

PLASKIE STANY OŚRODKÓW PLASTYCZNYCH  
W NIEORTOGONALNYCH UKŁADACH WSPÓLRZĘDNYCH KRZYWOLINIOWYCH

JERZY ZAWIDZKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Do opisu zachowania się ośrodków ciągłych w różnych procesach dynamicznych używa się często układów krzywoliniowych, których linie współrzędnych pokrywają się z pewnymi liniami w przestrzeni, określonymi przez kinematykę ośrodka (linie prądu, tory cząstek i in.), bądź też przez stan naprężenia (trajektorie naprężeń głównych itp.). Konkretny problem brzegowy może również narzucić dogodny w danym przypadku układ współrzędnych. Wreszcie, tak jak ma to miejsce w teorii plastyczności, na wybór odpowiedniego układu do badania ogólnych zależności wpływać może bezpośrednio model materiału.

W analizie płaskiego stanu odkształcenia ośrodka idealnie plastycznego, pozostającego w równowadze granicznej bądź też w stanie quasi-statycznego płynięcia, ważną rolę odgrywają ortogonalne układy walcowe. Celowość i efektywność wprowadzania takich układów wynika z faktu, że w ośrodku wyróżnić można wówczas dwie ortogonalne rodziny powierzchni walcowych o określonym sensie fizycznym zwane powierzchniami poślizgu. Równania tych powierzchni w odpowiednio dobranych współrzędnych walcowych są zarazem równaniami charakterystyk układu równań równowagi ośrodka, będącego układem cząstkowych równań quasi-liniowych typu hiperbolicznego (por. [1]). Przyjęcie walcowego układu ortogonalnego, w którym dwie rodziny powierzchni współrzędnych pokrywają się z rodzinami powierzchni poślizgu, a trzecia jest rodziną płaszczyzn równoległych, ułatwia otrzymanie szeregu interesujących wyników w ogólnej analizie, jak też i w konkretnych problemach brzegowych, por. [1].

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia kohezynego ośrodka sypkiego, będącego uogólnieniem wspomnianego wyżej modelu, powierzchnie poślizgu i charakterystyki przecinają się pod stałym kątem zależnym od stałej materiałowej i różnym na ogół od prostego. Do badania tego przypadku predestynowane są zatem krzywoliniowe układy walcowe, w których dwie rodziny powierzchni współrzędnych przecinają się pod ustalonym kątem.

Wracając do modelu ośrodka idealnie plastycznego, w przypadku płaskiego stanu naprężenia w obszarach hiperboliczności problemu, mamy do czynienia z nieortogonalną siatką charakterystyk, w której kąt, pod którym przecinają się

krzywe siatki, jest zmienny w obszarze. To stanowi przesłankę do zastosowania tu krzywoliniowego walcowego układu współrzędnych w jego najbardziej ogólnej postaci.

W pierwszym z wymienionych tu trzech zagadnień teorii plastyczności problem wykorzystania geometrycznych właściwości układów ortogonalnych został szeroko opracowany w pracy [1]. Celem niniejszej pracy jest zbadanie możliwości wykorzystania tychże własności nieortogonalnych układów krzywoliniowych do analizy ogólnych stanów płaskich ośrodków plastycznych, zawierających jako przypadki szczególne wszystkie podane wyżej zagadnienia. Podstawowe równania zostaną napisane w postaci niezmienniczej względem zmiany parametryzacji układu współrzędnych, po czym przedstawiona zostanie proponowana metoda otrzymywania związków wzdłuż charakterystyk w przypadku stacjonarnego quasi-statycznego płynięcia niejednorodnych ośrodków sztywno-plastycznych bez wzmocnienia.

## 2. Własności geometryczne układów walcowych

Walcowe układy współrzędnych krzywoliniowych są określone transformacją (A.29) podaną w Dodatku A, który zawiera także podstawowe oznaczenia, jakie będą tu dalej stosowane.

Analiza geometrii układów walcowych sprowadza się do badania geometrycznych własności rodzin linii  $\eta^1$  i  $\eta^2$  leżących w dowolnej płaszczyźnie  $\eta^3 = x^3 = \text{const}$ . Rodziny te nazywać będziemy nieortogonalną siatką krzywoliniową.

W każdym punkcie przestrzeni (płaszczyzny  $\eta^3 = x^3 = \text{const}$ ) z daną siatką związane są trzy wielkości skalarne, mające określony sens geometryczny. Są to kąt  $\psi$  pomiędzy liniami  $\eta^1$  i  $\eta^2$  oraz odpowiednie krzywizny  $K_1$  i  $K_2$  tych linii.

Kąt  $\psi$  pomiędzy liniami współrzędnych jest to kąt między stycznymi do nich wektorami lokalnej bazy  $\mathfrak{e}_1$  i  $\mathfrak{e}_2$ ; na podstawie definicji iloczynu skalarnego oraz (A.13) i (A.32) mamy

$$(2.1) \quad \psi = \arccos \frac{\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2}{|\mathfrak{e}_1| |\mathfrak{e}_2|} = \arccos \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} = \arcsin \sqrt{\frac{g}{g_{11} g_{22}}}, \quad 0 < \psi < \pi.$$

Krzywizny  $K_1$  i  $K_2$ , określone na podstawie znanej definicji krzywizny krzywej płaskiej, wobec (A.9), (A.24), (A.31), (A.32) i (A.35), wyrażają się przez składowe tensora metrycznego w sposób następujący:

$$(2.2) \quad K_1 = \sqrt{\frac{(\partial_1 \mathbf{r})^2 (\partial_{11} \mathbf{r})^2 - (\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_{11} \mathbf{r})^2}{(\partial_1 \mathbf{r} \cdot \partial_1 \mathbf{r})^3}} = \frac{\sqrt{g}}{g_{11} \sqrt{g_{11}}} I_{11}^2,$$

$$(2.3) \quad K_2 = \sqrt{\frac{(\partial_2 \mathbf{r})^2 (\partial_{22} \mathbf{r})^2 - (\partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_{22} \mathbf{r})^2}{(\partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_2 \mathbf{r})^3}} = \frac{\sqrt{g}}{g_{22} \sqrt{g_{22}}} I_{22}^1.$$

Jak łatwo sprawdzić,  $\psi$ ,  $K_1$  i  $K_2$  są wielkościami geometrycznymi związanymi z układem współrzędnych (por. Dodatek B, definicja 1).

Wprowadzimy obecnie operatory

$$(2.4) \quad D_\alpha \equiv \frac{1}{|\mathfrak{a}_\alpha|} \partial_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \partial_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

mające sens pochodnej kierunkowej w kierunku wektora lokalnej bazy  $\mathfrak{a}_\alpha$ . Operacja tak zdefiniowanego różniczkowania jest niezmiennicza względem zmiany parametryzacji układu współrzędnych (Dodatek B), natomiast nie jest na ogół operacją przemianą, mamy bowiem

$$(2.5) \quad D_\alpha(D_\beta) - D_\beta(D_\alpha) = D_\beta(\ln \sqrt{g_{\alpha\alpha}}) D_\alpha - D_\alpha(\ln \sqrt{g_{\beta\beta}}) D_\beta.$$

Stosując operację (2.4) do kąta  $\psi$  otrzymujemy

$$(2.6) \quad D_\alpha \psi = \frac{1}{2g_{11}g_{22}\sqrt{gg_{\alpha\alpha}}} (g_{12}g_{22}\partial_\alpha g_{11}^2 - 2g_{11}g_{22}\partial_\alpha g_{12} + g_{12}g_{11}\partial_\alpha g_{22}),$$

$\alpha = 1, 2.$

Wobec (A.35) można (2.6) przedstawić w postaci

$$(2.7) \quad D_1 \psi = - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}g_{22}\sqrt{g_{11}}} (g_{11}\Gamma_{12}^1 + g_{22}\Gamma_{11}^2)$$

oraz

$$(2.8) \quad D_2 \psi = - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}g_{22}\sqrt{g_{22}}} (g_{22}\Gamma_{12}^2 + g_{11}\Gamma_{22}^1).$$

Wzory (2.2), (2.3), (2.7) i (2.8) pozwalają na wyrugowanie pochodnych składowych tensora metrycznego, występujących w sześciu spośród ośmiu niezerowych symboli Christoffela II rodzaju (A.35):

$$(2.9) \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{g_{11}\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} K_1,$$

$$(2.10) \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{g_{22}\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} K_2,$$

$$(2.11) \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = - \frac{g_{22}\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} (K_1 + D_1 \psi),$$

$$(2.12) \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = - \frac{g_{11}\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} (K_2 + D_2 \psi).$$

Symboli  $\Gamma_{11}$  i  $\Gamma_{22}$  nie udaje się w podobny sposób przedstawić; gdyby bowiem taka możliwość istniała, to musiałyby zachodzić także i dla szczególnego przypadku siatki ortogonalnej, dla której dla  $\psi = \pi/2$  mamy

$$(2.13) \quad g_{12} = 0, \quad g = g_{11}g_{22}, \quad D_\alpha \psi = 0.$$

Wówczas

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \partial_1 g_{11}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{22}$$

powinnyby wyrażać się przez wielkości

$$K_1 = -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}} \partial_2 g_{11}, \quad K_2 = -\frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}} \partial_1 g_{22},$$

co jest, jak widać, na ogół niemożliwe.

Krzywizny linii współrzędnych układu walcowego związane są z praukładem kartezjańskim w sposób następujący:

Niech  $\chi$  oznacza kąt pomiędzy osią  $x^1$  praukładu a wektorem lokalnej bazy  $\vartheta_1$  mierzony od kierunku  $x^1$ :

$$(2.14) \quad \chi \equiv \angle(\mathbf{i}_1, \vartheta_1).$$

Kąt między osią  $x^1$  a wektorem  $\vartheta_2$  będzie zatem równy

$$(2.15) \quad \angle(\mathbf{i}_1, \vartheta_2) = \chi + \psi.$$

Krzywizny linii współrzędnych  $\eta^1$  i  $\eta^2$  wyrażają się przez odpowiednie pochodne wprowadzonych wyżej kątów (por. [1] dla siatek ortogonalnych):

$$(2.16) \quad K_1 = D_1 \chi, \quad K_2 = -D_2(\chi + \psi).$$

### 3. Operacje różniczkowe w układach walcowych

**3.1. Gradient pola skalarnego.** Niech będzie dane pole skalarne  $U = U(\eta^1, \eta^2)$ . Gradient tego pola  $\mathbf{f} = f_\alpha \vartheta^\alpha = f^\alpha \vartheta_\alpha$ , jest zdefiniowany w sposób następujący:

$$(3.1) \quad f_\alpha \equiv \partial_\alpha U.$$

Składowe  $f^\alpha$  obliczamy z równości  $f^\alpha = g^{\alpha\beta} f_\beta$ ; wobec (A.33) mamy więc

$$(3.2) \quad f^1 = \frac{1}{g}(g_{22} \partial_1 U - g_{12} \partial_2 U), \quad f^2 = \frac{1}{g}(g_{11} \partial_2 U - g_{12} \partial_1 U), \quad f^3 = 0.$$

Odpowiednie składowe fizyczne wobec (B.14), (2.1) i (2.4) przedstawiają się jak niżej:

$$(3.3) \quad F^1 = \frac{1}{\sin^2 \psi} (D_1 U - \cos \psi D_2 U), \quad F^2 = \frac{1}{\sin^2 \psi} (D_2 U - \cos \psi D_1 U), \quad F^3 = 0.$$

Pole skalarne  $U$  nazywamy potencjałem pola wektorowego  $\mathbf{f}$ .

