

PRZYPADEK OBROTOWEJ SYMETRII POWŁOK O MAŁEJ WYNIOSŁOŚCI

WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

Powłoki obrotowe o małej wyniosłości utożsamiane są często z płaską powłoką kulistą. Jest to jednakże zbytne zwężenie tego pojęcia. W tej pracy będą rozpatrywane powłoki o dowolnej postaci funkcji południka $z(\varrho)$, która spełnia warunek «małej wyniosłości» [1]

$$(1.1) \quad z_{,a} < 1, \quad 1 + z_{,a}^2 \approx 1.$$

Mogą to być więc powłoki zarówno o dodatniej krzywiznie Gaussa (np. kula), zerowej (np. stożek) jak i ujemnej (np. przekrycie jednosłupowe typu grzybkowego).

Powłoki obrotowe dla większości funkcji $z(\varrho)$ posiadają w zworniku osobliwość geometryczną, której rodzaj zależy od postaci funkcji $z(\varrho)$. Ponadto w zworniku występować może osobliwość obciążenia (np. siła skupiona), co powoduje duże naprężenia ścinające na grubości powłoki nie uwzględniane w pierwszym przybliżeniu liniowej teorii powłok (por. [16]). W przypadku istnienia obciążenia skupionego lub osobliwości geometrycznej należy więc otrzymane w niniejszej pracy zależności odnieść do powłok typu pierścieniowego o brzegu wewnętrznym $\varrho_0 \geq 0,10$ lub 0,15.

Ze znanych mi prac E. REISSNER [2] wskazał postacie funkcji południka $z(\varrho)$ umożliwiające analityczne rozwiązanie równania jednorodnego (kula, stożek i krzywa logarytmiczna). W przypadku obrotowej symetrii klasę powłok paraboloidalnych rozważał E. REISSNER [15]. W pracy [14] przeprowadzono obliczenia powłoki paraboloidalnej dla obciążenia równomiernie rozłożonego przy wykładniku potęgi $m = 1, 3/2, 2, 4$ [por. (5.1)]. Można wymienić również prace pokrewne [17 i 18]. Jest ponadto ogromna ilość konkretnych rozwiązań dla powłoki kulistej, co ułatwia możliwość zastąpienia podstawowego równania różniczkowego czwartego rzędu przez dwa równania drugiego rzędu (por. p. 3).

Autorzy prac [2, 14 i 15] zajmują się zagadnieniem jednorodnym zakładając, że całka szczególna z błędem rzędu dokładności teorii powłok o małej wyniosłości jest znana z rozwiązania błonowego. Dla powłok wyniosłych o «łagodnych» kształtach jest to znana własność równań teorii powłok [13]. Znane są jednak niektóre przypadki szczególne, gdy osobliwość geometryczna powłoki przy pewnym typie obciążenia nie pozwala na przejście całki szczególnej z rozwiązania błonowego, np. płyta, nieskończenie długa powłoka cylindryczna, torus i inne wymienione np. w [13].

Dotyczy to w pewnym stopniu również powłok o kształtach zbliżonych do tych osobliwych przypadków powłok. Dla powłok obrotowych o *małej wyniosłości*, jako powłok o kształtach zbliżonych do płyty, możliwość przejścia całki szczególnej z rozwiązania błonowego zależy więc zarówno od cech geometrycznych powłoki, wyniosłości jak i charakteru działającego obciążenia. W każdym konkretnym przypadku należy więc przeprowadzić analizę błędu wnoszonego do obliczeń przez przyjęcie błonowej całki szczególnej. Gdy błąd wnoszony do obliczeń przez przejście całki szczególnej z rozwiązania błonowego jest rzędu dokładności teorii powłok o małej wyniosłości, przyjęcie takie jest możliwe. Analiza tego rodzaju jest oczywiście zbędna, gdy istnieje możliwość znalezienia ściślej całki szczególnej równań.

W niniejszej pracy na podstawie równań liniowej teorii powłok o małej wyniosłości w wersji podanej w [1] oraz w [7] rozważono podstawowe równania dla powłok obrotowych (p. 2 i 3). Szczegółowo zanalizowano przypadek symetrii obrotowej.

Dla klasy powłok paraboloidalnych, $z = c(1 - \varrho^m)$, oraz powłoki logarytmicznej, $z = c \ln(1/\varrho)$, jako najbardziej interesujących, podano rozwiązanie równań przyjmując ściśle całki szczególne (p. 5). Dla dowolnej postaci funkcji $z(\varrho)$ przeprowadzono analizę możliwości przejścia całki szczególnej z rozwiązania błonowego, otrzymując zależności typu nierówności (6.5). Wskazano, że przy niespełnieniu tych zależności w każdym konkretnym przypadku przejście całki szczególnej z rozwiązania błonowego może spowodować błędy przekraczające dokładność równań liniowej teorii powłok o małej wyniosłości. Wskazano na niektóre przypadki powłok i obciążenia, gdy błonowa całka szczególna pokrywa się ze ściśłą całką szczególną i nie wnosi dodatkowych błędów do obliczeń.

Jako przykłady liczbowe rozwiązano dwa przypadki obrotowego przekrycia jedno-słupowego typu grzybkowego przy obciążeniu równomiernie rozłożonym. Zależności (6.5) dla danych liczbowych z naszych przykładów nie są spełnione. Zagadnienie powłoki rozwiązano przy przyjęciu ściślej i błonowej całki szczególnej. Błędy powstałe przy przyjęciu tej ostatniej przekraczają w tym przypadku dokładność teorii powłok o małej wyniosłości, a dla powłoki logarytmicznej wykresy obu przypadków są wprost nieporównywalne.

Należy tu zaznaczyć, że w pracach [3, 4, 5, 14] i innych są rozwiązane niektóre konkretne przypadki obrotowej symetrii powłok o małej wyniosłości. Dotyczą one jednak powłok o dodatniej względnie zerowej krzywiznie Gaussa. Rozwiązane w przykładach powłoki posiadają ujemną krzywiznę Gaussa.

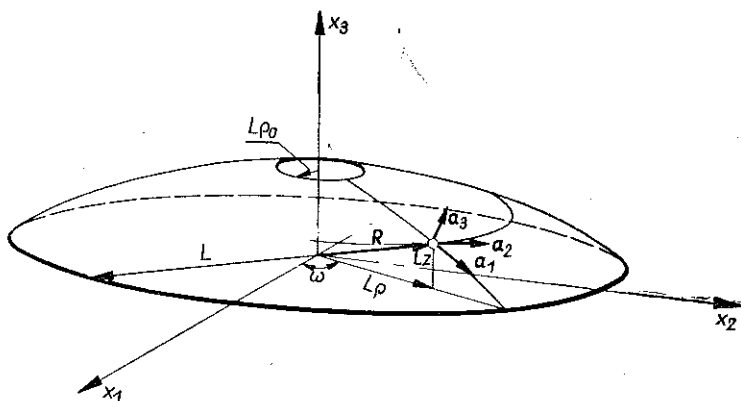
2. Wielkości geometryczne powłok

Podstawowe wielkości geometryczne oraz oznaczenia dla powłok obrotowych o małej wyniosłości podano na rys. 1 i 2. Oznaczenia oraz sposób postępowania zgodny jest z pracami [1, 6 i 7]. Powłokę opisano w biegunowym układzie współrzędnych rzutu powłoki

$$(2.1) \quad \theta^a = \begin{bmatrix} \varrho \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Powłokę określa wektor

$$(2.2) \quad \mathbf{R} = Lr = L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \rho \cos \omega \\ \rho \sin \omega \\ z(\rho) \end{bmatrix}.$$

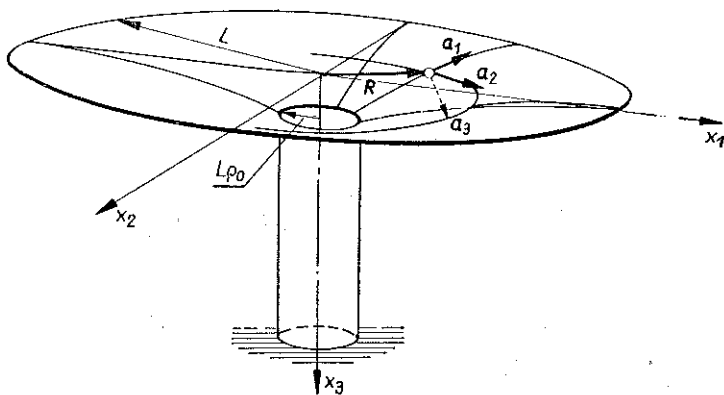


Rys. 1

Zakłada się, że postać krzywej południka z spełnia podstawowe założenie teorii powłok o małej wyniosłości

$$(2.3) \quad z_{,1} < 1, \quad 1 + z_{,1}^2 \approx 1.$$

Tu i dalej symbole $(\)_{,a} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^a} (\)$ oraz $(\)|_a$ oznaczają odpowiednio pochodną cząstkową oraz pochodną kowariantną.



