

STATECZNOŚĆ NIELINIOWYCH DRGAŃ WAHADŁA SPRĘŻYSTEGO Z RUCHOMYM PUNKTEM ZAWIESZENIA

CZESŁAW BRONIAREK, BOGUSŁAW RADZISZEWSKI (WARSZAWA)

W zagadnieniach dynamicznych, spotykanych przy badaniu maszyn i mechanizmów, w wielu przypadkach nie można pominąć odkształcalności niektórych elementów zwanych sprężystymi ogniwami łańcucha dynamicznego. Decyzja o odnośnie przyjęcia lub pominięcia odkształcalności ogniwa zależy od struktury mechanizmu oraz od wskaźników jakościowych ruchu realizowanego przez mechanizm. Zwykle te ostatnie nie są nam znane we wstępnej fazie badania dynamicznego, lecz stanowią właśnie przedmiot badań. Ponieważ w praktyce mamy do czynienia z ogniwami odkształcalnymi, to uwzględnienie sprężystości ogniwi pozwala na ogólniejsze postawienie problemu. W toku dyskusji wyników mogą wypłynąć wnioski, które ogniwa przy odpowiednich warunkach ruchu można traktować jako nieodkształcalne.

Ciężar zawieszony na linie mechanizmu podnoszenia dźwignicy może być przedstawiony w postaci mechanizmu ze sprężystym ogniwem, które stanowi odkształcalna lina. Jeśli punkt zawieszenia liny jest ruchomy, to ciężar wraz z liną można traktować jako wahadło ze sprężystym ciągnem, wzbudzane parametrycznie.

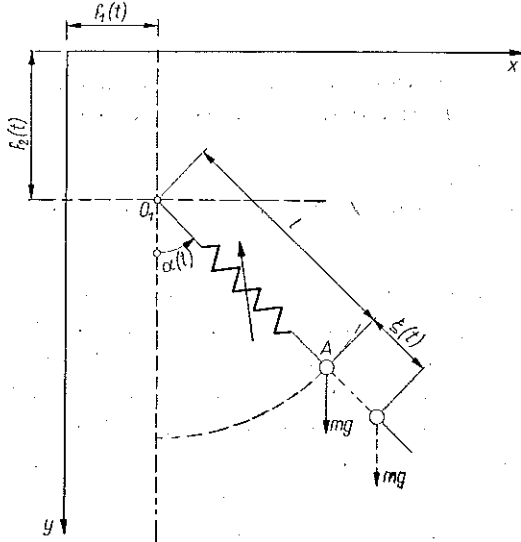
Lufa działa artyleryjskiego, znajdującego się na ruchomym pojeździe mechanicznym lub wyrzutnia raket stacyjna, lub przewoźna może być zmodelowana za pomocą wahadła odwróconego ze sprężystym ramieniem, wzbudzanego parametrycznie ruchem punktu podparcia.

Obydwa przykłady o dużym znaczeniu praktycznym świadczą o celowości badania stateczności drgań wzbudzanych parametrycznie. Posłużymy się tu metodami asymptotycznymi, znanymi z prac BOGOLUBOWA i MITROPOLSKIEGO [1] oraz MAŁKINA [2].

1. Założenia

Rozpatrujemy wahadło $O_1 A$ przedstawione na rys. 1. W położeniu pionowym gdy masa m znajduje się poniżej punktu zawieszenia, w stanie równowagi statycznej, długość cięgna $O_1 A$ wynosiła l . Podczas drgań wahadła długość cięgna ulegnie zmianie, przy czym zmiany długości określa funkcja $\xi(t)$, którą przyjmiemy za jedną ze współrzędnych uogólnionych. W pierwszym etapie wyprowadzenia równań drgań ruch masy m zapisujemy w układzie inercyjnym ortokartezjańskim x, y . Oś x tego układu skierowana jest poziomo i zwrócona w prawo, a oś y skierowana pionowo i zwrócona w dół. W toku wyprowadzenia zamieniamy zmienne wprowadzając

współrzędne uogólnione, z których jedną jest wyżej omówiona zmiana długości cięga ξ , a drugą kąt $\alpha = \alpha(t)$ wychylenia wahadła względem osi y . Ciężno wykonane jest z materiału nieliniowo sprężystego nie wykazującego własności reologicz-



