varrho) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\varrho} \frac{s^2 q(xs) ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} + Y^2(\varrho) \right\}.$$

W podobny sposób w przypadku (2) dla

$$q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \varrho < m, \\ -(Y(\varrho) - p_0), & m < \varrho < 1 \end{cases}$$

otrzymamy, wykorzystując wzory (5.8) równanie całkowe ma funkcję $Y(\varrho)$ o następującej postaci:

$$(5.25) \quad Y_0^2 = (1 - 2\nu)^2 \left\{ \frac{12}{\pi^2 \varrho^4} \left[\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\varrho} \frac{q(xs) s^2 ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{6}{\pi \varrho^2} (Y(\varrho) - p_0) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\varrho} \frac{q(xs) s^2 ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1 - 2\nu)^2} [(1 - 2\nu)(Y(\varrho) - p_0) + p_0]^2 - \frac{1}{1 - 2\nu} (Y(\varrho) - p_0) + p_0^2 \right\}.$$

Rozwiązanie równań (5.24) i (5.25) przedstawia duże trudności, wobec tego na razie poprzestaniemy na przyjęciu, że $Y = \text{const}$ zgodnie ze wzorami (5.16) i (5.19) sądząc, że jest ono wystarczające dla celów niniejszej analizy.

Na zakończenie rozdziału przedyskutujemy pewne osobliwości, jakie powstają dla materiału nieściśliwego dla $\nu \rightarrow 1/2$. Wtedy dla $k \rightarrow 0$ ze wzoru (5.21) otrzymujemy $\gamma = \infty$ (na odcinku $\langle l, a \rangle$ o długości dążącej do zera) z wyjątkiem punktu $\lambda_0 = 0$, gdzie $\gamma = 1$; wówczas bowiem wyrażenie $(1 - \lambda_0)/(1 - 2\nu)$ przedstawia symbol nieoznaczony $0/0$ o granicy równej jedności. Zasięg strefy uplastycznienia a/l dla

$\lambda_0 \rightarrow 1$ rośnie nieograniczenie przy ciśnieniu zewnętrznym $p_0 = Y_0$. Podobnie jest w przypadku (1) (gdzie ciśnienie działa na powierzchni szczeliny) z tą tylko różnicą, że tutaj rolę punktu $\lambda_0 = 1$ odgrywa punkt $\lambda_0 = \infty$, ponieważ zniszczenie dla materiału idealnie nieściśliwego przy tym schemacie obciążenia zachodzi dopiero przy nieskończeniu dużym wzroście przyłożonego ciśnienia. Innymi słowy dla materiału idealnie nieściśliwego zawsze jest osiągana nośność graniczna. Rezultat taki (w obydwu rozważonych przypadkach) wynika z przyjętego modelu fizykalnego: płynięcie plastyczne wg warunku HMM jest możliwe jedynie wtedy, gdy istnieje pewien różny od zera dewiator tensora naprężeń, natomiast nie jest ono możliwe przy czystym stanie hydrostatycznym, nawet gdy naprężenia są nieskończenie duże. Taki właśnie stan jest realizowany w płaszczyźnie symetrii szczeliny osiowo-symetrycznej, gdy $\nu = 1/2$. Aby przybliżyć obecne rozważania do stanu rzeczywistego, należałoby albo zmodyfikować warunek HMM, włączając doń również część energii objętościowej jako miarę rozwoju odkształceń plastycznych, lub też przyjmować współczynnik Poissona nieco mniejszy od $1/2$.

Wykresy zasięgu strefy plastycznej oraz dysypacji energii plastycznej (energia ta w granicznym przypadku $\nu = 1/2$ osiąga pewną skończoną, różną od zera wartość) są podane w następnym punkcie i wyjaśniają dobrze wpływ współczynnika ν na mechanizm zniszczenia materiałów ciągliwych.

6. Korekcja wzorów ($Y \rightarrow Y_0$)

Znając związek między Y oraz Y_0

$$(6.1) \quad Y = \begin{cases} Y_0 (\gamma + \delta \lambda_0), & (1); \\ Y_0 (\alpha + \beta \lambda_0), & (2), \end{cases}$$

gdzie stałe α , β , γ i δ określone są wzorami (5.27) możemy dla każdego danego obciążenia $\lambda_0 = p_0/Y_0$ obliczyć wartość stosunku $y = Y/Y_0$, a następnie korzystając z oczywistego związku

$$(6.2) \quad \lambda = \lambda_0/y$$

możemy znaleźć odpowiednią wartość parametru λ i skorzystać ze wzorów podanych w poprzednich rozdziałach, aby wyliczyć zasięg strefy plastycznej, ciśnienie krytyczne oraz dysypację energii. Dla ułatwienia tych obliczeń dogodnie jest podać wzory ogólne, w których omówiona korektura będzie już uwzględniona. Tak więc otrzymujemy następujące wyniki.

1. Zasięg strefy plastycznej:

$$(6.3) \quad \frac{a}{l} = \begin{cases} \frac{y + \lambda_0}{\sqrt{y^2 + 2\lambda_0 y}} = \frac{\gamma + (1 + \delta) \lambda_0}{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(\delta + 1)\lambda_0 + \delta(\delta + 2)\lambda_0^2}}, & (1), \\ \frac{y}{\sqrt{y^2 - \lambda_0^2}} = \frac{1 + (k - \kappa) \lambda_0}{\sqrt{\kappa(\kappa - 2k)\lambda_0^2 + 2(k - \kappa)\lambda_0 + 1}}, & (2) \end{cases}$$

gdzie $\gamma = 1/k$, $\sigma = -0,5709$, $k = 1 - 2\nu$; natomiast $\kappa = 2\sqrt{3k^2 + 4}/(2 + \sqrt{3k^2 + 4})$.