Rys. 2

Przy założeniu (2.3) wielkości geometryczne powłoki przedstawione w rzucie powłoki na podstawie (2.1) i (2.2) są następujące [1]:

$$(2.4) \quad e_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{bmatrix}, \quad e^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho^2} \end{bmatrix}, \quad e = \varrho^2,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varrho} \\ \frac{1}{\varrho} & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} z_{,11} & 0 \\ 0 & \varrho z_{,1} \end{bmatrix}, \quad K = \frac{z_{,1} z_{,11}}{\varrho}.$$

3. Równania podstawowe

Równanie rozwiązujące liniowej teorii powłok o małej wyniosłości w dowolnym układzie krzywoliniowym w przypadku rozwiązania metodą «mieszana» ma postać [1 i 7]:

$$(3.1) \quad \Theta \delta_{\lambda\alpha}^{\lambda\alpha} \mp i \sqrt{A} \delta_{\beta\lambda}^{\alpha\alpha} b_{\alpha}^{\beta} \Theta \delta_{\varrho}^{\lambda} = \pm i \sqrt{A} p^3,$$

gdzie

$$(3.2) \quad \Theta = \varphi \pm i\kappa v^3,$$

$$\kappa = \frac{E\lambda^2 L}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad A = \frac{12(1-\nu^2)}{\lambda^2}, \quad B = \frac{\kappa}{\sqrt{A}} = \frac{E\lambda L}{A},$$

Symbol φ oznacza funkcję naprężeń Airy'ego oraz v^3 składową wektora przemieszczeń w kierunku \mathbf{a}_3 . W równaniu (3.1) dla ułatwienia dalszych rozważań przyjęto obciążenie $p^3 \neq 0$, $p^1 = p^2 = 0$ wykluczając w ten sposób zagadnienie wieloznaczności funkcji naprężeń φ [24].

W przyjętym układzie współrzędnych (2.1) dla wielkości (2.4) równanie (3.1) przyjmie postać:

$$(3.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Theta \mp i \sqrt{A} \left(\frac{z_{,1}}{\varrho} \Theta_{,11} + \frac{z_{,11}}{\varrho} \Theta_{,1} + \frac{z_{,11}}{\varrho^2} \Theta_{,22} \right) = \pm i \sqrt{A} p^3,$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}.$$

Jest to podstawowe równanie dla powłok obrotowych. Po rozwiązaniu (3.3) i rozdzieleniu Θ zgodnie z (3.2)₁ fizyczne składowe tensorów sił wewnętrznych $n^{(\alpha\beta)}$, $m^{(\alpha\beta)}$, $q^{(\alpha)}$, wektora przemieszczeń $v^{(\alpha)}$ oraz tensorów odkształceń $\alpha_{(\alpha\beta)}$, $\beta_{(\alpha\beta)}$ można wyrazić przez φ i v^3 przez rozwinięcie ogólnych zależności [1 i 7] dla przyjętego układu (2.1) i (2.4).

Równanie (3.3) jest równaniem różniczkowym cząstkowym zespolonym czwartego rzędu zmiennych rzeczywistych ϱ i ω o współczynnikach funkcyjnych. Ścisłe rozwiązanie tego równania dla dowolnego kształtu powłoki $z(\varrho)$ nie jest znane. Jedynie dla powłoki kulistej o małej wyniosłości $z = c(1 - \varrho^2)$ równanie (3.3) można przekształcić do postaci

$$(3.4) \quad \nabla^2 (\nabla^2 \pm i2\sqrt{A}c) \Theta = \pm i \sqrt{A} p^3.$$

W przypadku więc powłoki kulistej zagadnienie jednorodne sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a oraz równania Helmholtza, podstawowych równań

fizyki matematycznej. Można to podobnie udowodnić nawet odnośnie do równania ogólnego (3.1).

Powłokę kulistą o małej wyniosłości rozpatrzono m.in. w pracach [8, 9 i 10] przejmując całą szczególną z rozwiązania błonowego. Zagadnienie wyznaczenia ścisłej całki szczególnej równania (3.4) dla pewnych obciążeń poruszono w pracach [22 i 23].

Rozdzielając w równaniu (3.3) zmienne przy założeniu jednoznaczności funkcji naprężeń φ [24]

$$(3.5) \quad \Theta = \sum_n^n \Theta^n(\varrho) \cos n\omega, \quad p^3 = \sum_n^n p^3(\varrho) \cos n\omega, \quad \Theta^n = \varphi^n \pm i\kappa v^n^3$$

dla każdego n otrzymamy

$$(3.6) \quad \nabla_n^2 \nabla_n^2 \Theta^n \mp i\sqrt{A} \left(\frac{z_{,1}^n}{\varrho} \Theta_{,11}^n + \frac{z_{,11}^n}{\varrho} \Theta_{,1}^n - n^2 \frac{z_{,11}^n}{\varrho^2} \Theta^n \right) = \pm i\sqrt{A} p^3,$$

$$\nabla_n^2 \equiv \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2}.$$

Ścisłe rozwiązania zagadnienia jednorodnego (3.6) dla $n > 1$ znane są poza kulą dla powłoki stożkowej, $z = c(1 - \varrho)$ [19], oraz powłoki o południku wg krzywej logarytmicznej $z = c \ln(1/\varrho)$ [2 i 24]. Dla innych postaci południka $z = cf(\varrho)$ zachodzi konieczność budowania rozwiązań asymptotycznych równania (3.6) dla konkretnych wielkości parametrów $\sqrt{A}c$ oraz n^2 .

W niniejszej pracy ograniczono się do zagadnień obrotowej symetrii.

4. Przypadek obrotowej symetrii

Dla obrotowej symetrii $(\cdot)_{,2} \equiv 0$ oraz $n = 0$. Wtedy (3.6) można scałkować jednokrotnie względem zmiennej ϱ otrzymując równanie drugiego rzędu

$$(4.1) \quad \varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho F)_{,1} \right]_{,1} \mp i\sqrt{A} z_{,1} F = \pm i\sqrt{A} \left(\int_{\varrho_0}^{\varrho} p^3 \varrho d\varrho - C \right),$$

gdzie

$$(4.2) \quad F = \Theta_{,1}^0 = \varphi_{,1}^0 \pm i\kappa v_{,1}^0 \equiv \Phi \pm i\kappa W.$$

Można z łatwością udowodnić, że stała całkowania C w równaniu (4.1) jest stałą rzeczywistą, wynikającą z istnienia obciążenia siłą skupioną w zworniku,

$$(4.3) \quad C = \frac{P}{2\pi} = \frac{\bar{P}}{2\pi L},$$

gdzie $\bar{P} = LP$ jest fizyczną składową wektora siły skupionej.

Rozwiązanie równania (4.1) ma postać

$$(4.4) \quad F = A_{12} F_1 + A_{34} F_2 + F_3,$$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają liniowo niezależne rozwiązania jednorodnego równania (4.1), F_s całkę szczególną oraz A_{12} i A_{34} zespolone stałe dowolne.

Funkcje F_1 , F_2 i F_s są funkcjami zespolonymi argumentu rzeczywistego ϱ . Rozdzielając (4.4) na część rzeczywistą i urojoną zgodnie z (4.2)

$$(4.5) \quad \begin{aligned} A_{12} &= A_1 - iA_2, & A_{34} &= A_3 - iA_4, \\ F_1 &= \psi_1 + i\psi_2, & F_2 &= \psi_3 + i\psi_4, & F_s &= \operatorname{Re} F_s + i \operatorname{Im} F_s, \end{aligned}$$

dla funkcji Φ i W z (4.2) otrzymamy następujące wyrażenia:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \Phi &= A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + A_4 \psi_4 + \Phi_s, \\ W &= \pm \frac{1}{\varkappa} (A_1 \psi_2 - A_2 \psi_1 + A_3 \psi_4 - A_4 \psi_3) + W_s, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.7) \quad \Phi_s = \operatorname{Re} F_s, \quad W_s = \pm \frac{1}{\varkappa} \operatorname{Im} F_s = \pm \frac{\sqrt{A}}{E\lambda L} \operatorname{Im} F_s.$$

W ten sposób wyznaczone funkcje ψ_n spełniają następujące związki wynikające z równania (4.1):

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \psi_1)_{,1} \right]_{,1} &= \mp \sqrt{A} z_{,1} \psi_2, \\ \varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \psi_2)_{,1} \right]_{,1} &= \pm \sqrt{A} z_{,1} \psi_1, \\ \varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \psi_3)_{,1} \right]_{,1} &= \mp \sqrt{A} z_{,1} \psi_4, \\ \varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \psi_4)_{,1} \right]_{,1} &= \pm \sqrt{A} z_{,1} \psi_3. \end{aligned}$$

Analityczna postać funkcji ψ_n jak również Φ_s i W_s zależy od postaci południka $z(\varrho)$ oraz obciążenia $p^3(\varrho)$. Dotychczasowe rozważania ogólne prowadzone są dla obu znaków (\pm) ze wzoru (3.1). Takie ustawienie równań ułatwia dokonanie wygodnej zamiany zmiennej niezależnej w równaniu (4.1) przy konkretnych obliczeniach podczas doprowadzania (4.1) do typowej postaci.