Rys. 1. Schemat kinetyczny wahadła sprężystego

nych. Charakterystyka sprężysta określająca napięcie cięga jako funkcja wydłużenia ξ ma następującą postać:

$$(1.1) \quad f(\xi) = k\xi + F(\xi),$$

gdzie $F(\xi)$ jest częścią nieliniową funkcji $f(\xi)$, taką że

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{F(\xi)}{|\xi|} = 0.$$

Punkt O_1 obrotu wahadła porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x = f_1(t)$ i wzdłuż osi y zgodnie z równaniem $y = f_2(t)$. Funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są dowolnymi funkcjami czasu, przy czym $f_1 \in C^2$ i $f_2 \in C^2$. Wahadło realizuje ruch drgający w płaszczyźnie rysunku. W układzie występuje tłumienie zależne od prędkości kątowej da/dt i od prędkości odkształceń cięga $d\xi/dt$. Odpowiednie charakterystyki są nieliniowymi funkcjami w postaci

$$(1.2) \quad R_1(\dot{\xi}) = \bar{\kappa}_1 \dot{\xi} + \tilde{R}_1(\dot{\xi}), \quad R_2(\dot{\alpha}) = \bar{\chi}_1 \dot{\alpha} + \tilde{R}_2(\dot{\alpha}),$$

gdzie $\bar{\kappa}_1$ i $\bar{\chi}_1$ są stałe ≥ 0 , $\tilde{R}_1(\dot{\xi})$ i $\tilde{R}_2(\dot{\alpha})$ są nieliniowymi funkcjami prędkości, tj.

$$\lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}_i(q)}{|q|} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Na masę m działają siły zewnętrzne $Q_1 = Q_1(t)$ w kierunku współrzędnej uogólnionej $\xi(t)$ oraz $Q_2 = Q_2(t)$ zgodnie ze współrzędną uogólnioną $\alpha(t)$.

Stateczność drgań wahadła zbadamy w ruchu ustalonym.

2. Równania różniczkowe ruchu

W chwilowym położeniu wahadła (rys. 1) środek masy ma w układzie inercyjnym współrzędne

$$(2.1) \quad x = (l + \xi) \sin \alpha + f_1(t), \quad y = (l + \xi) \cos \alpha + f_2(t).$$

Energia kinetyczna T ruchu masy i energia potencjalna V układu są równe

$$(2.2) \quad T = \frac{1}{2} m \{ \dot{\xi}^2 + [\dot{\alpha}(l + \xi)]^2 + \dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) + 2\dot{\xi}(t) [\dot{f}_1(t) \sin \alpha + \dot{f}_2(t) \cos \alpha] + 2\dot{\alpha}(l + \xi) [\dot{f}_1(t) \cos \alpha - \dot{f}_2(t) \sin \alpha] \},$$

$$V = \frac{k\xi^2}{2} + mg [(l + \xi) (1 - \cos \alpha) + f_2(t)] + \int_0^\xi F(\xi) d\xi.$$

Wyrażenie (2.2) podstawiamy do równań Lagrange'a II rodzaju:

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j - R_j, \quad j = 1, 2,$$

gdzie Q_j oznacza wymuszenia zewnętrzne, zależne od czasu, a R_j siły dysypacyjne w kierunku współrzędnych uogólnionych. Otrzymujemy następujący układ równań:

$$(2.4) \quad \ddot{\xi} + \frac{\bar{\kappa}_1}{m} \dot{\xi} + \frac{\bar{k}}{m} \xi = \frac{Q_1(t)}{m} - \ddot{f}_1(t) \sin \alpha - \ddot{f}_2(t) \cos \alpha + (l + \xi) \dot{\alpha}^2 - g(1 - \cos \alpha) - \bar{R}_1(\dot{\xi}) - F(\xi),$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\bar{\chi}}{ml^2} \dot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = \frac{Q_2(t)}{m} - \frac{(l + \xi)}{l^2} (2\dot{\alpha}\dot{\xi} + \ddot{f}_1(t) \cos \alpha - \ddot{f}_2(t) \sin \alpha) - \frac{(2l + \xi)}{l^2} \xi \ddot{\alpha} - \frac{g}{l^2} \xi \sin \alpha - \bar{R}_2(\dot{\alpha}).$$

Układ (2.4) przy $f_1 = f_2 = Q_1 = Q_2 = \bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$ przyjmuje postać

$$m\ddot{\xi} - (l + \xi) \dot{\alpha}^2 + k\xi + mg(1 - \cos \alpha) = 0, \\ (l + \xi) \ddot{\alpha} + g \sin \alpha + 2\dot{\alpha}\dot{\xi} = 0,$$

którą wyprowadzili Francis S. TSE, Ivan E. MORSE i Rolland T. HINKLE w pracy [3]. Są to równania drgań swobodnych wahadła liniowo sprężystego bez tłumienia z nieruchomym punktem zawieszenia. Jeśli $f_1 = f_2 = Q_1 = Q_2 = \bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$, to równanie (2.5) przyjmie postać

$$ml\ddot{\alpha} + m [g + \dot{f}_2(t)] \sin \alpha = 0,$$

spotykaną w wielu podręcznikach z teorii drgań.

