

ANALIZA PEWNEGO MODELU CIAŁA SPRĘŻYSTO-LEPKOPLASTYCZNEGO

ANDRZEJ DRESCHER (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Szereg materiałów, jak np. grunty spoiste, wykazuje złożone własności odpowiadające ciałom sprężysto-lepkoplastycznym. Przez to pojęcie należy rozumieć materiał, który ma własności lepkie zarówno w stanie sprężystym jak i plastycznym. Włączenie cech lepkich do stanu sprężystego i plastycznego prowadzi do znacznych trudności w opisie matematycznym w porównaniu z ciałami lepkosprężystymi i plastycznymi. Ogólną dyskusję tego typu materiału podali P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [10] (por. również P. PERZYNA [12]).

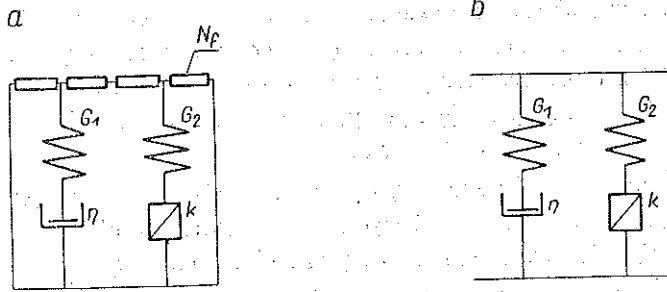
Podstawowym zagadnieniem przy opisie materiału sprężysto-lepkoplastycznego jest zdefiniowanie powierzchni plastyczności i kryteriów obciążania, odciążania i stanu neutralnego. Powierzchnia plastyczności dla ciała sprężysto-lepkoplastycznego rozdziela obszar lepkosprężysty od obszaru sprężysto-lepkoplastycznego, a jej położenie zależne jest od historii i drogi naprężenia. W pracy [10] P. M. Naghdi i S. A. Murch rozpatrzyli kryteria obciążania, przyjmując warunek plastyczności, będący uogólnieniem warunku dla ciał sprężysto-plastycznych o efekty czasowe (lepkie), oraz związki fizyczne dla stowarzyszonego prawa płynięcia. Praca Naghdiego i Murcha nie wyczerpuje wszystkich istotnych problemów i ze względu na ogólną postać rozważanych związków nie pozwala na analizę zagadnień praktycznych. Wychodząc z pojęcia materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia zarówno w obszarze sprężystym jak i plastycznym N. CRISTESCU [1] podał inny model materiału dla zagadnień jednowymiarowych związanych z propagacją fal w cienkich prętach.

Celem niniejszej pracy jest analiza zachowania się powierzchni plastyczności dla ciała sprężysto-lepkoplastycznego na podstawie metody stosowanej w reologii, polegającej na badaniu zachowania się złożonych modeli reologicznych. Przykładem modelowej metody do opisu ciał lepkoplastycznych jest ciało Bingham lub Schwedoffa (1). Modele te odpowiadają jednak zachowaniu się tylko pewnych materiałów i nie mieszczą się w klasie ciał sprężysto-lepkoplastycznych. Zagadnienie

(1) Przez pojęcie ciała Bingham rozumimy ciało o wzorze strukturalnym $\sigma \propto V/N$. Ciału Schwedoffa odpowiada $B - H$.

osiągnięcia przez modele reologiczne stanu krytycznego (2) rozpatrzyli M. REINER [13] i W. OLSZAK [11] wychodząc z kryteriów energetycznych. W pracach tych nie analizowano jednak zachowania się modeli po przekroczeniu stanu krytycznego.

Jako przykład złożonego modelu, wykazującego cechy lepkie zarówno w obszarze sprężystym jak i plastycznym, rozpatrzono w pracy model pokazany na rys. 1, a zaproponowany do opisu gruntów przez I. KISIĘLA [3]. W [4, 5, 6, 7 i 8] I. KISIĘL rozwiązał szereg zagadnień brzegowych takich jak zagadnienie jednoosiowe, działanie siły skupionej i in. Model ten w odniesieniu do gruntów ujmuje dwie ich podstawowe cechy: zjawisko konsolidacji wywołanej filtracją (naczynie N_f) oraz sprężysto-lepkoplastyczne odkształcenia szkieletu (elementy G_1 , G_2 , η i k). W niniejszej pracy ograniczono się do analizy uproszczonego modelu bez filtracji (rys. 1b). Umieszczenie wewnątrz modelu elementu plastycznego k połączonego szeregowo z elementem sprężystym G_2 powoduje, że uplastycznienie całego modelu zależy od zachowania się części lepkosprężystej, a tym samym zależy od historii naprężenia.



Rys. 1

Modelowy opis ciała sprężysto-lepkoplastycznego może również odnosić się do opisu ciał ni-jednorodnych, dwufazowych, w których faza sprężysto-plastyczna jest rozproszona w fazie lepkosprężystej.

W punkcie 2 rozpatrzono związki fizyczne modelu opisujące zmiany postaciowe i objętościowe dla złożonego stanu naprężenia. Wykazano, że z uwagi na szeregowe połączenie elementu plastycznego wewnątrz modelu, dla którego związek fizyczny w postaci stowarzyszonego prawa płynięcia jest nieliniowy względem operatora różniczkowania względem czasu, nie udaje się skonstruować związku fizycznego opisującego stan po uplastycznieniu, wyrażonego przez wielkości zewnętrzne. Tym samym analiza warunków obciążania, odciążania i stanu neutralnego dla stanu złożonego pozostaje sprawą otwartą. Analizę tych warunków można jednak przeprowadzić dla zagadnienia jednowymiarowego — czystego ścinania, kiedy ogólna postać związków fizycznych może być pominięta. W p. 3' zbadano zachowanie się modelu w stanie czystego ścinania dla trzech programów obciążania przy danej historii prędkości odkształcenia, naprężenia (pełzanie) i prędkości naprężenia. Zachowanie

(2) Stan krytyczny według M. REINERA odpowiada uplastycznieniu. W. OLSZAK rozszerzył to pojęcie na dowolne nagłe zmiany własności ciał.

się modelu jest zależne od prędkości odkształcenia, prędkości naprężenia i ich historii, a jego cechą charakterystyczną jest występowanie po odciążeniu resztkowego stanu samonaprężeń, który w zależności od historii naprężenia powoduje odkształcanie się przeciwne lub zgodne z działaniem pierwotnie przyłożonego naprężenia. Na podstawie wyników p. 3 rozpatrzono w p. 4 zachowanie się powierzchni plastyczności rozumianej jako uogólnienie granicy plastyczności w zależności od historii naprężenia.

Prosta geometryczna interpretacja zachowania się modelu przed i po uplastycznieniu dla stanów złożonych jest możliwa w przypadku analizy powierzchni plastyczności w przestrzeni odkształceń.

Uzyskane rezultaty wskazują z jednej strony na ograniczoną stosowalność złożonych modeli reologicznych zawierających cechy plastyczne przy analizie stanów złożonych, z drugiej, na podstawie analizy jednowymiarowej i analizy w przestrzeni odkształceń, dają jakościowe wnioski o zachowaniu się powierzchni plastyczności dla ciał sprężysto-lepkoplastycznych.