Wyrażenia sił wewnętrznych $n^{(\alpha\beta)}$, $m^{(\alpha\beta)}$, $q^{(\alpha)}$ przemieszczeń $v^{(3)}$ i odkształceń $\alpha_{(\alpha\beta)}$ dla obrotowej symetrii zestawiono w tablicy 1.

Rozdzielając (4.1) na część rzeczywistą i urojoną otrzymamy dla obrotowej symetrii równanie zgodności odkształceń w kierunku \mathbf{a}_3 :

$$(4.9) \quad \varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \Phi)_{,1} \right]_{,1} + E\lambda L z_{,1} W = 0$$

oraz równanie równowagi w kierunku \mathbf{a}_3

$$(4.10) \quad B\varrho \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho W)_{,1} \right]_{,1} - z_{,1} \Phi = \int p^3 \varrho d\varrho - \bar{C} \equiv O_p(\varrho) + O_{\bar{C}},$$

Tablica 1

Wielkość statyczna	Wzór wyznaczający	Mnożnik	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	Wyraz wolny
Φ	$\Phi_{s,1}$	1	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	Φ_s
W	$\psi_{s,1}^3$	$\pm \frac{\sqrt{A}}{E\lambda L}$	ψ_2	$-\psi_1$	ψ_4	$-\psi_3$	W_s
$n^{(11)}$	$\frac{1}{\rho} \Phi$	1	$\frac{1}{\rho} \psi_1$	$\frac{1}{\rho} \psi_2$	$\frac{1}{\rho} \psi_3$	$\frac{1}{\rho} \psi_4$	$\frac{1}{\rho} \Phi_s$
$n^{(22)}$	$\Phi_{s,1}$	1	$\psi_{1,1}$	$\psi_{2,1}$	$\psi_{3,1}$	$\psi_{4,1}$	$\Phi_{s,1}$
$m^{(11)}$	$-BL \left(W_{s,1} + \frac{\nu}{\rho} W \right)$	$\mp \frac{L}{\sqrt{A}}$	$\psi_{2,1} + \frac{\nu}{\rho} \psi_2$	$-\psi_{1,1} - \frac{\nu}{\rho} \psi_1$	$\psi_{4,1} + \frac{\nu}{\rho} \psi_4$	$-\psi_{3,1} - \frac{\nu}{\rho} \psi_3$	$-\frac{E\lambda L^2}{A} \left(W_{s,1} + \frac{\nu}{\rho} W_s \right)$
$m^{(22)}$	$BL \left(\nu W_{s,1} + \frac{1}{\rho} W \right)$	$\pm \frac{L}{\sqrt{A}}$	$\nu \psi_{2,1} + \frac{1}{\rho} \psi_2$	$-\nu \psi_{1,1} - \frac{1}{\rho} \psi_1$	$\nu \psi_{4,1} + \frac{1}{\rho} \psi_4$	$-\nu \psi_{3,1} - \frac{1}{\rho} \psi_3$	$\frac{E\lambda L^2}{A} \left(\nu W_{s,1} + \frac{1}{\rho} W_s \right)$
$q^{(1)}$	$-B \left[\frac{1}{\rho} (\rho W)_{s,1} \right]_{,1}$	1	$-\frac{z_{s,1}}{\rho} \psi_1$	$-\frac{z_{s,1}}{\rho} \psi_2$	$-\frac{z_{s,1}}{\rho} \psi_3$	$-\frac{z_{s,1}}{\rho} \psi_4$	$-\frac{E\lambda L}{A} \left[\frac{1}{\rho} (\rho W_{s,1})_{s,1} \right]_{,1}$
$\alpha^{(11)}$	$\frac{1}{E\lambda L} \left(\Phi - \nu \Phi_{s,1} \right)$	$\frac{1}{E\lambda L}$	$\frac{1}{\rho} \psi_1 - \nu \psi_{1,1}$	$\frac{1}{\rho} \psi_2 - \nu \psi_{2,1}$	$\frac{1}{\rho} \psi_3 - \nu \psi_{3,1}$	$\frac{1}{\rho} \psi_4 - \nu \psi_{4,1}$	$\frac{1}{E\lambda L} \left[\frac{1}{\rho} \Phi_s - \nu \Phi_{s,1} \right]$
$\alpha^{(22)}$	$\frac{1}{E\lambda L} \left(\Phi_{s,1} - \frac{\nu}{\rho} \Phi \right)$	$\frac{1}{E\lambda L}$	$\psi_{1,1} - \frac{\nu}{\rho} \psi_1$	$\psi_{2,1} - \frac{\nu}{\rho} \psi_2$	$\psi_{3,1} - \frac{\nu}{\rho} \psi_3$	$\psi_{4,1} - \frac{\nu}{\rho} \psi_4$	$\frac{1}{E\lambda L} \left[\Phi_{s,1} - \frac{\nu}{\rho} \Phi_s \right]$
$v^{(3)}$	$L \int_0^L W_s dq$	$\pm \frac{\sqrt{A}}{E\lambda}$	$\int \psi_2 dq$	$-\int \psi_1 dq$	$\int \psi_4 dq$	$-\int \psi_3 dq$	$L \int W_s dq + A_5$

gdzie

$$(4.11) \quad \bar{C} = C + \left[\int p^3 \varrho d\varrho \right]_{\varrho=\varrho_0},$$

a dla przejrzystości dalszych rozważań przyjęto oznaczenia

$$(4.12) \quad O_p(\varrho) = \int p^3 \varrho d\varrho, \quad O_{\bar{C}} = -\bar{C}.$$

5. Rozwiązania analityczne

Rozwiązanie równania (4.1) przeprowadźmy przykładowo dla powłok paraboloidalnych oraz powłoki logarytmicznej.

Weźmy pod uwagę powłoki paraboloidalne

$$(5.1) \quad z = c(1 - \varrho^m),$$

gdzie c oznacza stały parametr, wielkość małą, m oznacza wielkość dodatnią.

Dla powłok paraboloidalnych (5.1) równanie (4.1) przyjmie postać

$$(5.2) \quad \varrho^2 F_{,11} + \varrho F_{,1} - (\mp i \sqrt{A} cm \varrho^{m+1}) F = \pm i \sqrt{A} \varrho \left(\int_{\varrho_0}^{\varrho} (p^3 \varrho d\varrho - C) \right).$$

Dokonując zamiany zmiennych

$$(5.3) \quad x = l\varrho^{m/2}, \quad l = \frac{2}{m} \sqrt{cm \sqrt{A}}$$

jednorodnego równania (5.2) dla znaku dolnego sprowadza się do drugiej typowej postaci równania Bessela:

$$(5.4) \quad x^2 F_{,xx} + x F_{,x} - \left[ix^2 + \left(\frac{2}{m} \right)^2 \right] F = 0,$$

którego rozwiązanie można przyjąć w postaci [11 i 15]

$$(5.5) \quad F_0(x) = A_{12} I_{\frac{2}{m}}(\sqrt{i}x) + A_{34} K_{\frac{2}{m}}(\sqrt{i}x) \equiv \Phi_0 - ixW_0.$$

Tutaj $I_{\frac{2}{m}}(\sqrt{i}x)$ oraz $K_{\frac{2}{m}}(\sqrt{i}x)$ oznaczają funkcję Bessela drugiego rodzaju rzędu $2/m$ argumentu zespolonego $\sqrt{i}x$.

Zgodnie z postępowaniem nakreślonym w p. 4 rozwiązanie równania jednorodnego należy przedstawić przez funkcje ψ_n argumentu rzeczywistego. W przypadku powłok paraboloidalnych [11] mamy

$$(5.6) \quad \begin{aligned} I_{\frac{2}{m}}(\sqrt{i}x) i^{\frac{2}{m}} &= \text{ber}_{\frac{2}{m}} x + i \text{bei}_{\frac{2}{m}} x \equiv \psi_1(x) + i\psi_2(x), \\ K_{\frac{2}{m}}(\sqrt{i}x) i^{\frac{2}{m}} &= \text{ker}_{\frac{2}{m}} x + i \text{kei}_{\frac{2}{m}} x \equiv \psi_3(x) + i\psi_4(x), \end{aligned}$$

gdzie $\text{ber}_{\frac{2}{m}} x$, $\text{bei}_{\frac{2}{m}} x$, $\text{ker}_{\frac{2}{m}} x$ i $\text{kei}_{\frac{2}{m}} x$ oznaczają funkcje Thompsona rzędu $2/m$ argumentu rzeczywistego x [11].

