

## ŚCISKANIE OSIOWE POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ Z RÓWNOCZESNYM CIŚNIENIEM WEWNĘTRZNYM

JANUSZ KLEPACZKO I JAN ANDRZEJ KÖNIG (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Jeżeli cylindryczną powłokę, zamocowaną na obydwóch końcach, poddać równoczesnemu działaniu osiowej siły ściskającej i ciśnienia wewnętrznego, to w pobliżu obydwóch jej końców utworzą się charakterystyczne strefy brzegowe (rys. 2b i 2c). Należy przypuszczać, że strefy te tworzą się wskutek oddziaływania momentów pojawiających się w miejscu zamocowania. Wspomniany efekt prowadzi w rezultacie do utraty stateczności tak obciążonej powłoki.

Literatura dotycząca tego zagadnienia nie jest zbyt obszerna. W większości prac ograniczono się do poszukiwania maksymalnej siły w momencie utraty stateczności, natomiast mniejszą uwagę zwracano na analizę całego procesu. I tak w pracy [1] podano wyniki doświadczeń przeprowadzonych w celu weryfikacji zaproponowanej uprzednio przybliżonej metody znajdowania maksymalnego obciążenia w momencie utraty stateczności. Metoda ta opiera się na teorii stateczności płyt i powłok deformujących się już w obszarze odkształceń plastycznych, podanej przez ILIUSZINA [2 i 3]. W wyniku tych doświadczeń stwierdzono zgodność krytycznego obciążenia w stosunku do teorii, sięgającą średnio 3%.

Natomiast w pracy [4] podano wyniki doświadczeń mających na celu sprawdzenie teorii LO, CRATE i SCHWARTZA [5]. Stwierdzono w tym przypadku, że wszystkie uzyskane wartości obciążeń utraty stateczności są znacznie niższe niż wartości przewidziane przez teorię Lo.

Najobszerniejsze wyniki badań nad tym efektem podano w pracy [6]. W omawianej pracy badania przeprowadzono na 24 próbkach ze stopu aluminium o trzech długościach i czterech grubościach ścianki. Analizę teoretyczną oparto na teorii deformacyjnej Hencky'ego-Nádaia. Odkształcenia osiowe mierzono za pomocą pewnej liczby czujników elektrooporowych i dwóch pasków z materiału czułego optycznie. Większość czujników elektrooporowych funkcjonowała do odkształcenia mniejszego niż 1%, plastikowe paski z materiału czułego optycznie do odkształcenia mniejszego niż 1,5%.

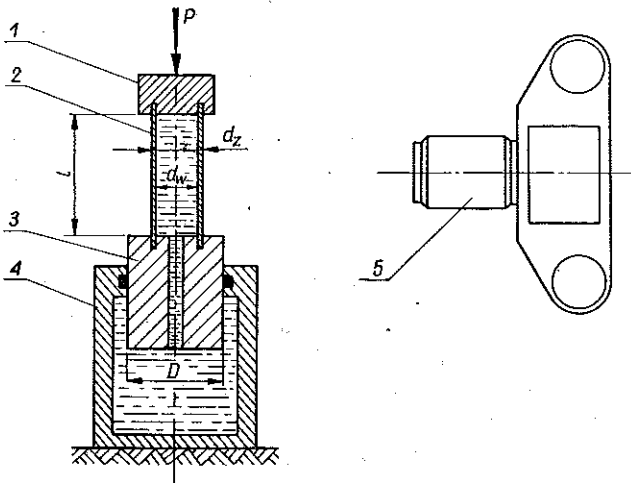
Zaobserwowano następujące zjawisko utraty stateczności próbek: jeżeli ciśnienie i siła osiowa rosły, to pojawiały się prawie osiowo-symetryczne fale w pobliżu obydwóch końców próbki. Gdy obciążenie osiowe osiągało wartość krytyczną, pierwsze pół fali w pobliżu końców zaczynało powiększać się szybciej i pojawiała się

pewna liczba fal o mniejszej amplitudzie w środkowej części próbki. Po osiągnięciu maksymalnego obciążenia pierwsze pół fali zwiększało się gwałtownie, podczas gdy osiowe obciążenie zmniejszało się powoli. Całkowita długość próbki również zaczynała się zmniejszać ze stosunkowo większą prędkością. Równocześnie stwierdzono, że stosunek długości do promienia powłoki praktycznie nie ma żadnego znaczenia na obciążenie utraty stateczności. Obliczenia teoretyczne obciążenia krytycznego wykazały dobrą zgodność z doświadczeniem, średni stosunek wyników eksperymentalnych i teoretycznych wyniósł 1,066 (6,6%). Jednak lepszą zgodność zaobserwowano dla powłok cieńszych i przy wyższych wartościach  $\alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest stosunkiem naprężenia obwodowego do osiowego,  $\alpha = \sigma_{\varphi}/\sigma_x$ .

Niniejsza praca ma na celu dalsze poznanie omawianego efektu, a w szczególności bardziej dokładną analizę procesu deformacji tak obciążonej powłoki. Gdy w poprzednio omówionej pracy [6] pomiar odkształceń osiowych był możliwy do około 1%, to w pracy niniejszej, dzięki zastosowaniu specjalnej metody, było możliwe śledzenie przebiegu deformacji aż do końca procesu, tj. do momentu utraty stateczności. Trzeba dodać, że w pracy niniejszej mierzono odkształcenia obwodowe  $\varepsilon_{\varphi}$ . Tak więc zastosowanie nowej metody umożliwiło bardziej dokładne poznanie omawianego efektu w obszarze odkształceń większych od 1%.