2. Związki fizyczne

Dla analizy modelu przy różnych historiach obciążania i zdefiniowania kryteriów obciążania i odciążania w złożonym stanie naprężenia konieczna jest znajomość związku fizycznego modelu. Zakładając wzajemną niezależność zmian postaciowych i objętościowych rozpatrzmy osobno związki fizyczne dla obu części odkształceń. Zakładamy przy tym, że cechy plastyczne reprezentowane przez element k odnoszą się jedynie do zmian postaciowych, tzn. element k jest nieściśliwy, a ponadto odpowiada ciału sztywno idealnie plastycznemu. Stąd związki objętościowe odpowiadać mogą tylko ciału sprężystemu lub lepkosprężystemu.

2.1. Związki dla dewiatorów. Ze względu na istnienie w modelu elementu plastycznego szeregowo połączony z elementem sprężystym G_2 (rys. 1b) do momentu aż stan naprężenia w ciele Saint-Venanta nie osiągnie granicznej wartości powodującej uplastycznienie (warunku plastyczności), model odpowiada lepkosprężystemu ciału standardowemu, dla którego związek fizyczny ma postać

$$(2.1) \quad \frac{\eta}{G_1} \dot{s}_{ij} + s_{ij} = 2G_2 e_{ij} + 2\eta \frac{(G_1 + G_2)}{G_1} \dot{e}_{ij},$$

gdzie s_{ij} i \dot{s}_{ij} oznaczają dewiator naprężenia i prędkości naprężenia, e_{ij} i \dot{e}_{ij} dewiator odkształcenia i prędkości odkształcenia, G_1 i G_2 moduły Kirchhoffa, η lepkość postaciową. Związek ten jest identyczny ze związkiem podanym w pracy [3].

Istnienie początkowego stanu lepkosprężystego powoduje, że uplastycznienie elementu k jest określone przez całą historię naprężenia. Analiza warunków obciążania wymaga znajomości prawa fizycznego modelu obejmującego element plastyczny. W tym celu trzeba dla elementu k zdefiniować warunek plastyczności oraz związek fizyczny opisujący jego odkształcenia plastyczne. Warunek plastyczności zależy od materiału, jakiemu model ma odpowiadać, przy czym dla metali nie zależy on od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia w przeciwieństwie do grun-

tów i betonu. Związek fizyczny przy opisie metali jest zwykle przyjmowany w postaci stowarzyszonego z warunkiem plastyczności prawa płynięcia. Dla gruntów, mimo szeregu różnych koncepcji opartych na wynikach doświadczalnych, zagadnienie to jest do tej pory otwarte [2]. Poniżej ograniczymy się do warunku plastyczności Hubera-Misesa i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia. To ostatnie ma postać

$$(2.2) \quad \dot{e}_{ij}^k = \lambda s_{ij}'',$$

gdzie λ jest dodatnio określonym współczynnikiem mającym wymiar: prędkości. Mnożąc (2.2) stronami przez siebie i korzystając z zależności, że dla warunku Hubera-Misesa

$$(2.3) \quad \frac{1}{2} s_{ij}'' s_{ij}'' = k^2$$

i że ponadto

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^k \dot{e}_{ij}^k = I_2^k,$$

wyrażenie (2.2) doprowadzimy do postaci

$$(2.5) \quad \dot{e}_{ij}^k = \frac{\sqrt{I_2^k}}{k} s_{ij}'',$$

gdzie k jest granicą plastyczności na czyste ścinanie oraz I_2^k drugim niezmiennikiem dewiatora prędkości odkształceń plastycznych. Związki dla pozostałych elementów modelu mają postać

$$(2.6) \quad s_{ij}' = 2G_1 e_{ij}', \quad s_{ij}'' = 2G_2 e_{ij}'', \quad s_{ij}' = 2\eta \dot{e}_{ij}''$$

oraz

$$(2.7) \quad e_{ij}' + e_{ij}''' = e_{ij}'' + e_{ij}^k = e_{ij}.$$

Związkiem fizycznym całego modelu będzie równanie wyprowadzone z równań (2.5), (2.6) i (2.7), w którym naprężenia, odkształcenia i ich pochodne czasowe będą wyrażone przez wielkości zewnętrzne modelu. Z uwagi na nieliniowość względem operatora różniczkowego czasu, występującego w związku (2.5), odnoszącego się do elementu połączonego szeregowo, nie udaje się skonstruować takiego związku. Przykładem jest wyrażenie

$$(2.8) \quad k\eta \ddot{s}_{ij} + (\eta G_2 \sqrt{I_2^k} + k G_1) \dot{s}_{ij} + 2G_1 G_2 \sqrt{I_2^k} s_{ij} = \\ = 2k\eta (G_1 + G_2) \ddot{e}_{ij} + 2G_1 G_2 (2\eta \sqrt{I_2^k} + k) \dot{e}_{ij},$$

w którym wszystkie wielkości oprócz I_2^k są wielkościami zewnętrznymi. W przypadku równoległego połączenia elementu plastycznego, jak np. w ciele Binghama, problem ten znika. Trudności w skonstruowaniu związku fizycznego uniemożliwiają bezpośrednio zdefiniowanie kryteriów obciążania, odciążania i stanu neutralnego dla stanu złożonego. Analiza tego zagadnienia może być jednakże przeprowadzona dla stanu jednowymiarowego, co przedstawiono w p. 4.

Należy ponadto zaznaczyć, że sposób opisu zachowania się modelu po przekroczeniu nośności elementu k zaproponowany w pracy [3] odpowiada przyjęciu, że element plastyczny spełnia rolę «przełącznika» z jednego modelu lepkosprężystego na inny model, też lepkosprężysty.

2.2. Związki dla tensorów kulistych. W pracy [3] I. KISIEL przyjął, że zmiany objętościowe modelu, pomijając filtrację, opisane są prawem HOOKE'A. Założył przy tym, że współczynnik POISSONA jest stały, co powoduje zależność odkształcenia objętościowego od czasu. Założenie to, jak również przypadek kiedy stały jest moduł odkształcenia objętościowego lub też przyjęte jest lepkosprężyste prawo zmian objętościowych, nie wpływa na postać związków dewiatorowych i na trudności w ich zbudowaniu po uplastycznieniu modelu. Stąd też nie rozpatrzono szczegółowo możliwych wariantów związków dla tensorów kulistych ani prawa wiążącego tensory naprężenia i odkształcenia.

3. Analiza modelu dla przypadku jednowymiarowego

Z przedstawionych w p. 2 rozważań wynika, że zachowanie się badanego modelu w złożonym stanie, a tym samym określenie kryteriów obciążania, odciażania i stanu neutralnego, wobec trudności w zbudowaniu tensorowych związków fizycznych, pozostaje zagadnieniem dyskusyjnym. Interesujące jakościowo dane o własnościach modelu może jednakże dać rozpatrzenie zagadnienia jednowymiarowego na przykładzie czystego ścinania, dla którego nieistotna jest tensorowa postać związków. Dla czystego ścinania, przyjmując idealną plastyczność elementu k , związki fizyczne mają postać

$$(3.1) \quad \frac{\eta}{G_1} \dot{\sigma} + \sigma = 2G_2 \varepsilon + 2\eta \frac{(G_1 + G_2)}{G_1} \dot{\varepsilon},$$

jeżeli naprężenie w elemencie Saint-Venanta $\sigma'' < k$,

$$(3.2) \quad \frac{\eta}{G_1} \dot{\sigma} + \sigma = 2\eta \dot{\varepsilon} + k,$$

jeżeli $\sigma'' = k$, gdzie σ i $\dot{\sigma}$ oznaczają naprężenie i prędkość naprężeń ścinających, ε i $\dot{\varepsilon}$ odkształcenie i prędkość odkształceń postaciowych, k granicę plastyczności na ścinanie. Poniżej rozpatrzmy zachowanie się modelu przy następujących trzech programach: dana jest historia: 1) prędkości odkształcenia, 2) naprężenia (pełzanie) oraz 3) prędkości naprężenia. Analiza uzyskanych wyników z punktu widzenia zachowania się powierzchni plastyczności zostanie przedstawiona w p. 4.