W celu wyznaczenia ścisłej całki szczególnej F_s równania (5.2) należy obrać postać funkcji obciążenia. Zakładając dla prostoty, że

$$(5.7) \quad p^3(\varrho) \equiv \text{const} = p$$

przez zamianę zmiennych dla znaku dolnego

$$(5.8) \quad z = i^{3/2} l \varrho^{m/2}$$

można sprowadzić (5.2) do pierwszej typowej postaci równania Bessela [12]:

$$(5.9) \quad z^2 F_{,zz} + z F_{,z} + \left[z^2 - \left(\frac{2}{m} \right)^2 \right] F = E z^{\frac{6}{m}} + G z^{\frac{2}{m}}.$$

W równaniu tym E i G są stałymi zespolonymi określonymi za pomocą wzorów

$$(5.10) \quad \begin{aligned} E &= -i \sqrt{A} \left(\frac{2}{m} \right)^2 \left[\frac{1}{i^{3/2} l^2} \right]^{\frac{3}{m}} \frac{P}{2}, \\ G &= i \sqrt{A} \left(\frac{2}{m} \right)^2 \left[\frac{1}{i^{3/2} l^2} \right]^{\frac{1}{m}} \bar{C}, \\ \bar{C} &= \frac{P}{2\pi} + \frac{p \varrho_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Całkę szczególną (5.9) można teraz przyjąć w postaci [12]

$$(5.11) \quad \begin{aligned} F_s &= E s_{\mu, \nu}(z) + G S_{\nu-1, \nu}(z), \\ \nu &= \frac{2}{m}, \quad \mu = 3 \frac{2}{m} - 1. \end{aligned}$$

Symbole $s_{\mu, \nu}(z)$ oraz $S_{\nu-1, \nu}(z)$ oznaczają funkcje Lomela zdefiniowane szeregami nieskończonymi oraz wzorami transformacyjnymi w pracy [12], str. 349–350. Dla pewnych szczególnych wartości μ i ν określonych w [12] funkcję Lomela $S_{\nu-1, \nu}(z)$ można wyrazić przez wielomiany Neumana $O_n(z)$, natomiast zamiast funkcji Lomela $s_{\mu, \nu}(z)$ jako całkę szczególną (5.9) należy przyjąć funkcję Lomela $S_{\mu, \nu}(z)$ określoną w [12] skończonym szeregiem potęgowym o potęgach malejących. Całki szczególne F_s równania (5.9) dla niektórych wartości m zestawiono w tablicy 2.

Całki szczególne Φ_s i W_s określone są teraz za pomocą wzorów (por. 4.7)

$$(5.12) \quad \Phi_s = \text{Re } F_s, \quad W_s = -\frac{\sqrt{A}}{E \lambda L} \text{Im } F_s.$$

Całki szczególne Φ_s oraz W_s dla niektórych wartości m podano w tablicach 3 i 4.

Z kolei weźmy pod uwagę powłokę logarytmiczną

$$(5.13) \quad z = +c \ln(1/\varrho),$$

gdzie c oznacza stały dodatni mały parametr tak określony, aby dla obszaru powłoki było spełnione założenie (2.3).

Tablica 2. Zestawienie całek szczególnych F_s od obciążenia równomiernego p oraz siły skupionej P

z	Wyraz $O_p(\varrho)$	Wyraz $O_{\bar{c}}$
$c(1 - \varrho^m)$	$Es_{\mu, \nu}(z)$	$GS_{\nu-1, \nu}(z)$
$c(1 - \varrho^2)$	Ez	$\frac{G}{z}$
$c(1 - \varrho)$	$Ez^4 \left(1 - \frac{12}{z^2}\right)$	$G \left(1 + \frac{4}{z^2}\right)$
$c(1 - \sqrt[3]{\varrho^2})$	$Ez^7 \left(1 - \frac{40}{z^2} + \frac{40 \cdot 16}{z^2}\right)$	$Gz \left(1 + \frac{8}{z^2} + \frac{64}{z^4}\right)$
$c(1 - \sqrt{\varrho})$	$Ez^{10} \left(1 - \frac{84}{z^2} + \frac{84 \cdot 48}{z^4} - \frac{84 \cdot 48 \cdot 20}{z^6}\right)$	$Gz^2 \left(1 + \frac{12}{z^2} + \frac{12 \cdot 16}{z^4} + \frac{12 \cdot 192}{z^6}\right)$
$c \ln \frac{1}{\varrho}$	$E_1 \varrho^3$	$G_1 \varrho$

Tablica 3. Zestawienie porównawcze całek szczególnych funkcji naprężeń z rozwiązania ścisłego Φ_s i błonowego $\bar{\Phi}$

z	Φ_s	$\bar{\Phi}$
$c(1 - \varrho^m)$	$\text{Re} [Es_{\mu, \nu}(z) + GS_{\nu-1, \nu}(z)]$	$\frac{1}{cm} \varrho^{1-m} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$
$c(1 - \varrho^2)$	$\frac{1}{2c\varrho} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$	$\frac{1}{2c\varrho} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$
$c(1 - \varrho)$	$\frac{1}{c} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$	$\frac{1}{c} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$
$c(1 - \sqrt[3]{\varrho^2})$	$\frac{3}{2c} \sqrt[3]{\varrho} \left[\frac{pq^2}{2} \left(1 - \frac{160}{9c^2A} \frac{1}{\sqrt[3]{\varrho^4}}\right) - \bar{C} \left(1 - \frac{16}{9c^2A} \frac{1}{\sqrt[3]{\varrho^4}}\right) \right]$	$\frac{3}{2c} \sqrt[3]{\varrho} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$
$c(1 - \sqrt{\varrho})$	$\frac{2}{c} \sqrt{\varrho} \left[\frac{pq^2}{2} \left(1 - \frac{63}{c^2A} \frac{1}{\varrho}\right) - \bar{C} \left(1 - \frac{3}{c^2A} \frac{1}{\varrho}\right) \right]$	$\frac{2}{c} \sqrt{\varrho} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$
$c \ln \frac{1}{\varrho}$	$\frac{\varrho}{c} \left[\frac{pq^2}{2} \frac{Ac^2}{Ac^2+64} - \bar{C} \right]$	$\frac{\varrho}{c} \left[\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right]$

Dla (5.13) w przypadku obciążenia równomiernego (5.7) równanie (4.1) ma postać

$$(5.14) \quad \varrho^2 F_{,11} + \varrho F_{,1} - [\mp i \sqrt{A} c + 1] F = \pm i \sqrt{A} \varrho \left(\frac{pq^2}{2} - \bar{C} \right).$$

Otrzymane równanie typu Eulera dla znaku dolnego posiada rozwiązanie

$$(5.15) \quad F_0 = A_{12} \varrho^{k_1} + A_{34} \varrho^{k_2}, \quad F_s = E_1 \varrho^3 + G_1 \varrho,$$

Tablica 4. Zestawienie porównawcze całek szczególnych funkcji przemieszczeń z rozwiązania ścisłego W_s i błonowego \bar{W}

z	$EAL W_s$	$EAL \bar{W}$
$c(1 - \varrho^m)$	$-\sqrt{A} \operatorname{Im} [ES_{\mu, \nu}(z) + GS_{\nu-1, \nu}(z)]$	$\frac{2-m}{c^2 m} \varrho^{1-2m} \left[\frac{p\varrho^2}{2} \frac{4-m}{m} + \bar{C} \right]$
$c(1 - \varrho^2)$	0	0
$c(1 - \varrho)$	$\frac{1}{c^2 \varrho} \left[\frac{p\varrho^2}{2} 3 + \bar{C} \right]$	$\frac{1}{c^2 \varrho} \left[\frac{p\varrho^2}{2} 3 + \bar{C} \right]$
$c(1 - \sqrt[3]{\varrho^2})$	$\frac{2}{c^2 \sqrt[3]{\varrho}} \left[\frac{p\varrho^2}{2} 5 + \bar{C} \right]$	$\frac{2}{c^2 \sqrt[3]{\varrho}} \left[\frac{p\varrho^2}{2} 5 + \bar{C} \right]$
$c(1 - \sqrt{\varrho})$	$\frac{3}{c^2} \left[\frac{p\varrho^2}{2} 7 \left(1 - \frac{15}{c^2 A} \frac{1}{\varrho} \right) + \bar{C} \left(1 - \frac{3}{c^2 A} \frac{1}{\varrho} \right) \right]$	$\frac{3}{c^2} \left[\frac{p\varrho^2}{2} 7 + \bar{C} \right]$
$c \ln \frac{1}{\varrho}$	$\frac{8\varrho}{c^2} \frac{p\varrho^2}{2} \frac{Ac^2}{Ac^2 + 64}$	$\frac{8\varrho}{c^2} \frac{p\varrho^2}{2}$

gdzie

$$(5.16) \quad E_1 = \frac{i\sqrt{A}}{8 - i\sqrt{Ac}} \frac{p}{2}, \quad G_1 = -\bar{C}/c, \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{1 + i\sqrt{Ac}} = \pm(\alpha + i\beta).$$

Układ funkcji ψ_n ma więc w tym przypadku postać

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \varrho^\alpha \cos(\beta \ln \varrho), & \psi_2 &= \varrho^\alpha \sin(\beta \ln \varrho), \\ \psi_3 &= \varrho^{-\alpha} \cos(-\beta \ln \varrho), & \psi_4 &= \varrho^{-\alpha} \sin(-\beta \ln \varrho). \end{aligned}$$

Φ_s oraz W_s otrzymane z (5.15)₂ zgodnie z (4.7) i (5.12) podano w tablicach 3 i 4.