**3.2. Pochodna kowariantna pola wektorowego.** Różniczkowanie kowariantne pola wektorowego  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\eta^1, \eta^2)$  jest operacją, w wyniku której otrzymujemy pole tensorowe drugiego rzędu  $\mathbf{P} = \nabla_\alpha q^\beta \vartheta^\alpha \vartheta_\beta$ , gdzie reprezentacja  $\nabla_\alpha q^\beta$  zdefiniowana jest w sposób następujący:

$$(3.4) \quad \nabla_\alpha q^\beta \equiv \partial_\alpha q^\beta + q^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta.$$

Wprowadzając zgodnie z (B.14) składowe fizyczne  $Q^m$  wektora  $q$  i zakładając, że pole wektorowe jest płaskie ( $q^3 = 0$ ), (3.4) można przedstawić w postaci

$$(3.5) \quad \nabla_\alpha q^\beta = \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \partial_\alpha Q^m \delta_m^\beta - \frac{1}{2g_{\beta\beta} \sqrt{g_{\beta\beta}}} \partial_\alpha g_{\beta\beta} Q^m \delta_m^\beta + \\ + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} Q^1 \Gamma_{\alpha 1}^\beta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} Q^2 \Gamma_{\alpha 2}^\beta \quad (\text{bez sumowania}).$$

Z uwagi na (2.1), (2.4) i (2.9) — (2.12) otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \nabla_1 q^1 &= D_1 Q^1 - Q^1 K_1 \operatorname{ctg} \psi - \frac{1}{\sin \psi} Q^2 (K_1 + D_1 \psi), \\ \nabla_2 q^2 &= \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \left[ D_1 Q^2 + \frac{1}{\sin \psi} Q^1 K_1 + Q^2 (K_1 + D_1 \psi) \operatorname{ctg} \psi \right], \\ \nabla_2 q^1 &= \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \left[ D_2 Q^1 + \frac{1}{\sin \psi} Q^2 K_2 + Q^1 (K_2 + D_2 \psi) \operatorname{ctg} \psi \right], \\ \nabla_1 q^2 &= D_2 Q^2 - Q^2 K_2 \operatorname{ctg} \psi - \frac{1}{\sin \psi} Q^1 (K_2 + D_2 \psi). \end{aligned}$$

**3.3. Pochodna materialna.** Dotychczas wprowadzone pojęcia były natury czysto geometrycznej. W punkcie tym po raz pierwszy do naszych rozważań wkracza mechanika ośrodka ciągłego.

Załóżmy, że mamy do czynienia z eulerowskim opisem ruchu ośrodka ciągłego. Opis ten dokonywany jest za pomocą pól skalarnych, wektorowych lub tensorowych, informujących o tym, że w danej chwili cząstka materialna zajmująca dane położenie w przestrzeni ma określoną własność skalarną (np. gęstość), wektorową (np. prędkość) lub tensorową (np. naprężenie).

Pola te mogą zatem opisywać pewne własności materiałowe i charakteryzować proces termodynamiczny, któremu podlega ośrodek. Nasuwający się tu problem «obiektywności materialnej» opisu nie będzie miał jednak bezpośredniego wpływu na dalsze rozważania.

Niechaj

$$(3.7) \quad w = w(t, \eta^1, \eta^2, \eta^3) = w^{\alpha \dots \gamma} \mathfrak{a}_{\alpha \dots \gamma}$$

będzie pewnym polem tensorowym o dowolnej walencji opisującym w sposób eulerowski pewną własność związaną z danym procesem ruchu ośrodka, w którym pole prędkości jest

$$(3.8) \quad v = v(t, \eta^1, \eta^2, \eta^3) = v^\alpha \mathfrak{a}_\alpha.$$

Pole (3.8) jest zatem pewnym wyróżnionym polem z pól (3.7).

Pochodna materialna pola  $w$  jest nowym polem tensorowym  $s$  o tej samej walencji zdefiniowanym w sposób następujący:

$$(3.9) \quad s = \dot{w} = \dot{w}^{\alpha \dots \gamma} \mathfrak{a}_{\alpha \dots \gamma} \equiv (\partial_0 w^{\alpha \dots \gamma} + v^\delta \nabla_\delta w^{\alpha \dots \gamma}) \mathfrak{a}_{\alpha \dots \gamma},$$

gdzie kropka oznacza «różniczkowanie materialne», a symbol  $\partial_0$  różniczkowanie cząstkowe względem czasu.

W dalszych punktach ograniczymy się do płaskich pól (3.7), tzn. takich, że

$$(3.10) \quad w = w(t, \eta^1, \eta^2), \quad w^{\alpha \dots \gamma} = 0,$$

jeżeli jakikolwiek indeks jest trójką.

Niech  $\varrho$  będzie pewnym polem skalarnym z klasy (3.10). Zgodnie z definicją (3.9) mamy

$$(3.11) \quad \dot{\varrho} = \partial_0 \varrho + v^\alpha \partial_\alpha \varrho.$$

Wobec (B.13) i (2.4) po wprowadzeniu ujednoczonego oznaczenia

$$(3.12) \quad D_0 \equiv \partial_0$$

możemy (3.11) przedstawić w postaci niezmienniczej względem zmiany parametryzacji układu współrzędnych:

$$(3.13) \quad \dot{q} = D_0 q + V^1 D_1 q + V^2 D_2 q.$$

Niech  $q$  będzie pewnym polem wektorowym z klasy (3.10), a  $p = \dot{q}$  polem powstałym przez różniczkowanie materialne

$$(3.14) \quad p^\alpha = \dot{q}^\alpha = \partial_0 q^\alpha + v^1 \nabla_1 q^\alpha + v^2 \nabla_2 q^\alpha.$$

Wprowadzając składowe fizyczne  $P^m$  wektora  $p$  oraz  $V^m$  wektora prędkości  $v$  wobec (3.6) (3.12) mamy:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} P^1 &= D_0 Q^1 + V^1 D_1 Q^1 + V^2 D_2 Q^1 - \\ &\quad - \frac{1}{\sin \psi} \{V^1 [Q^1 K_1 \cos \psi + Q^2 (K_1 + D_1 \psi)] - V^2 [Q^2 K_2 + Q^1 (K_2 + D_2 \psi) \cos \psi]\}, \\ P^2 &= D_0 Q^2 + V^1 D_1 Q^2 + V^2 D_2 Q^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\sin \psi} \{V^1 [Q^1 K_1 + Q^2 (K_1 + D_1 \psi) \cos \psi] - V^2 [Q^1 (K_2 + D_2 \psi) + Q^2 K_2 \cos \psi]\}, \end{aligned}$$

gdzie  $Q^m$  są składowymi fizycznymi wektora  $q$ .

W sposób analogiczny można otrzymać wzory na «składowe fizyczne» pochodnych materialnych pól tensorowych wyższych rzędów.

#### 4. Płaskie procesy dynamiczne

**4.1. Wprowadzenie.** Proces dynamiczny dowolnego ośrodka scharakteryzowany jest przez następujące pola tensorowe: pole tensorowe naprężenia  $T$ , pole skalarne gęstości  $\rho$ , pole wektorowe sił masowych  $f$  oraz przez pole wektorowe prędkości  $v$ .

Pola  $T = t^{\alpha\beta} \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}_\beta$ ,  $\rho$ ,  $f = f^\alpha \mathfrak{e}_\alpha$ ,  $v = v^\alpha \mathfrak{e}_\alpha$  powinny spełniać następujące związki, dostarczające 10 równań na 10 wielkości poszukiwanych (składowe  $T$  i  $v$  oraz  $\rho$ ; zakładamy, że pole  $f$  sił masowych jest dane):

1. Równania ruchu (por. [2]):

$$(4.1) \quad \partial_\beta t^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma + t^{\beta\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \rho f^\alpha = \rho a^\alpha,$$

gdzie  $a^\alpha$  są składowymi wektora przyspieszenia:

$$(4.2) \quad a = \dot{v}.$$

2. Prawo zachowania masy (por. [2]):

$$(4.3) \quad \dot{\rho} + \rho \nabla_\alpha v^\alpha = 0.$$

3. Tensorowe równanie konstytutywne materiału. Ze względu na indywidualny charakter równań konstytutywnych nie będziemy ich tu dokładniej omawiać. W dalszej części pracy zajmiemy się ośrodkami sztywno-plastycznymi bez wzmocnienia, których równania konstytutywne dają zawsze pewien warunek na tensor naprężenia  $T$ , zwany warunkiem plastyczności. Otóż będziemy wykorzystywać tam jedynie sam fakt istnienia tego warunku, sprawę postaci równania konstytutywnego pozostawiając nadal otwartą.

Proces dynamiczny nazywamy płaskim, jeżeli istnieje taki układ walcowy, w którym  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\eta^1, \eta^2)$ , przy czym składowe zawierające jako jeden z indeksów trójkę są zerami, natomiast  $t^{33} = t_3^3 = t_{33} = T^{\text{III}}$ , gdzie  $T^{\text{III}}$  jest trzecim z naprężeń głównych  $T^{\text{I}}, T^{\text{II}}, T^{\text{III}}$  (por. p. 4.4);  $\varrho = \varrho(\eta^1, \eta^2)$ ;  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\eta^1, \eta^2)$ , przy czym  $f^3 = f_3 = 0$ ;  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\eta^1, \eta^2)$ , przy czym  $v^3 = v_3 = 0$ .

4.2. Równania ruchu w płaskim procesie dynamicznym. Układ równań ruchu (4.1) w przypadku płaskiego procesu dynamicznego przybiera następującą rozwiniętą postać:

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \partial_1 t^{11} + \partial_2 t^{12} + t^{11}(2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + t^{12}(3\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) + t^{22}\Gamma_{22}^1 + \varrho f^1 = \\
 & = \varrho [\partial_0 v^1 + v^1 \partial_1 v^1 + v^2 \partial_2 v^1 + (v^1)^2 \Gamma_{11}^1 + 2v^1 v^2 \Gamma_{12}^1 + (v^2)^2 \Gamma_{22}^1], \\
 & \partial_2 t^{22} + \partial_1 t^{12} + t^{22}(2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + t^{12}(3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) + t^{11}\Gamma_{11}^2 + \varrho f^2 = \\
 & = \varrho [\partial_0 v^2 + v^1 \partial_1 v^2 + v^2 \partial_2 v^2 + (v^1)^2 \Gamma_{11}^2 + 2v^1 v^2 \Gamma_{12}^2 + (v^2)^2 \Gamma_{22}^2].
 \end{aligned}$$

W myśl (B.17)<sub>5,7</sub> wprowadzimy obecnie składowe fizyczne  $T^{Mn}$  tensora naprężenia  $\mathbf{T}$ . Wobec (A.33) mamy:

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad & t^{11} = T^{11} \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}, \quad t^{12} = T^{12} \frac{1}{\sqrt{g}}, \\
 & t^{21} = T^{21} \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad t^{22} = T^{22} \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}.
 \end{aligned}$$

Z powyższego widać, że z symetrii tensora  $\mathbf{T}$  wynika w układach walcowych równość:

$$(4.6) \quad T^{12} = T^{21},$$

co w dowolnych układach na ogół nie zachodzi.