## 2. Sposób przeprowadzania doświadczeń

Badania przeprowadzono na specjalnym przyrządzie, którego schemat został przedstawiony na rys. 1. Próbka 2 stanowi część łączącą tłok 3 z górnym korkiem 1,



Rys. 1. Schemat przyrządu i zasada metody pomiaru odkształceń:

1 - korek, 2 - próbka, 3 - tłok, 4 - korpus, 5 - aparat fotograficzny z elektrycznym naciąganiem filmu

na korek działa siła  $P$ . W ten sposób tłok 3 jest wciskany w zbiornik z cieczą, która z kolei wywołuje ciśnienie wewnętrzne działające na ścianki próbki (tłok 3 posiada

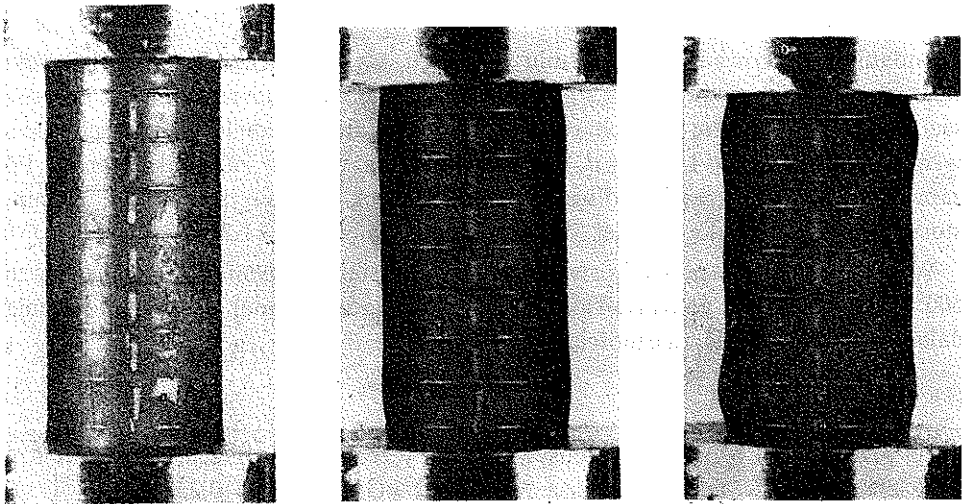
wewnętrzny otwór). Konstrukcja przyrządu zapewnia liniową zmianę ciśnienia  $p$  w zależności od działającej siły  $P$ ,

$$P = \delta p, \quad \text{gdzie} \quad \delta = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Przy tym tak dobrano średnicę tłoka  $D$ , aby dla dobranych wymiarów próbki otrzymać  $\sigma_\varphi = -\sigma_x$  w początkowym stadium deformacji próbki; wówczas  $a = \sigma_\varphi/\sigma_x$ ,  $a = -1$ ,

$$p = \frac{4P}{\pi D^2}, \quad -\sigma_x = \frac{4P}{\pi} \frac{\left[1 - \left(\frac{d_w}{D}\right)^2\right]}{d_z^2 - d_w^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{4P}{\pi D^2 \left(\frac{d_z}{d_w} - 1\right)}.$$

W rozważaniach pominięto siłę tarcia na uszczelnieniu tłoka. Uszczelnienie zostało wykonane w ten sposób, aby tarcie było jak najmniejsze. Przyrząd ustawiano w urządzeniu do ściskania uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej. Podczas procesu odkształcania maszyna umożliwiała dokładny pomiar siły ściskającej  $P$ .



Rys. 2. Fotografie próbki w trakcie procesu deformacji:

a) próbka przy  $P = 0$ , b) ta sama próbka przy  $P = 320$  kG, c) przy  $P = 354$  kG

Bezpośrednio przed próbką ustawiono małowzrostowy aparat fotograficzny z elektrycznym naciąganiem filmu i również elektrycznym spustem migawki (rys. 1); płaszczyzna filmu jest równoległa do osi próbki. Takie urządzenie zapewniało szybką rejestrację odkształcania się próbki przy równoczesnym zachowaniu ciągłości procesu i z utrzymaniem stałej odległości aparatu fotograficznego od próbki. Zdjęcia wykonywano w przybliżeniu przy następujących wartościach siły  $P$ : 0, 50, 100, 150, 200, 220, 250, 270, 300, 320, 340, 350 kG i  $P_{\max}$ .

Po wywołaniu film służył do pomiarów zmieniającej się średnicy zewnętrznej próbki; na rys. 2a, 2b i 2c pokazano fotografie odkształconej próbki, wykonane przy następujących wartościach siły osiowej  $P$ : 0; 320 i 354 kG. Pomiaru konturów

próbek na filmie były przeprowadzane na dużym mikroskopie pomiarowym z praktyczną dokładnością  $\pm 0,003$  mm. Na każdym zdjęciu, które odpowiadało danej wartości siły osiowej  $P$ , średnice mierzono w piętnastu punktach.