W następnych rozdziałach niniejszej pracy rozpatrzmy problem stateczności ruchu wahadła względem położenia równowagi quasi-statycznej w kilku szczególnych przypadkach.

3. Stateczność drgań wahadła z nieodkształcalnym cięgnem

Rozpatrzmy drgania wahadła ze sztywnym cięgnem ($\xi = 0$), którego punkt zawieszenia wykonywuje drgania harmoniczne wzdłuż linii prostej, tworzącej z osią pionową kąt γ . Ruch punktu zawieszenia przebiega zgodnie z równaniem $a \sin \omega t$, gdzie a oznacza amplitudę wymuszenia oraz ω częstość wymuszenia. Jeśli pominiemy siły wymuszające i ograniczymy się do tłumienia liniowego, to równanie (2.5) sprowadzi się do następującej postaci:

$$(3.1) \quad \ddot{\alpha} + \lambda \dot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{a\omega^2}{l} \sin \omega t \sin(\alpha - \gamma) = 0,$$

gdzie $\lambda = \bar{\chi}_1/ml^2$ oznacza współczynnik tłumienia wiskotycznego. Zakładamy, że przy unieruchomionym punkcie zawieszenia ruch wahadła przy małych wychyleniach ma charakter drgający. Wynika stąd, że $\lambda^2/4 < \omega^2$.

Z wielu względów wygodniej jest operować w równaniach różniczkowych bezwymiarowym czasem. W tym celu podstawiamy w równaniu (3.1) $\tau = \omega t$ i oznaczamy

$$k^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(\frac{l}{a}\right)^2, \quad \frac{g}{l\omega^2} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = k^2 \left(\frac{a}{l}\right)^2, \quad \frac{\lambda}{\omega} = 2\Xi \frac{a}{l},$$

$$\left(\frac{a}{l}\right) = k \frac{\omega}{\omega_0} = \mu, \quad \Xi = \frac{\lambda k}{2\omega_0},$$

gdzie $\omega_0^2 = g/l$ jest częstością małych drgań wahadła matematycznego.

Po wprowadzeniu do równania (3.1) tych oznaczeń otrzymujemy

$$(3.2) \quad \frac{d^2 \alpha}{d\tau^2} + 2\mu\Xi \frac{d\alpha}{d\tau} + \mu^2 k^2 \sin \alpha + \mu \sin \tau \sin(\alpha - \gamma) = 0.$$

W równaniu (3.2) widzimy wielkość oznaczoną symbolem μ , którą przyjęliśmy za mały parametr, będący stosunkiem amplitudy wymuszenia kinematycznego do długości statycznej ramienia wahadła.

Zakładamy, że częstość wymuszenia ω jest większa od częstości drgań własnych wahadła ω_0 oraz że długość l ramienia wahadła jest znacznie większa od amplitudy a wymuszenia kinematycznego, tzn. $\omega > \omega_0$ oraz $l \gg a$. Z powyższego wynika $k < 1$ i $\Xi < 1$.

Dokonajmy transformacji zmiennych zgodnie z następującymi zależnościami:

$$(3.3) \quad \alpha = \varphi + \mu \sin \tau \sin(\varphi - \gamma)$$

oraz

$$(3.4) \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = \mu\Omega + \mu \cos \tau \sin(\varphi - \gamma).$$

Po uśrednieniu funkcji czasu i przekształceniach, zachowując tylko wyrazy z parametrem μ w potęgach pierwszej, otrzymujemy układ równań w postaci standardowej:

$$(3.5) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu\Omega, \quad \frac{d\Omega}{d\tau} = -\mu \left[\frac{1}{4} \sin 2(\varphi - \gamma) + k^2 \sin \varphi + 2E\Omega \right],$$

które są równoważne jednemu równaniu różniczkowemu rzędu drugiego o stałych współczynnikach:

$$(3.6) \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\mu E \frac{d\varphi}{d\tau} + \mu^2 \left[\frac{1}{4} \sin 2(\varphi - \gamma) + k^2 \sin \varphi \right] = 0.$$