Wprowadzamy dalej zgodnie z (B.14) składowe fizyczne  $F^m$  i  $V^m$  wektorów  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{v}$ , a także, zgodnie z definicjami (2.4) i (3.12), operatory  $D_a$  i  $D_0$ .

Wykonując wszystkie różniczkowania, wynikające z wprowadzenia składowych fizycznych, a następnie wykorzystując wzory (A.32), (A.35), (2.1) i (2.9)–(2.12), otrzymujemy równania ruchu (4.4) (po pomnożeniu stronami odpowiednio przez  $g/g_{22}\sqrt{g_{11}}$  i  $g/g_{11}\sqrt{g_{22}}$ ) w ich postaci niezmienniczej względem zmiany parametryzacji układu współrzędnych:

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad & D_1(T^{11} \sin \psi) + D_2(T^{12} \sin \psi) - T^{11} [2(K_1 + D_1 \psi) \cos \psi + (K_2 + D_2 \psi)] - \\
 & - T^{12} [2(K_1 + D_1 \psi) + \cos \psi D_2 \psi] + T^{22} K_2 + \varrho \sin^2 \psi F^1 = \\
 & = \varrho \sin \psi \{ \sin \psi [D_0 V^1 + V^1 D_1 V^1 + V^2 D_2 V^1] - \cos \psi K_1 (V^1)^2 - \\
 & - [(K_1 + D_1 \psi) - \cos \psi (K_2 + D_2 \psi)] V^1 V^2 + K_2 (V^2)^2 \}, \\
 & D_2(T^{22} \sin \psi) + D_1(T^{12} \sin \psi) - T^{22} [(K_1 + D_1 \psi) + 2(K_2 + D_2 \psi) \cos \psi] - \\
 & - T^{12} [\cos \psi D_1 \psi + 2(K_2 + D_2 \psi)] + T^{11} K_1 + \varrho \sin^2 \psi F^2 = \\
 & = \varrho \sin \psi \{ \sin \psi [D_0 V^2 + V^1 D_1 V^2 + V^2 D_2 V^2] + K_1 (V^1)^2 - \\
 & - [(K_2 + D_2 \psi) - \cos \psi (K_1 + D_1 \psi)] V^1 V^2 - \cos \psi K_2 (V^2)^2 \},
 \end{aligned}$$

Warto nadmienić, że dopiero w połączeniu z pochodnymi składowych tensora metrycznego, powstałymi w równaniach (4.4) przez różniczkowanie związków (4.5), można było się pozbyć występujących w tych równaniach symboli  $I_{11}^1$  i  $I_{22}^2$ .

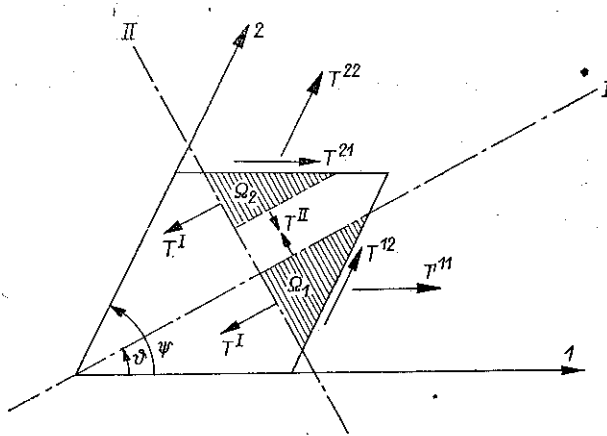
W przypadku, gdy pole sił masowych  $f$  ma potencjał  $U$ , za  $F^1$  i  $F^2$  można podstawić wyrażenia (3.3).

W przypadku procesów quasi-statycznych prawe strony równań (4.7) mogą być zastąpione zerami.

**4.3. Prawo zachowania masy w płaskim procesie dynamicznym.** Wobec (3.13) i (3.6) prawo zachowania masy (4.3) w przypadku płaskiego procesu dynamicznego można przedstawić w postaci

$$(4.8) \quad D_0 \varrho + V^1 D_1 \varrho + V^2 D_2 \varrho + \varrho \left\{ D_1 V^1 + D_2 V^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sin \psi} [V^1 (K_1 \cos \psi + K_2 + D_2 \psi) + V^2 (K_1 + D_1 \psi + K_2 \cos \psi)] \right\} = 0.$$

**4.4. Naprężenia główne a składowe fizyczne tensora naprężenia.** W dowolnym punkcie  $(\eta^1, \eta^2)$  rozważmy stan naprężenia określony tensorem  $\mathbf{T}$ . Składowe fizyczne (4.5)  $(T^{11}, T^{12}, 0)$ ,  $(T^{21}, T^{22}, 0)$ ,  $(0, 0, T^{III})$  traktować można jako rozkład w unormowanej bazie  $\mathfrak{e}_\alpha$  trzech wektorów przyporządkowanych przez tensor  $\mathbf{T}$  wersorom bazy  $\mathfrak{e}_\alpha$  (por. Dodatek B).



Rys. 1

Zgodnie z teorią tensorów symetrycznych o walencji 2 istnieje przynajmniej jeden układ kierunków głównych  $\{I, II, 3\}$ . Reprezentacja tensora naprężenia w unormowanym układzie ortogonalnym, pokrywającym się z układem kierunków głównych (reprezentacja główna), jest macierzą diagonalną, której wyrazy  $T^I$ ,  $T^{II}$ ,  $T^{III}$  nazywamy naprężeniami głównymi. Jak wiadomo, wartości  $T^I$ ,  $T^{II}$  i  $T^{III}$  są równoważne niezmiennikom tensora  $\mathbf{T}$ .

Wyrazimy obecnie składowe fizyczne  $T^{mn}$  tensora  $\mathbf{T}$  przez naprężenia główne  $T^I$  i  $T^{II}$ . Rozważmy element ośrodka wycięty przez płaszczyzny współrzędnych stycznego układu afinicznego, przedstawiony na rys. 1.



Oznaczmy przez  $\vartheta$  kąt pomiędzy kierunkiem  $\mathfrak{e}_1$  a kierunkiem pierwszego naprężenia głównego  $T^I$ , mierzony od kierunku  $\mathfrak{e}_1$ . Rozpatrując równowagę podelementów  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  dochodzimy do związków

$$(4.9) \quad \begin{aligned} T^{11} \sin \psi &= T^I \sin^2 (\psi - \vartheta) + T^{II} \cos^2 (\psi - \vartheta), \\ T^{12} \sin \psi &= T^I \sin \vartheta \sin (\psi - \vartheta) - T^{II} \cos \vartheta \cos (\psi - \vartheta), \\ T^{22} \sin \psi &= T^I \sin^2 \vartheta + T^{II} \cos^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Wzory (4.9) można otrzymać w sposób formalny wykorzystując prawo tensorowej transformacji reprezentacji  $T^{Mn}$  (Dodatek B) w reprezentację główną tensora.

### 5. Płaskie stany ośrodków sztywno plastycznych bez wzmocnienia

5.1. Ośrodki plastyczne. Wprowadźmy nowy obiekt niezmienniczy — tensor prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ :

$$(5.1) \quad \mathbf{D} = d^{\alpha\beta} \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}_\beta,$$

którego reprezentacja  $d^{\alpha\beta}$  jest zdefiniowana w sposób następujący

$$(5.2) \quad d^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\nabla^\alpha v^\beta + \nabla^\beta v^\alpha),$$

gdzie  $\nabla^\alpha v^\beta$  jest odpowiednią reprezentacją gradientu prędkości  $\text{grad } \mathbf{v} \equiv \nabla_\alpha v^\beta \mathfrak{e}^\alpha \mathfrak{e}_\beta = = \nabla^\alpha v^\beta \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}_\beta$ .

Ośrodek sztywno-plastyczny bez wzmocnienia (zwany dalej dla zwięzłości ośrodkiem plastycznym) definiujemy przy pomocy równania konstytutywnego

$$(5.3) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{D}),$$

gdzie  $\mathbf{T}$  oznacza tensor naprężenia, a  $\mathbf{T}(\mathbf{D})$  jest tensorową funkcją o własnościach następujących (por. [3], zależność między dewiatorami):

1.  $\mathbf{T}(\mathbf{D})$  jest funkcją izotropową,
2. Funkcja  $\mathbf{T}(\mathbf{D})$  jest niezależna od zmiany skali czasu.

Własność 2 można wypowiedzieć inaczej: składowe tensora naprężenia nie zależą od bezwzględnych wielkości składowych tensora prędkości odkształcenia, lecz od ich wzajemnych stosunków; stąd np.

$$(5.4) \quad t^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta} \left( \frac{d^{12}}{d^{11}}, \frac{d^{13}}{d^{11}}, \frac{d^{22}}{d^{11}}, \frac{d^{23}}{d^{11}}, \frac{d^{33}}{d^{11}} \right).$$

Oznacza to, że sześć wielkości  $t^{\alpha\beta}$  jest funkcjami pięciu bezwymiarowych wielkości  $d^{\alpha\beta}/d^{11}$ , zatem sześć równań (5.4) nie jest wzajemnie niezależnych; istnieje dodatkowy związek na  $t^{\alpha\beta}$ , który nazywamy warunkiem plastyczności i zapisujemy w postaci:

$$(5.5) \quad \Phi(\mathbf{T}) = 0,$$

gdzie  $\Phi(\mathbf{T})$  jest skalarną funkcją argumentu tensorowego. Można ją zatem przedstawić jako funkcję liczbową niezmienników tensora  $\mathbf{T}$  i na drodze analizy wymia-

rowej określić bliżej jej postać. Do naszych celów wystarczy jedynie sam fakt istnienia związku (5.5).

Zarówno funkcja  $\mathbf{T}(\mathbf{D})$  jak i  $\Phi(\mathbf{T})$  zależą w przypadku ośrodka niejednorodnego od wyboru materialnej cząstki ośrodka, której własności są lokalnie opisane przez  $m$  stałych — parametrów plastycznej niejednorodności  $k_i (i = 1, 2, \dots, m)$ . W eulerowskim opisie ruchu ośrodka będziemy mieli zatem do czynienia z  $m$  polami skalarnymi  $k_i$ .