6. O możliwości wykorzystania całki szczególnej z teorii błonowej

Ścisła całka szczególna równania (4.1) w przypadkach, gdy da się ją wyznaczyć analitycznie, posiada prostą postać tylko dla niektórych postaci funkcji południka $z(\varrho)$ oraz stosunkowo prostej funkcji obciążenia $p^3(\varrho)$. Ogólnie jednak należy się spodziewać skomplikowanych zespolonych wyrażeń analitycznych, w których wydzielenie części rzeczywistej i urojonej zgodnie z (4.7) może być praktycznie niewykonalne (np. dla powłok paraboloidalnych rozważanych w p. 5 przy nierównomiernym obciążeniu, odpowiednie wyrażenia analityczne można znaleźć wg [12]).

Z drugiej strony wiadomo, że dla powłok wyniosłych o «dagodnych» kształtach całkę szczególną na ogół można przejąć z rozwiązania błonowego [13]. Dotyczy to tym bardziej stanu obrotowej symetrii. Z rozwiązania błonowego otrzymujemy proste rzeczywiste wyrażenia analityczne wprost na funkcję naprężeń $\bar{\Phi}$, funkcję przemieszczeń \bar{W} oraz na siły wewnętrzne i przemieszczenia. Rozwiązania tego typu można znaleźć niemal w każdej monografii z teorii powłok [4 i 5]. Rozwiązania

blonowe dla niektórych powłok paraboloidalnych oraz powłoki logarytmicznej podano w tablicach 3 i 4.

Postawmy więc pytanie: czy dla powłok obrotowych o małej wyniosłości w przypadku obrotowej symetrii można całkę szczególną równania (4.1) zastąpić rozwiązaniem blonowym?

$$(6.1) \quad \Phi_s \stackrel{?}{=} \bar{\Phi}, \quad W_s \stackrel{?}{=} \bar{W}.$$

Rozwiązanie blonowe dla funkcji naprężeń $\bar{\Phi}$ można otrzymać pomijając w równaniach równowagi momenty i siły tnące, co w przypadku obrotowej symetrii sprowadza się do pominięcia pierwszego wyrazu w równaniu (4.10). Stąd

$$(6.2) \quad \bar{\Phi} = -\frac{1}{z_{,1}} \left(\int p^3 \varrho d\varrho - \bar{C} \right) = -\frac{1}{z_{,1}} (O_p(\varrho) + O_{\bar{C}}) = \bar{\Phi}_p + \bar{\Phi}_{\bar{C}}.$$

Przez podstawienie (6.2) do równania zgodności odkształceń (4.9) można wyznaczyć blonową funkcję przemieszczeń:

$$(6.3) \quad \bar{W} = -\frac{\varrho}{E\lambda L z_{,1}} \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \bar{\Phi})_{,1} \right]_{,1} = \bar{W}_p + \bar{W}_{\bar{C}}.$$

Ponieważ rozwiązanie blonowe (6.2) i (6.3) ma być *całką szczególną* zagadnienia zgięciowego, sprawdzmy więc w jakim stopniu tak zbudowane rozwiązanie spełnia równanie (4.1) lub, co jest równoznaczne, równania (4.9) i (4.10).

Równanie zgodności odkształceń (4.9) jest spełnione ściśle. Natomiast równanie (4.10) przy oznaczeniach (6.2) i (6.3) przekształćmy do postaci

$$(6.4) \quad -z_{,1} \bar{\Phi} = O_p(\varrho) \left\{ 1 - \frac{B\varrho}{O_p(\varrho)} \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \bar{W}_p)_{,1} \right]_{,1} \right\} + O_{\bar{C}} \left\{ 1 - \frac{B\varrho}{O_{\bar{C}}} \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \bar{W}_{\bar{C}})_{,1} \right]_{,1} \right\}.$$

Równania liniowej teorii powłok wyprowadzone są z dokładnością do wyrazów rzędu λ^2 w porównaniu z jednością. Przyjęcie euklidesowej geometrii powłoki podczas wyprowadzenia równania (3.1) powoduje wprowadzenie *dodatkowych* błędów rzędu niższego od λ^2 .

Można szacunkowo określić [20] że równania teorii powłok o małej wyniosłości wyprowadzone są z dokładnością do wyrazów rzędu λ^1 . Przyjęcie więc ściślej całki szczególnej równania (3.1) nie zwiększy dokładności wyników, podobnie jak nie zmniejszy dokładności wyników przyjęcie całki szczególnej z błędem rzędu λ^1 w porównaniu z jednością.

W przypadku obrotowej symetrii z porównania równań (6.2) i (6.4) wynika, że przejście całki szczególnej z rozwiązania blonowego jest możliwe, gdy są spełnione następujące zależności:

$$(6.5) \quad \frac{B\varrho}{O_p(\varrho)} \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \bar{W}_p)_{,1} \right]_{,1} \lesssim \lambda^1 \ll 1,$$

$$\frac{B\varrho}{O_{\bar{C}}} \left[\frac{1}{\varrho} (\varrho \bar{W}_{\bar{C}})_{,1} \right]_{,1} \lesssim \lambda^1 \ll 1,$$

gdzie symbol \sim oznacza «rzędu».

W przypadku gdy zależności (6.5) są spełnione w całym obszarze powłoki, przejście całki szczególnej z rozwiązania błonowego wprowadza błędy rzędu dokładności teorii, które nie mogą mieć wpływu na dokładność wyników. W tych przypadkach można całkę szczególną przejąć z rozwiązania błonowego.

Jeżeli zależności (6.5) na części lub w całym obszarze powłoki nie są spełnione, to przejście całki szczególnej z rozwiązania błonowego wprowadza dodatkowe błędy niższego rzędu od dokładności teorii. Takie postępowanie może (choć z uwagi na to, że szukamy tylko całki szczególnej zagadnienia nie koniecznie musi) doprowadzić do błędów w wynikach przewyższających dokładność teorii powłok o małej wyniosłości.

W sensie matematycznym warunki określone zależnościami (6.5) można traktować jako dostateczne [13 i 20]. Wiązą one obciążenie, kształt powłoki i jej wyniosłość. Ze względu na warunek (2.3) powłoka jest na ogół opisana następującą zależnością:

$$(6.6) \quad z = cf(\varrho),$$

gdzie $c < 1$ oznacza mały parametr, charakteryzujący wyniosłość powłoki oraz gdzie $|f(\varrho)| \sim 1$ i $f_{,1} \neq 0$ dla $\varrho > 0$. (Przypadki powłok $f_{,1} = 0$ nie są tu rozważane).

Dla konkretnie danej postaci funkcji $f(\varrho)$ oraz konkretnego obciążenia można określić najmniejszą wyniosłość c , dla której rozwiązanie błonowe może być przyjęte jako całka szczególna zagadnienia zgięciowego. Dla wyniosłości mniejszych należy brać ścisłą całkę szczególną równania (4.1).

Dla przykładu przeprowadźmy analizę dla klasy powłok paraboloidalnych (5.1) rozważanych ściśle w p. 5 przy obciążeniu $p^3(\varrho) = \text{const} = p$.

Z (6.5) otrzymamy

$$(6.7) \quad \frac{4}{Ac^2} \frac{(4-m)(2-m)^2(1-m)}{m^2 \varrho^{2m}} \lesssim \lambda^1$$

lub

$$(6.8) \quad \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 \frac{(4-m)(2-m)^2(1-m)}{3m^2 \varrho^{2m}} \lesssim \lambda^1,$$

natomiast (6.5)₂ daje

$$(6.9) \quad \frac{4}{Ac^2} \frac{(2-m)(1-m)}{\varrho^{2m}} \lesssim \lambda^1$$

lub

$$(6.10) \quad \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 \frac{(2-m)(1-m)}{3\varrho^{2m}} \lesssim \lambda^1.$$

Zależności (6.7)–(6.10) wskazują, że przypadki $m = 1$ (stożek) oraz $m = 2$ (kula) są przypadkami szczególnymi przy obciążeniu równomiernym oraz istnieniu siły skupionej w zworniku. Przypadek $m = 4$ można traktować jako szczególny dla powłoki zamkniętej w zworniku przy obciążeniu tylko równomiernie rozłożonym. Dla tych przypadków szczególnych powłok i obciążenia całka szczególna (4.1) może być przejęta z rozwiązania błonowego niezależnie od wyniosłości powłoki.