Dla ν bliskich $1/2$ zachodzi $\kappa \approx 1$.

2. Dysypacja energii

$$(6.4) \quad \frac{dW_p}{dA} = \begin{cases} \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y_0}{E}\right)^2 y(y+\lambda_0) \left[\frac{y+\lambda_0}{\sqrt{y^2+2\lambda_0 y}} - 1 \right], & (1); \\ \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y_0}{E}\right)^2 y^2 \left[\frac{y}{\sqrt{y^2-\lambda_0^2}} - 1 \right], & (2), \end{cases}$$

lub też, jeśli uwzględnimy (6.1) oraz (5.27):

$$(6.5) \quad \frac{dW_p}{dA} / \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y_0}{E}\right)^2 = \begin{cases} (\gamma+\delta\lambda_0) [\gamma+(\delta+1)\lambda_0] \left\{ \frac{\gamma+(\delta+1)\lambda_0}{\sqrt{\gamma^2+2\gamma(\delta+1)\lambda_0+\delta(\delta+2)\lambda_0^2}} - 1 \right\}, & (1); \\ \left[\frac{1+(k-\kappa)\lambda_0}{k} \right]^2 \left\{ \frac{1+(k-\kappa)\lambda_0}{\sqrt{\kappa(\kappa-2k)\lambda_0^2+2(k-\kappa)\lambda_0+1}} - 1 \right\}, & (2). \end{cases}$$

3. Ciśnienia krytyczne otrzymuje się z (4.3) przez podstawienie $\lambda = \lambda_0/y$ oraz $\Phi = \Phi_0/y$, przy czym stała Φ_0 jest zdefiniowana tak samo jak Φ z tą jednak różnicą, że na miejsce Y wchodzi obecnie Y_0 : $\Phi_0 = \pi E \delta / 8 (1 - \nu^2) I Y_0$. Z prostych równań drugiego stopnia ze względu na λ_{kryt} otrzymujemy

$$(6.6) \quad p_{kryt} = \begin{cases} Y_0 \Phi_0 \left[1 + \delta + \sqrt{\frac{1}{2}(\delta^2+2\delta-3)+2\gamma/\Phi_0} \right], \\ \begin{cases} Y_0 \Phi_0 (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1 + 2\alpha/\Phi_0}) & \text{dla } 0 \leq \Phi_0 \leq \alpha/(1-\beta) \\ Y_0 \alpha/(1-\beta) & \text{dla } \Phi_0 \geq \alpha/(1-\beta) \end{cases} \end{cases}$$

4. Krytyczny zasięg strefy plastycznej

$$(6.7) \quad \left(\frac{a}{l}\right)_{kryt} = \begin{cases} 1 + \frac{\Phi_0/y_{kryt}}{1 + \sqrt{2\Phi_0/y_{kryt}}}, \\ [1 - \Phi_0/y_{kryt}]^{-1}. \end{cases}$$

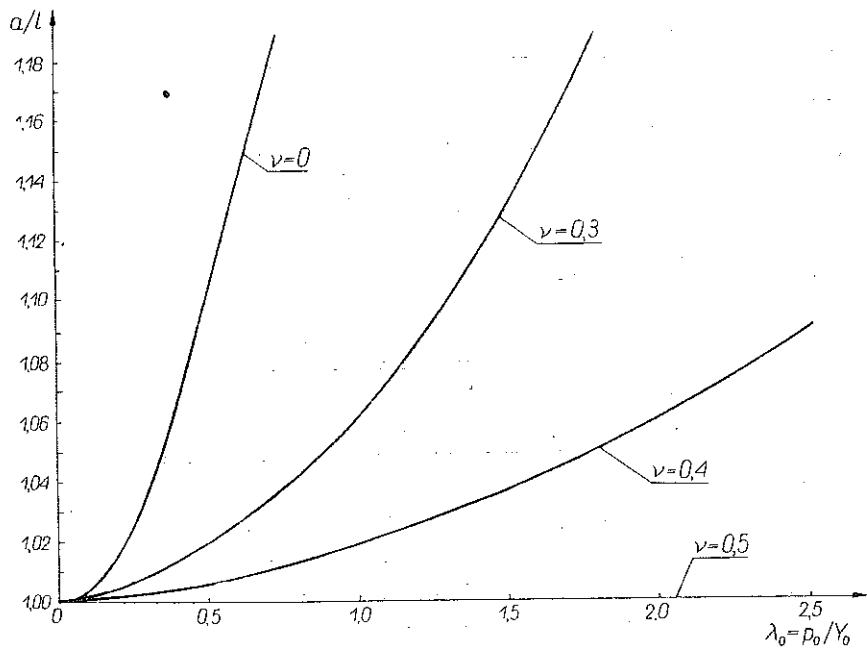
5. Krytyczna dysypacja energii

$$(6.8) \quad \left(\frac{dW_p}{dA}\right)_{kryt} = \frac{4(1-\nu^2)IY_0^2}{\pi E} y_{kryt}^2 \begin{cases} \frac{\Phi_0}{y_{kryt}} \left[1 + \frac{\Phi_0/y_{kryt}}{1 + \sqrt{2\Phi_0/y_{kryt}}} \right], \\ \frac{\Phi_0/y_{kryt}}{1 - \Phi_0/y_{kryt}}, \end{cases}$$