Odształcenia obwodowe  $\varepsilon_\varphi$  obliczano ze wzoru

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\kappa (d_z)_{\text{tot}} - \bar{d}_z}{\bar{d}_z},$$

gdzie  $\kappa$  oznacza podziałkę zmniejszenia, a  $\bar{d}_z$  uśrednioną średnicę zewnętrzną nieodkształconej próbki,

$$\kappa = \frac{\bar{d}_z}{(d_z)_{\text{tot}}} \quad \text{dla} \quad P = 0.$$

Przedstawiona metoda umożliwiała pomiar odkształcenia obwodowego z dokładnością  $\Delta \varepsilon_\varphi = \pm 0,0015$ . Zaletą jej jest możliwość praktycznie ciągłej rejestracji przebiegu deformacji oraz dokonywanie pomiarów odkształcenia obwodowego w dowolnym przekroju próbki. Metoda ta nie nadaje się jednak do śledzenia odkształceń sprężystych.

Badania przeprowadzono na ośmiu próbkach, wykonanych z mosiądzu. Próbki wykonano z rurek o wymiarach  $d_z = 15$  mm,  $g = 0,5$  mm, gdzie  $g$  oznacza grubość ścianki. Przy takich wymiarach rurki stosunek średniej średnicy  $d$  do grubości  $g$  wynosi  $d/g = 29$ ,  $d = 1/2 (d_z + d_w)$  i próbki można uważać za cienkościennie. Po zamocowaniu w przyrządzie, długości czynne próbek wynosiły średnio  $l = 32$  mm, stosunek wysokości do średniej średnicy wynosi więc  $l/d = 2,21$ .

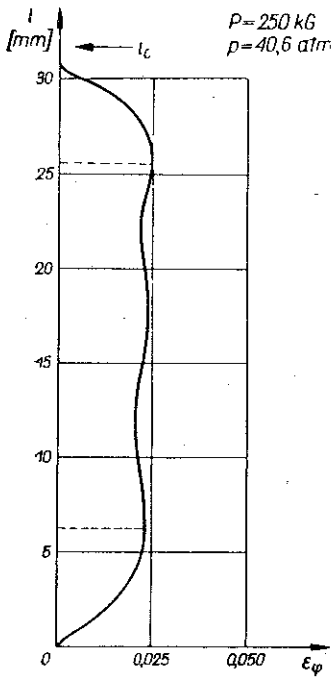
Wszystkie próbki poddano wyżarzaniu rekrystalizacyjnemu w temperaturze  $600^\circ\text{C}$  w czasie jednej godziny. Tak wyżarzony mosiądz posiadał krzywą umocnienia dającą się przedstawić zależnością

$$(1) \quad \sigma_i = K \varepsilon_i^m,$$

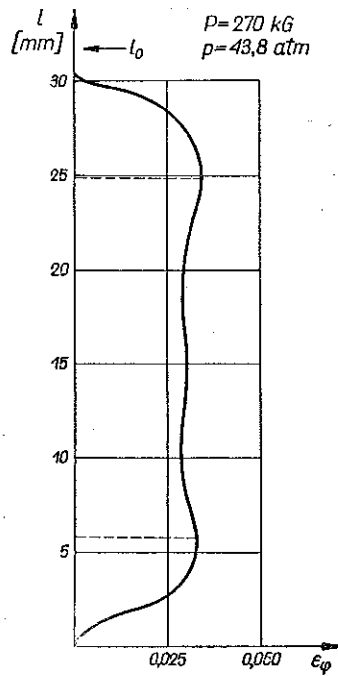
gdzie przez  $\sigma_i$  i  $\varepsilon_i$  oznaczono intensywność naprężenia i deformacji, a przez  $K$  i  $m$  stałe materiałowe. Stałe te wynoszą  $K = 23,82$  kG/mm<sup>2</sup>,  $m = 0,229$ .

### 3. Wyniki doświadczeń

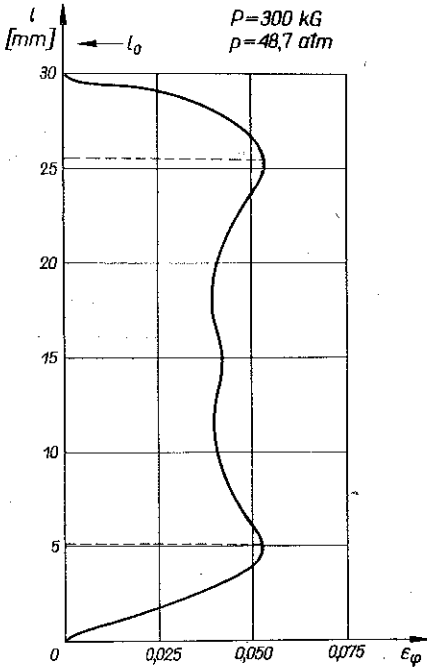
Występowanie omawianego efektu zaobserwowano na wszystkich zbadanych ośmiu próbkach. Na rysunkach od 3 do 9 przedstawiono zmierzone dla jednej z próbek kolejne rozkłady odkształceń obwodowych przy rosnącej sile osiowej  $P$  i odpowiednio rosnącym ciśnieniu wewnętrznym. Obserwacja przedstawionych rysunków wskazuje, że w pobliżu obydwóch końców próbki pojawiają się symetryczne fale, które w miarę wzrostu siły osiowej gwałtownie się powiększają. W pobliżu środka próbki pojawia się natomiast mniejsza pojedyncza fala, powiększając się stosunkowo wolniej. Maksymalne odkształcenia obwodowe osiągają dosyć duże wartości bez utraty stateczności powłoki, dochodzą one do  $(\varepsilon_\varphi)_{\text{max}} \approx 0,115$ , intensywność deformacji  $\varepsilon_i$  powinna być w tych przekrojach jeszcze większa.