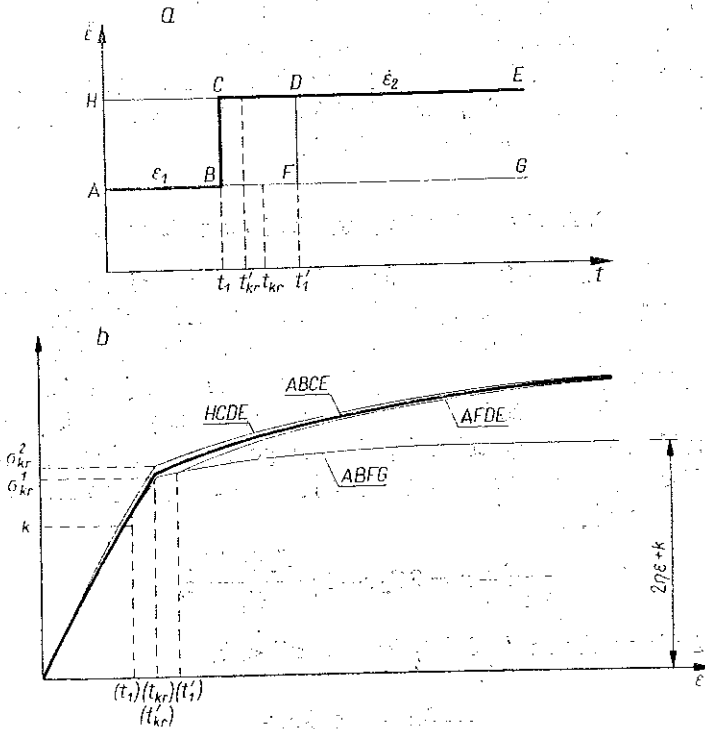
3.2. Zachowanie się modelu przy programie w prędkościach odkształcenia. Zanalizujemy zachowanie się modelu przy programie prędkości odkształcenia określonym związkami (rys. 2a):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} t \leq 0, \quad \dot{\varepsilon}(t) = 0, \quad \varepsilon(t) = 0; \\ 0 < t \leq t_1, \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_1 = \text{const}, \quad \varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_1 t; \\ t_1 < t, \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_2 = \text{const}, \quad \varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_1 t_1 + \dot{\varepsilon}_2 (t - t_1). \end{aligned}$$

Dla $0 < t \leq t_{kr} < t_1$, gdzie t_{kr} oznacza czas, w którym w elemencie Saint-Venanta naprężenie $\sigma'' = k$, ze wzoru (3.1) znajdziemy

$$(3.4) \quad \sigma(t) = 2\eta\dot{\varepsilon}_1 \left(1 - e^{-\frac{G_1 t}{\eta}}\right) + 2G_2\dot{\varepsilon}_1 t,$$

$$(3.5) \quad t_{kr} = \frac{k}{2G_2\dot{\varepsilon}_1}.$$



Rys. 2

Naprężenie odpowiadające uplastycznieniu modelu wynosi

$$(3.6) \quad \sigma_{kr} = 2\eta\dot{\varepsilon}_1 \left(1 - e^{-\frac{G_1 k}{2\eta G_2 \dot{\varepsilon}_1}}\right) + k,$$

dla

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 = 0, & \quad \sigma_{kr} = k, \\ \dot{\varepsilon}_1 = \infty, & \quad \sigma_{kr} = k \frac{(G_1 + G_2)}{G_2}. \end{aligned}$$

Dla $t_{kr} < t \leq t_1$ ze wzoru (3.2) otrzymamy

$$(3.8) \quad \sigma(t) = 2\eta\dot{\varepsilon}_1 \left(1 - e^{-\frac{G_1 t}{\eta}}\right) + k,$$

a dla $t > t_1$

$$(3.9) \quad \sigma(t) = 2\eta\dot{\varepsilon}_2 + k - 2\eta [\dot{\varepsilon}_1 e^{-\frac{G_1}{\eta}t} + (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1) e^{-\frac{G_1}{\eta}(t-t_1)}].$$

Jeżeli $t_1 < t_{kr}$, to dla $t_1 < t \leq t'_{kr}$, gdzie t'_{kr} odpowiada tak samo jak powyżej założeniu $\sigma'' = k$,

$$(3.10) \quad \sigma(t) = 2\eta\dot{\varepsilon}_2 - 2\eta [\dot{\varepsilon}_1 e^{-\frac{G_1}{\eta}t} + (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1) e^{-\frac{G_1}{\eta}(t-t_1)}] + 2G_2 [\dot{\varepsilon}_1 t_1 + \dot{\varepsilon}_2 (t - t_1)],$$

$$(3.11) \quad t'_{kr} = \frac{(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1)}{\dot{\varepsilon}_2} t_1 + \frac{k}{2G_2 \dot{\varepsilon}_2}.$$

Dla $t > t'_{kr}$ ze wzoru (3.2) otrzymujemy wyrażenie identyczne z wyrażeniem (3.9). Na rysunku 2b przedstawiono rozwiązanie równań (3.4), (3.8), (3.9) i (3.10) przy przyjęciu $\dot{\varepsilon}_1 = 1,0$; $\dot{\varepsilon}_2 = 2,0$; $G_1 = 0,5$; $G_2 = 1,0$; $\eta = 0,5$; $k = 2,0$, przy czym naprężenia przedstawiono jako funkcję odkształcenia korzystając z (3.3).