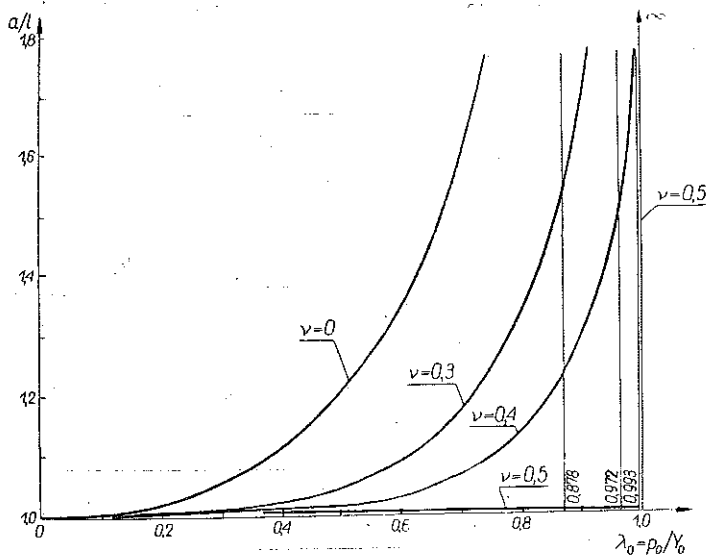
gdzie

$$(6.9) \quad y_{kryt} = \begin{cases} \gamma + \delta\Phi_0 \left[1 + \delta + \sqrt{\frac{1}{2}(\delta^2+2\delta-3)+2\gamma/\Phi_0} \right], \\ \alpha + \beta\Phi_0 [\beta + \sqrt{\beta^2 - 1 + 2\alpha/\Phi_0}], \end{cases}$$

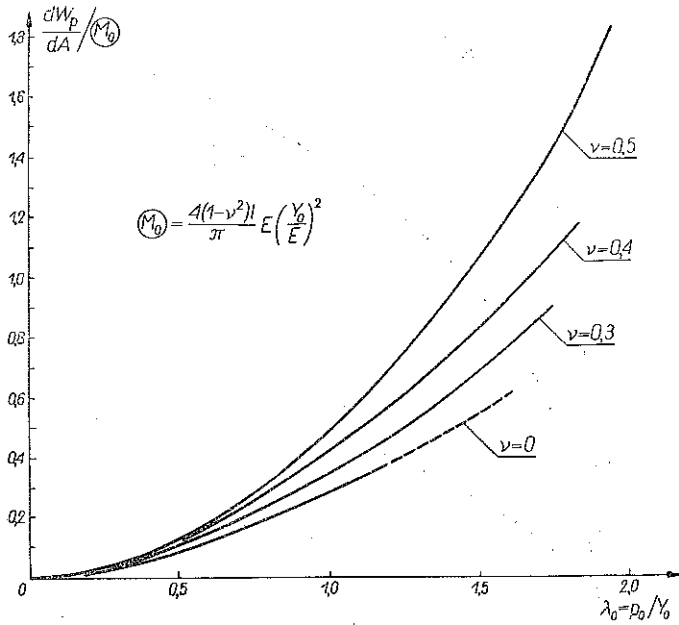
(1) Dla materiału nieściśliwego wzór ten daje symbol nieoznaczony ($\infty - \infty$), ponieważ $\beta \rightarrow -\infty$ oraz $\beta^2 \rightarrow \infty$. Można jednak łatwo pokazać, że wyrażenie to posiada granicę równą jedności.