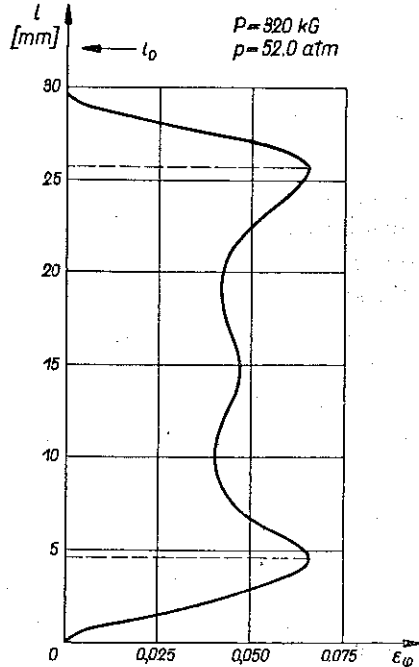
Rys. 3. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 250 \text{ kG}$ ,  $p = 40,6 \text{ atm}$



Rys. 4. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 270 \text{ kG}$ ,  $p = 43,8 \text{ atm}$

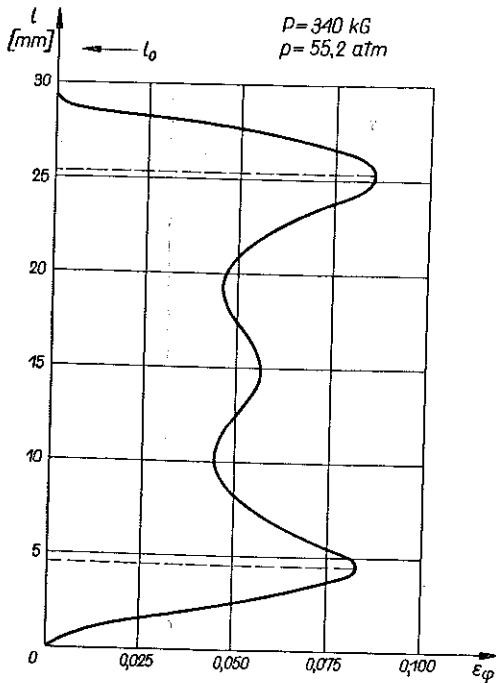


Rys. 5. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 300 \text{ kG}$ ,  $p = 48,7 \text{ atm}$



Rys. 6. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 320 \text{ kG}$ ,  $p = 52,0 \text{ atm}$

Celem dalszej analizy zmian kształtu deformującej się powłoki wprowadzono następujące parametry:



Rys. 7. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 340$  kG,  $p = 55,2$  atm

$$\xi = \frac{l_1}{l}, \quad \eta = \frac{2(\varepsilon_\varphi)_1}{(\varepsilon_\varphi)'_{\max} + (\varepsilon_\varphi)''_{\max}},$$

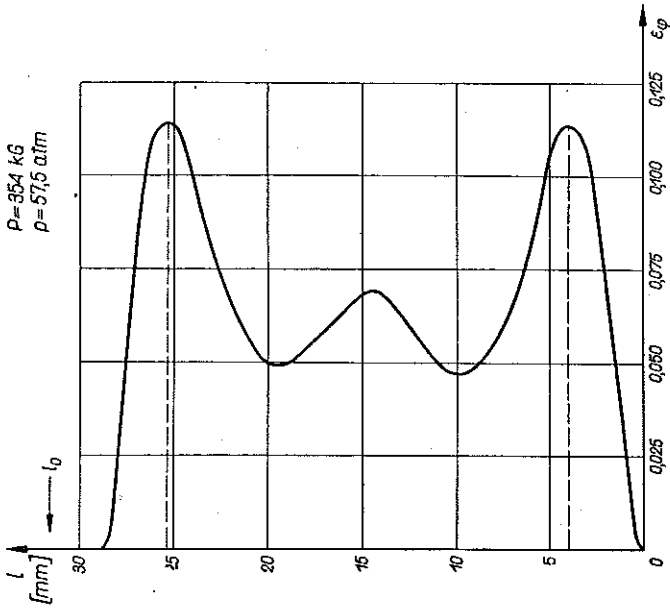
$$\zeta = \frac{(\varepsilon_\varphi)'_{\min} + (\varepsilon_\varphi)''_{\min}}{(\varepsilon_\varphi)'_{\max} + (\varepsilon_\varphi)''_{\max}},$$

gdzie przez  $l$  oznaczono całkowitą długość powłoki, przez  $l_1$  odległość pomiędzy przekrojami maksymalnych odkształceń obwodowych;  $(\varepsilon_\varphi)_{\max}$  oznacza pierwsze lub drugie maksimum odkształceń obwodowych,  $(\varepsilon_\varphi)_{\min}$  pierwsze lub drugie minimum,  $(\varepsilon_\varphi)_1$  odkształcenie obwodowe w przekroju wierzchołka środkowej fali. Wprowadzone oznaczenia pokazano schematycznie na rys. 10.