Wobec powyższego i wobec tego, że naprężenia główne są równoważne niezmiennikom, możemy warunek plastyczności (5.5) przedstawić w postaci

$$(5.6) \quad \Phi(T^I, T^{II}, T^{III}, k_1, k_2, \dots, k_m) = 0.$$

**5.2. Płaskie stany ośrodków plastycznych.** Zgodnie z powszechnie stosowaną terminologią płaskie procesy dynamiczne ośrodków plastycznych nazywać będziemy ich płaskimi stanami. Oprócz warunków wymienionych w p. 4.1. zachodzić ma następujący warunek:

$$(5.7) \quad k_i = k_i(\eta^1, \eta^2), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Płaski stan ośrodka plastycznego jest zawsze szczególnym przypadkiem procesu w przestrzeni trójwymiarowej takim jednak, że istnieje zależność pozwalająca wyrazić naprężenie  $T^{III}$  przez pozostałe naprężenia główne (por. [4]):

$$(5.8) \quad T^{III} = T^{III}(T^I, T^{II}).$$

Zależność (5.8) otrzymujemy uwzględniając warunki kinematyczne lub naprężeniowe panujące w ośrodku na płaszczyznach  $\eta^3 = \text{const}$  i wykorzystując równanie konstytutywne (5.3). Tą drogą jako szczególne przypadki stanów płaskich można wyspecyfikować np. płaski stan odkształcenia i płaski stan naprężenia, zwane dalej odpowiednio PSO i PSN.

Warunek plastyczności (5.6) i zależność (5.8) określają w przestrzeni naprężeń głównych pewną krzywą przestrzenną, której rzut  $L$  na płaszczyznę  $T^I, T^{II}$  określa równanie

$$(5.9) \quad L: \quad \Phi[T^I, T^{II}, T^{III}(T^I, T^{II}), k_1, k_2, \dots, k_m] = 0.$$

Równanie (5.9) można przedstawić w postaci parametrycznej ([4]):

$$(5.10) \quad L: \quad \begin{aligned} T^I &= \mathcal{C}^I(k_0, k_1, k_2, \dots, k_m), \\ T^{II} &= \mathcal{C}^{II}(k_0, k_1, k_2, \dots, k_m), \end{aligned}$$

gdzie dla parametru krzywej przyjęto wygodne ze względów formalnych oznaczenie  $k_0$ .

Podstawiając (5.10) do (4.9) otrzymujemy

$$(5.11) \quad \begin{aligned} T^{11} \sin \varphi &= \mathcal{C}^I(k_j) \sin^2(\varphi - \vartheta) + \mathcal{C}^{II}(k_j) \cos^2(\varphi - \vartheta), \\ T^{12} \sin \varphi &= \mathcal{C}^I(k_j) \sin \vartheta \sin(\varphi - \vartheta) - \mathcal{C}^{II}(k_j) \cos \vartheta \cos(\varphi - \vartheta), \\ T^{22} \sin \varphi &= \mathcal{C}^I(k_j) \sin^2 \vartheta + \mathcal{C}^{II}(k_j) \cos^2 \vartheta, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Szczególnym przypadkiem (5.11) jest podstawienie M. Levy'ego, stosowane w analizie PSO ośrodków idealnie plastycznych o warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego lub Coulomba-Treski.

Podstawiając (5.11) do (4.7) i mnożąc stronami przez  $\sin \psi$  otrzymujemy równania ruchu w płaskich stanach ośrodków plastycznych:

$$\begin{aligned}
 & \sin \psi \sum_{j=0}^m \{ [\sin^2 (\psi - \vartheta) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I + \cos^2 (\psi - \vartheta) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_1 k_j + \\
 & \quad + [\sin \vartheta \sin (\psi - \vartheta) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I - \cos \vartheta \cos (\psi - \vartheta) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_2 k_j \} + \\
 & \quad + \sin \psi (\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}) [\sin 2 (\psi - \vartheta) D_1 (\psi - \vartheta) + \sin (\psi - 2\vartheta) D_2 \vartheta] + \\
 & \quad + \sin \psi [\mathcal{T}^I \sin \vartheta \cos (\psi - \vartheta) + \mathcal{T}^{II} \cos \vartheta \sin (\psi - \vartheta)] D_2 \psi - \\
 & \quad - [\mathcal{T}^I \sin^2 (\psi - \vartheta) + \mathcal{T}^{II} \cos^2 (\psi - \vartheta)] [2 (K_1 + D_1 \psi) \cos \psi + (K_2 + D_2 \psi)] - \\
 & \quad - [\mathcal{T}^I \sin \vartheta \sin (\psi - \vartheta) - \mathcal{T}^{II} \cos \vartheta \cos (\psi - \vartheta)] [2 (K_1 + D_1 \psi) + \cos \psi D_2 \psi] + \\
 & \quad + (\mathcal{T}^I \sin^2 \vartheta + \mathcal{T}^{II} \cos^2 \vartheta) K_2 + \rho F^1 \sin^3 \psi = \\
 & \quad = \rho \sin^2 \psi \{ \sin \psi [D_0 V^1 + V^1 D_1 V^1 + V^2 D_2 V^1] - \\
 & \quad - K_1 (V^1)^2 \cos \psi - [(K_1 + D_1 \psi) - (K_2 + D_2 \psi) \cos \psi] V^1 V^2 + K_2 (V^2)^2 \}, \\
 (5.12) \quad & \sin \psi \sum_{j=0}^m \{ [\sin \vartheta \sin (\psi - \vartheta) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I - \cos \vartheta \cos (\psi - \vartheta) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_1 k_j + \\
 & \quad + [\sin^2 \vartheta \partial_{k_j} \mathcal{T}^I + \cos^2 \vartheta \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_2 k_j \} + \\
 & \quad + \sin \psi (\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}) [\sin (\psi - 2\vartheta) D_1 \vartheta + \sin 2\vartheta D_2 \vartheta] + \\
 & \quad + \sin \psi [\mathcal{T}^I \sin \vartheta \cos (\psi - \vartheta) + \mathcal{T}^{II} \cos \vartheta \sin (\psi - \vartheta)] D_1 \psi - \\
 & \quad - [\mathcal{T}^I \sin^2 \vartheta + \mathcal{T}^{II} \cos^2 \vartheta] [(K_1 + D_1 \psi) + 2 (K_2 + D_2 \psi) \cos \psi] - \\
 & \quad - [\mathcal{T}^I \sin \vartheta \sin (\psi - \vartheta) - \mathcal{T}^{II} \cos \vartheta \cos (\psi - \vartheta)] [\cos \psi D_1 \psi + 2 (K_2 + \\
 & \quad + D_2 \psi)] + [\mathcal{T}^I \sin^2 (\psi - \vartheta) + \mathcal{T}^{II} \cos^2 (\psi - \vartheta)] K_1 + \rho F^2 \sin^3 \psi = \\
 & \quad = \rho \sin^2 \psi \{ \sin \psi [D_0 V^2 + V^1 D_1 V^2 + V^2 D_2 V^2] + K_1 (V^1)^2 + \\
 & \quad + [(K_1 + D_1 \psi) \cos \psi - (K_2 + D_2 \psi)] V^1 V^2 - K_2 (V^2)^2 \cos \psi \}.
 \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenie:

$$\partial_{k_j} \equiv \frac{\partial}{\partial k_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Odnośnie równań (5.12) należy tu odnotować dwa fakty:

1. Wobec podstawienia (5.11) zapewnione jest tożsamościowe spełnienie warunku plastyczności (5.5).

2. Z uwagi na wyróżnienie współrzędnej  $\eta^1$  przez wprowadzenie kąta  $\vartheta$  równania (5.12) utraciły symetrię ze względu na wskaźniki 1 i 2, jaką miały poprzednio w postaci (4.7).

W eulerowskim opisie ruchu parametry plastycznej niejednorodności są nieznanymi funkcjami współrzędnych przestrzennych i czasu. Funkcje  $k_i = k_i(\eta^1, \eta^2, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  określają własności cząstki, która w chwili  $t$  ma współrzędne  $(\eta^1, \eta^2)$ ; w innej chwili może w tym samym punkcie przestrzeni pojawić cząstka o innych własnościach; stąd zależność pól  $k_i$  od czasu. Jeżeli założymy, że własności ośrodka nie zmieniają się w czasie procesu, to otrzymamy  $m$  dodatkowych równań na funkcje plastycznej niejednorodności:

$$(5.13) \quad \dot{k}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

które zgodnie z (3.13) przedstawić możemy w postaci

$$(5.14) \quad D_0 k_i + V^1 D_1 k_i + V^2 D_2 k_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Równania (5.12) i (5.14) wraz z prawem zachowania masy (4.8) i równaniem konstytutywnym (5.3) tworzą pełny układ  $m+5$  równań płaskiego stanu ośrodka plastycznego. Funkcjami poszukiwanymi są:  $\vartheta, k_0, k_1, \dots, k_m, V^1, V^2, p$ , a zmiennymi niezależnymi  $\eta^1, \eta^2, t$ .

**5.3. Stacjonarne stany quasi-statyczne.** W przypadku stanów quasi-statycznych, tzn. gdy udział sił bezwładności w równaniach ruchu jest niewielki, prawe strony równań (5.12) mogą być zastąpione zerami. Z uwagi na założenie o stacjonarności procesów znikają również pochodne cząstkowe względem czasu w równaniach (5.14) i (4.8). Przyjęte ograniczenia są jedynie natury kinematycznej i używana tą drogą klasa stanów pozostaje nadal klasą bardzo obszerną.

Równania (5.12) i (5.14) tworzą układ  $m+2$  równań różniczkowych cząstkowych na  $m+2$  funkcje szukane:  $\vartheta, k_0, k_i, i = 1, 2, \dots, m$ . Zakładamy przy tym, że znamy pole prędkości i gęstość; w pewnych przypadkach można je określić niezależnie z układu równań (4.8) i (5.3).

Zajmiemy się obecnie analizą układu (5.12)+(5.14) w przypadku stacjonarnych stanów quasi-statycznych.

Napişemy nasze równania w pewnym nieznanym układzie krzywoliniowym, takim że spełniony jest warunek

$$(5.15) \quad \psi = 2\vartheta.$$

W ten sposób uzależnimy układ współrzędnych od jednej z funkcji poszukiwanych. Mamy więc

$$(5.16) \quad \sum_{j=0}^m \{ [(1 - \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I + (1 + \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_1 k_j + \\ + [(1 - \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I - (1 + \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_2 k_j \} - \\ - (\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}) (2K_1 + D_1 \psi) \sin \psi + 2Q F^I \sin^2 \psi = 0, \\ \sum_{j=0}^m \{ [(1 - \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I - (1 + \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_1 k_j + \\ + [(1 - \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I + (1 + \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_2 k_j \} - \\ - (\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}) (2K_2 + D_2 \psi) \sin \psi + 2Q F^2 \sin^2 \psi = 0, \\ V^1 D_1 k_i + V^2 D_2 k_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Warto tu zaznaczyć, że w postaci dwóch pierwszych równań układu (5.16) równania (5.12) odzyskały utraconą symetrię ze względu na wskaźniki 1 i 2.