3.3. Zachowanie się modelu przy stałym naprężeniu (pełzanie). Rozważmy pełzanie modelu pod obciążeniem σ_0 do chwili $t = t_1$, a następnie jego zachowanie się po odciążeniu do zera (rys. 3a):

$$(3.12) \quad \begin{aligned} t \leq 0, & \quad \sigma(t) = 0; \\ 0 < t \leq t_1, & \quad \sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}; \\ t_1 < t, & \quad \sigma(t) = 0. \end{aligned}$$

W chwili $t = 0^+$ na skutek przyłożenia naprężenia σ_0 powstaną w modelu odkształcenia natychmiastowe

$$(3.13) \quad \varepsilon_{(0^+)} = \frac{\sigma_0}{2(G_1 + G_2)},$$

jeżeli naprężenie w elemencie Saint-Venanta $\sigma'' < k$, co zachodzi, gdy

$$(3.14) \quad \sigma_0 < k \frac{(G_1 + G_2)}{G_2}.$$

Jeżeli nierówność (3.14) nie jest spełniona, to

$$(3.15) \quad \varepsilon_{(0^+)} = \frac{\sigma_0 - k}{2G_1}.$$

Dla $0 < t \leq t_1$ i dla (3.14) ze wzoru (3.1) znajdziemy

$$(3.16) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{2G_2} \left[1 - \frac{G_1}{G_1 + G_2} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} t} \right],$$

przy czym dodatkowo musi być spełniony warunek dla $0 < t \leq t_1$

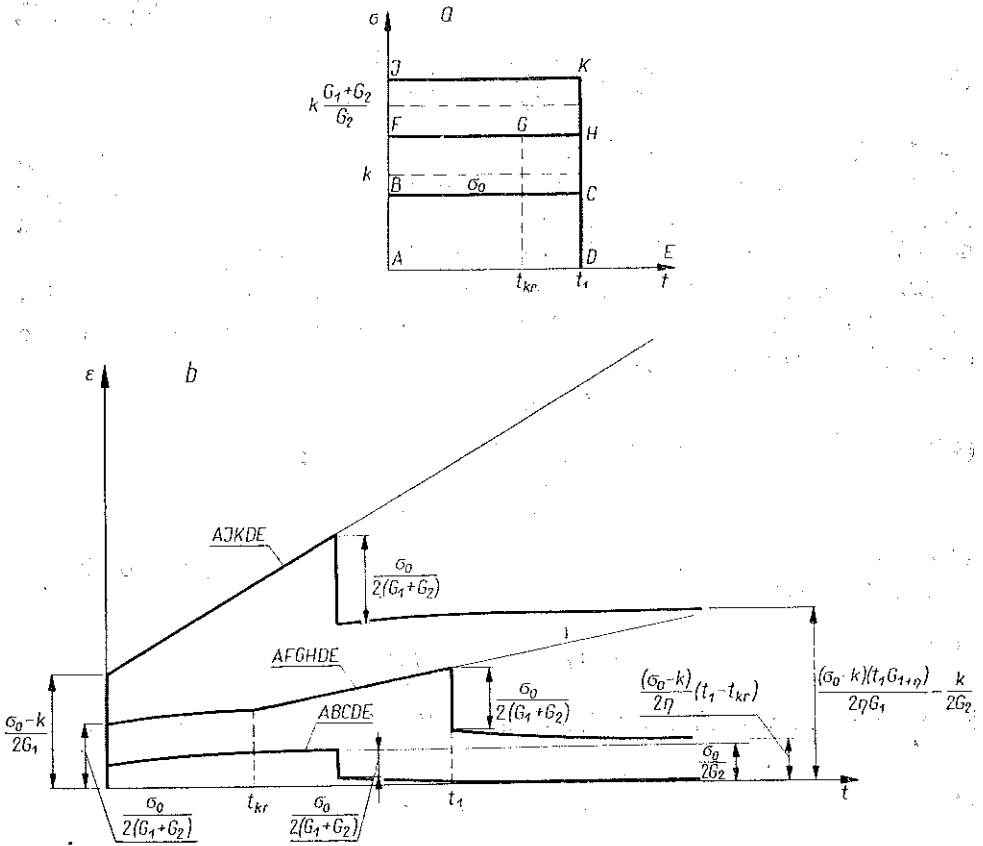
$$(3.17) \quad \sigma'' < k,$$

co przy przyjęciu $t_1 = \infty$ zachodzi, gdy

$$(3.18) \quad \sigma_0 < k.$$

Jeżeli $k < \sigma_0 < k \frac{(G_1 + G_2)}{G_2}$, związek (3.16) jest spełniony do chwili $t = t_{kr}$:

$$(3.19) \quad t_{kr} = \frac{\eta (G_1 + G_2)}{G_1 G_2} \ln \frac{\sigma_0 G_1}{(\sigma_0 - k) (G_1 + G_2)};$$



Rys. 3

dla $t_{kr} < t \leq t_1$ ze wzoru (3.2) otrzymamy

$$(3.20) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0 - k}{2\eta} (t - t_{kr}) + \frac{k}{2G_2}.$$

W przypadku gdy $\sigma_0 > k \frac{(G_1 + G_2)}{G_2}$ dla $0 < t \leq t_1$ mamy

$$(3.21) \quad \varepsilon(t) = \frac{(\sigma_0 - k)}{2\eta} t + \frac{\sigma_0 - k}{2G_1}.$$

Po odciążeniu dla przypadku $\sigma_0 < k$ ze wzoru (3.1), gdy $t > t_1$

$$(3.22) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0 G_1}{2G_2(G_1+G_2)} \left[e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)}(t-t_1)} - e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)}t} \right].$$

Dla przypadku $k < \sigma_0 < k \frac{(G_1+G_2)}{G_2}$ odciążenie może mieć miejsce dla $t_1 \leq t_{kr}$ lub $t_1 > t_{kr}$. W pierwszym przypadku odkształcenia dla $t > t_1$ określone są za pomocą wzoru (3.22). Rozpatrując drugi przypadek zauważmy wpieryw, że w trakcie działania obciążenia przez czas od chwili $t = 0$ do $t = t_{kr}$ zmniejszają się naprężenia w elemencie Maxwella, a przez to maleje odkształcenie sprężyny G_1 , przy równoczesnym wzroście naprężeń i odkształceń w elemencie G_2 . Dla $t > t_{kr}$ w elemencie Saint-Venanta pojawiają się odkształcenia plastyczne zależne od rozwoju odkształceń lepkich elementu η . Odkształcenia G_1 i G_2 w tym stanie pozostają stałe. W momencie odciążenia $t = t_1 > t_{kr}$ element plastyczny przestaje odkształcać się i natychmiastowe odkształcenia odwracalne wynoszą

$$(3.23) \quad \varepsilon_r(t_1) = \frac{\sigma_0}{2(G_1+G_2)}.$$

Odształcenia te są mniejsze od odkształceń w elemencie G_2 w chwili $t = t_{kr}$, $\varepsilon_{kr} = k/2G_2$; dzięki temu w modelu pozostanie resztkowy stan samonaprężeń, który ze względu na istnienie elementu lepkiego η będzie malał ze wzrostem czasu t . Pod działaniem stanu samonaprężeń z warunku, że w chwili $t = t_{kr}$ odkształcenia G_1 są mniejsze niż G_2 , wynika, że model będzie odkształcał się odwrotnie do działania σ_0 w myśl

$$(3.24) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0 - k}{2\eta} (t_1 - t_{kr}) + \left[\frac{k}{2G_2} - \frac{\sigma_0}{2(G_1+G_2)} \right] e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)}(t-t_1)}.$$

Odciążenie w chwili $t = t_1$ dla $\sigma_0 > k \frac{(G_1+G_2)}{G_2}$ spowoduje również powstanie odkształceń natychmiastowych określonych przez (3.23) i resztkowego stanu samonaprężeń. Stan samonaprężeń malejący z czasem wywoła odkształcenie się modelu zgodne z odkształceniami wywołanymi przez σ_0 , tzn. przeciwne do odkształceń natychmiastowych odwracalnych, gdyż dla tego przypadku odkształcenia elementu G_1 są większe niż elementu G_2 i stałe dla $0 < t \leq t_1$:

$$(3.25) \quad \varepsilon(t) = \frac{G_2(\sigma_0 - k)(t_1 G_1 + \eta) - k G_1 \eta}{2\eta G_1 G_2} \left[\frac{\sigma_0}{2(G_1+G_2)} - \frac{k}{2G_2} \right] e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)}(t-t_1)}.$$