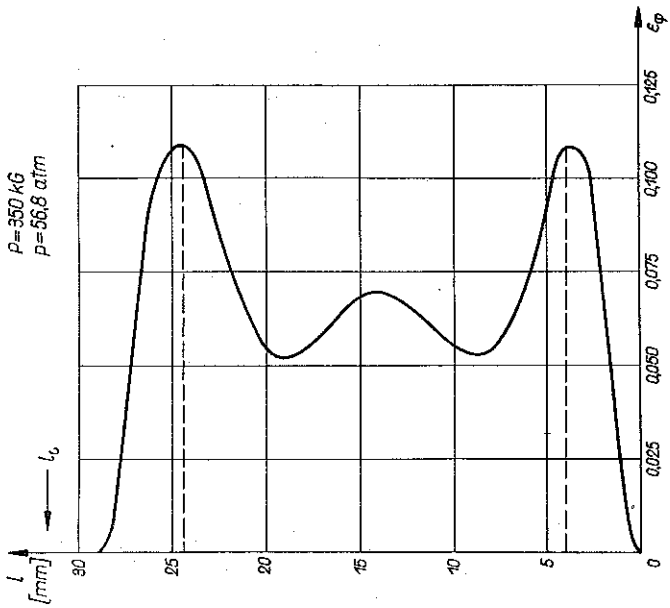
Otrzymane eksperymentalnie zmiany wprowadzonych parametrów  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  w zależności od osiowej siły  $P$  przedstawiono na rys. 11. Parametr  $\xi$ , który określa położenie maksimum odkształcenia obwodowego,

zwiększa się wraz ze wzrostem  $P$ . Oznacza to, że podczas procesu deformacji maksima zbliżają się do przekrojów zamocowania powłoki; górna zaobserwowana wartość  $\xi$  wyniosła  $\xi \approx 0,75$ . Najmniejszą na rysunku wartość  $\xi = 0,295$  dla siły  $P = 81,2$  kG otrzymano z teoretycznego rozwiązania klasycznej teorii powłok, gdy w powłoce nastąpiły pierwsze odkształcenia plastyczne w przekroju zamocowania. Kreskowaną linią pionową oznaczono wartość siły  $P = 143$  kG, gdy według rozwiązania teoretycznego w przekroju zamocowania utworzy się obwodowy przegub plastyczny. Dokładną dyskusję tych rozwiązań podano w następnej części pracy.

Pozostałe dwa parametry  $\eta$  i  $\zeta$  są związane z odpowiednimi wartościami odkształceń obwodowych. W początkowym stadium procesu deformacji parametr  $\zeta$  posiada stosunkowo duże wartości (zbliżone do jedności), np. dla rozwiązania teoretycznego w momencie uplastycznienia przy  $P = 81,2$  kG,  $\zeta = 0,957$ . Charakter zmian parametru  $\zeta$  wskazuje, że początkowo powłoka odkształca się stosunkowo równomiernie na całej długości; powyżej siły  $P \approx 250$  kG obserwuje się gwałtowne zmniejszanie się  $\zeta$  przy odpowiednio małych przyrostach siły  $P$ . Proces ten świadczy o szybkim zbliżaniu się utraty stateczności. Można równocześnie zaobserwować gwałtowne zmniejszanie się parametru  $\eta$  świadczące, że malenie parametru  $\zeta$  odbywa się głównie

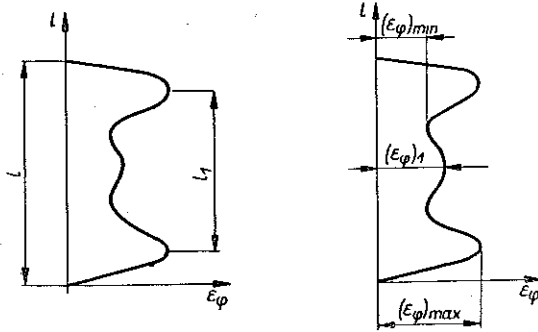


Rys. 9. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 354 \text{ kg}$ ,  $p = 57,5 \text{ atm}$



Rys. 8. Rozkład odkształceń obwodowych wzdłuż długości próbki dla  $P = 350 \text{ kg}$ ,  $p = 56,8 \text{ atm}$

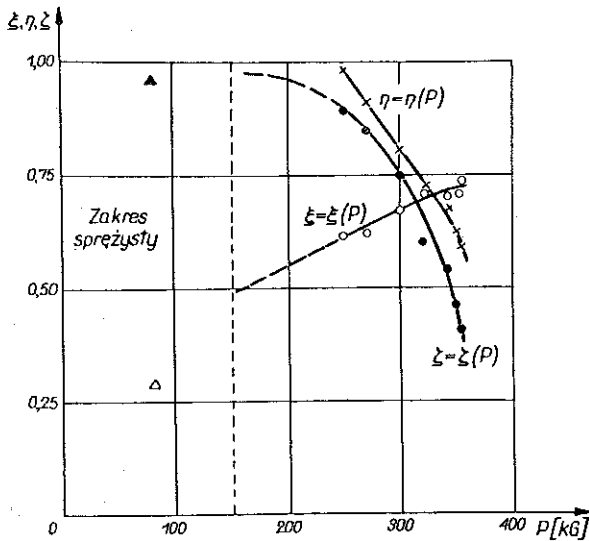
na drodze szybkiego zwiększania się  $(\varepsilon_\varphi)_{\max}$ . Wydaje się, że parametr  $\zeta$  posiada asymptotę  $P = \text{const}$ , której wartość wynosi  $P_{\max}$  i jest to moment utraty stateczności przez powłokę.