Z teorii quasi-liniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych wiadomo, że jeśli układ można przedstawić w takiej postaci, iż w każdym równaniu występuje różniczkowanie tylko w jednym kierunku, to układ równań jest typu hiperbolicznego, a postać tę nazywamy normalną. Kierunek różniczkowania nazywamy kierunkiem charakterystycznym, zbiór takich kierunków w obszarze określa rodzinę krzywych zwanych charakterystykami, a równania różniczkowe we wspomnianej postaci są zwane warunkami zgodności bądź też związkami wzdłuż charakterystyk.

Pokażemy, że nakładając dalszy warunek na kąt  $\psi$  można uzyskać jednocześnie kryterium typu układu równań oraz związki wzdłuż charakterystyk. Zażądajmy mianowicie, by w równaniu (5.16)<sub>1</sub> zniknął współczynnik stojący przy  $D_2 k_0$ :

$$(5.17) \quad (1 - \cos \psi) \partial_{k_0} \mathcal{T}^I - (1 + \cos \psi) \partial_{k_0} \mathcal{T}^{II} = 0.$$

Stąd otrzymujemy warunek na kąt  $\psi$  (por. [4]):

$$(5.18) \quad \psi = 2 \arctg \sqrt{\frac{\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II}}{\partial_{k_0} \mathcal{T}^I}}.$$

Wobec (5.17) i  $m$  ostatnich równań (5.16) dwa pierwsze równania tego układu można napisać w postaci

$$(5.19) \quad \sum_{j=0}^m [(1 - \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^I + (1 + \cos \psi) \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}] D_\alpha k_j + \\ - \frac{V^\alpha}{V^\beta} \sum_{i=1}^m [(1 - \cos \psi) \partial_{k_i} \mathcal{T}^I - (1 + \cos \psi) \partial_{k_i} \mathcal{T}^{II}] D_\alpha k_i - \\ - (\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}) (2K_\alpha + D_\alpha \psi) \sin \psi + 2\rho F^\alpha \sin^2 \psi = 0, \\ \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Za kąt  $\psi$  należy tu podstawić (5.18).

Wyłączone wyżej przypadki  $V^\beta = 0$  nie nastęrczają trudności, gdyż oznaczają one  $D_\alpha(k_i) = 0$  i  $k_i = k_i(\eta^\beta)$  są wówczas funkcjami znanymi z warunków brzegowych. Nie wykonujemy wtedy przejścia (5.19) i dalsze rozważania przeprowadzamy na równaniach w postaci (5.16)<sub>1,2</sub> z warunkiem (5.17). W szczególności przypadek  $V^1 = V^2 = 0$  odpowiada formalnie zadaniom o początkowym płynieciu plastycznym.

Jeśli ostatnie  $m$  równań układu (5.16) napiszemy w dowolnym układzie krzywoliniowym, którego jedną z rodzin linii współrzędnych stanowią linie prądu, to otrzymamy wówczas równania te w postaci

$$(5.20) \quad D_\nu k_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie  $D_\nu$  oznacza pochodną w kierunku wektora prędkości.

Pamiętajmy, że równania (5.16) i (5.19) napisane zostały w nieznanym układzie krzywoliniowym. Aby wyznaczyć ten układ musimy odwołać się do praukładu kartezjańskiego i wykorzystać związki (2.16). W równaniach (5.19) pojawiają

się wtedy pochodne  $\chi$ ; w pierwszym  $D_1 \chi$ , w drugim  $D_2 \chi$ . Kąta  $\psi$  wprowadzie nadal nie znamy, ale ruguje go związek (5.18).

Widzimy, że w równaniach (5.19) i (5.20) występują różniczkowania tylko w jednym kierunku: odpowiednio  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  i  $v$ . Byłaby to zatem postać normalna układu (5.16), ale istotnym warunkiem jej uzyskania jest możliwość wykonania operacji (5.18) w dziedzinie rzeczywistej. Stąd jako warunek hiperboliczności układu otrzymujemy warunek

$$(5.21) \quad \operatorname{sgn} [(\partial_{k_0} \mathcal{T}^I) (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II})] = 1.$$

Jeśli

$$(5.22) \quad \operatorname{sgn} [(\partial_{k_0} \mathcal{T}^I) (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II})] = 0,$$

to układ (5.12) jest typu parabolicznego, a typ eliptyczny występuje w przypadku gdy

$$(5.23) \quad \operatorname{sgn} [(\partial_{k_0} \mathcal{T}^I) (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II})] = -1.$$

W przypadku (5.21) kąt między liniami współrzędnych naszego układu krzywoliniowego spełnia oczywiście warunek

$$(5.24) \quad 0 < \psi < \pi;$$

natomiast w przypadku (5.22) mamy

$$(5.25) \quad \psi = 0 \quad \text{lub} \quad \psi = \pi$$

i linie współrzędnych  $\eta^1$  i  $\eta^2$  degenerują się do jednej tylko rodziny.

Jeżeli zachodzi (5.21), to podstawiając (5.18) do (5.19) możemy układ (5.16) przedstawić w ostatecznej postaci normalnej:

$$(5.26) \quad \sum_{j=0}^m (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II} \partial_{k_j} \mathcal{T}^I + \partial_{k_0} \mathcal{T}^I \partial_{k_j} \mathcal{T}^{II}) D_\alpha k_j - \\ - \frac{V^\alpha}{V^\beta} \sum_{i=1}^m (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II} \partial_{k_i} \mathcal{T}^I - \partial_{k_0} \mathcal{T}^I \partial_{k_i} \mathcal{T}^{II}) D_\alpha k_i + \\ + \frac{\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}}{\partial_{k_0} (\mathcal{T}^I + \mathcal{T}^{II})} [(\partial_{k_0} \mathcal{T}^I) D_\alpha (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II}) - (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II}) D_\alpha (\partial_{k_0} \mathcal{T}^I)] - \\ - 2 (\mathcal{T}^I - \mathcal{T}^{II}) \sqrt{(\partial_{k_0} \mathcal{T}^I) (\partial_{k_0} \mathcal{T}^{II})} K_\alpha + 4\rho \frac{\partial_{k_0} \mathcal{T}^I \cdot \partial_{k_0} \mathcal{T}^{II}}{\partial_{k_0} (\mathcal{T}^I + \mathcal{T}^{II})} F^\alpha = 0, \\ \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad D_v k_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dwa pierwsze równania (5.26) nazywać będziemy związkami wzdłuż charakterystyk dla naprężeń,  $m$  ostatnich równań — związkami wzdłuż charakterystyk dla funkcji niejednorodności. Rodzinami charakterystyk są tu odpowiednio: dwie rodziny linii współrzędnych  $\eta^1$  i  $\eta^2$  oraz linie prądu (w rozpatrywanym przypadku stacjonarnym pokrywające się zresztą z torami cząstek), stanowiące rodzinę  $m$ -krotną. Równania (5.26) są najogólniejszą postacią związków wzdłuż charakte-

rystyk w teorii stacjonarnych quasi-statycznych płaskich stanów niejednorodnych ośrodków sztywno-plastycznych bez wzmocnienia.

W następnym punkcie pokażemy, jak z równań (5.26) bezpośrednio otrzymuje się związki wzdłuż charakterystyk dla kilku najlepiej dotychczas zbadanych przypadków płaskich stanów.

**5.4. Szczególne przypadki płaskich stanów.** W przypadku *PSO jednorodnego ośrodka sypkiego z kohezją w polu potencjalnych sił masowych* równania (5.10) przybierają postać (w tradycyjnych oznaczeniach)

$$(5.27) \quad \mathcal{C}^I = \sigma(1 - \sin \varphi) + k \cos \varphi, \quad \mathcal{C}^{II} = \sigma(1 + \sin \varphi) - k \cos \varphi.$$

Zgodnie z naszą symboliką

$$\sigma = k_0,$$

kąt tarcia wewnętrznego

$$\varphi = k_1,$$

współczynnik kohezji

$$k = k_2.$$

Stosujemy kryterium (5.21)–(5.23) typu układu:

$$(5.28) \quad \operatorname{sgn} [(\partial_\sigma \mathcal{C}^I)(\partial_\sigma \mathcal{C}^{II})] = \operatorname{sgn} [(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \varphi)] = \operatorname{sgn} \cos^2 \varphi = 1,$$

a więc będziemy mieć do czynienia z układem typu hiperbolicznego.

Kąt między charakterystykami wobec (5.18) wynosi

$$(5.29) \quad \psi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Zauważmy, że z (5.18) wynika

$$(5.30) \quad \sin \psi = 2 \frac{\partial_{k_0} \mathcal{C}^I - \partial_{k_0} \mathcal{C}^{II}}{\sqrt{\partial_{k_0} (\mathcal{C}^I + \mathcal{C}^{II})}}, \quad \cos \psi = \frac{\partial_{k_0} (\mathcal{C}^I - \mathcal{C}^{II})}{\partial_{k_0} (\mathcal{C}^I + \mathcal{C}^{II})}.$$

Zatem zgodnie z (3.3) składowe fizyczne sił masowych o potencjale  $U$  przedstawiają się w układzie charakterystyk w sposób następujący:

$$(5.31) \quad F^\alpha = -\frac{[\partial_{k_0} (\mathcal{C}^I + \mathcal{C}^{II})]^2}{4 \partial_{k_0} \mathcal{C}^I \partial_{k_0} \mathcal{C}^{II}} \left[ D_\alpha U - \frac{\partial_{k_0} (\mathcal{C}^I - \mathcal{C}^{II})}{\partial_{k_0} (\mathcal{C}^I + \mathcal{C}^{II})} D_\beta U \right], \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Podstawiając (5.31) do (5.26) i wykonując wszystkie różniczkowania na (5.27) otrzymujemy związki wzdłuż charakterystyk dla naprężeń dla rozpatrywanego przypadku:

$$(5.32) \quad D_\alpha \sigma + 2 [\sigma \operatorname{tg} \varphi - k] K_\alpha + \frac{1}{\cos^2 \varphi} [D_\alpha U + \sin \varphi D_\beta U] = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \alpha, \beta = 1, 2.$$

PSO ośrodka sypkiego bez kohezji ( $k = 0$ ) jest przypadkiem szczególnym rozważanego przypadku. Kąt między charakterystykami pozostaje nadal równy (5.29), natomiast związki wzdłuż charakterystyk (5.32) przybierają postać

$$(5.33) \quad D_\alpha \sigma + 2\sigma \operatorname{tg} \varphi K_\alpha + \frac{1}{\cos^2 \varphi} [D_\alpha U + \sin \varphi D_\beta U] = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Są to znane w statyce ośrodków sypkich równania KÖTTERA (por. [5]). Różnice w znakach w ostatnim wyrazie w porównaniu z [5] spowodowane są inną skrętnością układu współrzędnych oraz znakiem plus w definicji potencjału (3.1).

Równania te można zastosować również do analizy ośrodków sypkich z kohezją wprowadzając zamiast  $\sigma$  tzw. naprężenie sprowadzone.