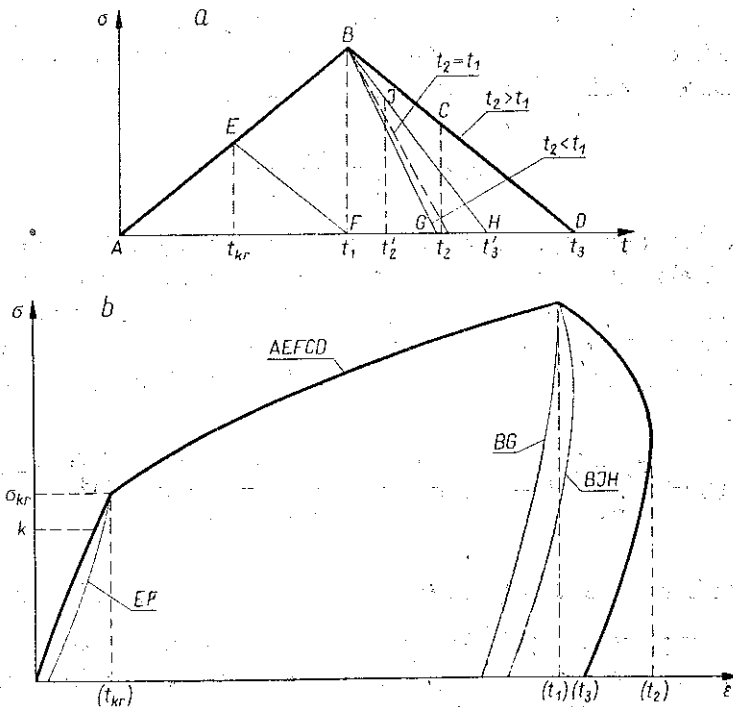
Przypadek pełzania modelu przy programie (3.3) dla $\sigma_0 < k$ i $k < \sigma_0 < k \frac{(G_1+G_2)}{G_2}$ rozpatrzył I. KISIEL w pracy [9].

Rozwiązanie (3.16), (3.20), (3.21), (3.22), (3.24) i (3.25) przedstawia rys. 3b dla takich samych stałych materiałowych jak w p. 3.2.

3.4. Zachowanie się modelu przy danych prędkościach naprężenia. Jako trzeci rodzaj programu rozpatrzmy zachowanie się modelu przy danej historii prędkości naprężenia, przedstawionej na rys. 4a i odpowiadającej obciążeniu i odciążeniu z różnymi stałymi prędkościami, opisanej przez związki:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} t \leq 0, \quad \dot{\sigma}(t) &= 0, \quad \sigma(t) = 0; \\ 0 < t \leq t_1, \quad \dot{\sigma}(t) &= \dot{\sigma}_1 = \text{const}, \quad \sigma(t) = \dot{\sigma}_1 t; \\ t_1 < t \leq t_3, \quad \dot{\sigma}(t) &= -\dot{\sigma}_2 = \text{const}, \quad \sigma(t) = \dot{\sigma}_1 t_1 - \dot{\sigma}_2 (t - t_1); \\ t_3 < t, \quad \dot{\sigma}(t) &= 0, \quad \sigma(t) = 0; \end{aligned}$$

$$t_3 = \frac{(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2)}{\dot{\sigma}_2} t_1.$$



Rys. 4

Dla $0 < t \leq t_1$ ze wzoru (3.1) otrzymamy

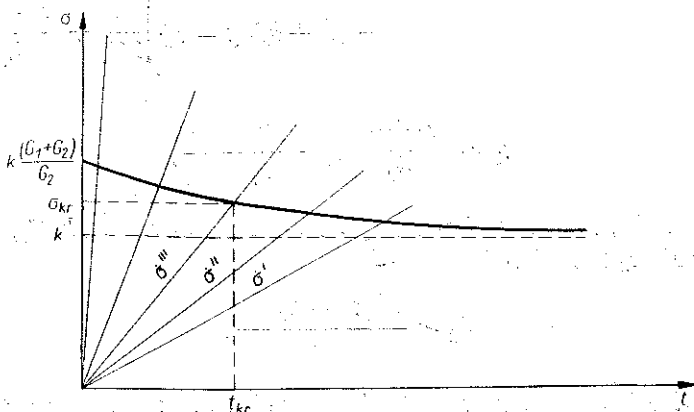
$$(3.27) \quad \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}_1}{2G_2} t - \frac{\dot{\sigma}_1 \eta}{2G_2^2} \left[1 - e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} t} \right],$$

przy czym $t_1 < t_{kr}$, gdzie t_{kr} oznacza czas, w którym $\sigma'' = k$. Z wyrażenia (3.27) mamy

$$(3.28) \quad \frac{k}{\dot{\sigma}_1} = t_{kr} - \frac{\eta}{G_2} \left[1 - e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} t_{kr}} \right].$$

Równanie (3.28) nie daje się rozwinąć względem t_{kr} . Traktując $\dot{\sigma}_1$ jako funkcję t_{kr} przy przyjęciu wartości na stałe materiałowe jak w p. 3.2 otrzymamy zależność pokazaną na rys. 5. Z rysunku wynika, że napężenie $\sigma_{kr} = \dot{\sigma}_1 t_{kr}$ odpowiada uplastycznieniu całego modelu zależne jest od $\dot{\sigma}_1$, przy czym

$$(3.29) \quad t_{kr} < \infty, \quad \dot{\sigma}_1 > 0, \quad \bar{\sigma}_{kr} > k.$$



Rys. 5

Dla $\dot{\sigma}_1 = \infty$ otrzymujemy takie same wyrażenia jak dla pełzania:

$$(3.30) \quad \sigma_{kr} = k \frac{(G_1 + G_2)}{G_2}, \quad t_{kr} = 0.$$

Jeżeli $t_1 < t_{kr}$, to dla $t_1 < t \leq t_3$ ze wzoru (3.1) znajdziemy

$$(3.31) \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{2G_2} [(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) t_1 - \dot{\sigma}_2 t] + \frac{\eta}{2G_2^2} \left[\dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_1 e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} t} - (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} (t - t_1)} \right].$$

Ze względu na to, że w chwili $t = t_3$ odkształcenia $\varepsilon_{(t_3)}$ są mniejsze od $\varepsilon_{(t_1)}$ [co łatwo wykazać z (3.27) i (3.31)], w modelu pozostanie reszkowy stan samonapreżeń, pod działaniem którego model będzie w dalszym ciągu odkształcał się dążąc dla $t \rightarrow \infty$ do powrotu do stanu nieodkształconego, co opisuje zależność następująca:

$$(3.32) \quad \varepsilon(t) = \frac{\eta}{2G_2^2} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} t} \left[\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} \left(\frac{\dot{\sigma}_1}{\dot{\sigma}_2} + 1\right) t_1} - (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} t_1} \right].$$