Rys. 10. Charakterystyczne wymiary przy definicji parametrów  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$

#### 4. Próba analitycznego opracowania wyników

Pierwotnym założeniem opracowania teoretycznego było znalezienie możliwie prostej metody pozwalającej obliczać praktycznie sprężysto-plastyczne odkształcenia powłoki cylindrycznej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu i sile osiowej. Niestety, wobec silnej nieliniowości problemu wynikała konieczność obliczeń numerycznych na maszynie elektronicznej.



Rys. 11. Wykresy parametrów  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  jako funkcji siły osiowej  $P$ :  $\Delta$ ,  $\blacktriangle$  — wartości parametrów  $\xi$  i  $\zeta$  otrzymane na podstawie klasycznej teorii powłok, gdy w przekroju zamocowania pojawia się pierwsze uplastycznienie

W związku z tym dokonano ostatecznie pewnych wstępnych oszacowań i analizy jakościowej na podstawie teorii klasycznych.



Pierwszy etap ograniczał się do próby oszacowania wielkości obciążenia, przy którym w powłoce pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne.

Z rozwiązania klasycznej teorii powłok otrzymujemy wzór na przemieszczenia promieniowe:

$$(2) \quad W = p^* \frac{R\sigma_0}{E} (1+\nu) [1 - e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x)],$$

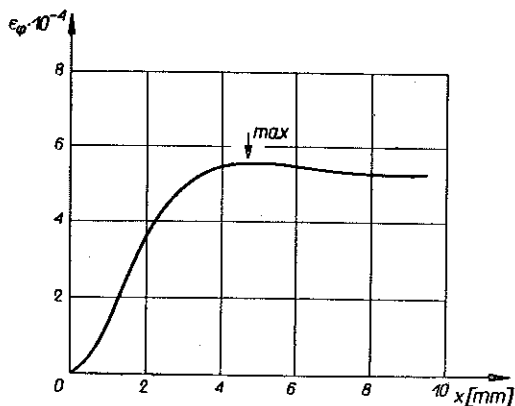
gdzie

$$p^* = \frac{pR}{2\sigma_0 H}, \quad \lambda = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{2RH}},$$

$$R = \frac{d}{2}, \quad 2H = g;$$

ponadto  $p$  oznacza ciśnienie wewnętrzne,  $\sigma_0$  granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu,  $E$  moduł Younga,  $x$  współrzędną bieżącą wzdłuż osi powłoki liczoną od przekroju zamocowania. Równoczesne przyjęcie hipotezy Kirchhoffa-Love'a pozwala znaleźć odkształcenia, a stąd również naprężenia. Zakładając,

że materiał powłoki spełnia warunek plastyczności Hubera-Misesa, obliczono zarówno intensywności naprężeń jak i przemieszczenia  $W$ . Obliczenia przemieszczeń przeprowadzono dla momentu pojawienia się pierwszego uplastycznienia w powłoce przy następujących danych liczbowych:  $\nu=0,35$ ;  $R=7,25$  mm;  $H=0,25$  mm;  $E=0,5 \cdot 10^4$  kG/mm<sup>2</sup>;  $\sigma_0 = 6,0$  kG/mm<sup>2</sup>. W tym stanie powłoki uzyskano rozkład odkształceń obwodowych  $\epsilon_\varphi = W/R$  pokazany na rys. 12. Równocześnie stwierdzono, że początek uplastycznienia wystąpi w przekroju zamocowania, tj. dla  $x=0$  przy wartości ciśnienia



Rys. 12. Rozkład odkształceń obwodowych w pobliżu zamocowania powłoki w momencie pojawienia się pierwszego uplastycznienia

bezwymiarowego  $p^* = 0,32$ , co po przeliczeniu odpowiada ciśnieniu  $p = 13,2$  atm oraz sile osiowej  $P = 81,2$  kG. Należy dodać, że na rysunku jest widoczne tylko pierwsze maksimum  $\epsilon_\varphi$ , następne fale zanikają tak szybko, że przy zastosowanej podziałce odkształceń są niewidoczne. Ponadto obliczenia wykazały, że oprócz strefy w pobliżu utwierdzenia, nie występują większe różnice w intensywności naprężeń pomiędzy zewnętrznymi i wewnętrznymi warstwami powłoki. Fakt ten jest zrozumiały, jeżeli się zważy, że momenty gnące szybko zanikają przy oddalaniu się od utwierdzenia.

Następnie zakładając całkowity warunek uplastycznienia wyrażony w siłach przekrojowych oraz brak stref sprężysto-plastycznych (por. [7 i 8]) obliczono powtórnie

obciążenie odpowiadające początkowi uplastycznienia (należy podkreślić, że tym razem chodziło o uplastycznienie całego przekroju). Następnie oceniono szacunkowo wartość tego obciążenia, gdy strefy uplastycznione obejmują już całą powłokę.