PSO ośrodka idealnie plastycznego ( $\varphi = 0$ ) bez sił masowych ( $U = \text{const}$ ) jest dalszym przypadkiem szczególnym rozważanego przypadku, niezmiernie ważnym i dość dobrze zbadanym w teorii ośrodków plastycznych. Zgodnie z ogólnie przyjętą nomenklaturą współczynnik kohezji  $k$  nazywamy tu granicą plastyczności.

Kąt między charakterystykami wynosi

$$(5.34) \quad \psi = \pi/2,$$

a związki wzdłuż charakterystyk są następujące:

$$(5.35) \quad D_\alpha \sigma - 2kK_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

W przypadku PSN jednorodnego ośrodka idealnie plastycznego bez sił masowych równania (5.10) (w tradycyjnych oznaczeniach) mają postać (por. [6])

$$(5.36) \quad \mathcal{T}^I = k(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega), \quad \mathcal{T}^{II} = k(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega).$$

Zgodnie z naszą symboliką  $\omega = k_0(\eta^1, \eta^2)$  oraz  $k = k_1$  (granica plastyczności).

Stosujemy kryterium typu układu równań:

$$(5.37) \quad \operatorname{sgn} [k^2(4 \sin^2 \omega - 1)] = \begin{cases} 1 & \text{dla } \frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5}{6}\pi \text{ i } \frac{7}{8}\pi < \omega < \frac{11}{6}\pi, \\ 0 & \text{dla } \omega = \frac{\pi}{6}, \omega = \frac{5}{6}\pi, \omega = \frac{7}{6}\pi, \omega = \frac{11}{6}\pi. \\ -1 & \text{w pozostałych podprzedziałach } \langle 0, 2\pi \rangle. \end{cases}$$

Zajmiemy się bliżej przypadkiem hiperboliczności (5.37)<sub>1</sub>. Kąt między charakterystykami wobec (5.18)<sub>1</sub> (por. [6]) wynosi

$$(5.38) \quad \psi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-\sqrt{3} \sin \omega - \cos \omega}{-\sqrt{3} \sin \omega + \cos \omega}} = \pi - \operatorname{arc} \cos \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}}.$$

Związki wzdłuż charakterystyk (5.26) przybierają postać

$$(5.39) \quad (\operatorname{ctg}^2 \omega - 1) D_\alpha \omega - K_\alpha \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

którą można dalej łatwo sprowadzić do postaci całkowej zamieszczonej w [6].



## 6. Uwagi końcowe

W pracy niniejszej wykorzystano geometryczne własności nieortogonalnych walcowych układów krzywoliniowych do ogólnego opisu płaskich procesów dynamicznych (p. 4), a następnie do analizy płaskich stanów ośrodków plastycznych (p. 5). W punkcie 5.3 odpowiednio obierając układ współrzędnych zbadano typ układu równań płaskiego stacjonarnego quasi-statycznego płynięcia. Dla przypadku hiperbolicznego układu otrzymano najogólniejszą postać związków wzdluz charakterystyk (5.26), z której, jak pokazano w p. 5.4, w prosty sposób otrzymać można odpowiednie zależności dla szeregu znanych przypadków płaskich stanów ośrodków plastycznych.

Należy tu zwrócić uwagę, że wyniki uzyskane w p. 5 mogą znaleźć zastosowanie nie tylko do analizy ośrodków plastycznych, lecz także i w przypadkach płaskich stanów tych ośrodków, w których na pole tensorowe naprężenia  $\mathbf{T}$  nałożony jest pewien warunek skalarny typu (5.5). Zauważmy, że z modelu ośrodka plastycznego wykorzystaliśmy tu jedynie warunek plastyczności; postać samego równania konstytutywnego (5.3) na rozważania nasze bliżej nie wpływała. Ogólne ujęcie płaskich stanów, tak jak w monografii [4], pozwala na opis uogólnionych stanów płaskich, których PSN i PSO są jedynie szczególnymi przypadkami.

Wykorzystanie geometrycznych własności układów krzywoliniowych oraz uzyskanych wyników do konkretnych problemów brzegowych stanowi również interesujący temat; ze względu na ogólny charakter niniejszego opracowania pozostaje on jednak poza jego ramami.

Autor składa podziękowanie Panu Doc. J. RYCHLEWSKIEMU za szereg cennych wskazówek otrzymanych w trakcie pisania pracy. W trosce o możliwie nowoczesne ujęcie tematu w kilku fragmentach pracy za Jego radą znalazły wyraz idee sformułowane przez niego w czasie licznych dyskusji z autorem oraz seminariów z nieliniowej mechaniki ośrodków ciągłych w ZMOC IPPT PAN. Są to w szczególności: pomysł zapisania podstawowych równań w sposób niezmienniczy względem zmiany parametryzacji układu, zmodyfikowana koncepcja THOMASA dotycząca równań konstytutywnych ośrodków plastycznych (p. 5.1) oraz idea traktowania funkcji niejednorodności plastycznej w eulerowskim opisie ruchu (koniec p. 5.2).

## Dodatek A

## Układy współrzędnych krzywoliniowych

**A.1. Wprowadzenie współrzędnych krzywoliniowych.** W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej wprowadzamy układ współrzędnych kartezjańskich o wersorach bazy  $\mathbf{i}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Obiekt niezmienniczy, tensor  $\mathbf{T}$  o walencji  $n$  określony w pewnym punkcie przestrzeni, ma postać:

$$(A.1) \quad \mathbf{T} = T^{p q \dots s} \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \dots \mathbf{i}_s,$$

gdzie  $n$  wskaźników  $p, q, \dots, s$  przebiega wartości 1, 2, 3. Stosuje się tu zapis używany w monografii [2]; tabelę  $3^n$  liczb rzeczywistych  $T^{p q \dots s}$  nazywamy reprezentacją tensora  $\mathbf{T}$  w bazie  $\mathbf{i}_k$ , a zespół symboli  $\mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \dots \mathbf{i}_s$  stowarzyszeniem bazowym<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup>Nazwy te przyjęły się na seminarium z podstaw mechaniki ośrodków ciągłych w Pracowni Zastosowań Inżynierskich Teorii Plastyczności ZMOC IPPT PAN.

Każdemu punktowi  $M$  przestrzeni przyporządkowujemy promień — wektor

$$(A.2) \quad \vec{OM} = \mathbf{r} = x^j \mathbf{i}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zbiór obiektów geometrycznych  $\mathbf{r}(x^j)$  utożsamiać będziemy dalej ze zbiorem punktów przestrzeni a liczby  $x^j$  nazywać będziemy współrzędnymi punktów w praukładzie kartezjańskim. Każdy z trzech zbiorów wartości współrzędnych  $\{x^j\}$  jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Niech zbiory liczb  $\{\eta^1\}$ ,  $\{\eta^2\}$ ,  $\{\eta^3\}$  stanowią ciągłe podzbiory zbioru wszystkich liczb rzeczywistych; podzbiór taki może być też identyczny z całym zbiorem. Uporządkowaną trójkę liczb  $(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$  nazywamy współrzędnymi krzywoliniowymi punktu  $M(x^1, x^2, x^3)$ , jeżeli istnieją trzy jednowartościowe, ciągłe i różniczkowalne funkcje zmiennych  $x^j$ , których zbiorami wartości są zbiory  $\{\eta^a\}$ :

$$(A.3) \quad x^a = x^a(\eta^1, \eta^2, \eta^3), \quad a = 1, 2, 3,$$

a jacobian powyższej transformacji nie znika:

$$(A.4) \quad J = \det \left\| \frac{\partial x^a}{\partial \eta^j} \right\| \neq 0.$$

Istnieje zatem przekształcenie odwrotne:

$$(A.5) \quad x^j = x^j(\eta^1, \eta^2, \eta^3), \quad j = 1, 2, 3.$$

Wobec powyższego wektor  $\mathbf{r}$  zależy od współrzędnych krzywoliniowych w sposób następujący:

$$(A.6) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}[x^j(\eta^1, \eta^2, \eta^3)] = \mathbf{r}(\eta^1, \eta^2, \eta^3).$$

Każde z równań

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\eta^1, \eta^2 = \text{const}, \eta^3 = \text{const}), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\eta^1 = \text{const}, \eta^2, \eta^3 = \text{const}), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\eta^1 = \text{const}, \eta^2 = \text{const}, \eta^3) \end{aligned}$$

wyznacza w przestrzeni pewną linię, zwaną odpowiednio linią  $\eta^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ .

W punkcie przestrzeni określonym przez wektor  $\mathbf{r}$  definiujemy lokalną bazę układu krzywoliniowego jako trójkę wektorów:

$$(A.8) \quad \mathfrak{e}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r},$$

gdzie symbol  $\partial_\alpha$  oznacza

$$(A.9) \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha}.$$

Niezbędną liniową niezależność wektorów  $\mathfrak{e}_\alpha$  zapewnia charakter transformacji (A.3). Jak widać, wektor  $\mathfrak{e}_\alpha$  jest styczny do linii  $\eta^\alpha$ .

Niech  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  wyznaczają dwa nieskończenie blisko siebie położone punkty. Infinitesimalny wektor  $d\mathbf{r}$  możemy przedstawić w lokalnej bazie  $\mathfrak{e}_\alpha(\mathbf{r})$  jako

$$(A.10) \quad d\mathbf{r} = dx^k \mathbf{i}_k = d\eta^\alpha \mathfrak{e}_\alpha,$$

a kwadrat odległości między tymi punktami

$$(A.11) \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \delta_{kl} dx^k dx^l = g_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta,$$

gdzie macierze  $\|\delta_{kl}\|$  i  $\|g_{\alpha\beta}\|$  zdefiniowane są następująco:

$$(A.12) \quad \|\delta_{kl}\| \equiv \|\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l\| = \|\delta_l^k\|,$$

$$(A.13) \quad \|g_{\alpha\beta}\| \equiv \|\mathfrak{e}_\alpha \cdot \mathfrak{e}_\beta\|.$$

Oznaczamy

$$(A.14) \quad g \equiv \det \|g_{\alpha\beta}\|.$$

Wobec liniowej niezależności wektorów  $\vartheta_\alpha$  spełniony jest warunek

$$(A.15) \quad g \neq 0.$$

W danym punkcie przestrzeni definiujemy bazę odwrotną  $\vartheta^\beta$  w sposób następujący:

$$(A.16) \quad \vartheta^\beta \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \vartheta^{(\beta+1) \bmod 3} \times \vartheta^{(\beta+2) \bmod 3}.$$

Dalej definiujemy macierz  $\|g^{\alpha\beta}\|$ :

$$(A.17) \quad \|g^{\alpha\beta}\| = \|\vartheta^\alpha \cdot \vartheta^\beta\|.$$