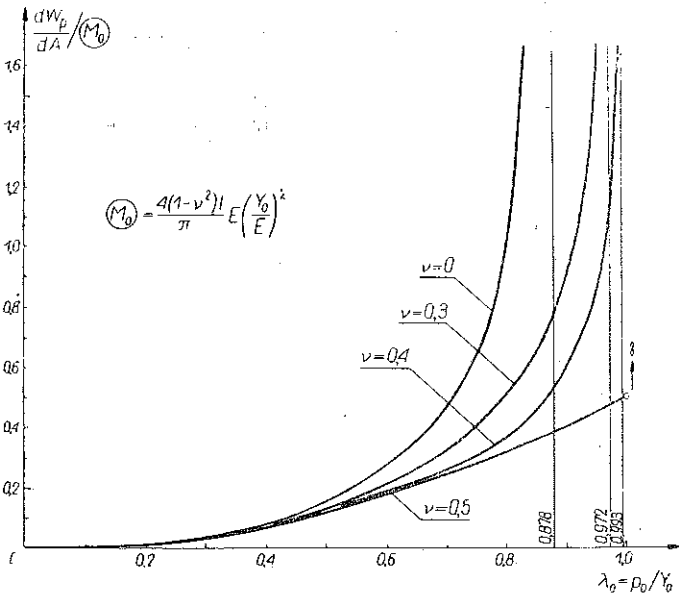
Rys. 6a



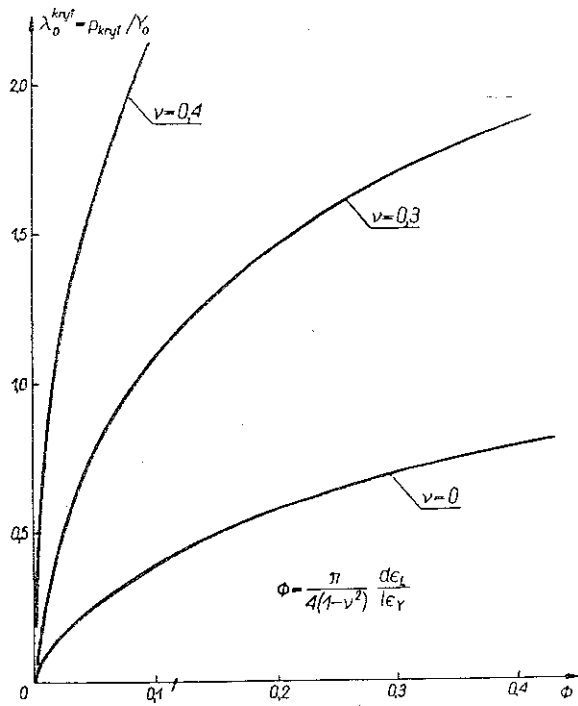
Rys. 6b



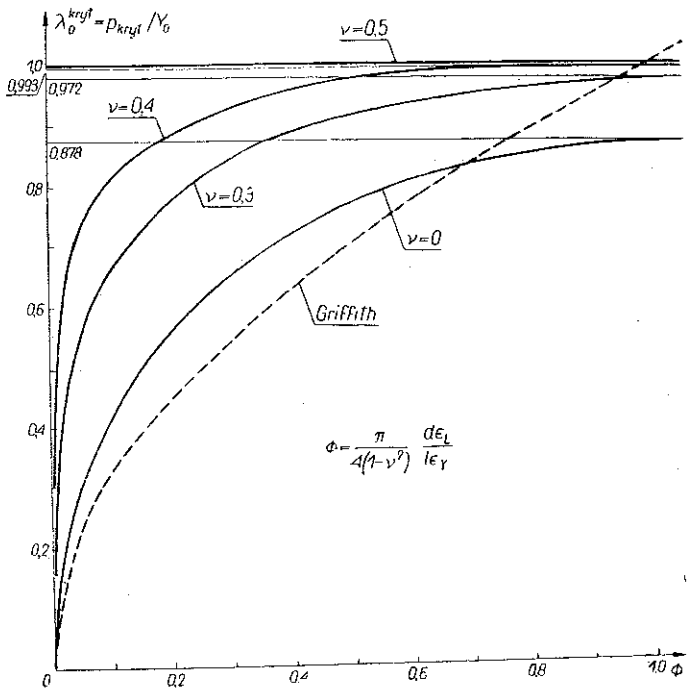
Rys. 7a



Rys. 7b



Rys. 8a



Rys. 8b

Wykresy odpowiadające powyższym wzorom zostały przedstawione na rysunkach 6a, b, 7a, b, i 8a, b. Dla $\lambda_0 \ll 1$ wzory (6.3) można rozwinąć na szereg McLaurina w otoczeniu punktu $\lambda_0 = 0$. Posiadają one wówczas wspólną postać dla obydwu rozważanych schematów obciążenia:

$$(6.10) \quad \frac{a}{l} = 1 + \frac{(1-2\nu)^2}{2} \lambda_0^2 + \dots$$

Podobnie ze wzorów (6.4) otrzymamy

$$(6.11) \quad \frac{dW_p}{dA} = \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y_0}{E}\right)^2 \frac{\lambda_0^2}{2} + \dots$$

Wartości krytyczne ciśnienia, zasięgu strefy plastycznej oraz dysypacji energii dla $\Phi_0 \ll 1$ mogą być wyrażone poprzez szeregi potęgowe Φ_0 , mianowicie:

$$(6.12) \quad p_{\text{kryt}} = Y_0 \sqrt{\frac{2\Phi_0}{1-2\nu}},$$

$$\left(\frac{a}{l}\right)_{\text{kryt}} = 1 + (1-2\nu)\Phi_0 + \dots,$$

$$\left(\frac{dW_p}{dA}\right)_{\text{kryt}} = \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi} E \left(\frac{Y_0}{E}\right)^2 \frac{\Phi_0}{1-2\nu} + \dots,$$

przy czym wzory te są wspólne dla obydwu schematów obciążenia. Można także pokazać, że dla $\Phi_0 \ll 1$ wzór

$$(6.13) \quad p_{\text{kryt}} = \sqrt{\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)l} \left(\frac{dW_p}{dA}\right)_{\text{kryt}}}$$

wyprowadzony poprzednio nie ulega zmianie mimo dokonanej korekcji. Interesujące jest porównanie wartości p_{kryt} według wzoru (6.6) dla przypadku 2° z odpowiednimi wartościami otrzymywanymi ze wzoru Griffitha. Porównanie to ilustruje rys. 8b, na którym krzywa przerywana została wykreślona na podstawie wzoru Griffitha $p_{\text{kryt}} = [\pi E \gamma / 2 (1-\nu^2) l]^{1/2}$, który przy założeniu danych dla stali: $Y_0/E = 10^{-3}$, $E = 2 \cdot 10^{12}$ [dyna cm^{-2}] oraz przyjęciu napięcia powierzchniowego $\gamma = 2 \cdot 10^3$ [erg cm^{-2}] i krytycznego przemieszczenia $\varepsilon_L d = 0,5 \cdot 10^{-4}$ [cm], przybiera postać

$$(6.14) \quad (\lambda_0^{\text{kryt}})_{\text{Griffith}} = 0,141 \sqrt{2\Phi_0}.$$

Rozwiązany w p. 4 przykład liczbowy ulegnie obecnie korekcji. Posługując się wzorami wyprowadzonymi powyżej, otrzymujemy

$$p_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1,198 \cdot 2 \cdot 10^9 \text{ [dyna cm}^{-2}\text{]} = 2,40 \cdot 10^9 \text{ [dyna cm}^{-2}\text{]}, \\ 0,765 \cdot 2 \cdot 10^9 \text{ [dyna cm}^{-2}\text{]} = 1,53 \cdot 10^9 \text{ [dyna cm}^{-2}\text{]}, \end{cases}$$

$$(6.15) \quad \left(\frac{a}{l}\right)_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1,09, \\ 1,24, \end{cases} \quad y_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1,82, \\ 1,29, \end{cases} \quad \Phi_{\text{kryt}} = \begin{cases} 0,137, \\ 0,194, \end{cases}$$

$$\left(\frac{dW_p}{dA}\right)_{\text{kryt}} = \begin{cases} 2,32 \cdot 10^6 \cdot (1,82)^2 \cdot 0,137 \cdot 1,09 \text{ [erg cm}^{-2}\text{]} = 1,14 \cdot 10^6 \text{ [erg cm}^{-2}\text{]}, \\ 2,32 \cdot 10^6 \cdot (1,29)^2 \cdot 0,194 \cdot 1,24 \text{ [erg cm}^{-2}\text{]} = 0,93 \cdot 10^6 \text{ [erg cm}^{-2}\text{]}. \end{cases}$$