W przypadku gdy $t_1 > t_{kr}$ dla $t_{kr} < t \leq t_1$ ze wzoru (3.2) mamy

$$(3.33) \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_1}{2G_2} - \frac{k}{2\eta} \right) (t - t_{kr}) + \frac{\dot{\sigma}_1}{4\eta} (t^2 - t_{kr}^2) + \frac{k}{2G_2}.$$

Rozpatrując odciążanie z prędkością $\dot{\sigma}(t) = -\dot{\sigma}_2$ dla $t > t_1$ może się zdarzyć przypadek, że odkształcenia przebiegają w dalszym ciągu zgodnie z działaniem $\dot{\sigma}_1$. Będzie to zachodzić, jeżeli dla $t > t_1$ $d\varepsilon(t)/dt > 0$ zgodnie z równaniem

$$(3.34) \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_1}{2G_1} - \frac{k}{2\eta} \right) (t - t_{kr}) + \frac{\dot{\sigma}_1}{4\eta} (t^2 - t_{kr}^2) + \\ - (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) (t - t_1) \left[\frac{1}{2G_1} + \frac{(t - t_1)}{4\eta} \right] + \frac{k}{2G_2},$$

do czasu

$$(3.35) \quad t_2 = \frac{(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2)}{\dot{\sigma}_2} t_1 - \frac{k}{\dot{\sigma}_2} - \frac{\eta}{G_1},$$

przy czym musi ponadto zachodzić $t_2 > t_1$. Przy danych $\dot{\sigma}_1, k, G_1, G_2, \eta, t_1 = \text{const}$ będzie $t_2 > t_1$, jeżeli

$$(3.36) \quad \dot{\sigma}_2 < \frac{(\dot{\sigma}_1 t_1 - k) G_1}{\eta}.$$

Jeżeli z (3.35) wynika, że $t_2 \leq t_1$ (jak również dla $t > t_2 > t_1$), to przestaje obowiązywać wzór (3.34) i odkształcenia dla $t_3 \geq t > t_2$ wynoszą

$$(3.37) \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_1}{2G_1} - \frac{k}{2\eta} \right) (t_2 - t_{kr}) + \frac{\dot{\sigma}_1}{4\eta} (t_2^2 - t_{kr}^2) - \frac{(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2)}{2G_1} (t_2 - t_1) - \\ - \frac{(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2)}{4\eta} (t_2 - t_1)^2 + \frac{(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) G_2 t_1 + \dot{\sigma}_2 \eta}{2G_2^2} - \frac{\dot{\sigma}_2}{2G_2} t + \\ + \frac{G_2 k - (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) G_2 t_1 - \dot{\sigma}_2 (\eta - G_2 t_2)}{2G_2^2} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} (t - t_1)}.$$

Jeżeli z (3.35) wynika, że $t_2 \leq t_1$, to do wyrażenia (3.37) należy podstawić $t_2 = t_1$.

Dla czasu $t > t_3$ rozpatrzmy osobno przypadek, gdy $t_2 \leq t_1$ i $t_2 > t_1$. Dla $t_2 \leq t_1$ odkształcenie modelu w chwili t_3 określone są przez (3.37). Odkształcenia odwracalne zachodzą w przedziale od chwili $t = t_1$ do $t = t_3$ w elementach G_1, G_2, η i określone są przez różnicę $\varepsilon(t_3) - \varepsilon(t_1) = \varepsilon_r$. Jeżeli różnica ta nie równa się odkształceniom dla $t = t_{kr}$, równym $\varepsilon_{kr} = k/2G_2$, to w modelu w chwili $t = t_3$ pozostanie stan samonaprzeżeń. Gdy $\varepsilon_{kr} - \varepsilon_r > 0$, stan samonaprzeżeń spowoduje dla $t > t_3$ odwrotne odkształcenie się w stosunku do odkształceń wywołanych przez $\dot{\sigma}_1$. Dla $\varepsilon_{kr} - \varepsilon_r < 0$ odkształcenia będą zgodne z działaniem $\dot{\sigma}_1$. Ze wzorów (3.33) i (3.37) znajdziemy

$$(3.38) \quad \varepsilon_{kr} - \varepsilon_r = \frac{\dot{\sigma}_2 \eta}{2G_2^2} - \frac{(\dot{\sigma}_1 t_1 - k) G_2 + \dot{\sigma}_2 \eta}{2G_2^2} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1 + G_2)} \frac{\dot{\sigma}_1 t_1}{\dot{\sigma}_2}}.$$

Ze względu na uwikłaną postać (3.38) niemożliwe jest ogólne ustalenie, dla jakich wartości $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2$ i t_1 różnica $\varepsilon_{kr} - \varepsilon_r$ jest większa, mniejsza lub też równa zero. Odpowiedź na to pytanie można uzyskać jedynie dla konkretnych wartości stałych

materiałowych i programu prędkości naprężenia. Odształcenia dla $t > t_3$ są następujące:

$$(3.39) \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_1}{2G_1} - \frac{k}{2\eta} \right) (t_1 - t_{kr}) + \frac{\dot{\sigma}_1}{4\eta} (t_1^2 - t_{kr}^2) + \\ + \frac{1}{2G_2^2} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)}(t-t_1)} \left[\dot{\sigma}_2 \eta e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)} \frac{\dot{\sigma}_1}{\dot{\sigma}_2} t_1} - (\dot{\sigma}_1 t_1 - k) G_2 - \dot{\sigma}_2 \eta \right].$$

W drugim przypadku, gdy $t_2 > t_1$, w chwili $t = t_3$ pozostanie również stan samonaprężenia, jeżeli $\varepsilon_{kr} - \varepsilon_r \neq 0$:

$$(3.40) \quad \varepsilon_{kr} - \varepsilon_r = \frac{\dot{\sigma}_2 \eta}{2G_2^2} \left[1 - \frac{(G_1 + G_2)}{G_1} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)} \left(\frac{k}{\dot{\sigma}_2} + \frac{\eta}{G_1} \right)} \right]$$

i przy ustalonych wartościach G_1 , G_2 , η , k mamy $\varepsilon_{kr} - \varepsilon_r > 0$, jeżeli

$$(3.41) \quad \dot{\sigma}_2 < \frac{kG_1 G_2}{\eta(G_1+G_2) \ln \frac{G_1+G_2}{G_1} - \eta G_2}.$$

Mianownik (3.41) musi być większy od zera. Proces odształcenia dla $t > t_3$ określa wzór

$$(3.42) \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_1}{2G_1} - \frac{k}{2\eta} \right) (t_2 - t_{kr}) + \frac{\dot{\sigma}_1}{4\eta} (t_2^2 - t_{kr}^2) - \\ - (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) (t_2 - t_1) \left[\frac{1}{2G_1} - \frac{(t_2 - t_1)}{4\eta} \right] + \\ + \frac{\dot{\sigma}_2 \eta}{2G_2^2} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)} \left(t - \frac{\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_2} t_1 \right)} \left[1 - \frac{(G_1 + G_2)}{G_1} e^{-\frac{G_1 G_2}{\eta(G_1+G_2)} \left(\frac{k}{\dot{\sigma}_2} + \frac{\eta}{G_1} \right)} \right].$$

Wykresy funkcji (3.27), (3.31), (3.33), (3.34) i (3.37) dla różnych programów prędkości naprężenia (rys. 4a) i stałych materiałowych jak w p. 3.2. przedstawiono na rys. 4b, przy czym korzystając z (3.26) wykreślono zależności $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