Należy tu zauważyć, że rozwiązane w pracach [14, 2 i 3] oraz monografii [5 i 4] przypadki obrotowej symetrii powłok paraboloidalnych o małej wyniosłości należą właśnie do tych przypadków szczególnych ze względu na możliwość przyjęcia błonowej całki szczególnej. Przyjęcie błonowej całki szczególnej w tych konkretnie rozwiązanych przykładach nie wprowadza dodatkowych błędów do obliczeń. Jednak poprawność takiego założenia dla stanu obrotowej symetrii dowolnych powłok obrotowych o małej wyniosłości przy dowolnym obciążeniu zależy od spełnienia podanych w niniejszej pracy warunków (6.5).

Podobnie można przeprowadzić rozważania dla powłoki logarytmicznej (5.13), dla której z (6.5)₁ otrzymamy

$$(6.11) \quad \frac{64}{c^2 A} \lesssim \lambda^1$$

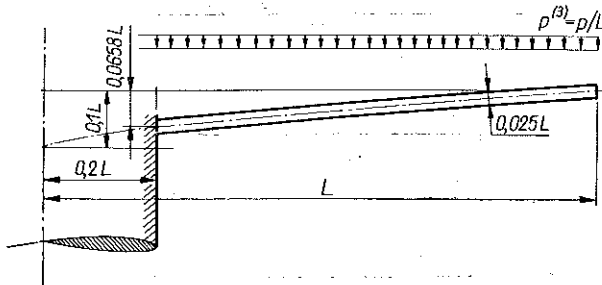
lub

$$(6.12) \quad \frac{16}{3} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^2 \lesssim \lambda^1,$$

natomiaś lewa strona (6.5)₂ daje zero. Oznacza to, że dla powłoki (5.13) w przypadku obciążenia tylko brzegowego rozwiązanie błonowe pokrywa się ze ścisłą całką szczególną równania (4.1) niezależnie od wyniosłości powłoki (por. p. 5 oraz tablicę 3).

7. Przykład 1

Wyznamy rozkład sił wewnętrznych w przekroju jednosłupowym (rys. 2) o powłoce typu paraboloidalnego (rys. 3) pod obciążeniem równomiernie rozło-



Rys. 3

żonym $p^{(3)} = \text{const} = p/L$ dla następujących danych liczbowych (oznaczenia jak w poprzednich rozważaniach):

$$(7.1) \quad m = \frac{2}{3}, \quad c = 0,1, \quad \lambda = 0,025, \quad \nu = \frac{1}{6} \text{ (żelbet)}, \quad \varrho_0 = 0,2.$$

Zgodnie z rozwiązaniem analitycznym (p. 5) obliczamy

$$(7.2) \quad \sqrt{A} = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\lambda} = 136,63, \quad l = 9,054, \quad \frac{2}{m} = 3.$$

Zmienna niezależna zmienia się więc w granicach $0,2 \leq \varrho \leq 1$, skąd z (5.3) mamy

$$(7.3) \quad 4,2025 \leq x \leq 9,0540; \quad x = 9,054 \sqrt[3]{\varrho}.$$

Funkcje ψ_n będące liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego mają tu postać

$$(7.4) \quad \psi_1 = \text{ber}_3 x, \quad \psi_2 = \text{bei}_3 x, \quad \psi_3 = \text{ker}_3 x, \quad \psi_4 = \text{kei}_3 x,$$

$$\psi_{n,1} = \frac{d}{dx} \psi_n(x) \frac{dx}{d\varrho} = \psi'_n x_{,1}.$$

Wyznaczenie wartości funkcji ψ_n i ψ'_n przeprowadzono korzystając z tablic [21] dla funkcji Thompsona rzędu zera $\text{ber } x, \text{ber}' x, \dots$, obliczając następnie funkcje rzędu 3 wg następujących wzorów transformacyjnych:

$$(7.5) \quad \text{ber}_3 x = -\frac{4\sqrt{2}}{x^2} (\text{ber}' x + \text{bei}' x) + \frac{2\sqrt{2}}{x} (\text{ber } x - \text{bei } x) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ber}' x - \text{bei}' x),$$

$$\text{bei}_3 x = \frac{4\sqrt{2}}{x^2} (\text{ber}' x - \text{bei}' x) + \frac{2\sqrt{2}}{x} (\text{ber } x + \text{bei } x) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ber}' x + \text{bei}' x),$$

$$\text{ber}'_3 x = \frac{\sqrt{2}}{x} (\text{ber}' x - \text{bei}' x) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ber } x + \text{bei } x) - \frac{3 \text{ber}_3 x}{x},$$

$$\text{bei}'_3 x = \frac{\sqrt{2}}{x} (\text{ber}' x + \text{bei}' x) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ber } x - \text{bei } x) - \frac{3 \text{bei}_3 x}{x}.$$

Wzory transformacyjne na $\text{ker}_3 x, \text{kei}_3 x, \text{ker}'_3 x$ i $\text{kei}'_3 x$ są identyczne po zamianie symbolu ber na ker .

W przypadku rozważanej powłoki jednosłupowej z warunku równowagi całości konstrukcji otrzymujemy

$$(7.6) \quad \bar{P} = PL = \pi (L^2 - L^2 \varrho_0^2) p^{(3)} = \pi p L (1 - \varrho_0^2).$$

Stąd wg (5.10)₃ i (4.3)

$$(7.7) \quad \bar{C} = \frac{P}{2} (1 - \varrho_0^2) + \frac{P\varrho_0^2}{2} = \frac{P}{2}.$$

Zależności (6.5)₁ lub dokładniej (6.7) mają postać

$$(7.8) \quad \frac{160}{9c^2 A} \frac{1}{\varrho^{4/3}} = \frac{0,094787}{\sqrt[3]{\varrho^4}} \approx \begin{cases} 0,81 & \text{dla } \varrho = \varrho_0 = 0,2, \\ 0,095 & \text{dla } \varrho = 1,0. \end{cases}$$

Wzór (6.5)₂ lub (6.8) daje

$$(7.9) \quad \frac{16}{9c^2A} \frac{1}{e^{4/3}} = \frac{0,009479}{\sqrt[3]{e^4}} \approx \begin{cases} 0,081 & \text{dla } e = e_0 = 0,2, \\ 0,0095 & \text{dla } e = 1,0. \end{cases}$$

Jest widoczne, że jeżeli w (7.9) otrzymano wielkości rzędu $\lambda^1 = 0,025$, to w (7.8) otrzymano wielkości rzędu $\lambda^0 = 1$, których nie wolno pomijać w porównaniu z jednością. Zgodnie z rozważaniami p. 6 nie należy tu przyjmować błonowej całki szczególnej.

Ścisła całka szczególna równania podstawowego, zgodnie z rozwiązaniami (5.11) i (5.12) oraz tablicami 2,3 i 4 dla danych (7.1) i (7.2), ma postać

$$(7.10) \quad \Phi_s = p \cdot 7,5 \sqrt[3]{e} \left[e^2 \left(1 - \frac{0,094787}{\sqrt[3]{e^4}} \right) - \left(1 - \frac{0,009479}{\sqrt[3]{e^4}} \right) \right],$$

$$E\lambda L W_s = p \cdot 100 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e}} (5e^2 + 1).$$

Warunki brzegowe zadania są następujące:

$$(7.11) \quad \begin{array}{ll} e = e_0 & \begin{array}{l} 1) v_{,1}^3 \equiv W = 0, \\ 2) \alpha_{(22)} = 0; \end{array} \\ e = 1,0 & \begin{array}{l} 3) n^{(11)} = 0, \\ 4) m^{(11)} = 0. \end{array} \end{array}$$

Powyższe warunki brzegowe prowadzą do układu czterech równań względem stałych A_n , po rozwiązaniu którego mamy

$$(7.12) \quad \begin{aligned} A_1 &= -39,658 \cdot 10^{-3} p, \\ A_2 &= -14,325 \cdot 10^{-3} p, \\ A_3 &= -35,645 p, \\ A_4 &= -68,877 p. \end{aligned}$$

Na rysunkach 4, 5 i 6 wykresy sił wewnętrznych obliczone wg wzorów z tablicy 1 przy stałych (7.12) podano *linią ciągłą*.