Widać stąd, że wartości krytycznego zasięgu strefy plastycznej zmalały, natomiast p_{kryt} oraz dW_p/dA_{kryt} wzrosły. Otrzymane tutaj wyniki na dysypację energii są bliskie oszacowaniom doświadczalnym $(dW_p/dA)_{\text{kryt}} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ [erg cm}^{-2}\text{]}$. Różnice pomiędzy odpowiednimi wartościami przed korekcją świadczą o tym, że wyniki końcowe zależą nie tylko od własności materiału, wymiaru szczeliny oraz schematu obciążenia, lecz zależą także od przyjętego prawa opisującego stan plastyczny.

Asymptota pionowa funkcji $a/l = f(\lambda_0)$, a zatem punkt w którym zachodzi daleko-zasięgowe uplastycznienie, określona jest z warunku $a/l = \infty$, i wynosi ∞ dla schematu 1^o oraz

$$(6.15') \quad \lambda_0^{\text{max}} = \frac{\alpha}{1 - \beta} = \frac{2 + \sqrt{3(1 - 2\nu)^2 + 4}}{2\sqrt{3(1 - 2\nu)^2 + 4}}$$

dla schematu (2). Stąd dla $\nu = 0, 0,3, 0,4, 0,5$ otrzymujemy odpowiednio $\lambda_0^{\text{max}} = 0,878, 0,972, 0,993, 1,000$. Dla tych samych wartości ν wg Goodiera i Fielda [9] w płaskim stanie odkształcenia otrzymalibyśmy $\lambda_0^{\text{max}} = 1,00, 1,43, 1,67, 2,00$, co wynika z prostego wzoru $\lambda_0^{\text{max}} = (1 - \nu)^{-1}$.

W granicznym przypadku ciała idealnie nieściśliwego, gdy $\nu \rightarrow 1/2$, otrzymujemy, że zasięg strefy plastycznej a także przemieszczenie na końcu szczeliny $w(l, l)$ jest równe zero dla wszystkich λ_0 , wyjąwszy punkt $\lambda_0 = 1$ dla schematu (2) oraz $\lambda_0 = \infty$ dla schematu (1). Mimo to energia dysypowana posiada wówczas wartość skończoną,

$$(6.16) \quad \lim_{\nu \rightarrow 1/2} (dW_p/dA) = \frac{1}{2} \lambda_0^2,$$

dla obydwu przypadków z wyjątkiem punktu $\lambda_0 = 1$ [schemat (2)] oraz $\lambda_0 = \infty$ [schemat (1)]. Punkty te odpowiadają osiągnięciu nośności granicznej poprzez dalekozasięgowe uplastycznienie. Można to dobrze prześledzić obserwując rys. 6a, b oraz 7a, b.

Dodatek A

Obliczymy składową wektora przemieszczenia prostopadłą do powierzchni szczeliny w przypadku, gdy na jej powierzchnię działa następujące obciążenie pierścieniowe:

$$(A1) \quad q(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < 1, \\ C, & 1 < r < b, \\ 0, & b < r \leq a. \end{cases}$$

Wychodzimy ze wzoru ([22], str. 489)

$$(A2) \quad w = \frac{4(1-\nu^2)a}{\pi E} \int_{\varrho}^1 \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - \varrho^2}} \int_0^1 \frac{xq(xs) dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru wyrażenia na obciążenie (A.1) działające na obszarze pierścienia $l < r < b$ i wykonania całkowania po powierzchni określonej na rysunku otrzymujemy ([10], str. 291)

$$(A3) \quad w = \frac{4(1-\nu^2)aC}{\pi E} \left[\int_{\max(\varrho, m)}^1 \sqrt{\frac{s^2 - m^2}{s^2 - \varrho^2}} ds - \int_{\max(\varrho, m)}^1 \sqrt{\frac{s^2 - n^2}{s^2 - \varrho^2}} ds \right] =$$

$$= \frac{4(1-\nu^2)aC}{\pi E} \begin{cases} \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}} - \sqrt{\frac{1-n^2}{1-\varrho^2}} + nE\left(\mu_3, \frac{\varrho}{n}\right) - mE\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right), & \varrho < m; \\ \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}} = \sqrt{\frac{1-n^2}{1-\varrho^2}} + \frac{\varrho^2 - m^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) + nE\left(\mu_3, \frac{\varrho}{n}\right) - \\ - \varrho E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right), & m < \varrho < n; \\ \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}} - \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-n^2}} + \frac{\varrho^2 - m^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) - \frac{\varrho^2 - n^2}{\varrho} \times \\ \times F\left(\mu_4, \frac{m}{\varrho}\right) + \varrho \left[E\left(\mu_4, \frac{n}{\varrho}\right) - E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \right], & n < \varrho \leq 1, \end{cases}$$

gdzie $F(\mu, k)$ oraz $E(\mu, k)$ oznaczają całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju, $n = b/a$, $m = l/a$, $\varrho = r/a$,

$$\mu_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}}, \quad \mu_2 = \arcsin \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}},$$

$$\mu_3 = \arcsin \sqrt{\frac{1-n^2}{1-\varrho^2}}, \quad \mu_4 = \arcsin \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-n^2}}.$$