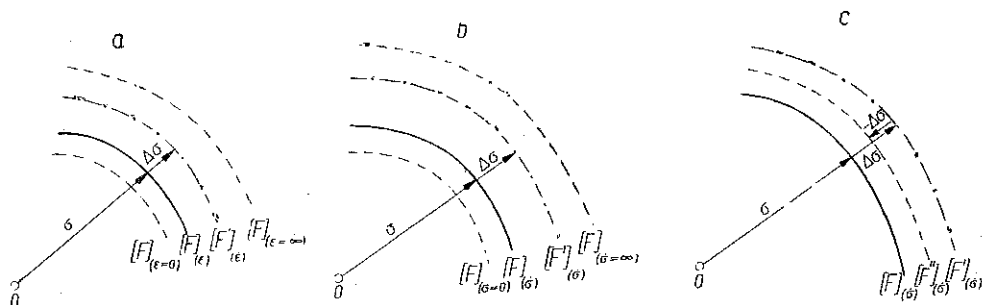
4. Powierzchnia plastyczności

Na podstawie rozpatrzonych w p. 3 programów kinematycznego i statycznego obciążenia można określić dla stanu jednowymiarowego zależność charakterystyki $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ modelu i momentu jego uplastycznienia (granicy plastyczności) od historii obciążenia. Analiza ta, wobec trudności w zbudowaniu związków fizycznych dla stanu złożonego, a tym samym trudności w zdefiniowaniu kryteriów obciążania, odciażania i stanu neutralnego, pozwala ocenić jakościowo własności modelu reprezentującego ciało sprężysto-lepkoplastyczne. Analiza przypadku jednowymiarowego modelu może również znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu praktycznych zagadnień np. w prętach cienkich [1].

Załóżmy, że występująca w zagadnieniu jednowymiarowym wartość naprężenia odpowiadającego uplastycznieniu całego modelu (granica plastyczności) σ_{kr} może być traktowana jako punkt leżący na powierzchni plastyczności, oddzielającej stan

lepkosprężysty od sprężysto-lepkoplastycznego, odpowiadającej stanowi złożonemu. Zachowanie się granicy plastyczności modelu w zależności od historii obciążenia rozumiemy jako zachowanie się powierzchni plastyczności, abstrahując od jej kształtu i charakteru wzmocnienia.

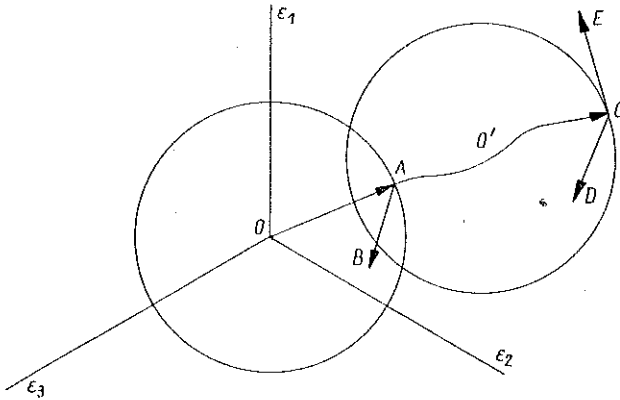
Rozpatrzmy zachowanie się modelu przy programie w prędkościach odkształcenia. Z (3.4) i (3.10) i rys. 2b wynika, że charakterystyka $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ w obszarze lepkosprężystym jest zależna od $\dot{\varepsilon}$ i wraz ze wzrostem $\dot{\varepsilon}$ wzrasta naprężenie odpowiadające danemu odkształceniu. Wzrasta także granica plastyczności modelu zawsze większa od k dla $\dot{\varepsilon} > 0$, po przekroczeniu której model zachowuje się jak ciało ze wzmocnieniem zależnym również od $\dot{\varepsilon}$. Powierzchnia plastyczności modelu dla $\dot{\varepsilon} > 0$, $[F]_{\dot{\varepsilon}=0}$ (rys. 6a) jest tym dalej położona od powierzchni odpowiadającej $\dot{\varepsilon} = 0$, $[F]_{\dot{\varepsilon}=0}$, im wyższa jest prędkość odkształcenia, przy czym wzrost ten jest ograniczony dla $\dot{\varepsilon} = \infty$ przez (3.7) dla stanu jednowymiarowego. Przy nagłej zmianie prędkości odkształcenia zarówno przed jak i po uplastycznieniu charakterystyka $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ jest zawarta pomiędzy krzywymi odpowiadającymi stałym prędkościom $\dot{\varepsilon}$. W trakcie dalszego odkształcania powierzchnia przesuwa się do położenia $[F']_{\dot{\varepsilon}=0}$ określonego przez dane odkształcenie $\varepsilon = \varepsilon_1$, ($t = t_1$). Jeżeli w chwili $t = t_1$ model poddany będzie przeciwnej co do znaku prędkości, powierzchnia $[F']_{\dot{\varepsilon}=0}$ pozostanie w miejscu i w modelu pojawią się tylko odkształcenia lepkosprężyste (odciążanie).



Rys. 6

Dla programu w prędkościach naprężenia ze związków (3.27) i (3.33) widać, że podobnie jak dla programów $\dot{\varepsilon}$ charakterystyka modelu jest zależna od $\dot{\sigma}$. Oznaczmy początkową powierzchnię dla $\dot{\sigma} = 0$ przez $[F]_{\dot{\sigma}=0}$. Przy obciążaniu z prędkością $\dot{\sigma} > 0$ początkowa powierzchnia $[F]_{\dot{\sigma}=0}$ leży tym dalej od $[F]_{\dot{\sigma}=0}$, im większa jest prędkość naprężenia i jej położenie dla $\dot{\sigma} = \infty$ jest określone dla stanu jednowymiarowego przez wyrażenie (3.30) analogiczne do (3.7) (rys. 6b). Po przekroczeniu $[F]_{\dot{\sigma}=0}$ model wykazuje wzmocnienie, stąd powierzchnia przesuwa się i dla $\varepsilon = \varepsilon_1$ ($t = t_1$) położenie jej określa $[F']_{\dot{\sigma}=0}$. Poddając model w chwili $t = t_1$ prędkości $-\dot{\sigma}_2$ jak wynika z (3.34) i (3.35), w zależności od wartości tej prędkości otrzymamy odciążenie lub też w dalszym ciągu powstawać będą odkształcenia plastyczne (obciążanie) do chwili $t = t_2$, ($\varepsilon = \varepsilon_2$). Odpowiada to w pierwszym przypadku pozostaniu powierzchni $[F']_{\dot{\sigma}=0}$ w miejscu, w drugim cofaniu się jej do położenia $[F'']_{\dot{\sigma}=0}$ (rys. 6c).

Z powyższych uwag wynika, że położenie powierzchni plastyczności jest zależne od historii obciążenia; początkowe jej położenie jest zawarte pomiędzy $[F]_{\dot{\epsilon}=0}$, $[F]_{\dot{\epsilon}=0}$, a $[F]_{\dot{\epsilon}=\infty}$, $[F]_{\dot{\epsilon}=\infty}$. Dla nieskończenie szybkich dróg obciążenia model traci cechy lepkie i zachowuje się jak ciało sprężysto-plastyczne.