Przyjęto aproksymację ścisłego warunku plastyczności za pomocą elipsoidy:

$$(3) \quad \Phi = n_x^2 + n_\varphi^2 + \frac{3}{4} m_x^2 \leq 1,$$

gdzie

$$n_i = \frac{N_i}{2\sigma_0 H}, \quad m_x = \frac{M_x}{\sigma_0 H^2}, \quad i = x, \varphi,$$

co w oparciu o poprzednie rozwiązanie sprężyste i związku ugięcia z siłami wewnętrznymi daje

$$p_e^* = \sqrt{\frac{1-\nu}{2+\nu^2-\nu^3}}.$$

Dla  $\nu = 0,35$  wartość  $p_e^*$  wynosi  $p_e^* = 0,56$ , czyli  $p = 23,2$  atm oraz  $P = 143$  kG;  $p_e^*$  oznacza maksymalne bezwymiarowe ciśnienie, przy którym w całej powłoce jest spełniony warunek (3). Również i w tym przypadku pierwsze uplastycznienie nastąpi dla  $x = 0$  (w utwierdzeniu). Okazuje się następnie, że w punkcie tym utworzy się przegub plastyczny, a reszta powłoki pozostanie sprężysta. Zatem klasyczne równania pozostaną słuszne, lecz warunek brzegowy  $W'(0) = 0$  zostanie zmieniony przez warunek statyczny  $\Phi(0) = 1$ .

Wobec nieliniowości funkcji (3) siły wewnętrzne przestaną być proporcjonalne do obciążenia i otrzymujemy:

$$n_x = -p^*,$$

$$(4) \quad n_\varphi = p^* [1 - (1+\nu) e^{-\lambda x} \cos \lambda x] - e^{-\lambda x} \sin \lambda x \sqrt{1-\nu^2} \sqrt{1-p^{*2}(1+\nu^2)},$$

$$m_x = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda x} \left[ \cos \lambda x \sqrt{1-p^{*2}(1+\nu^2)} - p^* \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \sin \lambda x \right].$$

Zakres stosowalności tego rozwiązania jest niewielki. Wzory (3) wskazują, że prawie cała powłoka znajduje się w stanie prawie membranowym. Łatwo natomiast zauważyć, że w tym przypadku warunek (3) może być spełniony jedynie dla

$$p^* < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707, \quad p < 29 \text{ atm},$$

czyli że dla  $p^* > 0,707$  strefy sprężyste mogłyby istnieć jedynie, jeżeli wystąpią w nich znaczne momenty, co wobec ogólnego charakteru rozwiązania jest niemożliwe.

Dla ciśnień  $p \leq 29$  atm otrzymane ugięcia są tak małe, że mieszczą się w granicach błędów metody pomiaru odkształceń i nie mogą być więc użyte dla weryfikacji obliczeń.

Dla większych odkształceń plastycznych, które miały miejsce w opisanych wyżej doświadczeniach, dochodzi wpływ nieliniowości geometrycznej, dodatkowy moment

zginający od siły osiowej. Aby uczynić obliczenia praktycznie wykonalnymi, rachunek oparto na następujących założeniach:

a) związek intensywności naprężenia i odkształcenia jest potęgowy,

$$\sigma_i = K \varepsilon_i^m;$$

b) spełniony jest warunek nieściśliwości

$$\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0;$$

c) przyjmujemy podobieństwo dewiatorów naprężenia i odkształcenia

$$s_{ij} = 4g\varepsilon_{ij};$$

d) uwzględniamy dodatkowy moment gnący od siły osiowej w równaniu równowagi;

e) stan naprężenia jest płaski,  $\sigma_z = 0$ ;

f) spełniona jest hipoteza płaskich przekrojów Kirchhoffa-Love'a,

$$\varepsilon_x = U + z \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{W}{R}.$$

W rezultacie otrzymuje się układ równań o postaci

$$(5) \quad 2(2u+w) I_1 + \frac{8}{c^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} I_2 + \frac{p^*}{\kappa} = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi^2} \left[ 4(2u+w) I_2 + \frac{16}{c^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} I_3 \right] + 2(u+2w) I_1 c^2 + 8 \frac{d^2 w}{d\xi^2} I_2 =$$

$$= \frac{p^* c^2}{\kappa} \left( 1 + \varrho \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right),$$

gdzie

$$u = \frac{dU}{dx}, \quad w = \frac{W}{R}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad c^2 = \frac{2L^2}{RH}, \quad \varrho = \frac{R}{L}, \quad \kappa = \frac{K}{\sigma_0}.$$

W równaniach tych  $L$  oznacza długość powłoki, a  $U$  przemieszczenie osiowe oraz

$$I_i = \frac{(\sqrt{3})^m}{2^{4-m}} \int_{-1}^1 \left[ u^2 + uw + w^2 + \frac{2}{c^2} (2u+w) \frac{d^2 w}{d\xi^2} \zeta + \frac{4}{c^4} \left( \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \zeta^{i-1} d\zeta.$$

Układ ten dla danych doświadczalnych był rozwiązywany numerycznie w Centrum Obliczeniowym PAN na maszynie liczącej GIER. Próbne rachunki przeprowadzone dla małych wartości parametru  $c^2$  dały pozytywne rezultaty. Parametr ten w doświadczeniach wynosił około  $c^2 = 1000$ . Niestety, dla większych wartości  $c^2$ , do których należała również wartość doświadczalna, użyty algorytm okazał się silnie niestabilny i obliczenia zostały przerwane. Wykazano jednak możliwość zastosowania zaproponowanej metody.