Podobne obliczenia wartości przemieszczeń wykonał BARENBLATT [2]. Gdy obciążenie działa na obszarze koła $0 \leq r < l$,

$$(A4) \quad q(r) = \begin{cases} A, & 0 \leq r < l, \\ 0, & l < r \leq a, \end{cases}$$

otrzymujemy

$$(A5) \quad w = \frac{4(1-\nu^2)aA}{\pi E} \begin{cases} \sqrt{1-\varrho^2} - \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}} + mE\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right), & 0 \leq \varrho < m, \\ \sqrt{1-\varrho^2} - \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}} + \varrho E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) - \\ - \frac{\varrho^2 - m^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right), & m < \varrho \leq 1. \end{cases}$$

W przypadku obciążenia przyłożonego na obszarze pierścienia zewnętrznego $l < r < a$

$$(A6) \quad q(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < l, \\ B, & l < r \leq a \end{cases}$$

dostaniemy wynik następujący:

$$(A7) \quad w = \frac{4(1-\nu^2)aB}{\pi E} \begin{cases} \sqrt{\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}} - mE\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right), & 0 \leq \varrho < m, \\ \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}} + \frac{\varrho^2-m^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) - \varrho E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right), & m < \varrho \leq 1. \end{cases}$$

Dodatek B

Rozpatrzmy osiowo-symetryczne zagadnienie półprzestrzeni sprężystej obciążonej w dowolny osiowo-symetryczny sposób jedynie w płaszczyźnie ograniczającej. Załóżmy ponadto, że dla $z = 0$, $\tau_{rz} = 0$. Wtedy dla $z = 0$ składowe tensora naprężenia można przedstawić za pomocą następujących wzorów, które łatwo wyprowadzimy ze wzorów podanych przez SNEDDONA ([21], str. 454–455):

$$(B1) \quad \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{\mu}{(1-\nu)a} I_0, \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= -\frac{(1+2\nu)\mu}{(1-\nu)a} I_0, \\ \sigma_r &= \frac{(1-2\nu)\mu}{(1-\nu)a\varrho} I_1 - \frac{\mu}{(1-\nu)a} I_0, \end{aligned}$$

gdzie

$$I_0 = \int_0^\infty \eta \psi(\eta) I_0(\eta\varrho) d\eta, \quad I_1 = \int_0^\infty \psi(\eta) I_1(\eta\varrho) d\eta,$$

a $\psi(\eta)$ jest nie znaną funkcją, którą należy wyznaczyć z warunku brzegowego. Do sprawdzenia warunku plastyczności potrzebne będą następujące wzory:

$$(B2) \quad \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{(1-2\nu)\mu}{1-\nu} \left(\frac{2}{r} I_1 - I_0 \right), \\ \sigma_r - \sigma_z &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\mu}{r} I_1, \\ \sigma_z - \sigma_\theta &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \mu \left(\frac{1}{r} I_1 - I_0 \right), \end{aligned}$$

skąd po podniesieniu do kwadratu i dodaniu otrzymujemy

$$(B3) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 = 2 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \mu \right)^2 \left(\frac{3}{r^2} I_1^2 - \frac{3}{r} I_1 I_0 + I_0^2 \right).$$

Obliczmy całki I_0 i I_1 w przypadku, gdy funkcję ψ wyznaczamy z warunków brzegowych dla szczeliny:

$$(B4) \quad \begin{aligned} \sigma_z &= -q(r), & r < a, \\ w &= 0, & r > a. \end{aligned}$$

Wtedy

$$(B5) \quad I_1 = \frac{2a(1-\nu)}{\pi\mu\varrho} \int_0^{\min(\varrho, 1)} \frac{s^2 ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} \int_0^a \frac{xq(xs) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(B6) \quad I_0 = \frac{2a(1-\nu)}{\pi\mu} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\min(\varrho, 1)} \frac{d}{ds} [sq(xs)] \frac{ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} - \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} \int_0^1 \frac{xq(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \varrho > 1, \\ 0 & \varrho < 1. \end{cases}$$

Teraz, przypuścmy, że

$$(B7) \quad q(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < 1, \\ C, & 1 < r < b, \\ 0, & b < r \leq a. \end{cases}$$

Wtedy po obliczeniu powyżej przedstawionych całek otrzymamy

$$(B8) \quad I_1 = \frac{2(1-\nu)aC}{\pi\varrho\mu} \left\{ \int_m^{\min(\varrho, 1)} s \sqrt{\frac{s^2 - m^2}{\varrho^2 - s^2}} ds - \int_n^{\min(\varrho, 1)} s \sqrt{\frac{s^2 - n^2}{\varrho^2 - s^2}} ds \right\} =$$

$$= \frac{2(1-\nu)aC}{\pi\varrho\mu} \begin{cases} 0, & 0 \leq \varrho < m, \\ \frac{\pi}{4}(\varrho^2 - m^2), & m < \varrho < n, \\ \frac{\pi}{4}(n^2 - m^2), & m < \varrho < 1, \\ \frac{\pi}{4}(n^2 - m^2) + \frac{1}{2}\sqrt{\varrho^2 - 1}(\sqrt{1 - n^2} - \sqrt{1 - m^2}) + \\ + \frac{\varrho^2 - n^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 - n^2}} - \frac{\varrho^2 - m^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 - m^2}}, & \varrho > 1 \end{cases}$$