Rys. 7

Przedstawiona dyskusja dotyczyła powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń. Zbadanie jej zachowania się dla stanów złożonych jest, jak zaznaczono, sprawą otwartą. Istnieje jednak możliwość prześledzenia własności modelu dla złożonych stanów przed i po uplastycznieniu, jeżeli rozważania przeprowadzi się w przestrzeni odkształceń. W rozpatrywanym modelu uplastycznienie elementu k zachodzi, gdy w elemencie G_2 stan naprężenia osiągnie warunek plastyczności. Dla ciała sprężysto-plastycznego złożonego z elementów G_2 i k warunek plastyczności Hubera-Misèsa można wyrazić korzystając z prawa Hooke'a przez odkształcenia w następującej postaci (por. [13]):

$$(4.1) \quad e''_{ij} e''_{ij} = \frac{k^2}{2G_2^2},$$

gdzie e''_{ij} jest dewiatorem tensora odkształceń elementu G_2 . Ze względu na równoległe połączenie elementów G_2 i k z G_1 i η odkształcenia w obu gałęziach modelu są identyczne, a tym samym wyrażenie (4.1) określa początkową powierzchnię plastyczności całego modelu w przestrzeni odkształceń. Na płaszczyźnie oktaedrycznej przyjmuje ona postać okręgu (rys. 7). Wewnątrz powierzchni panuje stan lepko-sprężysty. Jeżeli odkształcenia modelu przekroczą wartość określoną przez (4.1), powstaną w nim odkształcenia plastyczne i powierzchnia plastyczności przesuśnie się o (AC) . W tym stanie jest ona określona przez związek

$$(4.2) \quad (e_{ij} - e_{ij}^k) (e_{ij} - e_{ij}^k) = \frac{k^2}{2G_2^2},$$

gdzie e_{ij} jest dewiatorem odkształcenia całego modelu, e_{ij}^k dewiatorem odkształceń plastycznych. Na płaszczyźnie oktaedrycznej odpowiada to sztywnemu przesunię-

ciu, które jest zależne jedynie od drogi odkształcenia. Z (4.2) wynika, że geometria powierzchni nie ulega zmianie (rys. 7). Zmniejszenie odkształceń powoduje zablokowanie elementu k i stan lepkosprężysty (AB , CD). Droga w przestrzeni odkształceń styczna do powierzchni (CE) określa stan neutralny spełniający związek (4.1).

Analiza powierzchni plastyczności w przestrzeni odkształceń pozwala łatwiej zrozumieć złożone zachowanie modelu w przestrzeni naprężeń. Np. czas t_{kr} występujący w rozwiązaniach przytoczonych w p. 3 oznacza czas, w którym stan odkształcenia odpowiada punktowi leżącemu na powierzchni plastyczności.

Z analizy programów pełzania można stwierdzić, że model dla małych wartości naprężeń zachowuje się jak ciało, a dla większych jak lepka ciecz. Cechą charakterystyczną modelu jest pojawienie się po odciążeniu do zera reszkowego stanu samonaprężeń, który w zależności od wielkości przyłożonego uprzednio naprężenia powoduje odkształcanie się przeciwne lub zgodne do działania tego obciążenia (rys. 3b).

Literatura cytowana w tekście

1. N. CRISTESCU, *Loading/unloading criteria for rate sensitive materials*, Arch. Mech. Stos., 2, 17 (1965).
2. A. DRESCHER, A. BUJAK, *Kinematyka ośrodka sypkiego na przykładzie wciskania płaskiego stempla*, Rozpr. Inż., 2, 4 (1966).
3. I. KISIEL, *Definicja modelu M/V gruntu*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 8 (1962).
4. I. KISIEL, *Doświadczalne sprawdzenie modelu M/V gruntu metodą prostego ściskania*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 8 (1962).
5. I. KISIEL, *Działanie obciążenia na grunt o modelu M/V. Zadanie jednoosiowe*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 9 (1963).
6. I. KISIEL, *Możliwości stosowania modelu M/V w praktyce inżynierskiej*, II Sesja Nauk. Wyzd. Bud. Łąd. Pol. Wrocł., 1 1963.
7. I. KISIEL, *Działanie obciążenia na grunt o modelu M/V. Siła skupiona na półpłaszczyźnie*, Arch. Inżyn. Ładow., 2, 10 (1964).
8. I. KISIEL, *Działanie obciążenia na grunt o modelu M/V. Kilka praktycznie ważnych przypadków zadania płaskiego*, Arch. Hydrot., 4, 1964.
9. I. KISIEL, *Zastosowanie modelu reologicznego ciała M/V w mechanice gruntów*, Ossolineum 1967.
10. P. M. NAGHDI, S. A. MURCH, *On the mechanical behaviour of viscoelastic/plastic solids*, J. Appl. Mech., 30 (1963).
11. W. OLSZAK, *Les critères de transition en élasto-visco-plasticité. I. Les phénomènes physiques. II. Considérations théoriques*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1, 14 (1966).
12. P. PERZYNA, *Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności*, Mech. Teoret. Stos., 2, 1 (1963).
13. M. REINER, *Plastic yielding in anelasticity*, J. Mech. Phys. Sol., 4, 8 (1960).

Резюме

АНАЛИЗ НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

В настоящей работе рассматривается поведение реологической модели, предложенной Киселем [3], соответствующей упруго-вязко-пластическому телу. Анализируются физические зависимости доказывая, что расположение пластического элемента внутри вязкоупругой модели, встречается с большими затруднениями при их формулировке и анализ условий

нагрузки, разгрузки и нейтрального состояния. Анализ поведения на поверхности пластичности и условий нагрузки, проводится для одномерного состояния — чистого среза, на основе программы при заданной: скорости деформации, напряжению (ползучесть) и скорости напряжения. Констатируется, что поверхность пластичности, понимаемая как обобщение предела пластичности, зависит от истории напряжения и деформации. Характеристической чертой модели является появление в ней, после совершенной разгрузки, остаточного состояния само-напряжений, вызывающих дальнейшие деформации модели, согласно или противоположно деформациям, вызванным первой нагрузкой. Доказывается также, существование геометрической прямой интерпретации поведения модели, для сложных состояний в случае анализа поверхности пластичности в пространстве деформаций.

S u m m a r y

ANALYSIS OF AN ELASTIC-VISCOPLASTIC BODY

This is a discussion of the behaviour of the rheologic model proposed by I. Kisiel [3], for an elastic-viscoplastic body. The physical equations are analysed showing that the location of the plastic element inside the viscoelastic model leads to considerable difficulties of their formulation and also to difficulties of analysis of the loading and unloading conditions and the neutral state. The analysis of the behaviour of the yield surface and the loading conditions is done for a one-dimensional state, that of pure shear, by means of programs for a given strain rate, stress (creep) and stress rate. It is found that the yield surface, considered to be a generalization of the yield limit depends on the history of stress and strain. A particular feature of the model is the occurrence, after complete unloading, of a residual state of self-stress producing further strain of the model in agreement with or opposite to the strain produced by initial stress.

It is also shown that there is a simple geometrical interpretation of the behaviour of the model before and after it becomes plastic for composite states if the yield surface is analysed in the strain space.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 kwietnia 1966 r.