Gdyby postąpić zgodnie z założeniami prac [2 i 14] i przyjąć w tym przypadku błonową całkę szczególną wg (6.2) i (6.3) oraz tablicy 1,

$$(7.13) \quad \bar{\Phi} = p \cdot 7,5 \cdot \sqrt[3]{e} (e^2 - 1),$$

$$E\lambda L \bar{W} \equiv E\lambda L W_s = p \cdot 100 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e}} (5e^2 + 1);$$

dla warunków brzegowych (7.11) otrzymamy układ czterech równań względem stałych A_n , po rozwiązaniu którego mamy

$$(7.14) \quad \begin{aligned} A_1 &= -49,668 \cdot 10^{-3} p, \\ A_2 &= -4,524 \cdot 10^{-3} p, \\ A_3 &= -50,739 p, \\ A_4 &= 67,551 p. \end{aligned}$$

Na rysunkach 4, 5 i 6 wykresy sił wewnętrznych, obliczone wg wzorów z tablicy 1 przy przyjęciu $\Phi_s = \bar{\Phi}$ oraz $W_s = W$ oraz za pomocą stałych (7.14), podano *linią przerywaną*.

Wykresy wykazują rozbieżności w przebiegach sił wewnętrznych. W przypadku przyjęcia błonowej całki szczególnej różnice maksymalnych rzędnych sił wewnętrznych w stosunku do rozwiązania ścisłego równań powłok o małej wyniosłości są następujące:

$$\begin{aligned} \text{momenty promieniowe } m^{(11)} &\approx 9,25\%, \\ \text{momenty obwodowe } m^{(22)} &\approx 1\%, \text{ ale na krawędzi zewnętrznej } 23,2\%, \\ \text{siły promieniowe } n^{(11)} &\approx 6\%, \\ \text{siły obwodowe } n^{(22)} &\approx 14,1\%, \\ \text{siły tnące } q^{(1)} &\approx 40,7\%. \end{aligned}$$

Różnice te przekraczają dokładność teorii powłok o małej wyniosłości.

Te względnie nieduże rozbieżności wykresów sił wewnętrznych (wykres $q^{(1)}$ w wymiarowaniu nie odgrywa roli) wynikają stąd, że geometria rozważanej powłoki jest zbliżona do powłoki stożkowej o małej wyniosłości, dla której pokrywają się całka szczególna rozwiązania ścisłego równań oraz rozwiązanie błonowe. Dla powłok, których geometria bardziej różni się od geometrii stożka lub kuli przejście całki szczególnej z rozwiązania błonowego może spowodować znacznie większe błędy. Poniżej podajemy rozwiązanie takiego właśnie przypadku.

8. Przykład 2

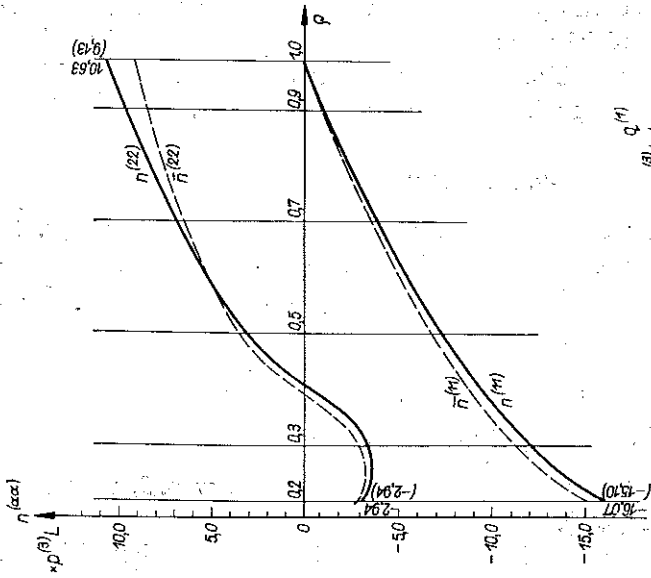
Wyznamy rozkład sił wewnętrznych w przekroju jednosłupowym (rys. 2) o powłoce typu logarytmicznego $z = c \cdot \ln 1/\rho$ (rys. 7) pod obciążeniem równomiernie rozłożonym $p^{(3)} = \text{const} = p/L$ dla następujących danych liczbowych [por. wzory (7.1) oraz (7.2)]:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} c &= 0,04765, & \lambda &= 0,025, & \nu &= \frac{1}{6}, \\ \rho_0 &= 0,2, & \sqrt{A} &= 136,63. \end{aligned}$$

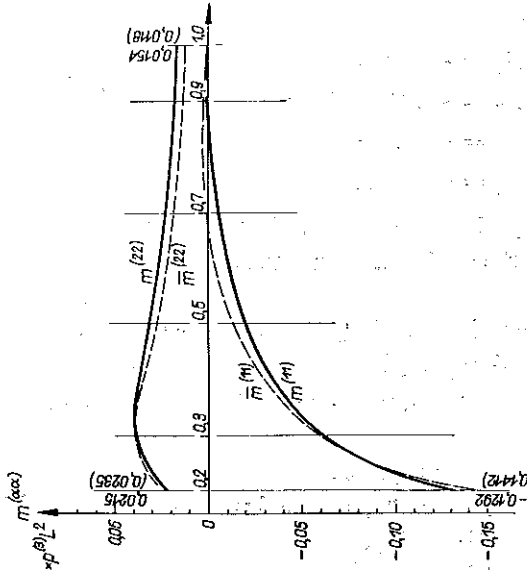
Analityczne rozwiązanie tego typu powłok podane zostało w p. 5, przy czym funkcje φ_n mają tu postać (5.17).

W przypadku rozważanej konstrukcji jednosłupowej mamy wg zależności (7.6) oraz (7.7)

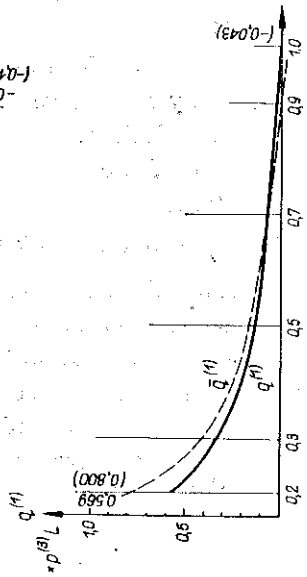
$$(8.2) \quad \bar{C} = \frac{P}{2}.$$



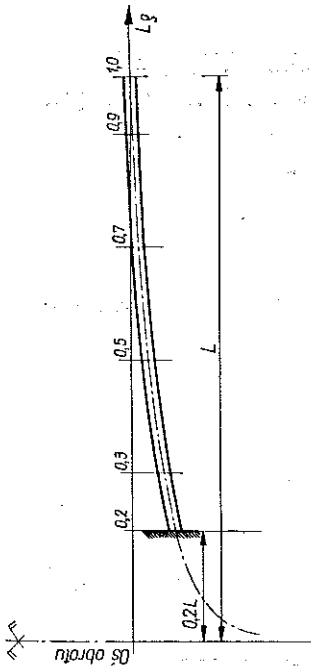
Rys. 4



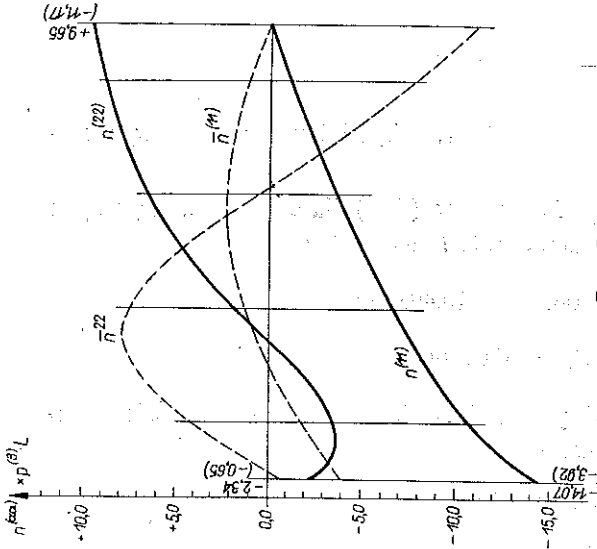
Rys. 5



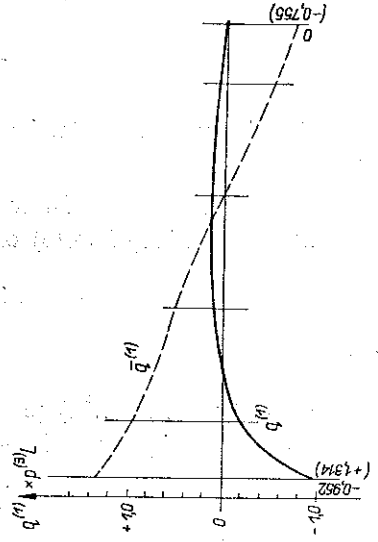
Rys. 6



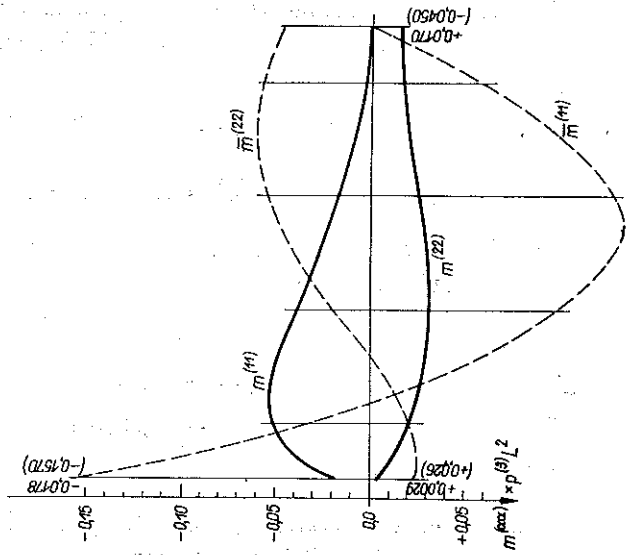
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 10