oraz

$$(B9) \quad I_0 = \frac{2(1-\nu)aC}{\pi\mu} \left\{ \frac{\sqrt{1 - n^2} - \sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} - \int_n^{\min(\varrho, 1)} \frac{s ds}{\sqrt{(s^2 - n^2)(\varrho^2 - s^2)}} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_m^{\min(\varrho, 1)} \frac{s ds}{\sqrt{(s^2 - m^2)(\varrho^2 - s^2)}} \Big\} = \\
 & = \frac{2(1-\nu) a C}{\pi \mu} \begin{cases} 0, & 0 \leq \varrho < m, \\ \frac{\pi}{2}, & m < \varrho < n, \\ 0, & n < \varrho < 1, \\ \arcsin \sqrt{\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 - n^2}} - \arcsin \sqrt{\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 - m^2}} - \\ - \frac{\sqrt{1 - m^2} - \sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{\varrho^2 - 1}}, & \varrho > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Gdy obciążenie działa na obszarze koła

$$q(r) = \begin{cases} A, & 0 \leq r < l; \\ 0, & l < r \leq a, \end{cases}$$

to wtedy

$$\text{(B10)} \quad I_1 = \frac{2(1-\nu) a^2 A}{\pi \varrho \mu} \begin{cases} \frac{\pi}{4} \varrho^2, & 0 \leq \varrho < m, \\ \frac{\pi}{4} m^2, & m < \varrho < 1, \\ \frac{\pi}{4} m^2 - \frac{\sqrt{\varrho^2 - 1}}{2} (1 - \sqrt{1 - m^2}) + \\ + \frac{\varrho^2 - m^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 - m^2}} - \frac{\varrho^2}{2} \arcsin \frac{\sqrt{\varrho^2 - 1}}{\varrho}, & \varrho > 1 \end{cases}$$

oraz

$$\text{(B11)} \quad I_0 = \frac{2(1-\nu) a A}{\pi \mu} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq \varrho < m, \\ 0, & m < \varrho < 1, \\ \arcsin \frac{1}{\varrho} - \arcsin \sqrt{\frac{1 - m^2}{\varrho^2 - m^2}} - \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{\varrho^2 - 1}}, & \varrho > 1. \end{cases}$$

W podobny sposób dla

$$q(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < l, \\ B, & l < r < a \end{cases}$$

otrzymamy

$$(B12) \quad I_1 = \frac{2a^2(1-\nu)}{\pi\rho\mu} B \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho < m; \\ \frac{\pi}{4}(\rho^2 - m^2), & m < \rho < 1, \\ -\frac{\sqrt{(1-m^2)(\rho^2-1)}}{2} + \frac{\rho^2 - m^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{1-m^2}{\rho^2 - m^2}}, & \rho > 1 \end{cases}$$

oraz

$$(B13) \quad I_0 = \frac{2(1-\nu)Ba}{\pi\mu} \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho < m, \\ \frac{\pi}{2}, & m < \rho < 1, \\ \arcsin \sqrt{\frac{1-m^2}{\rho^2 - m^2}} - \sqrt{\frac{1-m^2}{\rho^2 - 1}}, & \rho > 1. \end{cases}$$

Literatura cytowana w tekście

1. D. N. DE G. ALLEN, R. V. SOUTHWELL, *Relaxation methods applied to engineering problems*, XIV: Plastic straining in two-dimensional stress systems, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **242** (1949-50), 379.
2. Г. И. Баренблатт, *Математическая теория равновесных трещин образующихся при хрупком разрушении*, *Журнал Прикл. Мех. Тех. Физ.*, **3, 4** (1961).
3. Г. И. Баренблатт, *О некоторых задачах теории упругости возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта*, *Прикл. Мех. Мат.* **4**, **20** (1956), 475-486.
4. B. A. BILBY, A. H. COTTRELL, K. H. SWINDEN, *The spread of plastic yield from a notch*, *Proc. Roy. Soc. A*, **272** (1960), 304.
5. B. A. BILBY, A. H. COTTRELL, E. SMITH, K. H. SWINDEN, *Plastic yielding from sharp notches*, *Proc. Roy. Soc. A*, **279** (1964), 1.
6. D. S. DUGDALE, *Yielding of steel sheets containing slits*, *J. Mech. Phys. Solids*, **8** (1960), 100.
7. N. E. FROST, D. S. DUGDALE, *The propagation of fatigue cracks in sheet specimens*, *J. Mech. Phys. Solids*, **6** (1958), 92.
8. W. W. GERBERICH, *Plastic strains and energy density in cracked plates*, I. *Experimental technique and results*, *Proc. SESA* **2**, **21** (1964), 335.
9. J. N. GOODIER, F. A. FIELD, *Plastic energy dissipation in crack propagation*, *Fracture of solids*, N. York 1963, 103.
10. И. С. Градштайн, И. М. Рижак, *Таблицы интегралов*, Физматгиз, Москва 1962.
11. A. K. HEAD, *The propagation of fatigue cracks*, *J. Appl. Mech.*, **23** (1956), 407.
12. J. HULT, F. McCLINTOCK, *Elastic-plastic stress and strain distributions around sharp notches under repeated shear*, IX Int. Congr. Appl. Mech., Proc. VIII, Brussels 1956, 51.
13. G. R. IRWIN, *Fracture mechanics*, Pergamon Press, N. York 1960.
14. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problem of plastic flow*, I. *Notched bar under tension*, *Phil. Mag.*, **41** (1950), 349.
15. С. Я. Ярема, *Исследование полос пластичности при растяжении пластин с концентратором*, *Вопросы Мех. Рэал. Твер. Тела* **2**, Изд. АН СССР, Киев 1964, 177.