Wobec definicji (A.16) zachodzą związki odwrotne

$$\vartheta_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \vartheta^{(\alpha+1) \bmod 3} \times \vartheta^{(\alpha+2) \bmod 3},$$

gdzie

$$(A.18) \quad g_1 \equiv \det \|g^{\alpha\beta}\| = \frac{1}{g},$$

oraz zależności

$$(A.19) \quad \vartheta_\alpha \cdot \vartheta^\beta = \delta_\alpha^\beta,$$

$$(A.20) \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma.$$

Kwadrat odległości (A.10) można przedstawić dalej w postaci

$$(A.21) \quad ds^2 = g^{\alpha\beta} d\eta_\alpha d\eta_\beta = \delta_\alpha^\beta d\eta^\alpha d\eta_\beta,$$

gdzie  $d\eta_\alpha$  są współczynnikami rozkładu wektora  $dr$  w bazie  $\vartheta^\alpha(\mathbf{r})$ :

$$(A.22) \quad dr = d\eta_\alpha \vartheta^\alpha.$$

Macierze  $\|g_{\alpha\beta}\|$ ,  $\|g^{\alpha\beta}\|$  i  $\|\delta_\alpha^\beta\|$  są reprezentacjami tensora metrycznego  $\mathbf{G}$  przy odpowiednich powiązaniach bazowych:

$$(A.23) \quad \mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \vartheta^\beta = g^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = \delta_\alpha^\beta \vartheta^\alpha \vartheta_\beta.$$

Symboly Christoffela II rodzaju zdefiniowane zostały jako składowe pochodnych wektorów bazy:

$$(A.24) \quad \partial_\alpha \vartheta_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vartheta_\gamma = \partial_{\alpha\beta} \mathbf{r} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \vartheta_\gamma.$$

Do obliczenia symboli  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  korzystnie jest posłużyć się symbolami Christoffela I rodzaju:

$$\Gamma_{\delta, \alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}).$$

Wówczas

$$(A.25) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{\delta, \alpha\beta}.$$

Dowolny tensor  $\mathbf{T}$  o walencji  $n$ , określony w punkcie przestrzeni  $\mathbf{r}$ , przedstawiający się we współrzędnych kartezjańskich w postaci (A.1), w układzie krzywoliniowym może być zapisany w sposób następujący:

$$(A.26) \quad \mathbf{T}(\mathbf{r}) = t^{\alpha\beta\dots\delta}(\mathbf{r}) \vartheta_\alpha(\mathbf{r}) \vartheta_\beta(\mathbf{r}) \dots \vartheta_\delta(\mathbf{r}) = t_{\alpha\beta\dots\delta} \vartheta^\alpha \vartheta^\beta \dots \vartheta^\delta = \dots = t_{\alpha_1\dots\alpha_n}^{\beta_1\dots\beta_n} \vartheta^{\alpha_1} \vartheta^{\beta_1} \dots \vartheta^{\alpha_n} \vartheta^{\beta_n} = \dots$$

(<sup>2</sup>) J. Rychlewski zwrócił uwagę autora na fakt, że wzór (A.22) zachodzi na ogół dla niecałkowalnych przyrostów i dla bazy  $\vartheta^\alpha$  związek analogiczny do (A.8) na ogół nie zachodzi (wzór (1.15) na str. 18 w [2] jest błędny, co wynika zresztą z odsyłacza na tej samej stronie). Bazy  $\vartheta_\alpha$  i  $\vartheta^\alpha$  nie są zatem formalnie równoważne, gdyż baza  $\vartheta_\alpha$  jest wyróżniona przez swoją definicję (A.8).

Tensor o walencji 2, zwany w dalszej części pracy krótko tensorem, może być przedstawiony np. w czterech następujących postaciach:

$$(A.27) \quad T = t^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = t_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \vartheta^\beta = t_\alpha{}^\beta \vartheta^\alpha \vartheta_\beta = t^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vartheta^\beta.$$

Tensor o walencji 1, czyli wektor, przedstawić można w postaci

$$(A.28) \quad v = v_\alpha \vartheta_\alpha = v^\alpha \vartheta^\alpha.$$

**A.2. Krzywoliniowe układy walcowe.** Transformacja (A.3) postaci

$$(A.29) \quad \eta^1 = \eta^1(x^1, x^2), \quad \eta^2 = \eta^2(x^1, x^2), \quad \eta^3 = x^3$$

określa walcowy układ współrzędnych krzywoliniowych<sup>(3)</sup>.

Widać, że rodzina linii  $\eta^3$  jest rodziną prostych równoległych do osi  $x^3$ , a linie  $\eta^1$  i  $\eta^2$  stanowią dwie rodziny krzywych płaskich, powstałych przez przecięcie płaszczyznami  $x^3 = \text{const}$  dwóch rodzin powierzchni walcowych o tworzących równoległych do osi  $x^3$ .

Wektory bazy lokalnej układu walcowego są następujące:

$$(A.30) \quad \vartheta_1 = \vartheta_1(\eta^1, \eta^2), \quad \vartheta_2 = \vartheta_2(\eta^1, \eta^2), \quad \vartheta_3 = \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}^3 = \vartheta^3.$$

Wobec powyższego macierz  $\|g_{\alpha\beta}\|$  ma postać

$$(A.31) \quad \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{bmatrix} g_{11}(\eta^1, \eta^2) & g_{12}(\eta^1, \eta^2) & 0 \\ g_{21}(\eta^1, \eta^2) & g_{22}(\eta^1, \eta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak widać

$$(A.32) \quad g = \det \|g_{\alpha\beta}\| = g_{11} g_{22} - g_{12}^2.$$

Rozwiązując układ równań (A.20) otrzymujemy macierz  $\|g^{\alpha\beta}\|$ :

$$(A.33) \quad \|g^{\alpha\beta}\| = \begin{bmatrix} \frac{1}{g} g_{22} & -\frac{1}{g} g_{12} & 0 \\ -\frac{1}{g} g_{12} & \frac{1}{g} g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Symboly Christoffela I rodzaju obliczone wg (A.25) są następujące:

$$(A.34) \quad \begin{aligned} \Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{11}, & \Gamma_{2,11} &= \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_2 g_{11}, \\ \Gamma_{1,12} &= \Gamma_{1,21} = \frac{1}{2} \partial_2 g_{11}, & \Gamma_{2,12} &= \Gamma_{2,21} = \frac{1}{2} \partial_1 g_{22}, \\ \Gamma_{1,22} &= \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_1 g_{22}, & \Gamma_{2,22} &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{22}. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że pozostałe 19 symboli są równe zeru wobec tego, że wśród wskaźników występuje przynajmniej jedna trójka.

(3) Ogólnie: układem walcowych współrzędnych krzywoliniowych nazywamy układ określony przez transformację (A.3) postaci

$$\begin{aligned} \eta^\alpha &= \tilde{x}^l + c, & c & \text{— rzeczywiste} \\ \eta^{(\alpha+1) \bmod 3} &= \eta^{(\alpha+1) \bmod 3}(\tilde{x}^{(l+1) \bmod 3}, \tilde{x}^{(l+2) \bmod 3}), \\ \eta^{(\alpha+2) \bmod 3} &= \eta^{(\alpha+2) \bmod 3}(\tilde{x}^{(l+1) \bmod 3}, \tilde{x}^{(l+2) \bmod 3}), \end{aligned}$$

gdzie  $\tilde{x}^l$  oznaczają współrzędne punktu przestrzeni w układzie odniesienia powstałym przez sztywny obrót układu współrzędnych  $x^k$ . Przyjęcie powyższej transformacji w jej szczególnej postaci (A.29) nie zmniejsza w niczym ogólności naszych geometrycznych rozważań.

Symbole Christoffela II rodzaju obliczamy na podstawie (A.25), (A.33) i (A.34)

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g} (g_{22} \partial_1 g_{11} - 2g_{12} \partial_1 g_{12} + g_{12} \partial_2 g_{11}), \\
 \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2g} (g_{22} \partial_2 g_{11} - g_{12} \partial_1 g_{22}), \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2g} (2g_{22} \partial_2 g_{12} - g_{22} \partial_1 g_{22} - g_{12} \partial_2 g_{22}), \\
 \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2g} (2g_{11} \partial_1 g_{12} - g_{11} \partial_2 g_{11} - g_{12} \partial_1 g_{11}), \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2g} (g_{11} \partial_1 g_{22} - g_{12} \partial_2 g_{11}), \\
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2g} (g_{11} \partial_2 g_{22} - 2g_{12} \partial_2 g_{12} + g_{12} \partial_1 g_{22}).
 \end{aligned}
 \tag{A.35}$$

Pozostałe 19 symboli są tożsamościowo równe zeru.

#### Dodatek B (4)

#### O wielkościach geometrycznych i reprezentacjach fizycznych

**B. 1. Wielkości geometryczne** Niech będzie dany układ współrzędnych krzywoliniowych  $\eta^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Wówczas zgodnie z (A.6)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\eta^\alpha).
 \tag{B.1}$$

Transformację postaci

$$\hat{\eta}^1 = \hat{\eta}^1(\eta^1), \quad \hat{\eta}^2 = \hat{\eta}^2(\eta^2), \quad \hat{\eta}^3 = \hat{\eta}^3(\eta^3)
 \tag{B.2}$$

nazywamy zmianą parametryzacji układu współrzędnych. Przy takiej transformacji linie i powierzchnie współrzędnych pozostają tymi samymi tworami geometrycznymi. Macierz powyższej transformacji

$$\|\| a^\alpha_\beta \|\| = \|\| \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \hat{\eta}^\beta} \|\|
 \tag{B.3}$$

jest, jak łatwo zauważyć, macierzą diagonalną o wyrazach

$$a^\alpha_\alpha = a_\alpha
 \tag{B.4}$$

(bez sumowania).

Wektory bazy doznają jedynie zmiany modułów:

$$\hat{\mathfrak{e}}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\eta}^\alpha} = a_\alpha \mathfrak{e}_\alpha, \quad \hat{\mathfrak{e}}^\alpha = \frac{1}{a_\alpha} \mathfrak{e}^\alpha.
 \tag{B.5}$$

Zachodzą związki:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} \equiv \hat{\mathfrak{e}}_\alpha \cdot \mathfrak{e}_\beta = a_\alpha a_\beta g_{\alpha\beta}, \quad \hat{g}^{\alpha\beta} \equiv \hat{\mathfrak{e}}^\alpha \cdot \hat{\mathfrak{e}}^\beta = \frac{1}{a_\alpha a_\beta} g^{\alpha\beta}.
 \tag{B.6}$$

**DEFINICJA 1.** Wielkością geometryczną związaną z układem współrzędnych nazywamy wielkość o dowolnej walencji, powstałą w wyniku operacji na obiekcie  $\mathbf{r}$  i niezmienniczą względem zmiany parametryzacji układu.

(4) Napisany wspólnie z J. Rychlewskim.