Tłumaczy to również, dlaczego nie próbowano stosować teorii plastycznego plynienia.

## 5. Zakończenie

Eksperymentalna część pracy wykazała, że proces deformacji powłoki cylindrycznej poddanej działaniu siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego jest procesem złożonym. Otrzymane rezultaty pozwalają prześledzić cały proces tworzenia się charakterystycznych stref brzegowych aż do momentu utraty stateczności. Jak wspomniano na wstępie, zagadnienie to nie było dotychczas rozwiązane.

Próba teoretycznej analizy potwierdza wnioski o złożoności problemu. Słuszność założeń przyjętych w teoretycznej analizie wydają się potwierdzać uzyskane wartości parametrów  $\xi$  i  $\zeta$ , które zgadzają się z wyznaczonymi doświadczalnie.

Wartości tych parametrów uzyskano dla ciśnienia  $p = 13,2$  atm. oraz siły osiowej  $P = 81,2$  kG; zaznaczono je na rys. 11 trójkątami. Również teoretycznie obliczony moment przejścia całej powłoki w stan plastyczny, który zachodzi dla  $p = 23,2$  atm i  $P = 143$  kG (pionowa linia kreskowana na rys. 11), wydaje się być zgodny z eksperymentem. Należałoby się spodziewać, że od tego momentu następuje gwałtowna deformacja całej powłoki; odpowiednie wykresy przedstawiono na rys. 3-9. Równocześnie należy dodać, że analiza teoretyczna pierwszego stadium deformacji powłoki jest zgodna z obserwacjami poczynionymi na drodze doświadczalnej w pracy [6].

## Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Королев, И. Г. Смирнов, В. Н. Соколов, *Исследование устойчивости цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Вопросы Механики, вып. 193 (1961), Изд. Московского Университета.
2. А. А. Ильюшин, *Устойчивость пластин и оболочек за пределом упругости*, Прикл. Маш. Мех., 8 (1944).
3. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат, 1948.
4. Y. C. FUNG, E. E. SECHLER, *Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure*, J. Aeronaut. Sci., 5, 24 (1957), 351.
5. H. LO, H. CRATE, E. B. SCHWARTZ, *Buckling of thin-walled cylinder under axial compression and internal pressure*, NACA TN 2021 (Jan. 1950).
6. L. H. N. LEE, *Inelastic buckling of cylindrical shells under axial compression and internal pressure*, Proc. 7-th Midwestern Mechanics Conf. Vol. 1 (1961), Michigan.
7. J. A. KÖNIG, *Deformation of cylindrical elastic-plastic shells*, Biul. PAN, 1, 12 (1964), 13.
8. В. С. Чернина, *Упруго-пластическая деформация сварной разнородной цилиндрической оболочки*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Мат., 1 (1960), 133.

## Резюме

ОСЕВОЕ СЖАТИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОДНОВРЕМЕННЫМ  
ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В работе представлен экспериментальный и теоретический анализ влияния защемления цилиндрической оболочки, подверженной одновременному действию осевой нагрузки и внутреннего давления. В результате такой схемы нагрузки вблизи обоих концов оболочки образуются характеристические краевые зоны (рис. 2). По всей вероятности, этот эффект возникает в следствие воздействия моментов появляющихся на окружности в сечениях защемления.

В данном случае, авторы ограничиваются, только, анализом процесса деформации оболочки не принимая во внимание величины нагрузок в момент потери устойчивости. Этот вопрос обсуждался в других работах напр. [1, 2, 4, 5 и 6].

Дается попытка теоретического анализа, обсуждаемого эффекта в упругом, упруго-пластическом и пластическом состояниях. В пластическом состоянии принято, что материал оболочки является изотропным со степенным законом упрочнения. Приводятся, также, результаты экспериментов проведенных на тонкостенных латунных трубообразных образцах. Благодаря применению специального метода измерения тангенциальных деформаций оболочки, процесс деформации регистрировался вплоть до момента потери устойчивости.

### S u m m a r y

#### AXIAL COMPRESSION OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE

This paper is devoted to the experimental and theoretical analysis of the problem of a cylindrical shell subjected to the simultaneous action of an axial force and an internal pressure. As a result of such a load boundary zones occur at both ends (Fig. 2). It is supposed that this effect is due to the action of moments acting in the support sections.

The considerations are confined to the strain process of a shell, the problem of load at the stability loss being not analysed, this being done in other papers, such as [1, 2, 4, 5, and 6].

A tentative theoretical analysis of the effect under consideration is given for the elastic, elastic-plastic and plastic state. In the plastic state the material of the shell is assumed to be isotropic with a power law of strain-hardening. Some experimental results obtained with thin-walled brass tubes are quoted. The strain process of a shell was recorded until the moment of stability loss, by means of a special method based on the circumferential strain.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1965 r.*

---