16. Г. И. Корнилов, С. Я. Ярема, *Плоские образцы с трещиновидным концентратором для экспериментального исследования полос пластичности*, Вопросы Мех. Реал. Тверд. Тела 1, Изд. АН СССР, Киев 1962, 29.
17. М. Я. Леонов, *Элементы теории хрупкого разрушения*, ПМТФ, 3 (1961), 85.
18. Z. OLESIAK, M. WNUK, *The length of plastic region around a penny shaped crack*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 8, 13 (1965) oraz Rozpr. Inżyn., 1, 14 (1966).
19. E. OROWAN, *Fatigue and fracture of metals*, Wiley and Sons, 1952.
20. E. OROWAN, *Energy criteria of fracture*, Welding Journal, March 1955, 157a.
21. К. Н. Русинко, *Об условиях возникновения полос пластичности при растяжении пластинки с прямолинейной щелью*, Вопросы Мех. Реал. Тверд. Тела, 2, Изд. АН СССР, Киев 1964, 27.
22. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, 1951.
23. I. N. SNEDDON, *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid*, Proc. Roy. Soc. A, 187 (1946), 229.
24. I. N. SNEDDON, *Crack problems in the theory of elasticity*, Dep. of Math. and Engin. Research, Appl. Math. Res. Group, North Carolina State College, Raleigh, North Carolina 1961.
25. E. SMITH, *The spread of plasticity from stress concentrations*, Proc. Roy. Soc. A, 282 (1964), 422.
26. E. SMITH, *Strain concentration effects in large structures*, Proc. Roy. Soc. A, 285 (1965), 46.
27. L. D. STIMPSON, D. M. EATON, *The extent of elasto-plastic yielding at the crack point of an externally notched plane stress tensile specimen*, ARL-24, Aeron. Res. Lab., OAR, 1961.
28. J. L. SWEDLOW, W. W. GERBERICH, *Plastic strain and energy density in cracked plates*, II. Comparison with elastic theory, Proc. SESA 2, 21 (1964), 345.
29. П. М. Витвицкий, М. Я. Леонов, *Полосы скольжения при неоднородной деформации пластинки*, Вопросы Мех. Реал. Тверд. Тела 1, Изд. АН СССР, Киев 1962, 13.
30. Т. УОКОВОР, *Strength, fracture and fatigue of materials*, Noordhoff, Groningen 1965.
31. Я. П. Желтов, С. А. Христьянович, *О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта*, Изд. АН СССР, ОН № 5, 1955.

Резюме

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ, ВЫЗВАННАЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЩЕЛЮ

Рассматривается вопрос осесимметрической щели при предположении идеально упруго-пластического материала а также, что зона пластических деформаций является очень тонким слоем, окружающим щель. Принимая гипотезу Дагдайля, упруго-пластическая задача сводится к задаче упругости для полупространства. В расчетах, приведенных в настоящей работе, используются формулы, связывающие длину пластической зоны с нагрузкой, выведенные в работе [18]. Предполагается, что вся энергия, поглощенная при образовании новой поверхности, используется на выполнение работы, вызывающей необратимые пластические деформации. Работа сил когезии не учитывается. Определяется перемещение, нормальное к поверхности щели и диссипации энергии. Дается формулировку критерия разрушения и проводится дискуссия условия пластичности Губера-Мизеса-Генки.

Форма щели вблизи ее конца, определенная в настоящей работе, значительно различается от формы для случая идеальной упругости. Существуют также значительные различия между значениями критического давления, вычисленного по формуле Гриффита-Сака-Снеддона, и выведенными в настоящей работе. Доказано, что для макро-щелей, когда радиус щели не слишком мал, можно применить следующую формулу:

$$P_{\text{kryt}} = [\pi E (dW_p/dA)_{\text{kryt}}/2 (1 - \nu^2) l]^{\frac{1}{2}}$$

Эта формула обосновывается на модифицированной теории Гриффита, предложенной Ороуаном и Ирвином. Символь (dW_p/dA)_{крит} обозначает, в данном случае, энергию отнесенную к единице, образующейся поверхности, рассеиваемой на пластические деформации в процессе нагрузки, предшествующую разрушению.

Результаты работы касаются пластических материалов и проявляющих весьма локализованную область пластических деформации, т.е. для «квази-хрупких» материалов. Исследовались два случая нагрузки: 1 — давление приложено на поверхности щели, 2 — приложенное в бесконечности.

Summary

PLASTIC ENERGY DISSIPATION DUE TO A PENNY-SHAPED CRACK

A penny-shaped crack in a material which is ideally elastic-plastic has been envisaged under the assumption that the plastic zone constitutes a very layer surrounding the crack. The Dugdale hypothesis has been adapted and thus the problem has been reduced to that for an elastic semi-space. The expressions for the length of plastic zone as a function of load, obtained in [18] are now used in further calculations. The entire energy absorbed in the process of creation of the new surface is here ascribed to the work expended in the irreversible plastic deformation I, the work of cohesive forces being neglected. The displacements of crack faces are calculated as well as the plastic energy dissipation. The fracture criterion and plasticity condition of Huber-Mises-Hencky are discussed.

The shape of the crack, obtained in this paper, differs considerably from that predicted by the theory of elasticity, particularly at the crack tip. The differences in the values of the critical pressure calculated from Griffith-Sack-Sneddon formula and those obtained by use of the equations derived here, are also significant. It is shown that for macro-cracks when crack radius 1 is not too small the following formula holds:

$$p_{crit} = [\pi E (dW_p/dA)_{crit}] / 2 (1 - \nu^2) l^{1/2}$$

which agrees with the Orowan-Irwin modification of Griffith's theory. The symbol (dW_p/dA)_{crit} denotes the plastic work per unit area of a new surface, dissipated in the course of loading before the fracture.

The results of the present paper hold for ductile materials possessing the plastic region localized along the symmetry axis of the crack, e.g. for the so-called «quasi-brittle» solids. Two schemes of loading are considered: 1) pressure applied on crack surfaces and 2) pressure applied at infinity, attention being paid to the slightly different mechanism of fracture in both the cases.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
I POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1966 r.