Na szczególną uwagę zasługują następujące wielkości geometryczne:

1. Baza złożona z wersorów bazy  $\mathfrak{z}_\alpha^{\sim}$

$$(B.7) \quad \mathbf{e}_m \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \delta_m^\alpha \mathfrak{z}_\alpha^{\sim} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_{\alpha\alpha}}} \delta_m^\alpha \hat{\mathfrak{z}}_\alpha;$$

2. Baza odwrotna bazy  $\mathbf{e}_m$

$$(B.8) \quad \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^n = \delta_m^n, \quad \mathbf{e}^n = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \delta_\alpha^n \mathfrak{z}_\alpha = \sqrt{\hat{g}_{\alpha\alpha}} \delta_\alpha^n \hat{\mathfrak{z}}_\alpha.$$

3. Baza złożona z wersorów bazy  $\mathfrak{z}^\alpha$

$$(B.9) \quad \mathbf{E}^M = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \delta_\alpha^M \mathfrak{z}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}^{\alpha\alpha}}} \delta_\alpha^M \hat{\mathfrak{z}}^\alpha.$$

4. Baza odwrotna bazy  $\mathbf{E}^M$

$$(B.10) \quad \mathbf{E}^M \cdot \mathbf{E}_N^{\sim} = \delta_N^M, \quad \mathbf{E}_N = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \delta_N^\alpha \mathfrak{z}_\alpha = \sqrt{\hat{g}^{\alpha\alpha}} \delta_N^\alpha \hat{\mathfrak{z}}_\alpha.$$

Widać, że

$$(B.11) \quad \mathbf{E}_N = \sqrt{g^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha}} \delta_N^m \mathbf{e}_m = \sqrt{\hat{g}^{\alpha\alpha} \hat{g}_{\alpha\alpha}} \delta_N^m \mathbf{e}_m, \quad \alpha = m.$$

Bazy  $\mathbf{e}_m$  i  $\mathbf{E}^N$  są to szczególne przypadki baz anholonomicznych (por. [7], J. L. ERICKSEN, Appendix „Tensor Fields”, str. 802).

Należy zauważyć, że wektory baz odwrotnych  $\mathbf{e}^n$  i  $\mathbf{E}_N$  są wersorami jedynie w punktach ortogonalności układu.

5. Kąty, pod jakimi przecinają się w danym punkcie linie współrzędnych:

$$(B.12) \quad \psi_{\alpha\beta} \equiv \angle(\mathfrak{z}_\alpha^{\sim}, \mathfrak{z}_\beta) = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}} \mathfrak{z}_\alpha^{\sim} \cdot \mathfrak{z}_\beta \right) = \arccos(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \delta_\alpha^m \delta_\beta^n) = \psi_{\beta\alpha}.$$

6. Krzywizny i torsje linii współrzędnych oraz krzywizny powierzchni współrzędnych, jak łatwo stwierdzić, są również wielkościami geometrycznymi w sensie powyższej definicji.

**B.2. Reprezentacje fizyczne tensorów.** DEFINICJA 2. Reprezentacją fizyczną tensora o dowolnej walencji w danym układzie współrzędnych nazywamy jego reprezentację w bazie wektorów, będących wielkościami geometrycznymi w myśl definicji 1.

Każdy wektor  $\mathbf{v}$  można przedstawić w bazach (B.7)–(B.10):

$$(B.13) \quad \mathbf{v} = V^n \mathbf{e}_n = V_m \mathbf{e}^m = V_M \mathbf{E}^M = V^M \mathbf{E}_M.$$

Powyższe reprezentacje są, jak widać, reprezentacjami fizycznymi wektora  $\mathbf{v}$ .

Składowymi fizycznymi wektora nazywamy reprezentacje będące współczynnikami rozkładu tegoż wektora w bazach wersorowych. Są to  $V^m$  i  $V_M$ , które wobec (A.28), (B.13), (B.7) i (B.9) mają postać:

$$(B.14) \quad V^m = v^\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \delta_\alpha^m,$$

$$(B.15) \quad V_M = v_\alpha^{\sim} \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \delta_\alpha^M.$$

Każdy tensor  $\mathbf{T}$  o walencji 2 można przy pomocy baz (B.7)–(B.10) przedstawić w sposób następujący:

$$(B.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = T_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = T^m{}_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}^n = T_m{}^n \mathbf{e}^m \mathbf{e}_n = \\ &= T^{MN} \mathbf{E}_M \mathbf{E}_N = T_{MN} \mathbf{E}^M \mathbf{E}^N = T^M{}_N \mathbf{E}_M \mathbf{E}^N = T_M{}^N \mathbf{E}^M \mathbf{E}_N = \\ &= T^{mN} \mathbf{e}_m \mathbf{E}_N = T_{mN} \mathbf{e}^m \mathbf{E}^N = T^m{}_N \mathbf{e}_m \mathbf{E}^N = T_m{}^N \mathbf{e}^m \mathbf{E}_N = \\ &= T^{Mn} \mathbf{E}_M \mathbf{e}_n = T_{Mn} \mathbf{E}^M \mathbf{e}^n = T^M{}_n \mathbf{E}_M \mathbf{e}^n = T_M{}^n \mathbf{E}^M \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Widać, że każda z powyższych reprezentacji jest reprezentacją fizyczną w sensie definicji 2.

Składowymi fizycznymi tensora  $\mathbf{T}$  nazywamy elementy takiej jego reprezentacji, które można interpretować jako składowe fizyczne trzech wektorów przyporządkowanych wersorom bazy przez

lewo- lub prawostronne nasunięcie tensora  $\mathbf{T}$  (w przypadku tensorów symetrycznych sposób nasunięcia jest obojętny).

Ośmiu spośród szesnastu reprezentacji (B.16) można nadać taką interpretację. Składowymi fizycznymi tensora  $\mathbf{T}$  [których obliczenie na podstawie reprezentacji w bazach złożonych z wektorów  $\mathfrak{e}_\alpha$  i  $\mathfrak{e}^\alpha$  wynika bezpośrednio z (A.27), (B.16) i (B.7)–(B.10)] są zatem następujące składowe:

składowe wektora  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_n$  w bazie  $\mathbf{e}_m$

$$T^m_n = t^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}}} \delta_\alpha^m \delta_n^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T}$  w bazie  $\mathbf{e}_n$

$$T_m^n = t_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g_{\alpha\alpha}}} \delta_m^\alpha \delta_n^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{E}^M \cdot \mathbf{T}$  w bazie  $\mathbf{E}^N$

$$T^M_N = t^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g^{\beta\beta}}{g^{\alpha\alpha}}} \delta_\alpha^M \delta_N^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_N$  w bazie  $\mathbf{E}_M$

(B.17) 
$$T_M^N = t_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g^{\alpha\alpha}}{g^{\beta\beta}}} \delta_M^\alpha \delta_N^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^N$  w bazie  $\mathbf{e}_m$

$$T^{mN} = t^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g^{\beta\beta}}} \delta_\alpha^m \delta_N^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T}$  w bazie  $\mathbf{E}^N$

$$T_{mN} = t_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g^{\beta\beta}}{g_{\alpha\alpha}}} \delta_m^\alpha \delta_N^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{E}^M \cdot \mathbf{T}$  w bazie  $\mathbf{e}_n$

$$T^Mn = t^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g^{\alpha\alpha}}} \delta_\alpha^M \delta_n^\beta,$$

składowe wektora  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_n$  w bazie  $\mathbf{E}^M$

$$T_Mn = t_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g^{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}}} \delta_M^\alpha \delta_n^\beta.$$

Wspomniany wyżej sposób obliczenia składowych fizycznych (i ogólnie reprezentacji fizycznych) zilustrujemy na przykładzie reprezentacji  $T^{mN}$ :

$$\mathbf{T} = T^{mN} \mathbf{e}_m \mathbf{E}_N = t^{\alpha\beta} \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}_\beta = t^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g^{\beta\beta}}} \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \mathfrak{e}_\alpha \sqrt{g^{\beta\beta}} \mathfrak{e}_\beta = t^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g^{\beta\beta}}} \delta_\alpha^m \delta_n^\beta \mathbf{e}_m \mathbf{E}_N.$$

W ten sposób znaleźliśmy wzór (B.17)<sub>5</sub>.

W monografii [8] składowe  $T^m_n$  nazwane są prawymi, a składowe  $T_m^n$  lewymi składowymi fizycznymi.

W przypadku układów ortogonalnych mamy

(B.18) 
$$g_{\alpha\alpha} = \frac{1}{g^{\alpha\alpha}},$$

a więc

(B.19) 
$$\mathbf{e}_m = \delta_{mn} \mathbf{e}^n = \delta_m^M \mathbf{E}_M = \delta_{mN} \mathbf{E}^N.$$

Wówczas wszystkie reprezentacje (B.16) są identyczne, noszą nazwę składowych fizycznych MC CONNELLA i oznacza się je przez  $t \langle mn \rangle$  (por. [7], cytowany Dodatek J. L. ERICKSENA).

## Literatura cytowana w tekście

1. J. RYCHLEWSKI, *Plane flow of perfectly plastic bodies* rozdział VIII pracy zbiorowej «Theory of Plasticity» pod redakcją W. Olszaka, P. Perzyny i A. Sawczuka, (w przygotowaniu do druku).
2. Л. И. Седов, *Введение в механику сплошной среды*, физматгиз, Москва 1962.
3. T. Y. THOMAS, *Interdependence of the yield condition and the stress-strain relations for plastic flow*, Proc. Nat. Ac. Sc. USA, 40 (1954).
4. Encyclopedia of Physics, Vol. VI — *Elasticity and plasticity* — A. M. FREUDENTHAL and H. GEIRINGER — *The mathematical theories of the inelastic continuum*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
5. С. С. Голушкевич, *Статика предельных состояний грунтовых масс*, Гостехиздат, Москва 1957.
6. Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Гостехиздат, Москва 1956.
7. Encyclopedia of Physics, Vol. III/1 — *Principles of classical mechanics and field theory*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.
8. A. C. ERINGEN, *Non-linear Theory of Continuous Media*, Mc Graw-Hill, New York 1962.

## Резюме

ПЛОСКИЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД  
В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ

Используются геометрические свойства неортогональных цилиндрических, криволинейных систем, для описания плоских динамических процессов, а также для анализа общих плоских состояний неоднородных жестко-пластических сред без упрочнения. Основное уравнение составлено в инвариантном виде по отношению изменения параметризации координатной системы. Подбирая координатную систему так, чтобы получить нормальный вид системы уравнений, исследуется тип системы уравнений плоского стационарного квазистатического течения и, в случае гиперболичности, получается самый общий вид зависимостей вдоль характеристик. Показывается затем, как из полученных уравнений вытекают непосредственные зависимости вдоль характеристик для ряда известных плоских состояний пластических сред.

## Summary

PLANE STATES OF PLASTIC MEDIA IN NON-ORTHOGONAL  
CURVILINEAR COORDINATES

The geometrical properties of non-orthogonal cylindrical curvilinear systems are used to describe plane dynamic processes and analyse general plane states of non-homogeneous rigid-plastic media without strain-hardening. The fundamental equations are expressed in a form invariant with respect to the change of the parametrization of the coordinate systems. By selecting the latter to obtain the equations in their normal form, the type of the equations set of steady, quasi-static plane flow is analysed and, in the case of the hyperbolic system, the most general form of the relations along the characteristic curves is obtained. Then, it is shown, how the relations along characteristics for the well-known cases of plane states of plastic media fallow directly from the equations obtained.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 marca 1967 r.