Rys. 9

Zależność (6.11) przyjmuje tu postać

$$(8.3) \quad \frac{64}{c^2 A} = 1,51 \gg \lambda^1.$$

Zgodnie więc z rozważaniami p. 6 należy do rozwiązań brać ścisłą całkę szczególną równań.

Ścisła całka szczególna równania podstawowego (5.14) dla danych numerycznych (8.1) zgodnie z (5.15) i (5.16) oraz tablic 5, 6, 7 ma postać

$$(8.4) \quad \Phi_s = p (4,18063 \varrho^3 - 10,49310 \varrho),$$

$$(8.5) \quad E\lambda L \cdot W_s = p \cdot 701,89 \varrho^3.$$

Warunki brzegowe (7.11) prowadzą do układu czterech równań względem stałych A_n , po rozwiązaniu którego mamy

$$(8.6) \quad \begin{aligned} A_1 &= 6,28563 p, \\ A_2 &= -2,74651 p, \\ A_3 &= 0,026798 p, \\ A_4 &= -0,000030 p. \end{aligned}$$

Na rysunkach 8, 9, 10 wykresy sił wewnętrznych obliczone wg wzorów z tablicy 1 przy stałych (8.6) podano *linią ciągłą*.

Jeżeli wbrew otrzymanemu w (8.3) niespełnieniu warunku (6.11) przyjąć do obliczeń błonową całkę szczególną wg (6.2), (6.3) oraz tablic 3 i 4, to dla danych numerycznych (8.1) otrzymamy

$$(8.7) \quad \bar{\Phi} = p (10,49310 \varrho^3 - 10,49310 \varrho),$$

$$(8.8) \quad E\lambda L \bar{W} = 1761,708 p \varrho^2.$$

Warunki brzegowe (7.11) prowadzą do układu czterech równań względem stałych A_n , po rozwiązaniu którego mamy

$$(8.9) \quad \begin{aligned} A_1 &= 0,017620 p, \\ A_2 &= -19,2420 p, \\ A_3 &= -0,017620 p, \\ A_4 &= 0,050000 p. \end{aligned}$$

Na rysunkach 8, 9, 10 wykresy sił wewnętrznych obliczone wg wzorów z tablicy 1 przy stałych (8.9) podano *linią przerywaną*.

Jak wynika z rysunków 8, 9, 10, błąd spowodowany przejściem całki szczególnej z rozwiązania błonowego w przypadku powłoki logarytmicznej jest tak duży, że otrzymane na tej podstawie wykresy sił wewnętrznych są zupełnie inne i nieporównywalne z wykresami otrzymanymi na podstawie ścisłego rozwiązania równań.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1960.
2. E. REISSNER, *On Some Problems in Shell Theory*, Structural Mechanics, Proceed. 1-st Symp. Naval Str. Mech., Stanford Univ., 1958, Pergamon Pr., 1960, 74-114.
3. E. REISSNER, *Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells*, J. Math. and Phys., **25**, 80-85, 279-300, 1946.
4. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.
5. W. FLÜGGE, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, 1960.
6. H. DUDDECK, *Biegetheorie der allgemeinen Rotationsschalen mit schwacher Veränderlichkeit der Schalenkrümmungen*, Ing.-Arch., **5**, 33 (1964).
7. H. DUDDECK, *Das Randstörungsproblem der technischen Biegetheorie dünner Schalen in drei Korrespondierenden Darstellungen*, Oster. Ing. Arch., **1**, 17 (1962).
8. E. REISSNER, *On the Determination of Stresses and Displacements for Unsymmetrical Deformations of Shallow Spherical Shells*, J. Math. and Phys., **38** (1959), 16-35.
9. G. A. ORAVAS, *Stress and Strain in Thin Shallow Spherical Calotte Shells*, Publ. Int. Assoc. Bridge and Struct. Engng., Zurich, **17**, 1957, 139-190.
10. Ю. А. Шевляков, *Об интегрировании уравнений равновесия пологих сферических оболочек*, Доповіди, № 3, 1955.
11. N. MC LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, 1964.
12. G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, 1944.
13. К. Ф. Черных, *Линейная теория оболочек*, т. II, Ленинград 1964.
14. LAO TSU TAO, PAN CHI-HAW, *Axisymmetrical Bending of a Shallow Paraboloidal Shells*, Acta Mech. Sinica, **3**, 6 (1963).
15. E. REISSNER, *On the Theory of Thin Elastic Shells*, Contributions to Appl. Mech. H. Reissner's Anniv. Vol., Michigan 1949.
16. C. N. DE SILVA, P. M. NAGHDI, *Asymptotic Solutions of a Class of Elastic Shells of Revolutions with Variable Thickness*, Quart. Appl. Math., **2**, 15 (1957), 169-182.
17. E. REISSNER, *Edge effect of symmetrical bending shallow shells of revolutions*, Commun. Pure and Appl. Math., **2**, 12 (1959), 385-398.
18. О. М. Гузь, *Осесимметрическая деформация пологих ортотропных оболочек вращения*, Доповіди АН УССР, № 8, 1962.
19. M. D. MC ILROY, *On the Solutions of the Differential Equations of Conical Shells*, Ph. D. Diss., Mass. Inst. of Techn., 1958.
20. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, Ленинград 1962.
21. Л. С. Носова, *Таблицы функций Томсона и их первых производных*, АН СССР, Вычислит. Центр., Москва, 1960.
22. В. Н. Гнатыкив, *Частные решения уравнений пологих сферических оболочек под действием некоторых частных нагрузок*, Изв. АН СССР, Отд. т. н., Мех. и Машин., **3**, 1960.
23. Г. А. Ван Фо Фц, *К задаче равновесия пологой сферической оболочки*, Доповіди АН УССР, **5**, 1960, 609-612.
24. W. PIETRASZKIEWICZ, *Niektóre zagadnienia statyki powłok obrotowych o malej wyniosłości*, Praca doktorska, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1966.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

На основе линейной теории пологих оболочек рассматриваются уравнения оболочек вращения. Детально рассматривается осесимметрическая деформация пологих оболочек вращения. Обсуждается задача заимствования частного решения из безмоментной теории. Получены условия применимости безмоментного решения, в качестве частного решения уравнений пологих оболочек. Указываются некоторые типы оболочек и нагрузок, для ко-

торых безмоментное решение совпадает с точным частным решением уравнений. Даются аналитические решения для класса параболоидальных оболочек и для логарифмической оболочки. Дается пример расчета на равномерно распределенную нагрузку одностолбного, грибовидного перекрытия, параболоидальная и логарифмическая оболочка которого имеет отрицательную гауссовую кривизну. Для численных данных примера, полученные в работе условия — не выполняются. Расхождения результатов точного расчета и решения при заимствовании частного решения из безмоментной теории, превышают точность уравнений пологих оболочек.

Summary

AXISYMMETRICAL BENDING OF SHALLOW SHELLS OF REVOLUTION

The object of the considerations are equations of shells of revolution on the grounds of the linear theory of shallow shells. The case of rotational symmetry is studied in detail. The possibility of using membrane solutions for particular solutions is analysed, some conditions for this being derived. Some cases of shells and loads for which a membrane solution coincides with the accurate particular integral of the equations are indicated. Accurate solutions are obtained for uniformly loaded paraboloidal and logarithmic shells. As an example the axially symmetric problem of a uniformly loaded single column shell roof of the paraboloidal and logarithmic type and negative Gauss curvature is solved. The above conditions for the numerical values are not fulfilled in this example. The differences between the accurate results and the solution obtained by using the membrane theory solution as a particular integral are greater than the accuracy of the linear theory of shallow shells.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1965 r.