Równanie (3.6) dopuszcza quasi-statyczne położenia równowagi określone zależnością

$$(3.7) \quad \frac{1}{4} \sin 2(\varphi - \gamma) + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Równanie (3.6) w wariacjach przyjmie postać

$$(3.8) \quad \frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2\mu E \frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \mu^2 \left[\frac{1}{2} \cos(\varphi - \gamma) + k^2 \cos \varphi \right] \delta\varphi = 0.$$

Przy założeniu dodatniej dysypacji w układzie, tzn. $E > 0$, warunek stateczności ruchu wahadła ma postać

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} \cos 2(\varphi - \gamma) + k^2 \cos \varphi > 0.$$

W dalszym ciągu nie będziemy rozwiązywać trygonometrycznego równania (3.7) w postaci ogólnej, lecz zbadamy stateczność możliwych położeń równowagi w kilku charakterystycznych przypadkach szczególnych.

Przypadek I. Równanie (3.7) przy $\gamma = 0$ ma dla $\varphi \in [0, 2\pi)$ i $k^2 < 1/2$ następujące pierwiastki:

$$(3.10) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi - \arccos 2k^2, \quad \varphi_3 = \pi, \quad \varphi_4 = \pi + \arccos 2k^2.$$

Korzystając z nierówności (3.9) zbadamy stateczność równowagi położeń quasi-statycznych (3.10).

Okazuje się, że położenie równowagi $\varphi_1 = 0$ jest położeniem statecznym, bowiem w tym przypadku nierówność (3.9) jest bezwarunkowa. Jeśli natomiast do tej nierówności podstawimy φ_2 lub φ_4 , to będzie ona nierównością sprzeczną, co świadczy o tym, że położenia równowagi statycznej φ_2 i φ_4 nie są stateczne. Podobnie podstawiając do nierówności (3.7) $\varphi_3 = \pi$ otrzymamy następującą nierówność [1 i 2]

$$(3.11) \quad k^2 - \frac{1}{2} < 0.$$

Uwzględniając, że $k^2 = (\omega_0/\omega)^2 (l/a)^2$ otrzymamy z powyższej nierówności

$$(3.12) \quad \omega > \sqrt{2} \omega_0 (l/a).$$

Jest to warunek, przy którym pionowe położenie wahadła z masą powyżej punktu zawieszenia będzie stateczne. Weźmy dla przykładu $l = 40$ cm, $a = 2$ cm; wówczas częstość wymaszenia, przy której drgania wahadła odwróconego będą stateczne, w przybliżeniu jest $\omega > 140$ 1/sek. A więc pionowe położenie wahadła będzie stateczne, jeśli liczba cykli drgań punktu zawieszenia wzdłuż linii pionowej będzie większa od 22,3 drgań na sekundę.

Pionowe położenie wahadła z masą poniżej punktu zawieszenia ($\varphi = 0$) będzie stateczne przy dowolnych k . Częstość małych drgań bez tłumienia dla czasu bezwymiarowego τ jest równa $\mu \sqrt{\frac{1}{2} + k^2}$ i odpowiednio dla czasu rzeczywistego t (sek) równa [1] $\sqrt{\frac{1}{2}(a\omega/l)^2 + \omega_0^2}$.

Jeśli w przypadku $\varphi = 0$ częstość drgań punktu zawieszenia będzie równa 60·1/sek., tzn. $\omega = 377$ ·1/sek., to częstość małych drgań wahadła $\omega_1 = 14,2$ ·1/sek.

Częstość drgań tegoż wahadła z nieruchomym punktem zawieszenia $\omega_0 = 4,94$ ·1/sek. Efektywna siła restytucyjna zwiększy się w przypadku ruchomego punktu zawieszenia $(\omega_1/\omega_0)^2 = 8,2$ razy. Oczywiście przy małych drganiach siła restytucyjna działająca na masę wahadła matematycznego z nieruchomym punktem zawieszenia będzie taka sama, jak siła działająca na masę wahadła z ruchomym punktem zawieszenia, jeśli w pierwszym przypadku masa będzie 8,2 razy większa niż w drugim.

Przypadek II. Punkt zawieszenia wahadła wykonywuje drgania harmoniczne wzdłuż prostej nachylonej pod kątem $\gamma = \pi/4$ względem osi pionowej. Z warunku równowagi (3.7) otrzymujemy następujące położenia równowagi przy $k^2 < 1/4$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arcsin(-k^2 + \sqrt{k^4 + \frac{1}{2}}), \\ \varphi_2 &= \pi - \arcsin(-k^2 + \sqrt{k^4 + \frac{1}{2}}), \\ \varphi_3 &= \pi + \arcsin(k^2 + \sqrt{k^4 + \frac{1}{2}}), \\ \varphi_4 &= 2\pi - \arcsin(k^2 + \sqrt{k^4 + \frac{1}{2}}); \end{aligned} \quad (3.13)$$

natomiast przy wartościach $k^2 > 1/4$ otrzymujemy położenia równowagi quasi-statycznej:

$$\begin{aligned} \varphi_1^* &= \arcsin(-k^2 + \sqrt{k^4 + \frac{1}{2}}), \\ \varphi_2^* &= \pi - \arcsin(-k^2 + \sqrt{k^4 + \frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

a przy $k = 1/4$ otrzymujemy

$$\varphi_1^{**} = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_2^{**} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3^{**} = \frac{1}{6}\pi. \quad (3.15)$$

W tym przypadku warunek stateczności przyjmuje postać następującej nierówności:

$$\cos \varphi (k^2 + \sin \varphi) > 0. \quad (3.16)$$

Ponieważ $\cos \varphi_1 > 0$ i $k^2 + \sin \varphi_1 = \sqrt{k^4 + 1/2} > 0$, to quasi-statyczne postacie równowagi φ_1 określone z odpowiedniej zależności (3.13) są stateczne dla $k^2 < 1/4$.

Można łatwo wykazać, że położenie równowagi quasi-statycznej φ_3 jest stateczne przy $k^2 < 1/4$, pozostałe zaś położenia, tzn. φ_2 i φ_4 , nie są stateczne.

Jeśli $k > 1/4$, to mamy tylko dwa położenia równowagi quasi-statycznej φ_1^* i φ_2^* , z których tylko pierwsze jest położeniem statecznym.

Przy $k^2 = 1/4$ są trzy położenia równowagi określone wartościami (3.15), z których jedynie pierwsze położenie, tj. $\varphi_1^{**} = \pi/6$, jest położeniem statecznym.

Przypadek III. Punkt zawieszenia wahadła wykonywuje drgania harmoniczne wzdłuż prostej poziomej. W tym przypadku $\gamma = \pi/2$. Z równania (3.7) otrzymujemy $1/4 \sin(2\varphi - \pi) + k^2 \sin \varphi = 0$ lub

$$(3.17) \quad \sin \varphi (2k^2 - \cos \varphi) = 0,$$

skąd obliczamy przy $k^2 < 1/2$ kąty

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 0, & \varphi_2 &= \arccos 2k^2, \\ \varphi_3 &= \pi, & \varphi_4 &= 2\pi - \arccos 2k^2, \end{aligned}$$

określające położenia równowagi quasi-statycznej. Jeśli $k^2 \geq 1/2$, to mamy tylko dwa możliwe położenia równowagi

$$(3.19) \quad \varphi_1^* = 0 \quad \text{i} \quad \varphi_3^* = \pi.$$

Odpowiedni warunek stateczności będzie

$$-\cos 2\varphi + 2k^2 \cos \varphi > 0$$

lub

$$-2\cos^2 \varphi + 2k^2 \cos \varphi + 1 > 0.$$

Można łatwo sprawdzić, że z czterech położen równowagi quasi-statycznej (3.18) tylko dwa z nich

$$\varphi_2 = \arccos 2k^2, \quad \varphi_4 = 2\pi - \arccos 2k^2$$

są stateczne.

Jeśli $k^2 > 1/2$, to stateczne jest tylko jedno położenie równowagi, mianowicie

$$\varphi_1^* = 0.$$

Wyniki dotychczasowych rozważań nad statecznością drgań wahadła z nieodkształcalnym ramieniem podano w tablicy 1.

Tablica 1

γ	Położenie równowagi quasi-statycznej	Warunek na k^2
$\gamma = 0$	$\varphi = 0$ $\varphi = \pi$	dowolne $k^2 < \frac{1}{2}$
$\gamma = \frac{\pi}{4}$	$\varphi = \arcsin(-k^2 + \sqrt{k^4 + 0,5})$ $\varphi = \pi + \arcsin(-k^2 + \sqrt{k^4 + 0,5})$	dowolne $k^2 < \frac{1}{4}$
$\gamma = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = \arccos 2k^2$ $\varphi = 2\pi - \arccos 2k^2$ $\varphi = 0$	$k^2 < \frac{1}{2}$ $k^2 < \frac{1}{2}$ $k^2 > \frac{1}{2}$

Przypadek IV. Punkt zawieszenia wahadła porusza się po torze kołowym w płaszczyźnie ruchu wahadła. Podstawiając $f_1 = a \sin \omega t$ i $f_2 = a \cos \omega t$ do drugiego równania układu (2.5) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe ruchu wahadła:

$$(3.20) \quad \alpha'' + 2\mu\Xi\alpha' + \mu^2 k^2 \sin \alpha + \mu \sin(\alpha - \tau) = 0,$$

które po zastosowaniu transformacji

$$\alpha = \varphi + \mu \sin(\varphi - \tau), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = \mu\Omega - \mu \cos(\varphi - \tau),$$

obliczeniu pochodnej

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\mu\Omega}{1 + \mu \cos(\varphi - \tau)}$$

i uśrednieniu funkcji czasu sprowadza się do dwóch równań różniczkowych w postaci standardowej

$$(3.21) \quad \frac{d\Omega}{d\tau} = -2\mu\Xi\Omega - \mu k^2 \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu\Omega.$$

Układ równań (3.21) jest równoważny jednemu równaniu różniczkowemu drugiego rzędu

$$(3.22) \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\mu\Xi \frac{d\varphi}{d\tau} + \mu^2 k^2 \sin \varphi = 0.$$

Równanie (3.22) dopuszcza położenia równowagi quasi-statycznej przy $\varphi_1^* = 0$ i $\varphi_2^* = \pi$.

Podstawiając do równania (3.22) $\varphi = \varphi^* + \delta\varphi$ otrzymujemy równanie w wariacjach w następującej postaci:

$$\frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2\mu\Xi \frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \mu^2 k^2 \cos \varphi \delta\varphi = 0$$

i odpowiedni warunek stateczności $\cos \varphi > 0$. Stąd wynika, że dolne położenie pionowe wahadła jest stateczne.

4. Stateczność drgań wahadła z odkształcalnym ciągnem

Drgania wahadła jako układu o dwóch stopniach swobody opisuje układ dwóch równań różniczkowych w postaci (2.5). Stateczność drgań zbadamy dla przypadku wymuszenia kinematycznego $f_2 = a \sin \omega t$ działającego wzdłuż osi pionowej. Przyjmując w równaniu (2.5) $f_1 = P_1 = P_2 = \tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = F = 0$ oraz $\tau = \omega t$ i $\xi = a\zeta$ otrzymujemy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \zeta'' + 2\theta\zeta' + (\omega_1/\omega)^2\zeta &= \sin \tau \cos \alpha + (1/\mu) \alpha'^2 + \alpha'^2 \zeta - \mu k^2 (1 - \cos \alpha), \\ \alpha'' + 2\mu\Xi\alpha' + \mu^2 k^2 \sin \alpha &= -\mu \sin \tau \sin \alpha + 2\mu\alpha' \zeta' - \mu^2 \zeta \sin \tau \sin \alpha + \\ &+ 2\mu^2 \zeta \zeta' \alpha' - 2\mu\zeta \alpha'' - \mu^2 \zeta^2 \alpha'' - k^2 \mu^3 \sin \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \bar{k}/m, & \omega_0 &= \sqrt{g/l}, & \bar{k}/m\omega^2 &= (\omega_1/\omega)^2, \\ \bar{\kappa}_1/m\omega &= 2\theta, & \bar{\chi}/m\omega l^2 &= \lambda/\omega = 2\varepsilon(a/l), & \mu &= k\omega/\omega_0 = a/l, \\ g/l\omega^2 &= (\omega_0/\omega)^2 = k^2(a/l)^2. \end{aligned}$$

Za pomocą transformacji

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \zeta &= \Phi - \mu \sin \tau \sin \alpha - A\mu(1 - \cos \alpha), & \frac{d\zeta}{d\tau} &= \Omega_2 - \mu \cos \tau \sin \alpha, \\ \alpha &= \varphi + \mu \sin \tau \sin \varphi, & \frac{d\alpha}{d\tau} &= \mu\Omega_1 + \mu \cos \tau \sin \varphi, \end{aligned}$$

gdzie $A = k^2(\omega/\omega_1)^2$, układ (4.1) sprowadzamy do postaci standardowej. W tym celu obliczamy pochodne

$$(4.3) \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \Omega_2 + \mu^2(\Omega_1 + \cos \tau \sin \varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu\Omega_1/(1 + \mu \sin \tau \cos \varphi).$$

Stosując transformację (4.2) do pierwszego równania układu (4.1) i ograniczając się do wyrazów z parametrem μ w potęgę pierwszej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \frac{d\Omega_2}{d\tau} + \mu \sin \tau \sin \alpha - \mu \frac{d\alpha}{d\tau} \cos \tau \cos \alpha = -2\theta(\Omega_2 - \mu \cos \tau \sin \alpha) - \\ &- \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 [\Phi - \mu \sin \tau \sin \alpha - A\mu(1 - \cos \alpha)] + \sin \tau \cos \alpha + \\ &+ \mu(\Omega_1 + \cos \tau \sin \varphi)^2 - \mu k^2(1 - \cos \alpha) + \mu^2 \dots; \end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \varphi + \mu \sin \tau \sin \varphi \cos \varphi, \\ \cos \alpha &= \cos \varphi - \mu \sin^2 \varphi \sin \tau, \end{aligned}$$

więc

$$(4.4) \quad \frac{d\Omega_2}{d\tau} = -2\theta\Omega_2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \Phi + \sin \tau \cos \varphi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \Omega_2$$

lub

$$(4.5) \quad \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + 2\theta \frac{d\Phi}{d\tau} + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \Phi = \sin \tau \cos \varphi.$$

Transformując drugie równanie układu (4.1) i pozostawiając wyrazy z parametrem μ w potęgę pierwszej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\Omega_1}{d\tau} &= -2\varepsilon\mu^2\Omega_1 - k^2\mu^2 \sin \varphi - \mu^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \tau - 2\mu^2 \Phi_1 \Phi_2 - \\ &- 2\mu^2\Omega_2 \cos \tau \sin \varphi - 2\mu^2 \Phi \frac{d\Omega_1}{d\tau} + \mu^2 \Phi \sin \varphi \sin \tau \end{aligned}$$

lub

$$\frac{d\Omega_1}{d\tau} = -2\varepsilon\mu\Omega_1 - k^2\mu\sin\varphi - \mu\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\tau - \\ - 2\mu\Omega_2\cos\tau\sin\varphi - 2\mu\Omega_1\Omega_2 + \mu\Phi\sin\varphi\sin\tau, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu\Omega_1.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy równanie rzędu drugiego:

$$(4.6) \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\mu\left(\varepsilon + \frac{d\Phi}{d\tau}\right)\frac{d\varphi}{d\tau} + \\ + \mu^2\left(k^2 + \cos\varphi\sin^2\tau + 2\cos\tau\frac{d\Phi}{d\tau} - \Phi\sin\tau\right)\sin\varphi = 0.$$

Stateczność położenia równowagi zbadamy w kilku przypadkach szczególnych, interesujących z punktu widzenia zastosowań technicznych.

Przypadek I. Jednym z położenia równowagi quasi-statycznej wahadła jest położenie odpowiadające wartości $\varphi = 0$. Przy tym założeniu otrzymamy z równania (4.5)

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + 2\theta\frac{d\Phi}{d\tau} + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\Phi = \sin\tau.$$

Ruch ustalony opisany jest równaniem

$$(4.7) \quad \Phi(\tau) = \frac{\sin(\tau - \delta)}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - 1\right]^2 + 4\theta^2}},$$

gdzie

$$\operatorname{tg}\delta = -2\theta / \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - 1\right].$$

Podstawiając

$$(4.8) \quad \Phi(\tau) = U\sin(\tau + \delta),$$

gdzie

$$U = 1 / \sqrt{\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - 1\right]^2 + 4\theta^2},$$

do (4.6) i uśredniając współczynniki oraz przechodząc do równania w wariacjach otrzymujemy

$$(4.9) \quad \frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2\mu\varepsilon\frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \mu^2[k^2 + 0,5 + 0,5U\cos\delta]\delta\varphi = 0.$$

Odpowiedni warunek stateczności ma postać

$$k^2 + 0,5 + 0,5U\cos\delta > 0$$

lub

$$(4.10) \quad \frac{g}{l\omega^2} \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\cos \delta}{\sqrt{\left[\frac{\bar{k}}{m\omega^2} - 1\right]^2 + \frac{\kappa_1^2}{m^2\omega^2}}} > 0,$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\kappa_1/m\omega}{(\bar{k}/m\omega^2) - 1}.$$

Przypadek II. Zbadamy stateczność położenia równowagi wahadła „odwróconego”. Wtedy mamy $\varphi = \pi$. Z równania (4.5) otrzymujemy

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + 2\theta \frac{d\Phi}{d\tau} + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \Phi = -\sin \tau.$$

Wobec tego drgania stacjonarne przebiegają zgodnie z równaniem

$$(4.11) \quad \Phi(\tau) = -U \sin(\tau - \delta).$$

Uwzględniając (4.11) otrzymujemy równanie w wariacjach

$$(4.12) \quad \frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2\mu\varepsilon \frac{d\delta\varphi}{d\tau} - \mu^2 [k^2 - 0,5 - 0,5 U \cos \delta] \delta\varphi = 0.$$

Odpowiedni warunek stateczności sprowadza się do następującej nierówności:

$$(4.13) \quad \frac{g}{l\omega^2} \left(\frac{l}{a}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\cos \delta}{2\sqrt{\left[\frac{\bar{k}}{m\omega^2} - 1\right]^2 + \frac{\kappa_1^2}{(m\omega)^2}}} < 0.$$

Reasumując otrzymane wyniki można sformułować następujące wnioski:

1. Wraz ze wzrostem tłumienia κ_1 drgań wzdłużnych wahadła sprężystego jego «sztywność dynamiczna» wzrasta i warunek stateczności (4.10) zmierza do warunku stateczności (3.9), który został wyprowadzony dla wahadła z cięgnem nieodkształcalnym.
2. Ze wzrostem sztywności cięgna \bar{k} także warunek stateczności (4.10) zmierza do warunku (3.9).
3. Ze wzrostem częstości wymuszenia kinematycznego ω «sztywność dynamiczna» rośnie.
4. Stateczność drgań wahadła będzie tym bardziej trwała, im dłuższe będzie cięgno l i im mniejsza będzie amplituda wymuszenia kinematycznego.
5. Przy niskiej częstości wymuszenia odkształcalność cięgna wahadła działa stabilizująco na jego drgania w zakresie drgań przed rezonansem. Innymi słowy, drgania stateczne mają miejsce przy niższych częstościach wymuszenia działających na wahadło sprężyste niż na wahadło nieodkształcalne.

6. Jeżeli wymuszenie ma częstość wyższą od rezonansowej, to drgania stateczne możliwe są przy dużych częstościach wymuszenia kinematycznego, tj. znacznie większych od częstości rezonansowej. Drgania w tym przypadku odbywają się w przeciwfazie z wymuszeniem.

Zastosowana w niniejszej pracy metoda badania stateczności nieliniowych drgań parametrycznych umożliwiła wyciągnięcie wniosków jakościowych o zachowaniu się układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody. Zbadaliśmy wprawdzie tylko szczególne przypadki układu równań (2.5), niemniej jednak przy odpowiednim nakładzie pracy tą samą metodą można zbadać inne, bardziej ogólne przypadki.

Bardzo efektywne byłoby zastosowanie metod numerycznych w celu zbadania zakresu zmienności parametrów układu warunkujących stateczną pracę wahadła sprężystego w zakresie statecznych położań równowagi określonych w wyżej opisanym sposobie.

O dużym znaczeniu praktycznym badań nad ruchem wahadła sprężystego świadczy fakt, że ostatnio ukazuje się wiele publikacji na ten temat w literaturze światowej w związku z badaniami zagadnienia orientowania sztucznych satelitów [4].

Literatura cytowana w tekście

1. Ю. А. Митропольский, *Лекции по методу усреднения в нелинейной механике*, Изд. „Наукова Думка”, Киев 1966.
2. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гос. Изд. Тех-геор. лит., Москва 1956.
3. F. S. TSE, I. E. MORSE, R. T. HINKLE, *Mechanical Vibrations*. Allyn and Bacon, Inc. Boston 1963.
4. Р. Е. Фицелл, Ф. Ф. Мобли, *Система пассивной гравитационно-градиентной стабилизации искусственных спутников земли*, Проблемы ориентации искусственных спутников земли, Изд. «Наука», Москва 1966.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Рассматриваются кинематические вынужденные колебания маятника с сосредоточенной массой, закрепленной на плече, изготовленном из материала, реологические свойства которого описываются моделью Фойгра.

Движение маятника описывается системой двух нелинейных дифференциальных, обыкновенных уравнений, с переменными коэффициентами. В нескольких особых случаях, приводятся, также анализ колебаний с недеформируемым плечом. Исследуется влияние параметров, описывающих физические свойства плеча маятника на области устойчивости движения.

Summary

STABILITY OF NONLINEAR VIBRATION OF AN ELASTIC
PENDULUM WITH A MOVING POINT OF SUSPENSION

The subject-matter of the present considerations is kinematically forced vibration of a pendulum with a concentrated mass attached to an arm made of a material, the rheological properties of which are described by the Voigt model.

The motion of the pendulum is described by a set of two nonlinear ordinary differential equations with variable coefficients. In a few particular cases this analysis concerns also an indeformable arm. The influence of the parameters describing the physical properties of the arm on the stability regions of the motion is discussed.

ZAKŁAD TEORII KONSTRUKCJI MASZYN
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 marca 1967 r.
